Cindy 的数理统计知识点 Cheat Sheet

我觉得这个更像是你知道了题目是考什么分布之后，用来找到计算公式的小册子哦😄￣

概率论和数理统计

随机事件和概率

1.事件的关系与运算

(1) 子事件：$A \subset B$，若A发生，则B发生。

(2) 相等事件：$A = B$，即$A \subset B$，且$B \subset A$ 。

(3) 和事件：$A \cup B$（或$A + B$），A与B中至少有一个发生。

(4) 差事件：$A - B$，A发生但B不发生。

(5) 积事件：$A \cap B$（或AB），A与B同时发生。

(6) 互斥事件（互不相容）：$A \cap B$=∅。

(7) 互逆事件（对立事件）： $A \cap B = \varnothing, A \cup B = \Omega, A = \overline{B}, B = \overline{A}$ 。

2.运算律

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$； $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

3.德.摩根律

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

4.完全事件组

$A_1 A_2 \cdots A_n$两两互斥，且和事件为必然事件，即$A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j, \bigcup_{i=1}^{n} = \Omega$

5.概率的基本概念

(1) 概率：事件发生的可能性大小的度量，其严格定义如下：

概率$P(g)$为定义在事件集合上的满足下面 3 个条件的函数：

1)对任何事件A，$P(A) \geq 0$

2)对必然事件Ω，$P(\Omega) = 1$

3)对$A_1A_2 \cdots A_n, \cdots$ ，若$A_iA_j = \varnothing(i \neq j)$，则：$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A)$.

(2) 概率的基本性质

1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

2) $P(A - B) = P(A) - P(AB)$;

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 特别，当$B \subset A$时，$P(A - B) = P(A) - P(B)$且$P(B) \leq P(A)$；　$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$

4) 若$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两互斥，则$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n}(P(A_i)$

(3) 古典型概率：实验的所有结果只有有限个， 且每个结果发生的可能性相同，其概率计算公式： $P(A) = \frac{\text{事件}A\text{发生的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$

(4) 几何型概率：样本空间Ω为欧氏空间中的一个区域， 且每个样本点的出现具有等可能性，其概率计算公式：$P(A) = \frac{A\text{的度量(长度、面积、体积)}}{\Omega\text{的度量(长度、面积、体积)}}$

6.概率的基本公式

(1) 条件概率： $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$,表示A发生的条件下，B发生的概率

(2) 全概率公式： $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i), B_iB_j = \varnothing, i \neq j, \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega.$

(3) Bayes 公式：

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}, j = 1,2, \cdots, n$$

注：上述公式中事件B_i的个数可为可列个.

(4)乘法公式： $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=P(A_2)P(A_1|A_2)$ $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

7.事件的独立性

(1) A 与 B 相互独立$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

(2) A，B，C 两两独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B); P(BC)=P(B)P(C);$ $P(AC)=P(A)P(C);$

(3) A，B，C 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B);$ $P(BC)=P(B)P(C);$ $P(AC)=P(A)P(C);$ $P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$

8.独立重复试验

将某试验独立重复 n 次，若每次实验中事件 A 发生的概率为 p，则 n 次试验中 A 发生 k 次的概率为： $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ 。

9.重要公式与结论

(1) $P(\overline{A})=1-P(A)$

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

(3) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

(4) $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB), P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$, $P(A\cup B)=P(A)+P(\overline{A}B)=P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$

(5) 条件概率$P(\cdot|B)$满足概率的所有性质，

例如：. $P(\overline{A}_1|B)=1-P(A_1|B)$ $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$ $P(A_1A_2|B)=P(A_1|B)P(A_2|A_1B)$

(6) 若$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立，则$P(\bigcap_{i=1}^n A_i)=\prod_{i=1}^n P(A_i)$, $P(\bigcup_{i=1}^n A_i)=\prod_{i=1}^n(1-P(A_i))$

(7) 互斥、互逆与独立性之间的关系： A 与 B 互逆$\Rightarrow$A 与 B 互斥，但反之不成立，A 与 B 互 斥（或互逆）且均非零概率事件$\Rightarrow$A 与 B 不独立.

(8) 若$A_1,A_2,\cdots,A_m,B_1,B_2,\cdots,B_n$相互独立，则$f(A_1,A_2,\cdots,A_m)$与 $g(B_1,B_2,\cdots,B_n)$也相互独立，其中$f(\cdot),g(\cdot)$分别表示对相应事件做任意事件运算后所得的事件，另外，概率为 1（或 0）的事件与任何事件相互独立.

