

# Rapport TP2 CSLC

BÉNISTANT Raphaël, BOURLOT Xavier, 3IMACS-AE-C, Binôme 2

30 mai 2020

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Calcul d'un correcteur proportionnel</b>	<b>2</b>
2.1	Travail de préparation . . . . .	2
2.2	Travail à effectuer . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Calcul d'une commande par retour d'état</b>	<b>6</b>
3.1	Principe . . . . .	6
3.2	Travail à effectuer . . . . .	7
3.2.1	Calcul . . . . .	7
3.2.2	Manipulation . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Calcul d'un correcteur proportionnel dérivé</b>	<b>9</b>
4.1	Travail de préparation . . . . .	9
4.2	Travail à effectuer . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>12</b>
<b>A</b>	<b>Annexes</b>	<b>13</b>
A.1	Code Matlab . . . . .	13

# 1 Introduction

L'objectif de ce TP est de déterminer des lois de commande qui permettront d'asservir la position de l'arbre moteur avec lequel nous travaillons. Le rapport se décompose en trois parties.

La première consistera à déterminer la valeur du coefficient du correcteur proportionnel en considérant un retour de sortie.

La deuxième partie permettra de calculer la commande nécessaire pour effectuer un placement de pôles par retour d'état.

Dans la dernière partie, nous nous attellerons à caractériser les coefficients du correcteur proportionnel dérivé qui permettra également d'asservir l'arbre moteur selon deux conditions qui seront détaillées en temps voulu.

## 2 Calcul d'un correcteur proportionnel

On boucle le système selon le schéma suivant :

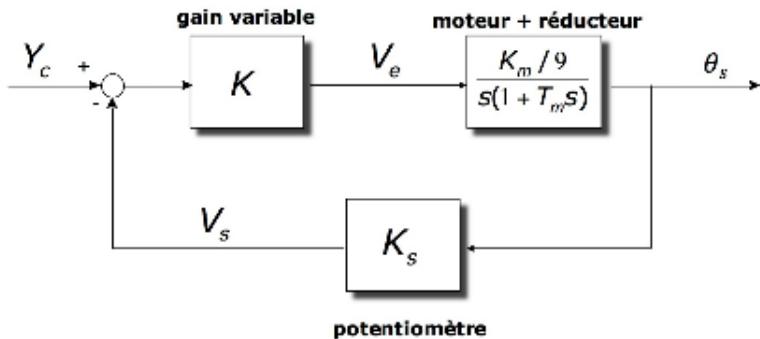


FIGURE 1 – Schéma bloc du correcteur proportionnel

La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par :  $H(s)_{BO} = \frac{K_m \cdot K_s}{9 \cdot s(1+T_m)}$

### 2.1 Travail de préparation

1. On suppose que  $K = 1$

Calculons la *marge de phase* du système. On cherche la valeur de  $\omega_n$  lorsque le gain est unitaire.

$$|H(j\omega)| = 1$$

$$\iff K_m \cdot K_s \cdot \frac{1}{9 \cdot \omega \cdot \sqrt{1+(T_m \cdot \omega)^2}} = 1$$

Cela revient à trouver les racines du polynôme d'ordre 2 :

$$81 \cdot T_m^2 \cdot X^2 + 81 \cdot X - (K_m \cdot K_s)^2 \\ \text{avec } X = \omega^2$$

Après calcul, on trouve  $\omega = 6.498 \text{ rad.s}^{-1}$ . On peut alors déduire la marge de phase :

$$M_\phi = 180 + \text{Phase}(H(j\omega)) = 180 - 90 - \arctan(T_m \cdot \omega) \\ \text{donc } M_\phi = 37.73 \text{ rad.s}^{-1}$$

La vérification avec la commande MATLAB "margin" donne le même résultat (cf lignes 73 du code MATLAB en annexe)

2. On cherche maintenant à déterminer la valeur du coefficient  $K$  pour obtenir une marge de phase de  $45^\circ$  :

$$\text{On pose } M_\phi = 45^\circ$$

$$\iff 45 = \arctan(T_m * \omega) \text{ (d'après la question 1)}$$

$$\text{donc } \omega = 5.027 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\text{On en déduit alors : } K = \sqrt{\frac{81 \cdot T_m^2 \cdot \omega^4 + 81 \cdot \omega^2}{K_m^2 \cdot K_s^2}} = 0.6694$$

On utilise la commande sisotool pour vérifier le résultat :

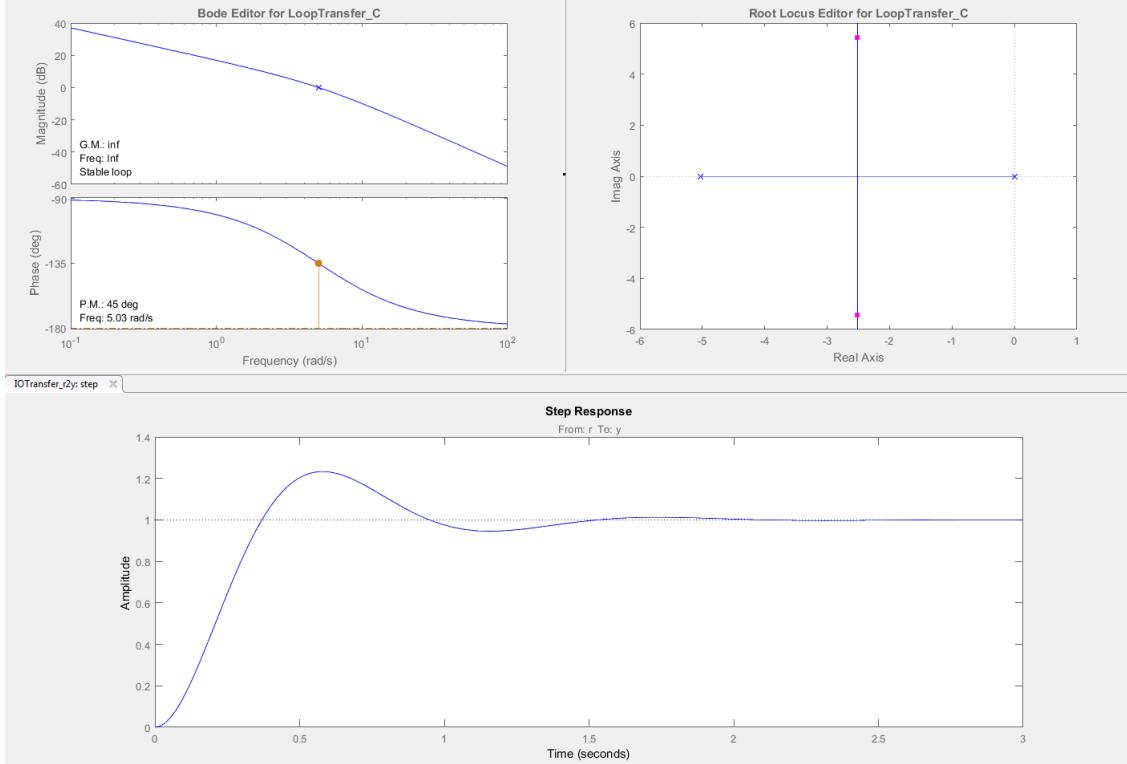


FIGURE 2 – Calcul du gain pour une marge de phase de  $45^\circ$

On retrouve  $\omega = 5.03 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $K = 0.66945$ , valeurs similaires à celles obtenues au calcul effectué précédemment.

