CALMET Mickaël
CASSAR Craig

3E AE FISA

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Commande des Systèmes Linéaires – TP : Compte-rendu

FISA AE 3E

2023-2024

Table des matières

Préambule

Nous tenions à nous excuser pour le retard du rapport. La date prévu du dépôt était prévue pour le dimanche 1er décembre.

Mais étant donné que nous avions perdu tout le TP1 (par des problèmes de sauvegarde) et que nous avions à peine commencer le TP2, nous avons jugé préférable de rendre le rapport plus tard mais plus complet, même si cela implique de recevoir des pénalités pour le retard.

Nous tenions également à indiquer que nous avons eu beaucoup de mal sur la partie Simulink du TP3, qui a été notre premier TP chronologiquement. (*Avec le cours associé en retard sur le TP)*

Et que le TP1 et 2 ont dû être fait en 1 séance, ce qui explique qu'ils soient incomplets. Nous avons fait notre possible pour les compléter le plus possible.

Nous nous excusons une nouvelle fois pour le retard, d'autant plus s'il a gêné votre travail de correction.

TP 1 – Modélisation d'un moteur à courant continu

1. Contexte

Ce tp nous propose de manipuler et de modéliser un système électromécanique à partir d'une analyse temporelle et fréquentielle. Pour cela, nous devrons, à partir de la fonction de transfert donné, déterminer les paramètres **K_m, T_m** (propre au moteur), **K_s et K_g** (respectivement, propres au potentiomètre et à la génératrice).

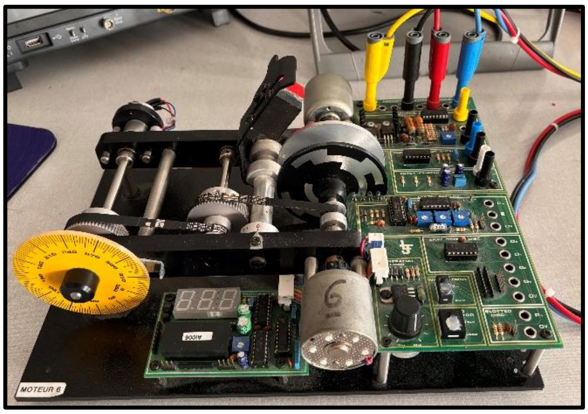


Figure 2 : Photo de la maquette utilisée (TP1)

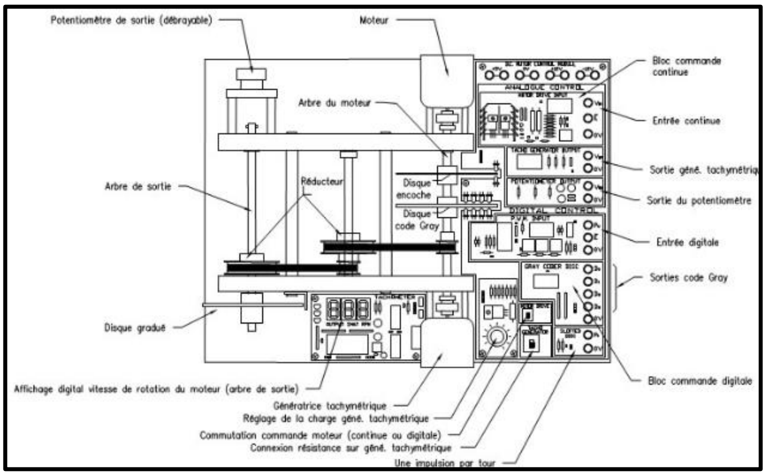
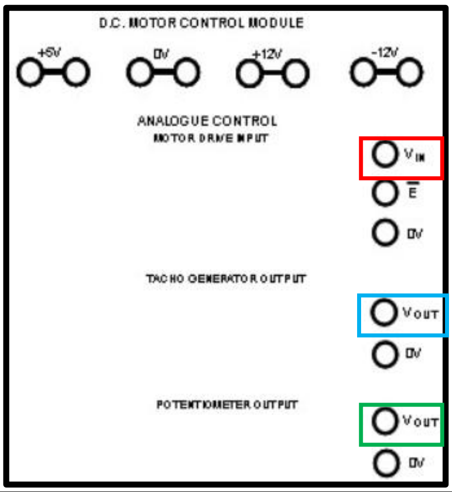


Figure 1 : Description de la maquette (TP1)

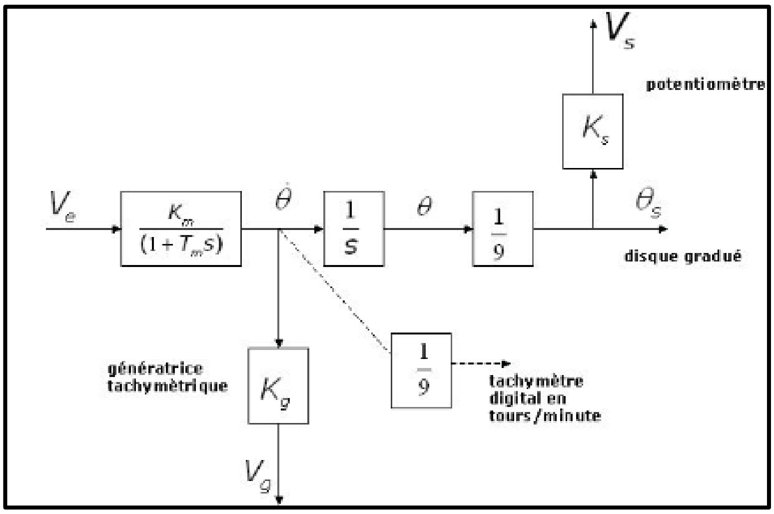
Le TP nous donne aussi :

