Splines

On note toujours $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\mathbf{h}_j = \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j$

Expression locale

Si σ est une spline cubique naturelle aux points $(\mathbf{x}_j)_j$ alors

$$\boldsymbol{\sigma}_j = \sigma(\mathbf{x}_j), \boldsymbol{\sigma}'_j = \sigma'(\mathbf{x}_j), \boldsymbol{\sigma}''_j = \sigma''(\mathbf{x}_j), \boldsymbol{\sigma}'''_j = \sigma'''(\mathbf{x}_j^+)$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_0 + (x - \mathbf{x}_0)\boldsymbol{\sigma}'_0 & \text{si } x \leq \mathbf{x}_0 \\ \boldsymbol{\sigma}_j + (x - \mathbf{x}_j)\boldsymbol{\sigma}'_j + \frac{(x-\mathbf{x}_j)^2}{2}\boldsymbol{\sigma}''_j + \frac{(x-\mathbf{x}_j)^3}{6}\boldsymbol{\sigma}'''_j & \text{si } \mathbf{x}_j \leq x \leq \mathbf{x}_{j+1} \\ \boldsymbol{\sigma}_n + (x - \mathbf{x}_n)\boldsymbol{\sigma}'_n & \text{si } x \geq \mathbf{x}_n \end{cases}$$

Interpolation

Si σ est la spline cubique naturelle de $(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\sigma}_j)$, alors

$$\forall 0 \leq j \leq n-1, \qquad \boldsymbol{\sigma}'''_j = \frac{\boldsymbol{\sigma}''_{j+1} - \boldsymbol{\sigma}''_j}{\mathbf{h}_j}$$

$$\forall 0 \leq j \leq n-1, \qquad \boldsymbol{\sigma}'_j = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{j+1} - \boldsymbol{\sigma}_j}{\mathbf{h}_j} - \frac{\mathbf{h}_j}{6}(\boldsymbol{\sigma}''_{j+1} + 2\boldsymbol{\sigma}''_j)$$

$$\forall 1 \leq j \leq n-1, \qquad \frac{\boldsymbol{\sigma}_{j+1} - \boldsymbol{\sigma}_j}{\mathbf{h}_j} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_{j-1}}{\mathbf{h}_{j-1}} = \frac{\mathbf{h}_{j-1}}{6}\boldsymbol{\sigma}''_{j-1} + \frac{\mathbf{h}_{j-1} + \mathbf{h}_j}{3}\boldsymbol{\sigma}''_j + \frac{\mathbf{h}_j}{6}\boldsymbol{\sigma}''_{j+1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}'_n = \boldsymbol{\sigma}'_{n-1} + \mathbf{h}_n\boldsymbol{\sigma}''_{n-1} + \frac{\mathbf{h}_{n-1}^2}{2}\boldsymbol{\sigma}'''_{n-1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}''_0 = \boldsymbol{\sigma}''_n = \boldsymbol{\sigma}'''_n = 0$$

Interpolation, $\mathbf{h} = h$ constant

$$\forall 1 \leq j \leq n-1, \qquad \boldsymbol{\sigma}''_{j+1} + 4\boldsymbol{\sigma}''_j + \boldsymbol{\sigma}''_{j-1} = \frac{6}{h^2}\left(\boldsymbol{\sigma}_{j-1} - 2\boldsymbol{\sigma}_j + \boldsymbol{\sigma}_{j+1}\right)$$

Ajustement-Cas général

Si σ est la spline cubique d'ajustement de $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)_j$ avec poids $(\boldsymbol{\rho}_j)_j$, alors pour $j = 0, \ldots, n-1$

$$\boldsymbol{\sigma}'''_j - \boldsymbol{\sigma}'''_{j-1} = \boldsymbol{\rho}_j(\mathbf{y}_j - \boldsymbol{\sigma}_j)$$

$$\mathbf{a}_j\boldsymbol{\sigma}''_{j-2} + \mathbf{b}_j\boldsymbol{\sigma}''_{j-1} + \mathbf{c}_j\boldsymbol{\sigma}''_j + \mathbf{d}_j\boldsymbol{\sigma}''_{j+1} + \mathbf{e}_j\boldsymbol{\sigma}''_{j+2} = 6\left(\frac{\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_j}{\mathbf{h}_j} - \frac{\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_{j-1}}{\mathbf{h}_{j-1}}\right)$$