3. Nous allons maintenant déduire des questions précédentes la valeur de l'amortissement et des pôles du système en boucle fermée. La fonction de transfert en boucle fermée est déterminée par :  $H(s)_{BF} = \frac{\frac{K \cdot K_m}{9 \cdot T_m}}{s^2 + \frac{1}{T_m} s + \frac{K \cdot K_m \cdot K_s}{9 \cdot T_m}}$ . On peut alors identifier les valeurs de la pulsation propre et de l'amortissement.

La valeur de la pulsation propre est donnée par la formule :  $\omega_n^2 = \frac{K \cdot K_m \cdot K_s}{9 \cdot T_m}$   
On en déduit que :  $\omega_n = 5.976 \text{ rad.s}^{-1}$

On peut alors déduire la valeur de l'amortissement grâce à l'expression suivante :  $\xi = \frac{1}{2 \cdot \omega_n \cdot T_m}$

On obtient alors :  $\xi = 0.421$

Les pôles sont données par la définition suivante :  $p_{1,2} = -\xi \cdot \omega_n \pm \omega_d \cdot j$

avec  $\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} = 5.42 \text{ rad.s}^{-1}$

On obtient alors :  $p_{1,2} = -2.5134 \pm 5.42 \cdot j$

De même, avec la valeur de  $\xi$ , il est possible de déterminer la valeur du premier dépassement :

$$M_p = \exp\left(-\frac{\xi \cdot \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right) = 23.27\%$$

On retrouve ces valeurs grâce à l'outil sisotool :

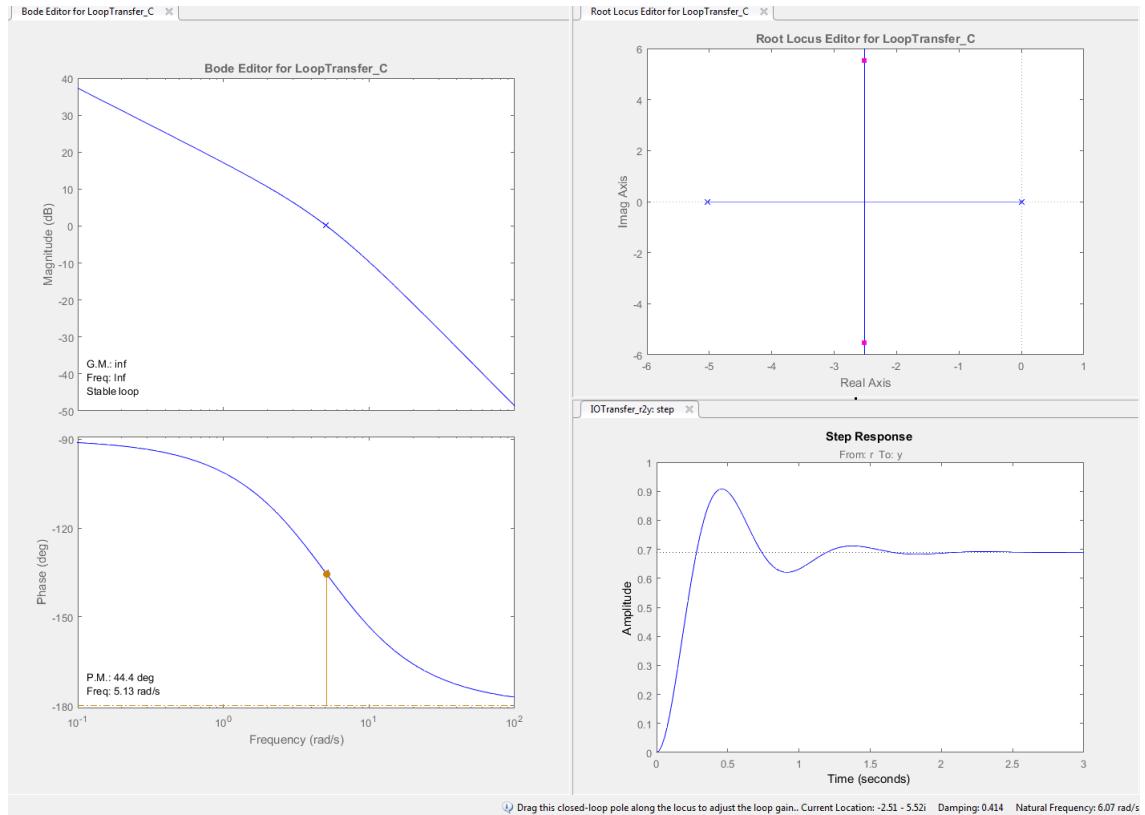


FIGURE 3 – Amortissement et pôles du système en boucle fermée

On a  $p_{1,2} = -2.51 \pm 5.52j$  et  $\xi = 0.414$  (valeurs en bas à droite de la Figure 3)

4. Maintenant que nous avons déterminé toutes les constantes du système, il est également possible de calculer l'erreur de traînage, c'est-à-dire l'erreur à une entrée de type rampe  $\frac{A}{s^2}$ .

On peut réécrire la fonction de transfert en boucle ouverte de la manière suivante :  $H(s)_{BO} = \frac{\frac{K \cdot K_m \cdot K_s}{9}}{s(1+T_m)}$   
alors l'erreur de traînage pour une rampe avec  $A = 1$  est égale à l'expression suivant :  $Err_t = \frac{1}{K_0}$   
avec  $K_0 = \frac{K \cdot K_m \cdot K_s}{9}$   
Finalement :  $Err_t = 14.08\%$

## 2.2 Travail à effectuer

Afin de vérifier les résultats théorique trouvés précédemment, nous avons réalisé le branchement qui correspond au schéma du système en boucle fermée. Nous avons appliqué les coefficients calculées.

Pour modéliser le coefficient  $K$ , nous avons réalisé un pont diviseur de tension grâce à une résistance variable. L'emploi d'un potentiomètre simple se justifie par la valeur de  $K < 1$  (qui ne nécessite pas d'amplification). Pour régler le potentiomètre, on connecte une extrémité à la masse, l'autre extrémité à une tension continue que l'on mesure, puis on ajuste le potentiomètre pour obtenir la tension de sortie désirée. Par exemple, si on applique 5V en entrée, on veut obtenir  $5 * 0.669 = 3.345V$  en sortie.

