Formulaire pour la partie CAO

Propriétés générales des splines cubiques naturelles

Soit σ une spline cubique naturelle de nœuds $(x_j)_{j=0:n}$. Les vecteurs $(\sigma_j)_{j=0:n}$, $(\sigma'_j)_{j=0:n}$, $(\sigma''_j)_{j=0:n}$, $(\sigma'''_j)_{j=0:n}$ sont reliés par les équations suivantes :

$$\forall j \in [0:n-1]\ , \qquad \sigma'''_j = \frac{(\sigma''_{j+1} - \sigma''_j)}{h_j}. \tag{1}$$

$$\forall j \in [0:n-1]\ , \qquad \sigma'_j = \frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{h_j} - \frac{h_j}{6}(\sigma''_{j+1} + 2\sigma''_j). \tag{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma''_0 \ = \ \sigma''_n \ = \ 0 \\ \forall j \in [1:n-1]\ , \quad \frac{h_{j-1}}{6}\,\sigma''_{j-1} \ + \ \frac{h_{j-1}+h_j}{3}\,\sigma''_j \ + \ \frac{h_j}{6}\,\sigma''_{j+1} \ = \frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{h_j} - \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{h_{j-1}} \end{array}\right. . \tag{3}$$

$$\sigma'''_n = 0 \quad \text{et} \quad \sigma'_n = \sigma'_{n-1} + h_{n-1}\sigma''_{n-1} + \frac{h_{n-1}^2}{2}\,\sigma'''_{n-1}. \tag{4}$$

Lorsque les données sont équidistantes ($h_j = h$), le système (3) s'écrit plus simplement sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma''_0 \ = \ \sigma''_n \ = \ 0 \\ \forall j \in [1:n-1]\ , \quad \sigma''_{j-1} \ + \ 4\,\sigma''_j \ + \ \sigma''_{j+1} = \frac{6}{h^2}\left(\sigma_{j+1} \ - \ 2\,\sigma_j \ + \ \sigma_{j-1}\right) \end{array}\right. . \tag{5}$$

Splines cubiques naturelles d'ajustement

La spline cubique naturelle d'ajustement (ou de lissage) σ_ρ des points $(x_j, y_j)_{j=0:n}$, affectés des poids $(\rho\rho_j)_{j=0:n}$ vérifie (en posant $\sigma'''_{\rho\ -1} = 0$) :

$$\forall j \in [0:n]\ , \qquad \sigma'''_{\rho\ j} - \sigma'''_{\rho\ j-1} = \rho\rho_j(y_j - \sigma_{\rho j}). \tag{6}$$

Lorsque les données sont équidistantes ($h_j = h$) et $\rho_j = 1$, on a aussi les relations suivantes pour σ_ρ (en posant $\mu = \frac{6}{\rho h^3}$, $\sigma''_{\rho\,-1} = 0$ et $\sigma''_{\rho\,n+1} = 0$) :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall j \in [1:n-1], \\ \mu\sigma''_{\rho\,j-2} + (1-4\mu)\sigma''_{\rho\,j-1} + (4+6\mu)\sigma''_{\rho\,j} + (1-4\mu)\sigma''_{\rho\,j+1} + \mu\sigma''_{\rho\,j+2} = 6\frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2}, \end{array}\right. \tag{7}$$

et :

$$\sigma_{\rho j} = y_j - \frac{\sigma''_{\rho j+1} - 2\sigma''_{\rho j} + \sigma''_{\rho j-1}}{\rho h}. \tag{8}$$

Dans le cas où les noeuds sont non équidistants et/ou les ρ_i sont quelconques, on a :

$$\forall j \in [1:n-1]\ , \qquad \alpha_j\, \sigma''_{\rho_{j-2}} + \beta_j\, \sigma''_{\rho_{j-1}} + \gamma_j\, \sigma''_{\rho_j} + \delta_j\, \sigma''_{\rho_{j+1}} + \varepsilon_j\, \sigma''_{\rho_{j+2}} = \zeta_j, \tag{9}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\zeta_j &= 6\left(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}}\right)\ ; \\
\alpha_j &= \frac{6}{\rho\rho_{j-1}h_{j-2}h_{j-1}} \qquad ; \qquad \varepsilon_j = \frac{6}{\rho\rho_{j+1}h_j h_{j+1}}\ ; \\
\beta_j &= h_{j-1} - 6\,\frac{h_{j-1}+h_j}{\rho\rho_j h_{j-1}^2 h_j} - 6\,\frac{h_{j-2}+h_{j-1}}{\rho\rho_{j-1}h_{j-2}h_{j-1}^2}\ ;\ \delta_j = h_j - 6\,\frac{h_j + h_{j+1}}{\rho\rho_{j+1}h_j^2 h_{j+1}} - 6\,\frac{h_{j-1}+h_j}{\rho\rho_j h_{j-1}h_j^2}\ ; \\
\gamma_j &= 2(h_{j-1}+h_j) + \frac{6}{\rho\rho_{j+1}h_j^2} + \frac{6}{\rho\rho_{j-1}h_{j-1}^2} + 6\,\frac{(h_{j-1}+h_j)^2}{\rho\rho_j h_{j-1}^2 h_j^2}.
\end{aligned}$$