Le système est composé d'un moteur électrique à courant continu ayant une vitesse maximale de 3000 tr.min−1. L'arbre de sortie est entraîné par l'intermédiaire d'un réducteur mécanique à poulies et courroies crantées, de rapport 1/9. Ce moteur peut être commandé de manière analogique par une tension continue, ou de manière numérique par l'application d'un train d'impulsions. Nous n'utiliserons dans cette manipulation que la commande continue, pour laquelle les entrées et sorties sont précisées ci-dessous :

- La **commande** se fait par application d'une **tension continue Ve** sur la borne **VIN**.
- Un **potentiomètre** (POTENTIOMETER OUTPUT) à rotation continue monté sur l'arbre de sortie, délivre sur sa borne VOU T une **tension Vs** fonction de la **position angulaire θ** de cet arbre.
- Une **génératrice tachymétrique** (TACHO GENERATOR OUTPUT), directement montée sur l'arbre moteur délivre sur sa borne **VOUT** une tension **Vg proportionnelle à la vitesse angulaire θ'**.



Les différents capteurs permettant de mesurer un certain nombre de grandeurs sur la platine sont représentés sur le schéma fonctionnel suivant :



La fonction de transfert du système nous est donnée :

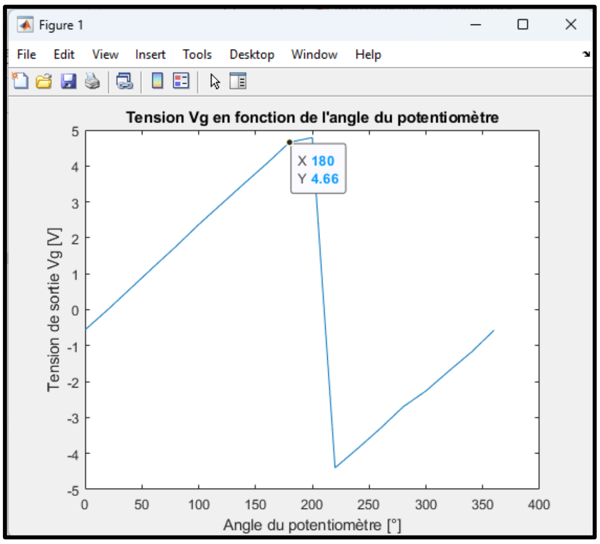
$$\frac{\boldsymbol{\theta}(s)}{V_e(s)} = \frac{K_m}{s(1+T_m s)}$$

2. Identification des paramètres K_s et K_g

2.1. Identification de Ks, propre au potentiomètre :

Indication du TP : obtenable par la comparaison de V_s et de l'angle du disque gradué.

Nous observons, en faisant varier l'angle du disque gradué :



Nous extrayons alors de nos relevés la valeur de **K_s** :

Ks étant le coefficient directeur,

$$K_s = \frac{4.66-(-0.5)}{180-0} \Leftrightarrow \boldsymbol{K_s = 0.0287}$$

Nous utilisons aussi la fonction **polyfit** de Matlab :

```
P_Vg = polyfit(teta_deg_tronc, Vg_out_tronc, 1);
```

P_Vg [0.0291 -0.5651]

Nous obtenons alors 2 résultats similaires.

Résultant alors une probabilité d'erreur réduite, assurant nos résultats.

2.2. Identification de **Kg**, propre à la génératrice :

*Indication du TP : obtenable via le relevé de (Θ', Vg), en Volts*s/rad.*

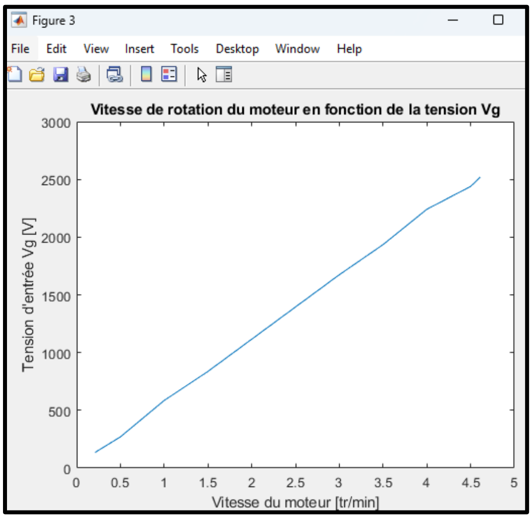
Avec la même méthodologie de détermination de Kg que pour que Ks, nous obtenons :

Sauf que la

$$K_g = 0.0165\ V * s\ /rad$$

```
Vg_in = [0.21, 0.5,
Rpm   = [15   ; 30 ;
% tracé de la courb
figure
plot(Vg_in, 9*Rpm);
```

P_Rpm	[0.0165,-0.0420]



3. Identification du moteur dans le domaine temporel

Nous allons relever la réponse indicielle du système (échelon de 3V). Nous pourrons alors identifier les caractéristiques de sa fonction de transfert :

Echelon crée via un signal carré de 6V$_{c-c}$, fréquence de 0.25mHz. Valeurs choisies pour observer, sur une demi-période du signal carré, avec 3V demandés.