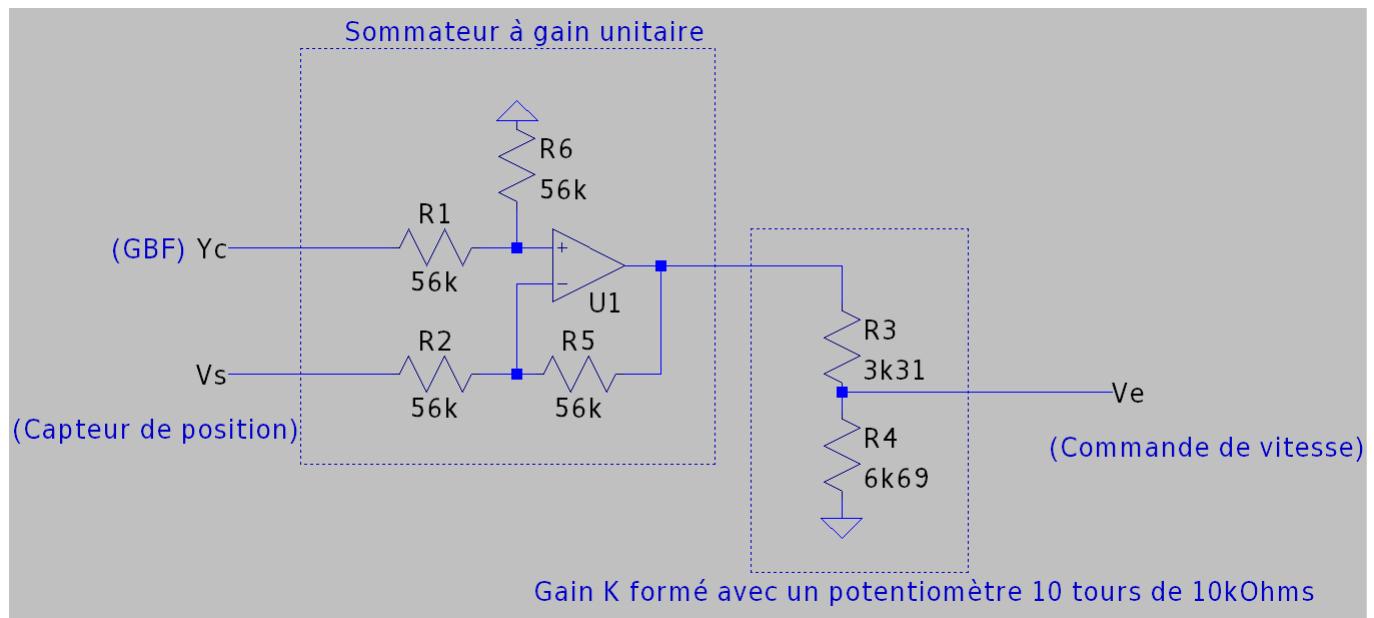


FIGURE 4 – Schéma électrique du correcteur proportionnel

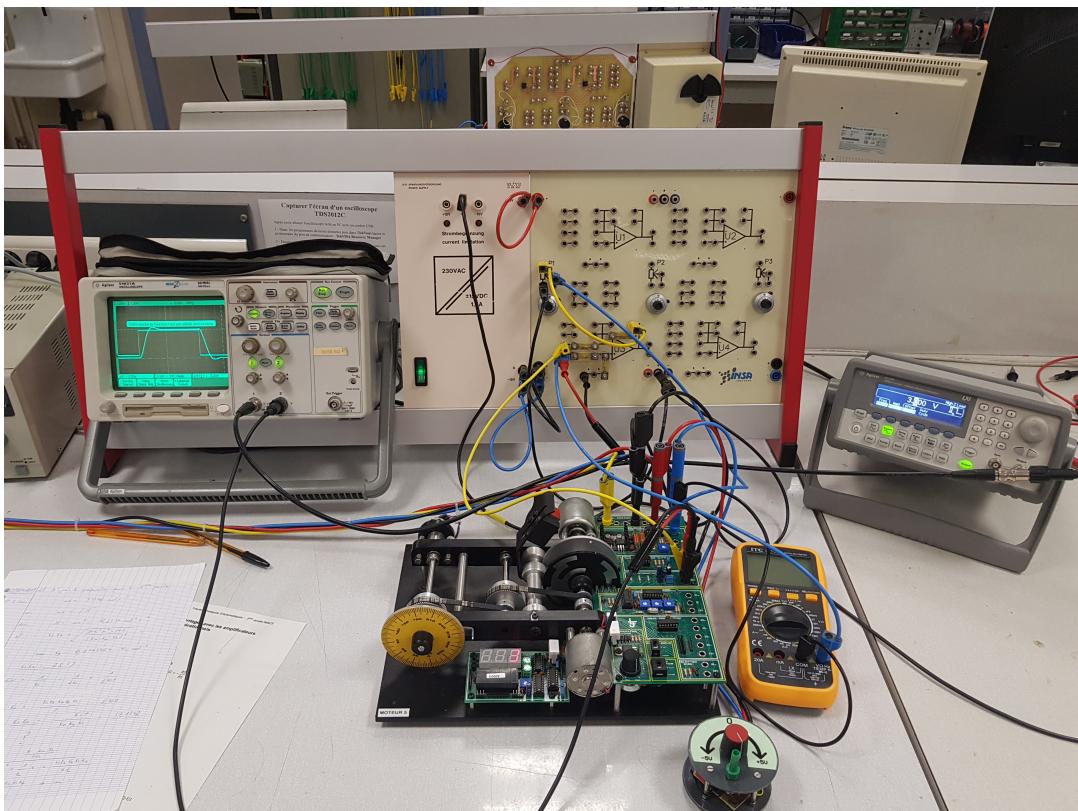


FIGURE 5 – Montage du système avec correcteur proportionnel

Nous avons alors testé notre modèle dans le domaine temporel pour une entrée de type rampe :