随机变量及其概率分布

1. 随机变量及概率分布

取值带有随机性的变量，严格地说是定义在样本空间上，取值于实数的函数称为随机变量，概率分布通常指分布函数或分布律

2. 分布函数的概念与性质

定义： $F(x)=P(X\le x),-\infty<x<+\infty$

性质：(1) $0\le F(x)\le 1$　　(2) $F(x)$单调不减

(3) 右连续$F(x+0)=F(x)$　　(4) $F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$

3. 离散型随机变量的概率分布

$P(X=x_i)=p_i,i=1,2,\cdots,n,\cdots$　　$p_i\ge 0,\sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$

4. 连续型随机变量的概率密度

概率密度$f(x)$;非负可积，且:(1) $f(x)\ge 0$, (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ (3) x为$f(x)$的连续点，则:

$f(x)=F'(x)$分布函数$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

5. 常见分布

(1) 0-1 分布:$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1$

(2) 二项分布:$B(n,p)$： $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n$

(3) Poisson 分布:$p(\lambda)$： $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\lambda>0,k=0,1,2\cdots$

(4) 均匀分布$U(a,b)$：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a},a<x<b\\0,\end{cases}$

(5) 正态分布:$N(\mu,\sigma^2)$: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\sigma>0,-\infty<x<+\infty$

(6)指数分布:$E(\lambda)$:$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x},x>0,\lambda>0\\0,\end{cases}$

(7)几何分布:$G(p)$:$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,0<p<1,k=1,2,\cdots.$

(8)超几何分布: $H(N,M,n)$:$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},k=0,1,\cdots,\min(n,M)$

6. 随机变量函数的概率分布

(1)离散型:$P(X=x_1)=p_i,Y=g(X)$

则: $P(Y=y_j)=\sum_{g(x_i)=y_i}P(X=x_i)$

(2)连续型:$X\tilde{}\ f_X(x),Y=g(x)$

则:$F_y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=\int_{g(x)\le y}f_x(x)dx$, $f_Y(y)=F'_Y(y)$

7. 重要公式与结论

(1) $X\sim N(0,1)\Rightarrow\varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\Phi(0)=\frac{1}{2},\ \Phi(-a)=P(X\le -a)=1-\Phi(a)$

(2) $X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1),P(X\le a)=\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

(3) $X\sim E(\lambda)\Rightarrow P(X>s+t|X>s)=P(X>t)$

(4) $X\sim G(p)\Rightarrow P(X=m+k|X>m)=P(X=k)$

(5) 离散型随机变量的分布函数为阶梯间断函数;连续型随机变量的分布函数为连续函数,但不一定为处处可导函数。

(6) 存在既非离散也非连续型随机变量。

多维随机变量及其分布

1. 二维随机变量及其联合分布

由两个随机变量构成的随机向量(X,Y), 联合分布为$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$

2.二维离散型随机变量的分布

(1) 联合概率分布律 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}; i,j=1,2,\cdots$

(2) 边缘分布律 $p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$, $i=1,2,\cdots$ $p_{\cdot j}=\sum_{i}^{\infty} p_{ij}$, $j=1,2,\cdots$

(3) 条件分布律 $P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ $P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$

3. 二维连续性随机变量的密度

(1) 联合概率密度$f(x,y)$:

1) $f(x,y)\geq 0$ 2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

(2) 分布函数：$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$

(3) 边缘概率密度： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$ $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

(4) 条件概率密度：$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

4.常见二维随机变量的联合分布

(1) 二维均匀分布：$(x,y)\sim U(D)$, $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{S(D)},(x,y)\in D \\ 0, \text{其他} \end{cases}$

(2) 二维正态分布：$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}.\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

5.随机变量的独立性和相关性

X和Y的相互独立:$\Leftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$:

$\Leftrightarrow p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$（离散型） $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$（连续型）

X和Y的相关性：

相关系数$\rho_{XY}=0$时，称X和Y不相关， 否则称X和Y相关

6. 两个随机变量简单函数的概率分布

离散型： $P(X=x_i,Y=y_i)=p_{ij},Z=g(X,Y)$ 则：

$P(Z=z_k)=P\{g(X,Y)=z_k\}=\sum_{g(x_i,y_i)=z_k}P\left(X=x_i,Y=y_j\right)$

连续型： $(X,Y)\sim f(x,y),Z=g(X,Y)$ 则：

$F_z(z)=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy$，$f_z(z)=F'_z(z)$

7. 重要公式与结论

（1）边缘密度公式： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

（2）$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy$

（3）若(X,Y)服从二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 则有：

1）$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

2）X与Y相互独立$\Leftrightarrow\rho=0$，即X与Y不相关。

3）$C_1X+C_2Y\sim N(C_1\mu_1+C_2\mu_2,C_1^2\sigma_1^2+C_2^2\sigma_2^2+2C_1C_2\sigma_1\sigma_2\rho)$

4） X关于 Y=y 的条件分布为： $N(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2))$

5）Y关于$X=x$的条件分布为： $N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2))$

（4）若X与Y独立，且分别服从$N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_1,\sigma_2^2)$，则：

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0)$，$C_1X+C_2Y\tilde{}\ N(C_1\mu_1+C_2\mu_2,C_1^2\sigma_1^2+C_2^2\sigma_2^2)$.