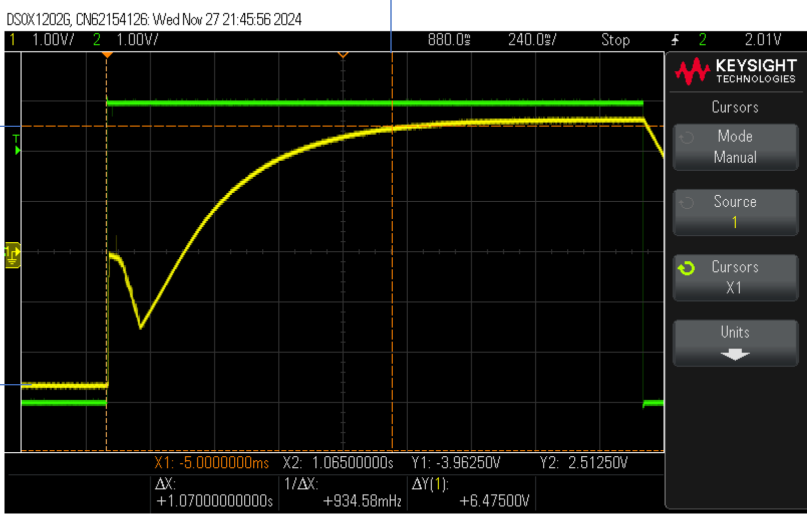
- K_m = (2.65/3) / Km = **53.53 V/rad*s**
- **T_m = 3τ = 0.97/3 = 0.32s**

T = 3τ

95% de la valeur finale

T = 3τ

0% de la valeur finale



4. Identification du moteur dans le domaine fréquentiel

Multiples mesures à l'oscillo -> gain (Vs/Ve) + phase (deltaT) @ 0 < f < 20Hz >> bode ou Black
Ve = sin w variant

- **K_m = …**
- **T_m = …**

Si nous avions eu plus de temps, nous aurions pu faire cette partie fréquentielle. Pour cela nous aurions pu utiliser 2 méthodes (plus longues mais plus précises qu'en temporel) :

- *Soit 5 points pour tracer le diagramme de Bode asymptotique et y lire les informations*
- *Soit 2 points* @ f=BF (Km) & @ f=fc (Tm)*

**Qui sont 2 des points du Bode traçable avec la méthode précédente mais uniquement les points nous intéressant.*

5. Conclusion

Durant ce TP nous avons pu mesurer expérimentalement les différents coefficients caractérisant un système complexe.

Nous savons (cf cours d'électronique analogique), et aurions pu observer, que la réponse fréquentielle permet d'être plus précise que la temporel pour l'identification des paramètres intrinsèques d'un système.

A noter aussi, que la maquette nous permet de faire des mesures à différents points, ce qui ne sera peut-être pas toujours le cas pour les systèmes avec lesquels nous devrons travailler à l'avenir.

TP 2 – Commande d'un moteur à courant continu

1. But de la manipulation

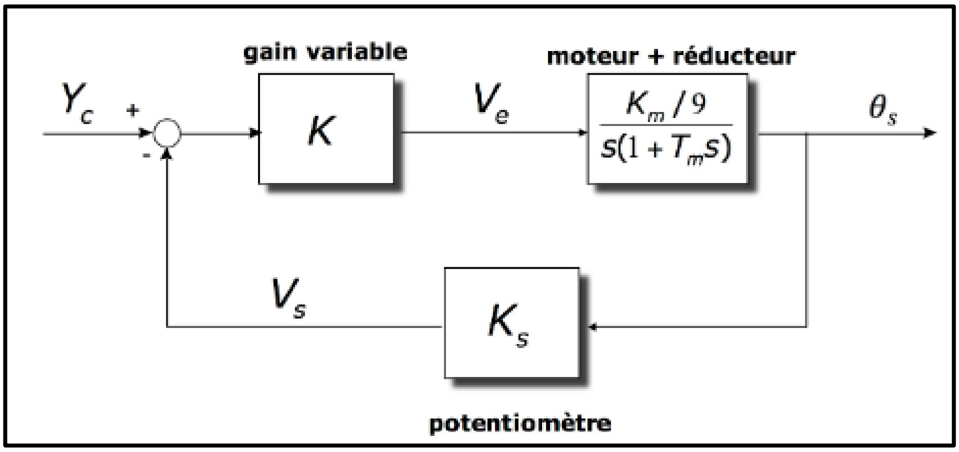
Le but de cette manipulation est de **calculer des lois de commande** permettant d'asservir la **position de l'arbre moteur**.

- La première approche consistera à déterminer des correcteurs proportionnel et proportionnel dérivé, sur la base de l'analyse fréquentielle, en utilisant la notion de marge de phase et des outils simples comme l'abaque de Black
- La deuxième approche consistera à calculer une loi de commande en utilisant une technique de placement de pôles par retour d'état

Cette manipulation doit obligatoirement être précédée de la manipulation 1 qui fournit les courbes de réponses et modèles du système à commander.

2. Calcul d'un correcteur Proportionnel

Nous nous intéressons au système suivant :



2.1. Calcul de la marge de Phase – pour K = 1

Avec les valeurs du TP1, rappelées ci-dessous, et K = 1, nous obtenons :

$$K_m = 52.52V/rad * s \; et \; T_m = 0.32s$$

$$M_{\varphi°} = \boldsymbol{infini \; car - 180° \; non \; atteint} \; (voir \; le \; diagramme \; de \; Bode \; ci - dessous)$$

Mesure :

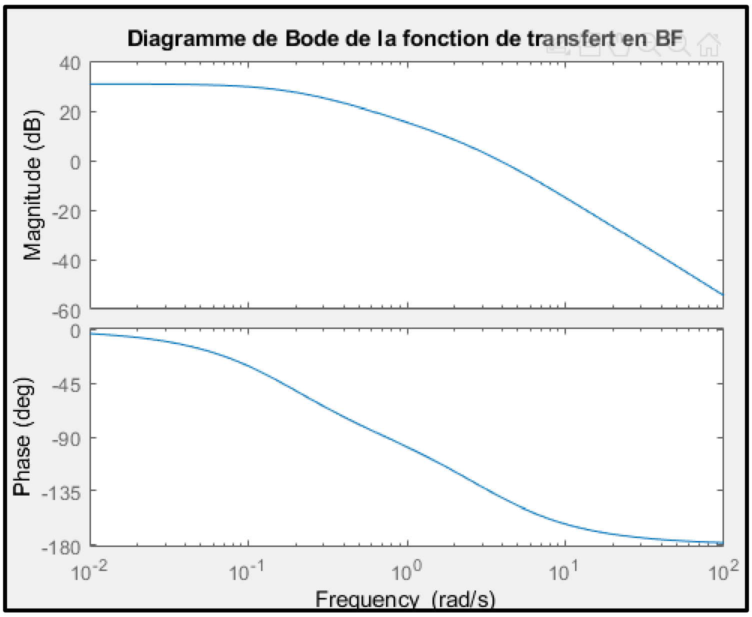
La marge de phase d'un système asservi est donnée par la formule :