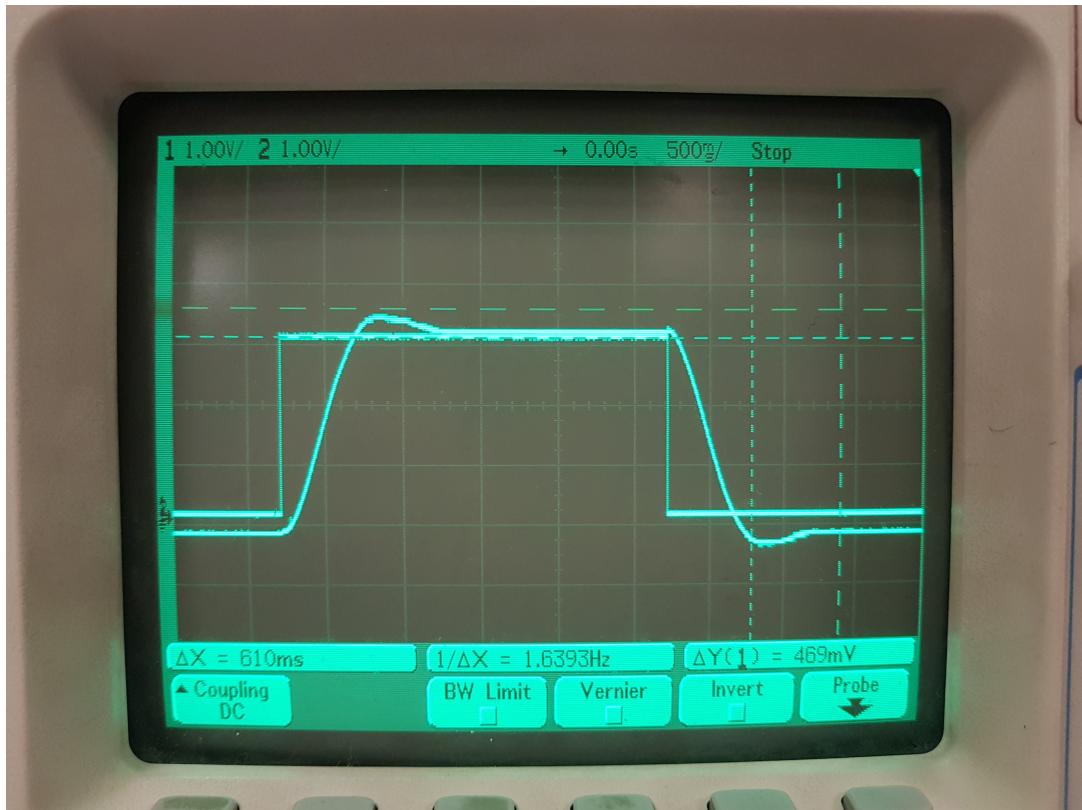


FIGURE 6 – Réponse temporelle du système à une entrée de type rampe

On mesure le dépassement et l'erreur finale à l'aide des curseurs. On obtient quasiment les résultats théorique :

$$M_p = 18.86\% < 23.27\%$$

$$Err_t = \frac{3.4V}{3V} = 13.3\% < 14.08\%$$

Le contrôleur répond donc aux exigences énoncées précédemment.

### 3 Calcul d'une commande par retour d'état

#### 3.1 Principe

Nous allons déterminer une commande par retour d'état pour obtenir un système en boucle fermée qui se comporte comme un système du second ordre avec un dépassement inférieur à 5% et un temps de réponse à 2% inférieur à  $t_r = 0.8s$ .

Le final est donné par le schéma suivant :

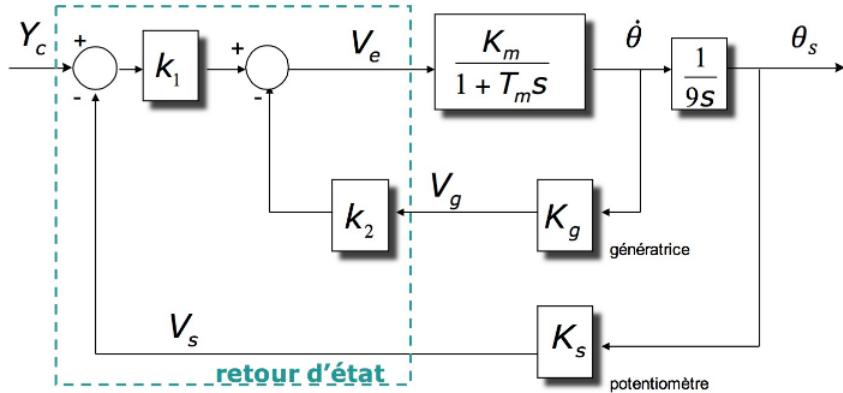


FIGURE 7 – Schéma bloc du système

### 3.2 Travail à effectuer

#### 3.2.1 Calcul

Le polynôme caractéristique en boucle fermée correspondant à ce système est le suivant :

$$s^2 + \frac{1+k_2 \cdot K_m \cdot K_g}{T_m} \cdot s + \frac{k_1 \cdot K_m \cdot K_s}{9 \cdot T_m}$$

On identifie ce polynôme à celui souhaité, c'est-à-dire :

$$s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2$$

On obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{9 \cdot \omega_n^2 \cdot T_m}{K_m \cdot K_s} \\ k_2 &= \frac{2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot T_m - 1}{K_m \cdot K_g} \end{aligned}$$

Il faut maintenant déterminer les valeurs de l'amortissement  $\xi$  et de la pulsation propre  $\omega_n$  qui permettent de satisfaire nos conditions.

On désire un temps de réponse à 2% inférieur à 0.8s. Nous calculerons comme si on désirait exactement 0.8s, donc :

$$\begin{aligned} t_r &= 0.8s \\ \text{or } t_r &= \frac{4}{\xi \cdot \omega_n} \\ \text{donc } \xi \cdot \omega_n &= \frac{4}{0.8} = 5 \end{aligned}$$

On veut également un dépassement inférieur à 5%. Nous calculerons comme si on désirait exactement 5%, donc :

$$\begin{aligned} Mp &= 0.05 \\ \iff \xi &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{donc } \omega_n &= \frac{5}{\xi} = 7.07 \text{ rad.s}^{-1} \end{aligned}$$

On peut alors conclure sur les valeurs de  $k_1$  et de  $k_2$  :

$$\begin{aligned} k_1 &= 0.9363 \\ k_2 &= 1.196 \end{aligned}$$

### 3.2.2 Manipulation

Afin de vérifier les résultats théorique trouvés précédemment, nous avons réalisé le branchement qui correspond au schéma précédent. Nous avons appliqué les coefficients calculées.

Pour modéliser le coefficient  $k_1$ , nous avons réalisé un pont diviseur de tension grâce à une résistance variable (car  $k_1 < 1$ ). En ce qui concerne le coefficient  $k_2$ , nous avons utilisé un montage à base amplificateur opérationnel en mode non inverseur (car  $k_2 > 1$ ). Pour régler précisément  $k_2$  on utilise également un potentiomètre, qui remplace les 2 résistances de gain de l'amplificateur.