Où les vecteurs $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ sont définis par

$$\begin{cases} \mathbf{a}_j & = \frac{6}{\boldsymbol{\rho}_{j-1}\mathbf{h}_{j-2}\mathbf{h}_{j-1}}, \quad \text{et } \mathbf{e}_j = \mathbf{a}_{j+2} \\ \mathbf{b}_j & = \mathbf{h}_{j-1} - 6\frac{\mathbf{h}_{j-1}+\mathbf{h}_j}{\boldsymbol{\rho}_j\mathbf{h}_j\mathbf{h}_{j-1}^2} - 6\frac{\mathbf{h}_{j-2}+\mathbf{h}_{j-1}}{\boldsymbol{\rho}_{j-1}\mathbf{h}_{j-2}\mathbf{h}_{j-1}^2}, \quad \text{et } \mathbf{d}_j = \mathbf{b}_{j+1} \\ \mathbf{c}_j & = 2(\mathbf{h}_{j-1} + \mathbf{h}_j) + \frac{6}{\boldsymbol{\rho}_{j-1}\mathbf{h}_{j-1}^2} + \frac{6}{\boldsymbol{\rho}_{j+1}\mathbf{h}_{j+1}^2} + 6\frac{(\mathbf{h}_{j-1}+\mathbf{h}_j)^2}{\boldsymbol{\rho}_j\mathbf{h}_{j-1}^2\mathbf{h}_j^2} \end{cases}$$

Ajustement, $\mathbf{h} = h$ constant; $\rho = 1$

Si $\mu = \frac{6}{\rho h^3}$, on a pour $j = 1, \ldots, n-1$,

$$6\frac{\mathbf{y}_{j-1} - 2\mathbf{y}_j + \mathbf{y}_{j+1}}{h^2} = \mu\boldsymbol{\sigma}''_{j-2} + (1-4\mu)\boldsymbol{\sigma}''_{j-1} + (4+6\mu)\boldsymbol{\sigma}''_j + (1-4\mu)\boldsymbol{\sigma}''_{j+1} + \mu\boldsymbol{\sigma}''_{j+2}$$

B-spline

La B-spline cubique naturelle B s'exprime par :

$$\begin{aligned} &\forall t \in [-2, -1], && B(t) = (2+t)^3/6 \\ &\forall t \in [-1, 0], && B(t) = (2+t)^3/6 - 4(1+t)^3/6 \\ &\forall t \in [0, 1], && B(t) = (2-t)^3/6 - 4(1-t)^3/6 \\ &\forall t \in [1, 2], && B(t) = (2-t)^3/6 \end{aligned}$$

B-spline, $\mathbf{h} = h$ constant

Si σ est l'approximation B-spline de $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)_{j=0,\ldots,n}$

- On rajoute les points supplémentaires suivants ("points fantômes") :

$$\mathbf{y}_{-1} = 2\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_1, \quad \mathbf{y}_{n+1} = 2\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-1}, \quad \mathbf{y}_{n+2} = 2\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n$$

- La spline σ est telle que

$$\sigma(t) = \begin{cases} \mathbf{y}_0 + (t - \mathbf{t}_0)\frac{\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0}{h} & \text{si } t \leq \mathbf{t}_0 \\ \sum_{j=-1}^{n+1} \mathbf{y}_j B_j(t) & \text{si } t \in [\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_n] \\ \mathbf{y}_n + (t - \mathbf{t}_n)\frac{\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-1}}{h} & \text{si } t \geq \mathbf{t}_n \end{cases}$$

- De plus

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_j & = (\mathbf{y}_{j+1} + 4\mathbf{y}_j + \mathbf{y}_{j-1})/6 \\ \boldsymbol{\sigma}'_j & = (\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_{j-1})/(2h) \\ \boldsymbol{\sigma}''_j & = (\mathbf{y}_{j+1} - 2\mathbf{y}_j + \mathbf{y}_{j-1})/h^2 \\ \boldsymbol{\sigma}'''_j & = (\mathbf{y}_{j+2} - 3y_{j+1} + 3\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_{j-1})/h^3 \end{cases}.$$

Moindres carrés

Si σ est la B-spline des points $(\mathbf{x}_j, \mathbf{a}_j)_{j=0,\ldots,n}$ alors

$$\sigma(x) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}_j C_j(x),$$

$$\text{avec } \begin{cases} C_0 = 2B_{-1} + B_0, & C_1 = B_1 + B_{-1} \\ C_j = B_j & \text{si } 2 \leq j \leq n-2 \\ C_n = 2B_{n+1} + B_n, & C_{n-1} = B_{n-1} - B_n \end{cases}$$

Avec $U^T U\mathbf{a} = U^T Y$ et $U_{ij} = \sqrt{\boldsymbol{\rho}_i}C_j(\mathbf{x}_i)$ et $Y = \sqrt{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{y}$