$$\Delta\phi = \pi + argG(j\omega_{0dB})$$

où ω_{0dB} est la pulsation pour laquelle la FTBO $G(j\omega)$ a un gain unitaire (0 en décibel).

```
% Fonction de transfert du système du TP2 en BF
sysTP2_BF = tf([K*Km],[Tm 1 Km*Ks*K]);        %
sysTP2_BF_cann = tf([K*Km/Tm],[Tm/Tm 1/Tm Km*Ks*K/Tm]);
[GainM, PhaseM, WcGain, WcPhase] = margin(sysTP2_BF_cann);
```

GainM	Inf
K	1
Kg	0.0165
Km	5.9478
Ks	0.0291
Mp	Inf



2.2. Calcul de K pour une marge de Phase égale à 45°

2.3. Déduction des résultats précédents de l'amortissement, les pôles et la valeur du premier dépassement de la réponse indicielle du système en boucle fermée

- Amortissement :
- Pôles *(partie réelle négative)* : **-2.94 et -0.184** *(avec Matlab)*
- Premier dépassement :

```
%Q2.3 :
P = pole(sysTP2_BF_cann);
```

P	[-2.9411;-0.1839]

Identification à partir de : $\boldsymbol{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$

$$\zeta = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T_m}} \times \frac{\boldsymbol{w_n}}{\mathbf{2}} = \cdots$$

$$D = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta\pi}}} = e^{-\frac{0.7\pi}{\sqrt{1-0.7\pi}}} = \cdots$$

Identification impossible avec le système du moteur : pas de terme en s^0

2.4. Calcul de l'erreur de trainage

En pratique, on utilise la transformée de Laplace :

$$\hat{\varepsilon}(s) = \hat{r}(s) - \hat{y}(s) = \left(1 - F(s)\right)\hat{r}(s)$$

où $F(s) = \dfrac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$ est la fonction de transfert en boucle fermée.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 1 - \frac{\left(\frac{Km}{9}\right)K}{s + Tm * s^2 + \left(\frac{Km}{9}\right)K * Ks} = \frac{\left(\frac{Km}{9}\right)K}{s + Tm * s^2 + \left(\frac{Km}{9}\right)K * Ks}$$

$$= s\left(\frac{s + Tm * s^2 + \left(\frac{Km}{9}\right)K * Ks}{s + Tm * s^2 + \left(\frac{Km}{9}\right)K * Ks} - \frac{\left(\frac{Km}{9}\right)K}{s + Tm * s^2 + \left(\frac{Km}{9}\right)K * Ks}\right) * \frac{Ue}{s^2}$$

$$= \left(\frac{s + Tm * s^2 + \left(\frac{Km}{9}\right)K * Ks - \left(\frac{Km}{9}\right)K}{s + Tm * s^2 + \left(\frac{Km}{9}\right)K * Ks}\right) * \frac{Ue}{s}$$

$$= \left(\frac{s(1 + Tm * s + \frac{\left(\frac{Km}{9}\right)K * Ks - \left(\frac{Km}{9}\right)K}{s})}{s\left(1 + Tm * s + \frac{\left(\frac{Km}{9}\right)K * Ks - \left(\frac{Km}{9}\right)K}{s}\right)}\right) * \frac{Ue}{s}$$

$$= \frac{s(1 + Tm * s + \frac{\left(\frac{Km}{9}\right)K * Ks - \left(\frac{Km}{9}\right)K}{s})}{s(1 + Tm * s + \frac{\left(\frac{Km}{9}\right)K * Ks - \left(\frac{Km}{9}\right)K}{s})} * \frac{Ue}{s}$$

$$= \frac{1 + Tm * s + \frac{\left(\frac{Km}{9}\right)K * Ks - \left(\frac{Km}{9}\right)K}{s}}{s(1 + Tm * s + \frac{\left(\frac{Km}{9}\right)K * Ks - \left(\frac{Km}{9}\right)K}{s})} * Ue = \mathbf{0}$$

Nous avons une **erreur de trainage nulle.**

3. Calcul d'une commande par retour d'état – avec aide & formules du TP

Calcul des pôles

Les spécifications imposées sont :

- **Système du 2nd ordre (2pôles dominants)**
- **Dépassement < 5%**
- **$T_{r\ 2\%}$ < 0.8s**

Ce qui implique :

$$\zeta = 0.7 \quad \& \quad \omega_n = \frac{4.5}{T_r} = 5.625\, rad/s$$

On a comme équation caractéristique :

$$s^2 + \frac{1 + k_2 K_m K g}{T_m} s + \frac{1 + k_1 K_m K s}{T 9_m}$$

Le polynôme caractéristique :

$$s^2 + 2\zeta w_n s + {w_n}^2$$

Notre objectif est de déterminer K1 et K2.