Le gain vaut  $k_2 = \frac{(R_{11}+R_{12})}{R_{12}} = \frac{10k\text{Ohm}}{R_{12}}$  d'où  $R_{12} = 8.36k\text{Ohm}$  d'où  $R_{11} = 10k - 8.36k = 1.63k\text{Ohm}$

Les potentiomètres sont réglés en amont de manière similaire à la méthode décrite précédemment

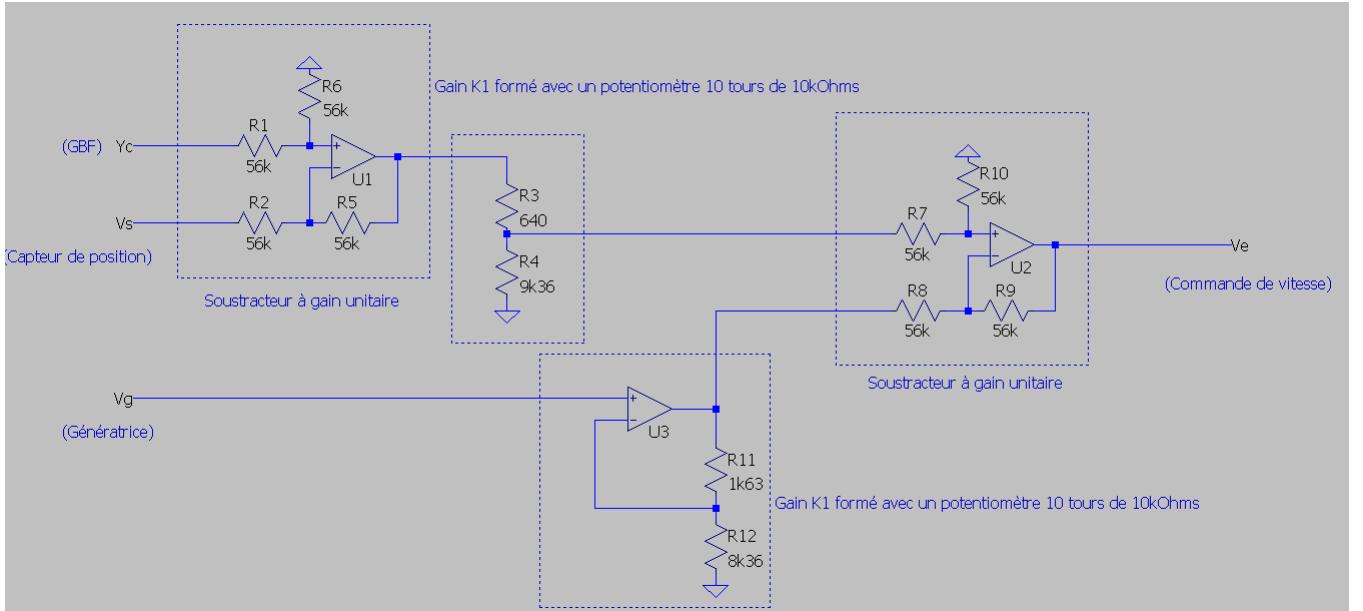


FIGURE 8 – Schéma électrique du montage à commande par retour d'état

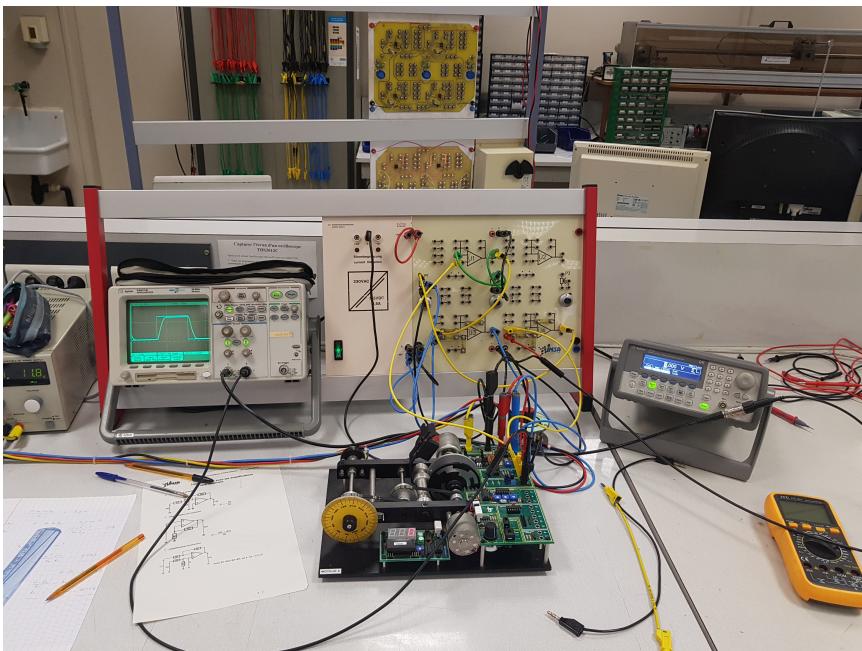


FIGURE 9 – Montage du système avec commande par retour d'état

Nous avons alors testé notre modèle dans le domaine temporel pour une entrée de type échelon :