（5）若X与Y相互独立，$f(x)$和$g(x)$为连续函数， 则$f(X)$和$g(Y)$也相互独立。

随机变量的数字特征

1. 数学期望

离散型：$P\{X=x_i\}=p_i,E(X)=\sum_i x_ip_i$；

连续型： $X\sim f(x),E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

性质：

（1） $E(C)=C,E[E(X)]=E(X)$

（2） $E(C_1X+C_2Y)=C_1E(X)+C_2E(Y)$

（3） 若 X 和 Y 独立，则$E(XY)=E(X)E(Y)$ （4）$[E(XY)]^2\le E(X^2)E(Y^2)$

2. 方差：$D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2$

3. 标准差：$\sqrt{D(X)}$，

4. 离散型：$D(X)=\sum_i[x_i-E(X)]^2p_i$

5. 连续型：$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)dx$

性质：

（1） $D(C)=0,D[E(X)]=0,D[D(X)]=0$

（2） X与Y相互独立，则$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

（3） $D(C_1X+C_2)=C_1^2D(X)$

（4） 一般有 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\rho\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$

（5） $D(X)<E(X-C)^2,C\ne E(X)$

（6） $D(X)=0\Leftrightarrow P\{X=C\}=1$

6. 随机变量函数的数学期望

（1） 对于函数$Y=g(x)$

X为离散型：$P\{X=x_i\}=p_i,E(Y)=\sum_i g(x_i)p_i$；

X为连续型：$X\sim f(x),E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$

（2）$Z = g(X,Y)$；$(X,Y) \sim P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$；$E(Z) = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$

$(X,Y) \sim f(x,y)$；$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y) dxdy$

7. 协方差 $Cov(X,Y) = E[(X - E(X)(Y - E(Y))]$

8. 相关系数 $\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$, k阶原点矩 $E(X^k)$；k阶中心矩 $E\{[X - E(X)]^k\}$

性质：

（1）$Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

（2）$Cov(aX,bY) = abCov(Y,X)$

（3）$Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$

（4）$|\rho(X,Y)| \leq 1$

（5）$\rho(X,Y) = 1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1$ ，其中$a > 0$

$\rho(X,Y) = -1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1$ ，其中$a < 0$

9. 重要公式与结论

（1）$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$

（2）$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

（3）$|\rho(X,Y)| \leq 1$,且 $\rho(X,Y) = 1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1$，其中$a > 0$

$\rho(X,Y) = -1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1$，其中$a < 0$

（4）下面 5 个条件互为充要条件：

$\rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow Cov(X,Y) = 0 \Leftrightarrow E(X,Y) = E(X)E(Y) \Leftrightarrow D(X + Y) = D(X) + D(Y) \Leftrightarrow$
$D(X - Y) = D(X) + D(Y)$

注：X与Y独立为上述 5 个条件中任何一个成立的充分条件，但非必要条件。

数理统计的基本概念

1. 基本概念

总体：研究对象的全体，它是一个随机变量，用X表示。

个体：组成总体的每个基本元素。

简单随机样本：来自总体X的n个相互独立且与总体同分布的随机变量$X_1, X_2 \cdots, X_n$，称为容量为n的简单随机样本，简称样本。

统计量：设$X_1, X_2 \cdots, X_n$,是来自总体X的一个样本，$g(X_1, X_2 \cdots, X_n)$）是样本的连续函数，且$g(\cdot)$中不含任何未知参数，则称$g(X_1, X_2 \cdots, X_n)$为统计量

样本均值：$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

样本矩：样本k阶原点矩：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, k = 1,2,\cdots$

样本k阶中心矩：$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k, k = 1,2,\cdots$

2. 分布

χ^2分布：$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$，其中$X_1, X_2 \cdots, X_n$,相互独立，且同服从$N(0,1)$

t分布：$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$ ，其中$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$,且$X$，$Y$ 相互独立。

F 分布：$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$，其中$X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$,且$X$，$Y$相互独立。

分位数：若$P(X \le x_\alpha) = \alpha$,则称$x_\alpha$为$X$的$\alpha$分位数

3. 正态总体的常用样本分布

（1）设$X_1, X_2 \cdots, X_n$为来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$,则：

1）$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ 或者$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

2）$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$

3）$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$

4）$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

4. 重要公式与结论

（1）对于$\chi^2\sim\chi^2(n)$，有$E(\chi^2(n))=n,D(\chi^2(n))=2n;$

（2）对于$T\sim t(n)$，有$E(T)=0,D(T)=\frac{n}{n-2}(n>2)$；

（3）对于$F\tilde{}\ F(m,n)$，有 $\frac{1}{F}\sim F(n,m),F_{a/2}(m,n)=\frac{1}{F_{1-a/2}(n,m)};$

（4）对于任意总体X，有 $E(\overline{X})=E(X),E(S^2)=D(X),D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}$