Par identification nous avons :

$$2\zeta w_n = \frac{1 + k_2 K_m K g}{T_m}$$

$$w_n^2 = \frac{1 + k_1 K_m K s}{T 9_m}$$

En arrangeant l'équation, nous avons donc :

$$\frac{2\zeta w_n T_m - 1}{K_m K g} = k_2$$

$$\frac{{w_n}^2 9 T_m - 1}{K_m K s} = k_1$$

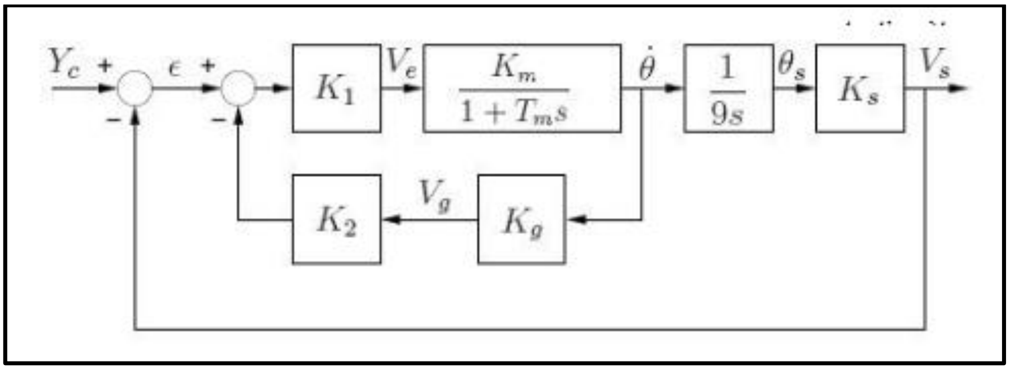
Application numérique :

- **k1 = 104**
- **k2 = 0.994**

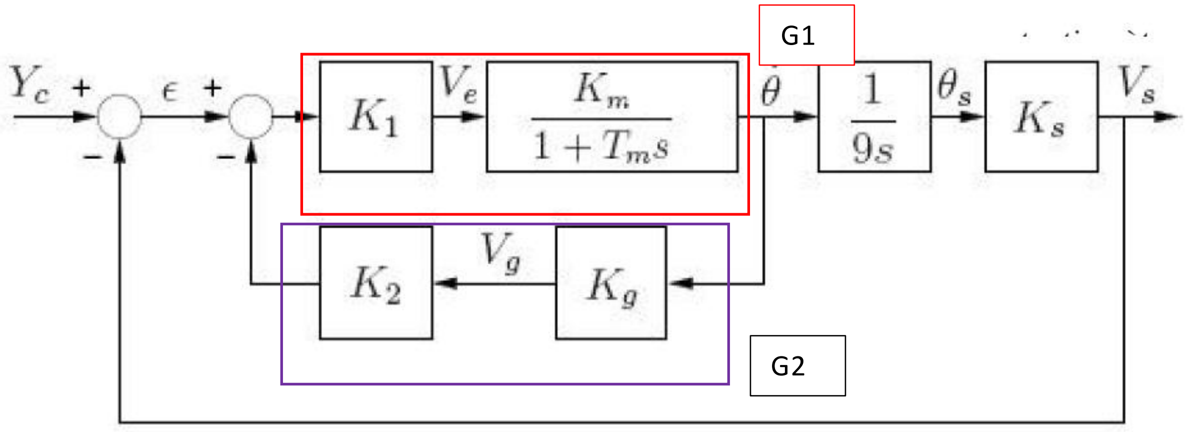
Exemple de loi de commande avec retour d'état en TP3.

4. Calcul d'un correcteur Proportionnel Dérivé

Nous nous intéressons maintenant au système avec une loi de commande, soit :



4.1. Calcul de la fonction de transfert en boucle ouverte



$$F_1(s) = \frac{G_1}{1+G_1G_2} = \frac{\frac{K1Km}{1+tms}}{1+\frac{K2KgK1Km}{1+Tms}} = \frac{K1Km}{1+Tms+K2KmKgK1}$$

La fonction de transfert en Boucle ouverte est la suivante :

$$F(s) = \frac{K1KmKs}{Tms+1+K2KmKgK1} * \frac{1}{9s}$$

Fonction de transfert obtenu sur Matlab :

```
FTbo =

      7.927
  --------------
  2.88 s + 40.15
```

4.2. Calcul de la matrice K pour : $M_{\varphi} = 45°$ & $\varepsilon_{trainage}$ 2x plus petite

4.3. Calcul de la fonction de transfert en boucle fermée

$$F_{BF}(s) = \frac{F_{BO}}{1 + F_{BO}} = \frac{\frac{K1KmKs}{1 + Tms + K2KmKgK1} * \frac{1}{9s}}{1 + \frac{K1KmKs}{1 + Tms + K2KmKgK1} * \frac{1}{9s}}$$

$$\boldsymbol{F_{BF}(s) = \frac{K1KmKs}{9Tm * s^2 + (9K2KmKgK1 + 9) * s + K1KmKs}}$$

Fonction de transfert obtenu sur Matlab :

```
FTbf =

      22.83 s + 318.3
  --------------------------
  8.294 s^2 + 254.1 s + 1930
```

4.4. Calcul de l'amortissement, les pôles et la valeur du premier dépassement de la réponse indicielle du système en boucle fermée

- Amortissement : **0.7** *(selon le cahier des charges : <5% de dépassement)*
- Pôles : **-16.69 et -13.94**
- Premier dépassement : **0.046**

$$D = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta\pi}}} = e^{-\frac{0.7\pi}{\sqrt{1-0.7\pi}}} = \mathbf{0.046}$$

```
% Q4.4 :
K1 = 45.8;
K2 = 0.77;
FTbo = tf([K1*Km*Ks], [Tm*9 K2*Km*Kg*K1*9+9]);
FTbf = FTbo / (1 + FTbo);
Pbf  = pole(FTbf);
```

