Département STPI
3ème année MIC, 2023-2024.

TD Approximation de fonctions

Partie : CAO

Intervenant : Robin Bouclier

TD1 - Interpolation de données

Exercice 1. On souhaite déterminer la spline σ d'interpolation des 3 points (0,0), (1,1) et (2,0).

1. Calculer les 4-uplets $\left(\sigma_j, \sigma'_j, \sigma''_j, \sigma'''_j\right)_{j=0:2}$ de la spline d'interpolation.

2. Donner une expression analytique pour σ (écriture locale).

3. Tracer sur un même graphe σ, σ', σ'', σ'''. Le tracé sera réalisé « à la main » de la façon la plus précise possible.

4. Calculer finalement $\displaystyle\int_0^2 (\sigma''(x))^2 \,\mathrm{d}x$ (les calculs peuvent être faits de façon simple), et comparer cette valeur avec celles d'autres interpolants de ces trois points (*cf.* section 1.4 du cours).

Exercice 2. On cherche à présent la spline s d'interpolation des 4 points (0,0) , (1,1) , (2,0) et (3,0). Pour cet exercice, votre calculatrice vous sera utile.

1. Tracer sur un même graphe s, s', s'', s'''.

2. Démontrer qu'il existe un unique point d'inflexion sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer les coordonnées du point d'inflexion.

Exercice 3. On s'intéresse maintenant à la spline $\sigma - s$ où σ et s sont les splines des exercices précédents.

1. Démontrer la propriété générale suivante :
   Soient σ et s les splines d'interpolation des points $(x_i, \sigma_i)_{i\in[0:n]}$ et $(x_i, s_i)_{i\in[0:n]}$, alors $\sigma - s$ est la spline d'interpolation des points $(x_i, \sigma_i - s_i)_{i\in[0:n]}$.

2. Montrer maintenant que σ et s étant les splines des exercices précédents, $\sigma - s$ est la spline d'interpolation des points $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$ et $(3, -\frac{3}{2})$.

Exercice 4. Soient $(x_i, y_i)_{i=0:n}$ $n + 1$ éléments de $\mathbb{R}^2$, et soit s la spline cubique naturelle d'interpolation de ces points. Soient ensuite a, b, et c trois réels et, pour tout i dans $[0 : n]$, $z_i = a\,x_i + b + c\,y_i$. Soit finalement σ la spline cubique naturelle d'interpolation des points $(x_i, z_i)_{i=0:n}$.

1. Donner « intuitivement » une expression simple de σ en fonction de s.
2. Démontrer, rigoureusement, l'expression donnée ci-dessus.
3. Déduire, en vous servant des valeurs trouvées lors d'un exercice précédent, la spline d'interpolation des points (0,1), (1,1) et (2,0).

TD2 - Ajustement/lissage de données

Exercice 1. On souhaite déterminer la spline σ d'ajustement de paramètre ρ (et de $\rho_j = 1$) des 3 points (0,0), (1,1) et (2,0).

1. Calculer les 4-uplets $\left(\sigma_j, \sigma'_j, \sigma''_j, \sigma'''_j\right)_{j=0:2}$ de la spline d'ajustement (on utilisera le paramètre $\mu = 6/\rho$).

2. Tracer sur un même graphe les splines d'ajustement dans les deux cas limite $\rho \to 0$ et $\rho \to +\infty$. Vérifier la cohérence de vos résultats avec ceux obtenus à l'exercice 1 du TD1.

3. Montrer que toutes les splines d'ajustement (c'est-à-dire $\forall \rho$) passent par deux même points. Tracer enfin la spline d'ajustement correspondant à un ρ intermédiaire.

Exercice 2. On se propose à présent de montrer que la spline d'ajustement « oscille moins » que la spline d'interpolation. Soit σ la spline d'interpolation des données $(x_j, y_j)_{j\in[0:n]}$ et σ_ρ la spline d'ajustement de paramètre ρ associée à ces mêmes données.

1. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} (\sigma''_\rho(x))^2\, dx \leq \int_{\mathbb{R}} (\sigma''(x))^2\, dx$.

2. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

TD3 - Interpolation et ajustement

Exercice 1. (Tiré d'annales)
Soient $y_0 = 1/3$, $y_1 = y_2 = 2$, $y_3 = 4/3$, $y_4 = 3$, $y_5 = 1$, $y_6 = 1/3$. Soient σ la spline d'interpolation des points $(i, y_i)_{i=0,\ldots,6}$ et σ_ρ la spline cubique d'ajustement de paramètre ρ de ces mêmes données.

1. Déterminer le système linéaire que doivent vérifier les valeurs σ''_i pour $i \in [1:5]$ de la spline d'interpolation.
2. Vérifier que les valeurs suivantes sont solutions du système linéaire :

$$\sigma''(1) = \sigma''(2) = -2 \quad ; \quad \sigma''(3) = 6 \quad ; \quad \sigma''(4) = -8 \quad ; \quad \sigma''(5) = 4.$$

3. Déterminer l'expression explicite de $\sigma(x)$ pour $x \in [1\,..\,3]$.
4. Déterminer la pente de σ en $x = 0$, en $x = 3$, en $x = 4$ et en $x = 6$.
5. Déterminer l'abscisse des points d'inflexion éventuels entre $x = 0$ et $x = 4$.
6. Faire un graphe approximatif de σ.
7. Déterminer la droite des moindres carrés des points $(i, y_i)_{i \in [0:6]}$.
8. Dessiner qualitativement la forme de σ_ρ pour deux valeurs de ρ, l'une « plutôt forte », l'autre « plutôt faible ».