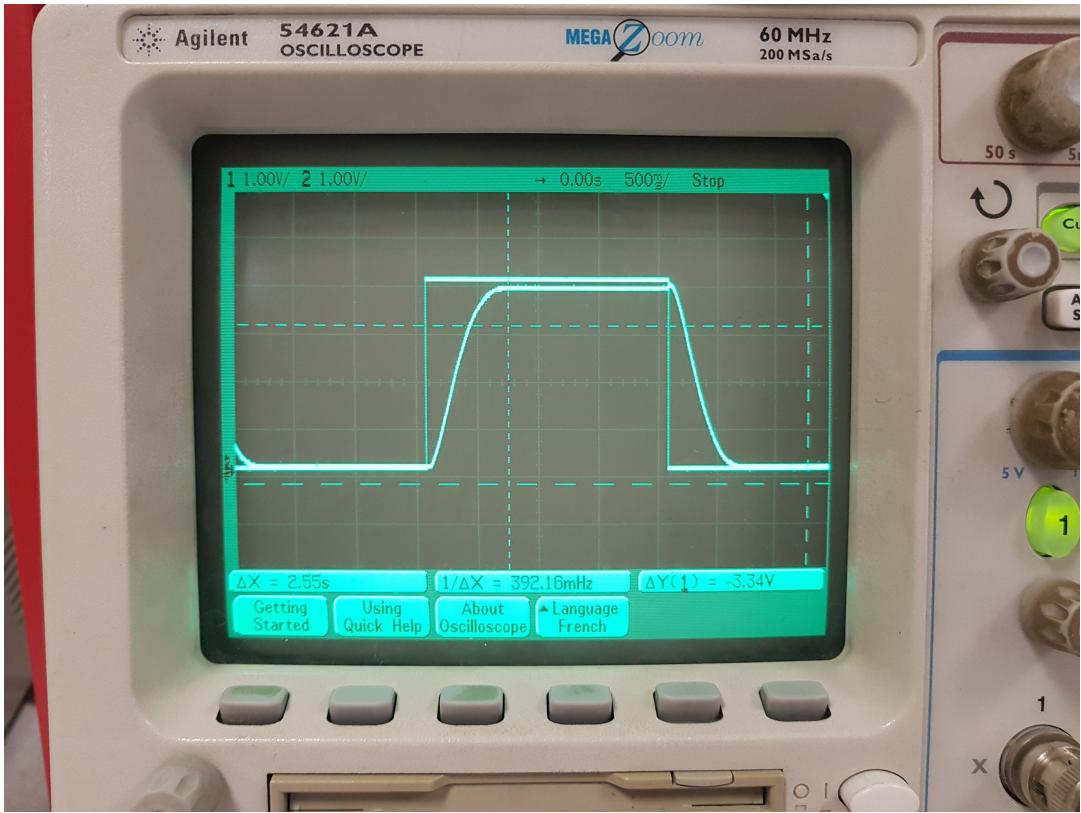


FIGURE 10 – Réponse temporelle du système à une entrée de type échelon

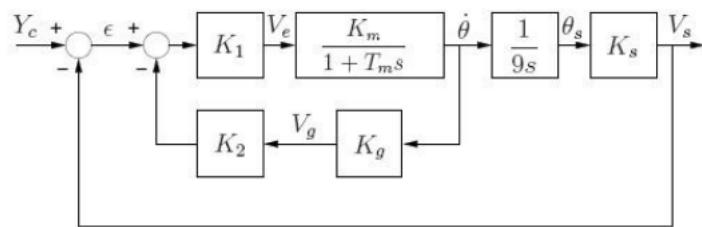
Expérimentalement, on obtient :

Pas de dépassement et  $t_r = 576ms (< 800ms requis)$

Les résultats obtenus sont satisfaisants puisque toutes nos conditions sont respectées.

## 4 Calcul d'un correcteur proportionnel dérivé

On boucle maintenant le système de la manière suivante :



### 4.1 Travail de préparation

1) La fonction de transfert du système en boucle ouverte est :

$$H(s)_{BO} = \frac{K_1 \cdot K_m \cdot K_s}{9 \cdot s \cdot [(1 + K_1 \cdot K_2 \cdot K_m \cdot K_s) + T_m \cdot s]}$$

2) On souhaite déterminer les valeurs de  $K_1$  et  $K_2$  qui conduisent à une marge de phase de  $45^\circ$  et une erreur de traînage deux fois plus petite que celle obtenue dans la partie 1.

On veut une marge de phase de  $45^\circ$  donc :

$$\begin{aligned} M_\phi &= 45^\circ \\ \text{or } M_\phi &= 180 + \text{Phase}(H(j\omega)) = 180 - 90 - \arctan\left(\frac{T_m \cdot \omega}{1 + K_1 \cdot K_2 \cdot K_g \cdot K_m}\right) \\ \text{donc } \arctan\left(\frac{T_m \cdot \omega}{1 + K_1 \cdot K_2 \cdot K_g \cdot K_m}\right) &= 45^\circ \\ \text{donc } \omega &= \frac{1 + K_1 \cdot K_2 \cdot K_g \cdot K_m}{T_m} \end{aligned}$$

L'erreur de traînage est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} Err_t &= \frac{1}{K'_0} \\ \text{avec } K'_O &= \frac{K_1 \cdot K_m \cdot K_s}{9(1 + K_1 \cdot K_2 \cdot K_g \cdot K_m)} \end{aligned}$$

On peut également noter que d'après l'expression de  $\omega$  déterminée précédemment, on peut réécrire :

$$K'_O = \frac{K_1 \cdot K_m \cdot K_s}{9 \cdot T_m \cdot \omega} \text{ donc } K_1 = \frac{9 \cdot T_m \cdot \omega \cdot K'_0}{K_m \cdot K_s}$$

On veut également une erreur de traînage deux fois plus petite que précédemment, donc :  $K'_0 = 2 \cdot K_0 = 14.2$  (cf partie 2 question 4). Au final :

$$\frac{K_1 \cdot K_m \cdot K_s}{9(1 + K_1 \cdot K_2 \cdot K_g \cdot K_m)} = 14.2$$

Comme dans la partie 2 question 1, trouver la valeur de  $\omega$  qui correspond à la marge de phase revient à trouver les racines du polynôme :

$$81 \cdot T_m^2 \cdot \omega^4 + 81 \cdot (1 + K_1 \cdot K_2 \cdot K_g \cdot K_m) \cdot \omega^2 - (K_1 \cdot K_m \cdot K_s)^2$$

En effectuant les remplacements et les multiplications adéquats, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \omega^2 + \frac{1}{T_m} \cdot \omega - K'_0^2 &= 0 \\ \text{donc } \omega &= 11.9 \text{ rad.s}^{-1} \\ \text{or } \omega &= \frac{1 + K_1 \cdot K_2 \cdot K_g \cdot K_m}{T_m} \\ \text{donc } K_1 \cdot K_2 &= \frac{T_m \cdot \omega - 1}{K_g \cdot K_m} \\ \text{alors } K_2 &= \frac{1.65}{K_1} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} K_1 &= 3.1653 \\ K_2 &= 0.515 \end{aligned}$$

3) La fonction de transfert du système en boucle fermée est donnée par :

$$H(s)_{BF} = \frac{K_1 \cdot K_m \cdot K_s}{9 \cdot T_m \cdot s^2 + 9(1 + K_1 \cdot K_2 \cdot K_m \cdot K_g)s + K_1 \cdot K_m \cdot K_s}$$

4) En identifiant la fonction de transfert en boucle fermée à la forme générale des systèmes du second ordre, on déduit les expressions de la pulsation propre  $\omega$ , de l'amortissement  $\xi$ , des pôles  $p_{1,2}$  et du premier dépassement  $M_p$  :

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{K_1 \cdot K_m \cdot K_s}{9 \cdot T_m}} = 13 \text{ rad.s}^{-1} \\ \xi &= \frac{1 + K_1 \cdot K_2 \cdot K_m \cdot K_g}{2 \cdot T_m \cdot \omega_n} = 0.454 \\ p_{1,2} &= -\xi \cdot \omega_n \pm \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} j \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} p_1 &= -5.9 \pm 1.58j \\ M_p &= \exp\left(-\frac{\xi \cdot \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right) = 20,17\% \end{aligned}$$

## 4.2 Travail à effectuer

On règle de même les potentiomètres de gains  $K_1$  et  $K_2$ . On obtient le schéma suivant :