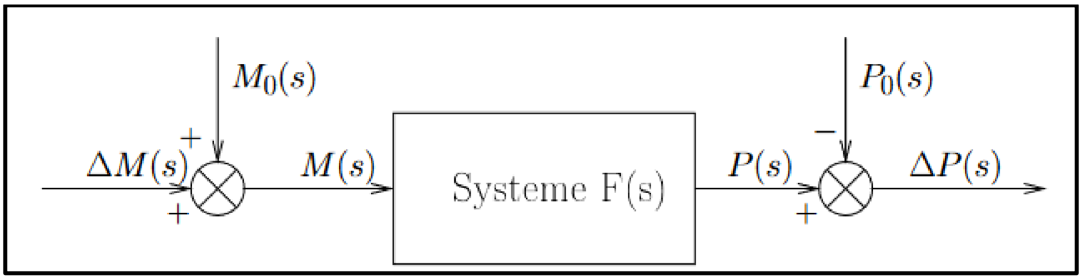
```
Pbf    [-16.6929;-13.9405]
```

TP 3 – Régulation de pression d'air : commande par retour d'état

1. Contexte & données

Le but du TP est la régulation de pression de l'air dans un tube. Nous contrôlerons le débit d'air à travers la vitesse du ventilateur. La maquette permet aussi de commander la température de l'air, ici, nous garderons une consigne constante de 1V (10% de 10V).

Le modèle et la fonction de transfert, linéarisé autour d'un point de fonctionnement, de la maquette nous sont donnés :



$$F(s) = \frac{\Delta P(s)}{\Delta M(s)} = \frac{K}{1 + 0.6323s + 0.1001s^2}$$

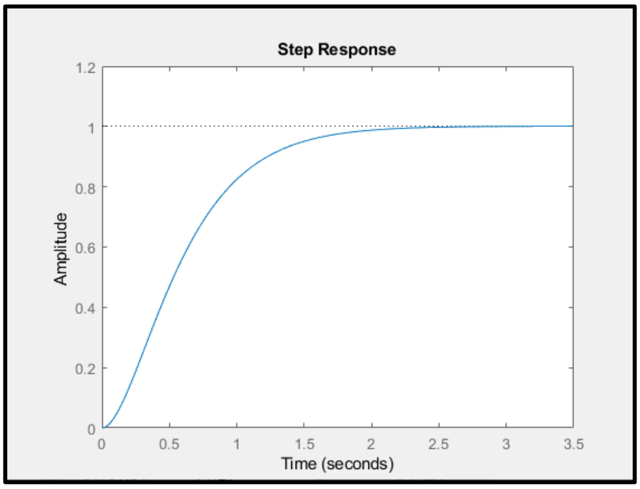
Nous prendrons arbitrairement **K = 1**.

2. Test de la validité du modèle donné

Nous commençons par vérifier la validité du modèle approché donnée. Pour cela, nous allons comparer la réponse du système réel et celui de notre modèle approché à un échelon, avec Simulink. Il nous est alors demandé de suivre différents protocole et situation de test.

Par manque de temps, nous supposons le modèle valide.

Réponse indicielle du système en boucle ouverte :



Pôles du système en boucle ouverte :

```
ans =

  -3.1600 + 0.0663i
  -3.1600 - 0.0663i
```

3. Conception de modèles d'état répondant à des cahiers des charges

Nous cherchons la représentation d'état du système correspondant à la forme compagne de commandabilité.

Et cela afin de, par la suite, pouvoir facilement identifier la commande permettant à appliquer à notre système pour obtenir le comportement désiré *(cf Cahier des charges n°x)*, notamment pour le changement de pôles.

Nous cherchons F(s) de la forme :

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{K}{a_0 + a_1 s + 1 s^2}}$$

Or, nous avons :

$$F(s) = \frac{K}{1 + 0.6323s + 0.1001s^2}$$

$$\Leftrightarrow F(s) = \frac{K \times \frac{1}{0.1001}}{(1 + 0.6323s + 0.1001s^2) \times \frac{1}{0.1001}} \Leftrightarrow \boldsymbol{F(s) \approx \frac{\frac{K}{0.1001}}{(9.99 + 6.32s + 1s^2)}}$$

La fonction de transfert sous cette forme nous permet de déterminer le modèle d'état du système :

$$\boldsymbol{\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}}$$

Nous identifions alors les matrices suivantes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.99 & -6.32 \end{bmatrix}} \qquad \boldsymbol{B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\begin{bmatrix} \frac{K}{0.1001} & 0 \end{bmatrix}} \qquad \boldsymbol{D = 0}$$

Nous allons maintenant pouvoir chercher une loi de commande permettant à notre système de répondre aux spécifications données *(Cahiers des charges)*.

Concrètement, nous posons : $\boldsymbol{u = -Lx + l_c y_c \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = (A - BL)x + Bl_c y_c \\ y = Cx + Du \end{cases}}$

Et cherchons ensuite la matrice L et la valeur l_c.

3.1. Cahier des charges n°1

- Dépassement inférieur à **5%**
- Temps de réponse à 5% de **2sec**

Ce qui implique (pour un système du 2nd ordre) :

$$\zeta = 0.7 \quad \& \quad \omega_n = \frac{4.5}{T_r} = 2.25$$

$$\alpha_0 = \omega_n{}^2 = 5.06$$

$$\alpha_1 = 2\zeta\omega_n = 3.15$$

Notre représentation d'état répondant au Cahier des charges devient alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} l_c y_c \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

En posant $u = -Lx + l_c y_c$ et obtenant $\begin{cases} \dot{x} = (A - BL)x + Bl_c y_c \\ y = Cx \end{cases}$, nous cherchons à déterminer la matrice **L = [l_0 l_1]** tel que :

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

Calcul du polynôme caractéristique de A – BL :

$$P(s) = \det(s\mathbb{I} - (A - BL)) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_0 & l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 + l0 & s + a_1 + l1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P}(s) = (a_0 + l0) + (a_1 + l1)s + s^2$$