Approximation B-spline à nœuds équidistants

La B-spline cubique naturelle B s'exprime comme suit (écriture locale) :

$$\begin{array}{lll}
\forall x \in [-2\,..-1]\ , & B(x) = (x+2)^3/6 & = (x^3+6x^2+12x+8)/6. \\
\forall x \in [-1\,..\,0]\ , & B(x) = (x+2)^3/6 - 4(x+1)^3/6 & = (-3x^3-6x^2+4)/6. \\
\forall x \in [0\,..\,1]\ , & B(x) = (x+2)^3/6 - 4(x+1)^3/6 + x^3 & = (3x^3-6x^2+4)/6. \\
\forall x \in [1\,..\,2]\ , & B(x) = (x+2)^3/6 - 4(x+1)^3/6 + x^3 - 4(x-1)^3/6 & = (2-x)^3/6.
\end{array} \tag{10}$$

Soient les données $(x_i = x_0 + i\,h\,, y_i)_{i=0:n}$. L'approximation B-spline σ de $(x_i, y_i)_{i=0:n}$ se définit comme suit :

- Avec les points supplémentaires ("points fantômes") :

$$y_{-1} = 2\,y_0 - y_1 \quad ; \quad y_{n+1} = 2\,y_n - y_{n-1} \quad ; \quad y_{n+2} = 2\,y_{n+1} - y_n,$$

- σ est telle que :

$$\left\{\begin{array}{lll}
\forall x \in [x_0\,..\,x_n]\ ,\ \sigma(x) & = & \displaystyle\sum_{i\in[-1:n+1]} y_i B_i(x) \\
\forall x \in]-\infty\,..\,x_0]\ ,\ \sigma(x) & = & y_0 + (x-x_0)\,\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \\
\forall x \in [x_n\,..\,+\infty[\ ,\ \sigma(x) & = & y_n + (x-x_n)\,\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}
\end{array}\right. . \tag{11}$$

Cette approximation B-spline σ admet les valeurs suivantes :

$$\forall j \in [0:n], \quad \left\{\begin{array}{lll}
\sigma_j & = & (y_{j+1}+4y_j+y_{j-1})/6 \\
\sigma'_j & = & (y_{j+1}-y_{j-1})/2h \\
\sigma''_j & = & (y_{j+1}-2y_j+y_{j-1})/h^2 \\
\sigma'''_j & = & (y_{j+2}-3y_{j+1}+3y_j-y_{j-1})/h^3
\end{array}\right. . \tag{12}$$

Spline des moindres carrés

L'approximation B-spline des points $(x_j, a_j)_{j=0:n}$ telle qu'introduite Eq. (11) peut encore s'écrire :

$$\forall x \in [x_0 \,..\, x_n] \ , \qquad \sigma(x) = \sum_{j=0:n} a_j \, C_j(x),$$

où les fonctions $(C_j)_{j=0:n}$ sont définies à partir des B-splines cubiques comme suit :

- $C_0 = 2B_{-1} + B_0 \quad ; \quad C_1 = B_1 - B_{-1}$,
- $\forall j \in [2 : n-2] \ , \ C_j = B_j$,
- $C_{n-1} = B_{n-1} - B_{n+1} \quad ; \quad C_n = 2B_{n+1} + B_n$.

La détermination de la spline des moindres carrés définie comme ci-dessus et correspondant aux données $(x_i, y_i)_{i=0:N}$ $(n \leq N)$ s'effectue en résolvant le système linéaire suivant :

$$U^T \, U \, a = U^T \, Y, \tag{13}$$

avec :

$$\forall i \in [0 : N] \ , \qquad \forall j \in [0 : n] \ , \qquad U_{i\,j} = \sqrt{\rho_i} \, C_j(x_i) \quad \text{et} \quad \forall i \in [0 : N] \ , \qquad Y_i = \sqrt{\rho_i} \, y_i.$$