

## Лабораторная работа 4 — Модель процесса

В задании 3 нет необходимости использовать Python, все вычисления производятся на листке.

### 1. Сэмплинг

Реализуйте три функции, каждая из которых генерирует сэмплы с нормальным распределением  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Входными параметрами этих функций должны быть среднее значение  $\mu$  и дисперсия  $\sigma^2$  нормального распределения. В качестве единственного источника случайности используйте сэмплы с равномерным распределением:

- В первой функции сгенерируйте сэмплы с нормальным распределением путем суммирования двенадцати (12) сэмплов с равномерным распределением.
- Во второй функции используйте выборку с отклонением.
- В третьей функции используйте преобразование Бокса-Мюллера. Этот метод позволяет генерировать сэмплы со стандартным (нормированным) нормальным распределением, используя два сэмпла с равномерным распределением  $u_1, u_2 \in [0, 1]$ :

$$x = \cos(2\pi u_1) \sqrt{-2 \log u_2}$$

Сравните время выполнения трех функций, используя встроенную функцию `timeit`. Сравните также время выполнения ваших функций со встроенной функцией `numpy.random.normal`.

Для каждого набора сэмплов вычислите математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение, постройте гистограммы распределения и функции плотности вероятности.

### 2. Модель процесса на основе одометрии

- (a) Реализуйте модель процесса на основе одометрии. Функция должна принимать на вход три аргумента:

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} \delta_{r1} \\ \delta_{r2} \\ \delta_t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{x}_t$  — положение робота до начала движения,  $\mathbf{u}_t$  — показания одометрии, полученные роботом,  $\boldsymbol{\alpha}$  — шумовые параметры модели процесса. Возвращаемым значением функции должно быть новое положение робота  $\mathbf{x}_{t+1}$ , предсказанное моделью.

Поскольку измерения одометрии не идеальны, в модели процесса необходимо учесть погрешность измерений. Чтобы получить случайный шум с нормальным распределением, используйте реализованные ранее методы сэмплинга.

- (b) Если применить модель процесса несколько раз, с одним и тем же начальным положением, показаниями одометрии и значениями шума, какой результат следует ожидать?
- (c) Запустите модель процесса 5000 раз со следующими значениями:

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix},$$

Постройте на одном графике получившиеся положения  $(x, y)$  для каждой из 5000 оценок.

### 3. Модель процесса на основе скорости

Пусть робот движется по круговой траектории с постоянными поступательной  $v$  и угловой  $w$  скоростями. Текущее положение робота —  $(x, y, \theta)$ .

- (a) Выведите следующее выражение для центра окружности  $(x_c, y_c)$ :

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v/w \sin \theta \\ v/w \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- (b) Пусть известны начальное  $(x, y, \theta)$  и конечное  $(x', y', \theta')$  положения робота, “соединенные” движением по окружности. Докажите, что центр окружности можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y - y' \\ x' - x \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

*Подсказка:* рассмотрите прямую  $l$ , которая соединяет центр окружности и точку  $P$  на полпути между  $(x, y)$  и  $(x', y')$ . Как  $l$  и  $P$  связаны с двумя слагаемыми в формуле выше?

- (c) Покажите, что значение  $\mu$  определяется выражением:

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{(x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta}{(y - y') \cos \theta - (x - x') \sin \theta}$$