Nous obtenons par identification :

$$\alpha_0 = a_0 + l_0 \Leftrightarrow l_0 = \alpha_0 - a_0 \Leftrightarrow l_0 = 5.06 - 9.99 = 4.93$$

$$\alpha_1 = a_1 + l_1 \Leftrightarrow l_1 = \alpha_1 - a_1 \Leftrightarrow l_1 = 3.15 - 6.32 = 3.17$$

$$L = [4.93 \quad 3.17]$$

Calcul de **lc** (**gain statique** pour une erreur statique nulle) :

Le cours (p. xx) nous donne la formule suivante :

$$avec\ :\ (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BL})^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det}\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BL})}\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BL})^{\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}}$$

- $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BL}) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.99 & -6.32 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [l_0 \quad l_1]\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{9.99}-\boldsymbol{l_0} & -\mathbf{6.32}-\boldsymbol{l_1} \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{det}(A - BL) = \mathbf{9.99} + \boldsymbol{l_0}$
- $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}^{c^T} = \begin{bmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{bmatrix} * \Longrightarrow (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BL})^{\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{6.32}-\boldsymbol{l_1} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{9.99}+\boldsymbol{l_0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

**dans le cas du matrice 2x2*

Avec la matrice L calculé précédemment, nous obtenons :

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BL})^{-1} = \frac{1}{9.99+4.93}\begin{bmatrix} -6.32-3.17 & -1 \\ 9.99+4.93 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{0.64} & -\mathbf{0.067} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Donc :

$$G(0) = \begin{bmatrix} \frac{K}{0.1001} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0.64 & +0.067 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} l_c \Leftrightarrow G(0) = \begin{bmatrix} \frac{0.64K}{0.1001} & \frac{-K}{0.1001} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_c \end{bmatrix} = \frac{-K}{0.1001}\, l_c$$

$$\boldsymbol{G}(\mathbf{0}) = \mathbf{1} \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{l_c} = -\mathbf{0.1001}$$

3.2. Cahier des charges n°2

- Dépassement inférieur à **5%**
- Temps de réponse à 5% de **0.5sec**

Avec la même méthodologie que le cahier des charges n°1 :

Ce qui implique (pour un système du 2nd ordre) :

$$\zeta = 0.7 \quad \& \quad \omega_n = \frac{3}{T_r} = \mathbf{0.5}$$

$$\alpha_0 = \omega_n{}^2 = \mathbf{0.25}$$

$$\alpha_1 = 2\zeta\omega_n = \mathbf{0.7}$$

Notre représentation d'état répondant au Cahier des charges devient alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} l_c y_c \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

En posant $u = -Lx + l_c y_c$ et obtenant $\begin{cases} \dot{x} = (A - BL)x + Bl_c y_c \\ y = Cx \end{cases}$, nous cherchons à déterminer la matrice L = [l_0 l_1] tel que :

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

Calcul du polynôme caractéristique de A – BL :

$$P(s) = \det(s\mathbb{I} - (A - BL)) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_0 & l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 + l0 & s + a_1 + l1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P(s)} = (a_0 + l0) + (a_1 + l1)s + s^2$$

Nous obtenons par identification :

$$\alpha_0 = a_0 + \mathrm{l}_0 \Leftrightarrow \mathrm{l}_0 = \alpha_0 - a_0 \Leftrightarrow \mathrm{l}_0 = \mathbf{0.25} - 9.99 \Leftrightarrow \mathbf{l_0} = \mathbf{-9.74}$$

$$\alpha_1 = a_1 + \mathrm{l}_1 \Leftrightarrow \mathrm{l}_1 = \alpha_1 - a_1 \Leftrightarrow \mathrm{l}_1 = \mathbf{0.7} - 6.32 \Leftrightarrow \mathbf{l_1} = \mathbf{-5.62}$$

$$\boldsymbol{L} = [\mathbf{-9.74} \quad \mathbf{-5.62}]$$

Calcul de **lc** (**gain statique** pour une erreur statique nulle) :

3.3. Cahier des charges n°3

- Valeur propre de **-2 + 2i**
- Valeur propre de **-2 - 2i**

$$\boldsymbol{\alpha_0} = -\mathbf{2} + \mathbf{2}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{\alpha_1} = -\mathbf{2} - \mathbf{2}\boldsymbol{i}$$

Notre représentation d'état répondant au Cahier des charges devient alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\boldsymbol{\alpha_0} & -\boldsymbol{\alpha_1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{l_c y_c} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

En posant $u = -Lx + l_c y_c$ et obtenant $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BL})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B l_c y_c} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} \end{cases}$, nous cherchons à déterminer la matrice **L = [$\mathbf{l_0}$ $\mathbf{l_1}$]** tel que :

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BL} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\boldsymbol{\alpha_0} & -\boldsymbol{\alpha_1} \end{bmatrix}$$

Calcul du polynôme caractéristique de A – BL :

$$P(s) = \det(s\mathbb{I} - (A - BL)) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_0 & l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 + l0 & s + a_1 + l1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P(s)} = (\boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{l0}) + (\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{l1})\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}^2$$

Nous obtenons par identification :

$$\boldsymbol{\alpha_0} = \boldsymbol{a_0} + \mathbf{l_0} \Leftrightarrow \mathrm{l_0} = \alpha_0 - a_0 \Leftrightarrow \mathrm{l_0} = -\mathbf{2} + \mathbf{2}\boldsymbol{i} - 9.99 \Leftrightarrow \mathbf{l_0} = -\mathbf{11.99} + \mathbf{2}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{\alpha_1} = \boldsymbol{a_1} + \mathbf{l_1} \Leftrightarrow \mathrm{l_1} = \alpha_1 - a_1 \Leftrightarrow \mathrm{l_1} = -\mathbf{2} - \mathbf{2}\boldsymbol{i} - 6.32 \Leftrightarrow \mathbf{l_1} = -\mathbf{8.32} - \mathbf{2}\boldsymbol{i}$$