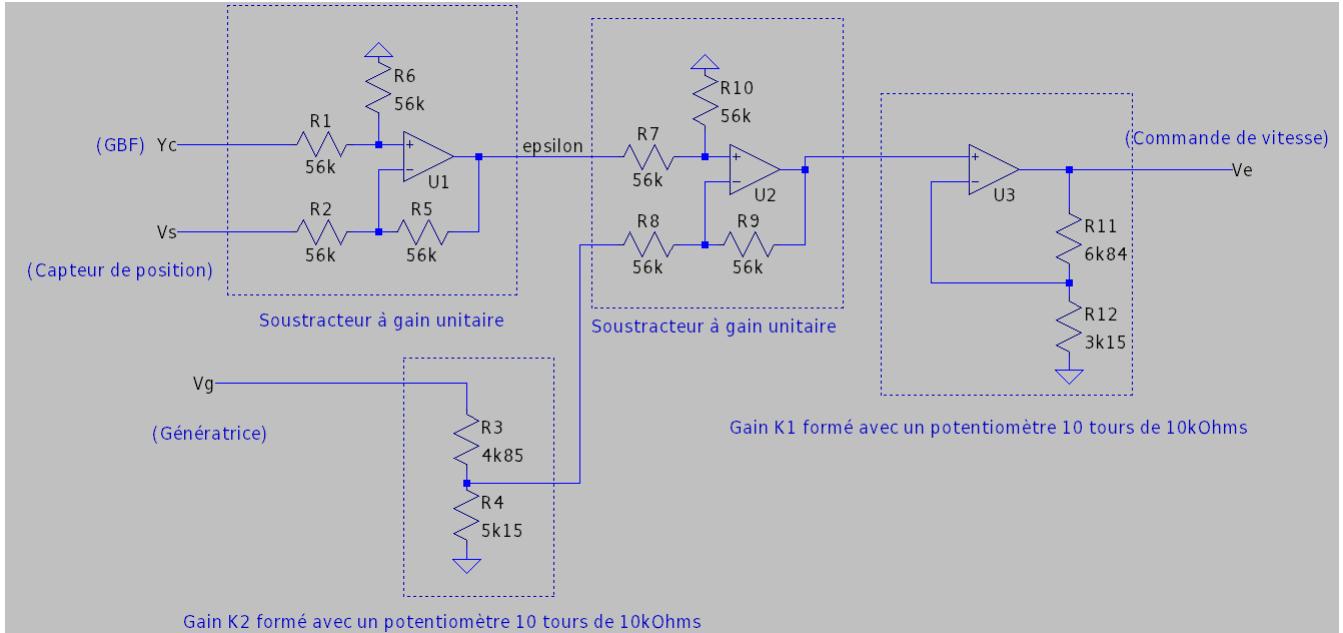


FIGURE 11 – Schéma électrique du montage à commande par proportionnel dérivé

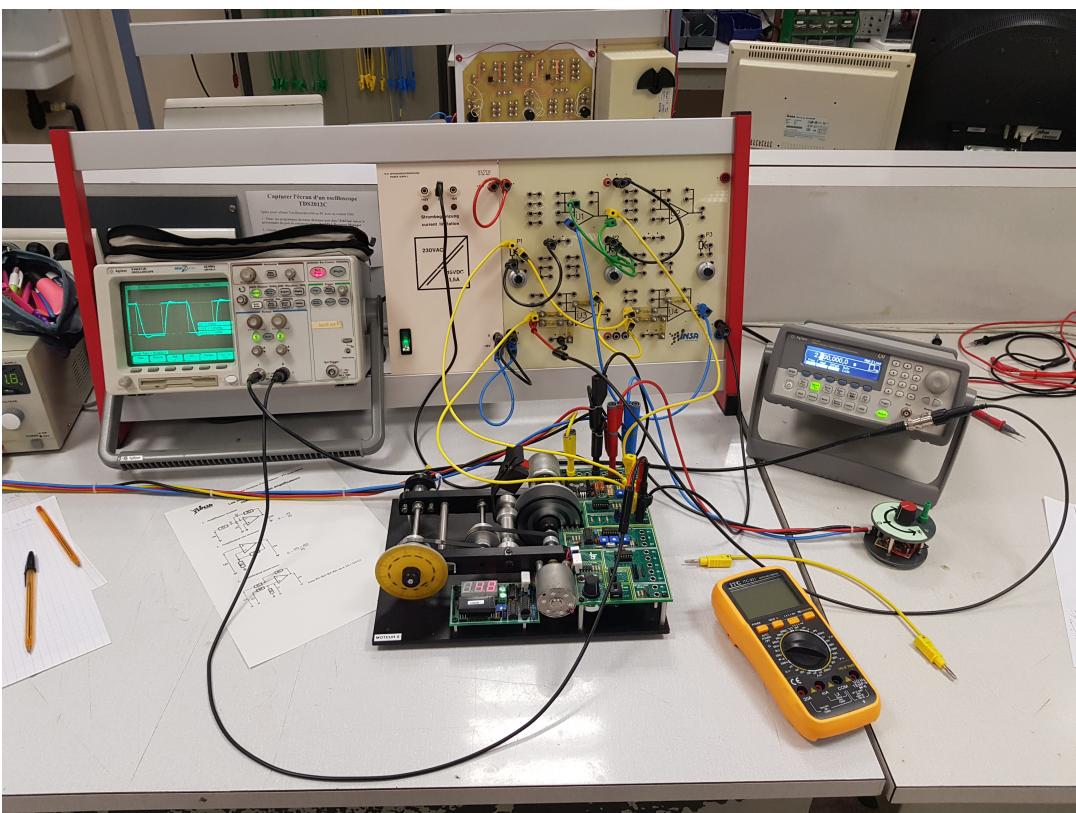


FIGURE 12 – Montage du système avec commande par proportionnel dérivé

Nous avons alors testé notre modèle dans le domaine temporel pour une entrée de type échelon :