Exercice 2. Démontrer la propriété de symétrie suivante :
Si l'ensemble des données $(x_j, y_j)_{j=0:n}$ possède une propriété de symétrie (axe, point), alors la spline d'interpolation possède la même propriété de symétrie.

TD4 - Approximation B-spline

Exercice 1. Soit σ l'approximation B-spline des données $(jh, y_j)_{j=0:n}$. On va établir dans cet exercice une méthode permettant de réaliser une construction graphique simple et fiable de σ.

1. Montrez qu'en x_j la courbe représentative de σ est parallèle au segment reliant les points de coordonnées (x_{j-1}, y_{j-1}) et (x_{j+1}, y_{j+1}).
2. Montrez qu'en x_j la courbe représentative de σ se trouve à 2/3 entre le point (x_j, y_j) et le milieu du segment reliant les points de coordonnées (x_{j-1}, y_{j-1}) à (x_{j+1}, y_{j+1}).
3. En mettant à profit les résultats obtenus, réaliser maintenant une construction graphique assez précise de l'approximation B-spline des données (0,1), (1,1), (2,3), (3,3), (4,3), (5,1), (6,0), (7,4) et (8,3). Comment procéder sur les bords?

Exercice 2. Soit σ l'approximation B-spline des points (0,1), (1,4), (2,2), (3,-3), (4,1) et (5,2).

1. Faire un graphique assez précis de σ.
2. Faire un graphe soigné de σ''. Montrer que σ admet deux points d'inflexion, et déterminer l'abscisse du premier point d'inflexion.
3. Déterminer l'équation de la spline σ pour $x\in[2\,..\,3]$, puis déterminer l'ordonnée du premier point d'inflexion et le mettre sur le graphe.
4. Déterminer la pente de la tangente en ce point, et tracer la tangente sur le graphe.

Exercice 3. On souhaite à présent caractériser l'approximation B-spline d'une parabole .

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $h=1/n$. Déterminer l'expression analytique sur $[-5\,..\,5]$ de l'approximation B-spline des points $(jh, j^2h^2)_{j\in[-5/h:5/h]}$.
2. Comparer avec la parabole d'équation $y = x^2$. Constater qu'il y a convergence, et donner la vitesse de convergence (lorsque $h \to 0$).
3. Est-ce qu'on aurait pu s'attendre à un tel résultat?

TD5 - Approximation B-spline (suite)

Exercice 1. On cherche dans cet exercice à retrouver la spline d'interpolation à partir de la technologie B-spline.

1. Déterminer un système linéaire en $(a_j)_{j\in[0:n]}$ tel que l'approximation B-spline de $(jh, a_j)_{j\in[0:n]}$ soit aussi la spline d'interpolation des donnés $(jh, y_j)_{j\in[0:n]}$.

2. Comparez ce système avec le système linéaire en σ'' de détermination de la spline d'interpolation des $(jh, y_j)_{j\in[0:n]}$.

Exercice 2. (Tiré d'annales)
On note, pour $j\in\mathbb{Z}$, $x_j = j$; $y_0 = y_1 = y_4 = y_5 = 4$, et $y_2 = y_3 = y_6 = y_7 = -2$. On note aussi $z_0 = z_1 = z_2 = z_4 = z_5 = 4$, et $z_3 = z_6 = z_7 = -2$. Soit enfin σ l'approximation B-spline des points $(x_j, y_j)_{j\in[0:7]}$ et s l'approximation B-spline des points $(x_j, z_j)_{j\in[0:7]}$.

1. Représenter graphiquement σ .

2. Déterminer l'expression de σ dans les intervalles $[x_j \,..\, x_{j+1}]$ pour $j = 0, 1, 2, 3$.

3. Donner la position et valeur du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) dans $[0 \,..\, 4]$.

4. Donner la position et valeur du minimum éventuel dans $[2 \,..\, 3]$.

5. Donner une expression simple de $s - \sigma$. Dans quel intervalle s est-elle différente de σ ? Expliquer.

TD6 - Approximation d'un cercle avec les B-splines

Exercice 1. Soient les points $(i, y_i)_{i\in[-6:6]}$, avec $y_{2p} = 0$, et $y_{2p+1} = (-1)^p$.

1. On appelle σ l'approximation B-spline des points $(i, y_i)_{i\in[-6:6]}$. Représenter graphiquement σ.

2. Donner l'expression de $\sigma(x)$ pour $x\in[2p \mathinner{..} 2p+1]$, pour $x\in[2p+1 \mathinner{..} 2p+2]$ ($-3 \leq p \leq 2$), et pour $x \geq 6$.

3. Soit s la spline cubique naturelle d'interpolation des points $(i, y_i)_{i\in[-6:6]}$.Donner l'expression de $s(x)$ pour tout x réel. Justifier.

4. On désire maintenant approcher un cercle de rayon r par une spline cubique paramétrique. Pour cela, on considère l'interpolation spline paramétrique des quatre points $(r, 0)$, $(0, r)$, $(-r, 0)$, $(0, -r)$. Exprimer ainsi l'approximation du cercle (on pourra compléter les points par périodicité).

5. Quel point obtient-on pour $t = 1/2$? Comparer avec le point correspondant sur le cercle. Le point de la spline paramétrique est-il à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle? Quel est le pourcentage d'erreur commise en assimilant le cercle à la spline?

6. En modifiant légèrement la position des points de contrôle, rapprocher encore la courbe B-spline du cercle (la spline sera en partie à l'intérieur et en partie à l'extérieur du cercle).

7. Que pourrait-on faire pour améliorer encore plus l'approximation du cercle?