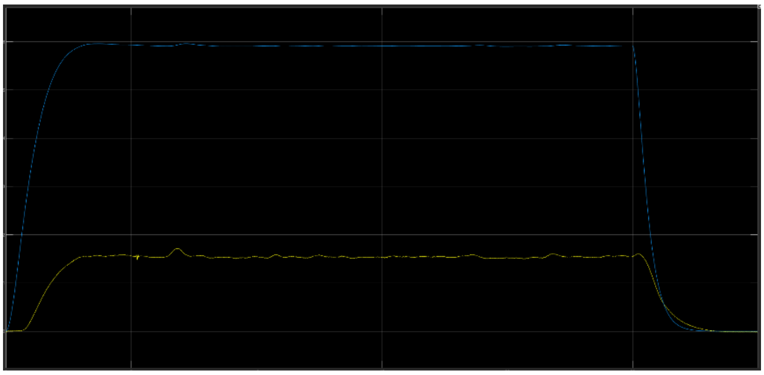
$$\boldsymbol{L} = [-\mathbf{11.99} + \mathbf{2}\boldsymbol{i} \quad -\mathbf{8.32} - \mathbf{2}\boldsymbol{i}]$$

Calcul de **lc** (**gain statique** pour une erreur statique nulle) :

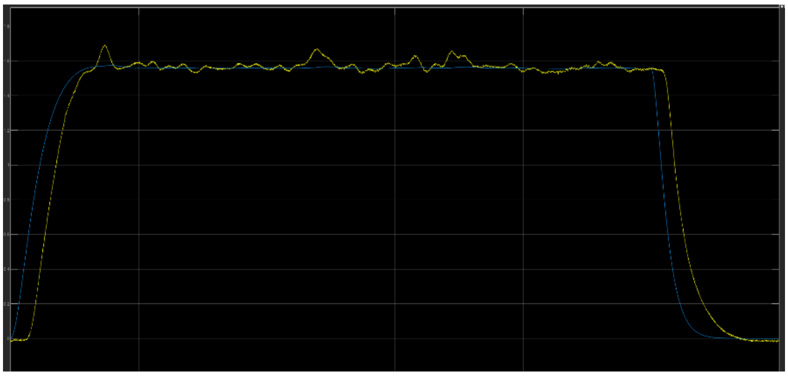
4. Travail expérimental

4.1. Test du cahier des charges n°1

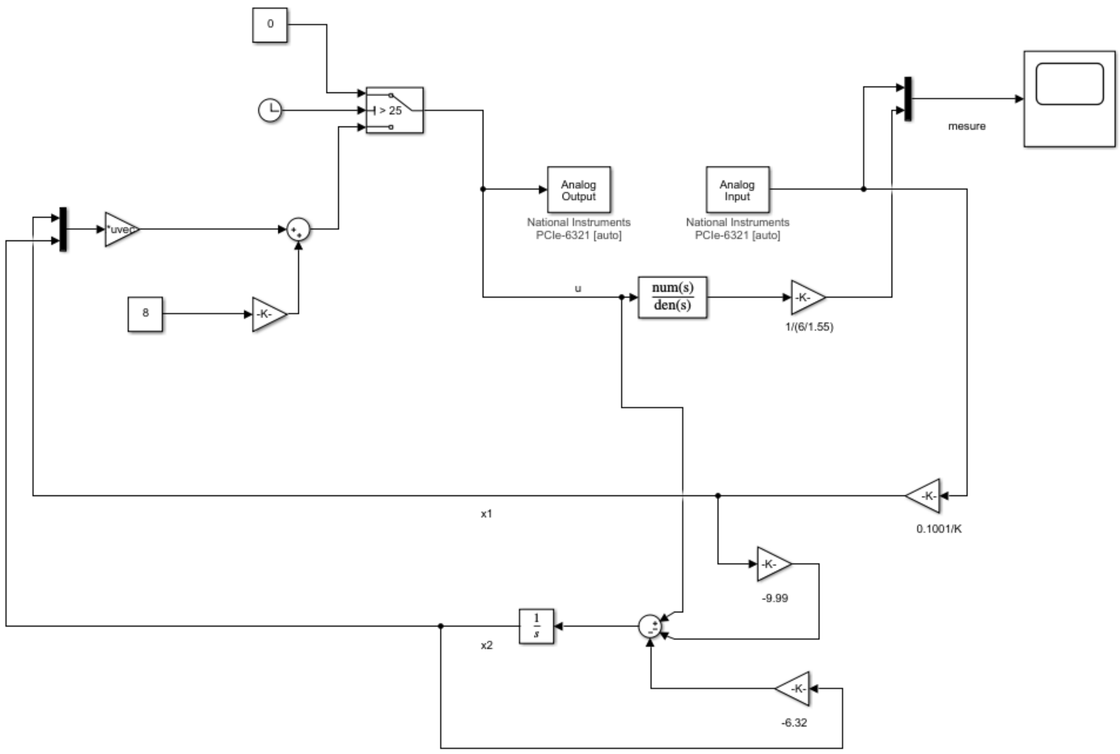
Simulation :



Cmd sans gain statique calculé



Avec gain statique (1/(6/1.55))



Aucun autre test ou simulation n'a pu être fait.

Test :

Conclusions :

4.2. Test du cahier des charges n°2

Simulation :

Test :

Conclusions :

4.3. Simulation du cahier des charges n°3

Calcul de la loi de commande avec Matlab :

Simulation :

Comparaison avec les commandes précédentes :

Test :

Conclusions :