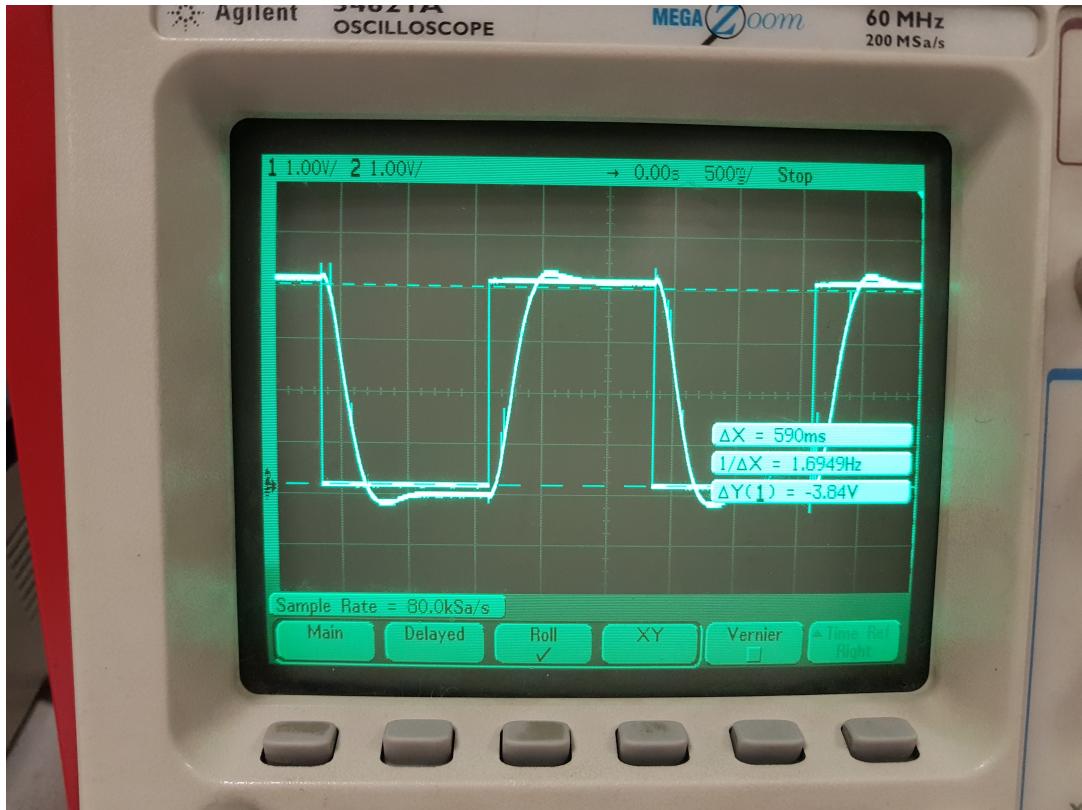


FIGURE 13 – Réponse temporelle du système à une entrée de type échelon

On observe un léger dépassement ( $< 5\%$ ), ce qui diffère des calculs menés précédemment. Cela peut venir d'une erreur de câblage ou de réglage des gains par exemple. Ce problème n'a pas été résolu par manque de temps.  
 L'erreur de trainage est :  $Err_t = \frac{4.25V}{4V} = 6.25\% < 7.04\%$  visés, donc ce critère est respecté.  
 Ainsi, malgré la présence d'un léger dépassement, le système est asservi avec succès.

## 5 Conclusion

Ce TP nous a permis d'appréhender différentes commandes, et de les mettre en application. Chacune a pu asservir le moteur, et des mesures de performance ont été effectuées. Nous avons pu saisir le fonctionnement de ces contrôleurs, et comparer leur coûts en termes de calculs, d'implémentation physique et de performances. Par exemple la complexité d'un contrôleur de type proportionnel-dérivé face à un simple contrôleur proportionnel ne nous a pas semblée justifiée dans ce cas, l'asservissement final étant totalement satisfaisant avec un proportionnel.

Les modes de calculs des lois de commandes, par marge de phase ou placement de pôles, nous ont également permis de nous familiariser avec des outils comme sisotool.

## A Annexes

### A.1 Code Matlab

```
breaklines
1 clc
2 clear all
3 close all
4
5
6 %TP1-----
7
8
9 theta=linspace(120,450,12);
10 Vs=[-4.81 -3.93 -3.05 -2.22 -1.37 -.53 .4 1.23 2.10 2.99 3.89 4.75];
11
12 figure;
13 subplot(121);
14 plot(theta,Vs);
15 xlabel('Angle Theta (en degres)');
16 ylabel('Tension Vs (en V)');
17 title('Calcul du coefficient Ks');
18
19 res=polyfit(theta,Vs,1);
20
21 Ks=res(1)*180/pi
22
23 omega=[-300 -258 -197 -149 -99 -47 0 52 96 166 200 252 293 ];
24 Vg=[-4.61 -3.94 -3 -2.27 -1.5 -0.7 0 0.73 1.4 2.5 3 3.84 4.47 ];
25
26 subplot(122);
27 plot(omega,Vg);
28 xlabel('Vitesse rotation (en tour/min)');
29 ylabel('Tension Vg (en V)');
30 title('Calcul du coefficient Kg');
31
32 res=polyfit(omega,Vg,1);
33
34 Kg=res(1)*9*2*pi/60
35
36 tau=.308;
37 Km=5.25/(Kg*6)
38
39 freq=[0.05 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.8 1 1.5 2.5 3.5 4.5 6 8 10]*2*pi;
40 Phase=[0 12 17.28 25 30 36 44.4 50 59 70 78 82 87 88 93];
41 Amplitude=[3.31 3.17 3 2.83 2.71 2.69 2.13 1.88 1.47 0.94 0.68 0.53 0.41 0.309 0.25]/(4*Kg);
42
43 Amplitude=20*log10(Amplitude);
44
45 figure;
46 subplot(221);
47 semilogx(freq,Amplitude);
48 grid on;
49 xlabel('Omega (en rad/s)');
50 ylabel('Amplitude (en dB)');
51 title('Bode (Amplitude)');
52
53 subplot(223);
```

```

54 semilogx(freq,Phase);
55 grid on;
56 xlabel('Omega (en rad/s)');
57 ylabel('Phase (en degré)');
58 title('Bode (Phase)');
59
60 Km=10^(35.22/20)
61 Tm=1/5.027
62
63 subplot(2,2,[2 4]);
64 plot(Phase,Amplitude);
65 ngrid;
66 xlabel('Phase (en degré)');
67 ylabel('Amplitude (en dB)');
68 title('Nyquist');
69
70 %TP2-----
71
72 sys_bo=tf([Ks*Km/9],[Tm 1 0]);
73 [Gm,Pm,Wgm,Wpm]=margin(sys_bo);
74
75 %corrcteur proportionnel
76 X=1/(Tm*Tm)
77 Ktheorique=sqrt((81*Tm*Tm*X*X+81*X)/(Km*Ks*Km*Ks))
78 %sisotool;
79 %valeur determinee via sisotool :
80 K=0.66945
81 sys_bf=feedback(sys_bo,K);
82 K0=Km*Ks*K/9;
83 e_train=1/K0;
84 %correcteur a retour d'etat
85 %tr a 2% <0.8s :
86 ksi_wn=4/0.8;
87 %depassemement <5% :
88 ksi=sqrt(2)/2;
89 %d'ou :
90 wn=ksi_wn/ksi;
91 K2=(2*ksi_wn*Tm-1)/(Km*Kg);
92 K1=wn*wn*9*Tm/Km/Ks;
93
94 %correcteur PD
95
96
97 k1 =3.1653
98 k2 =1.65/k1
99
100 pd_bo=tf([k1*Km*Ks],[9*Tm 9*(1+k2*k1*Kg*Km) 0]);
101 pd_bf=feedback(pd_bo,1);
102 %determination de l'amortissement, poles et depassemement
103
104 sisotool;

```