

# Marble Rolling

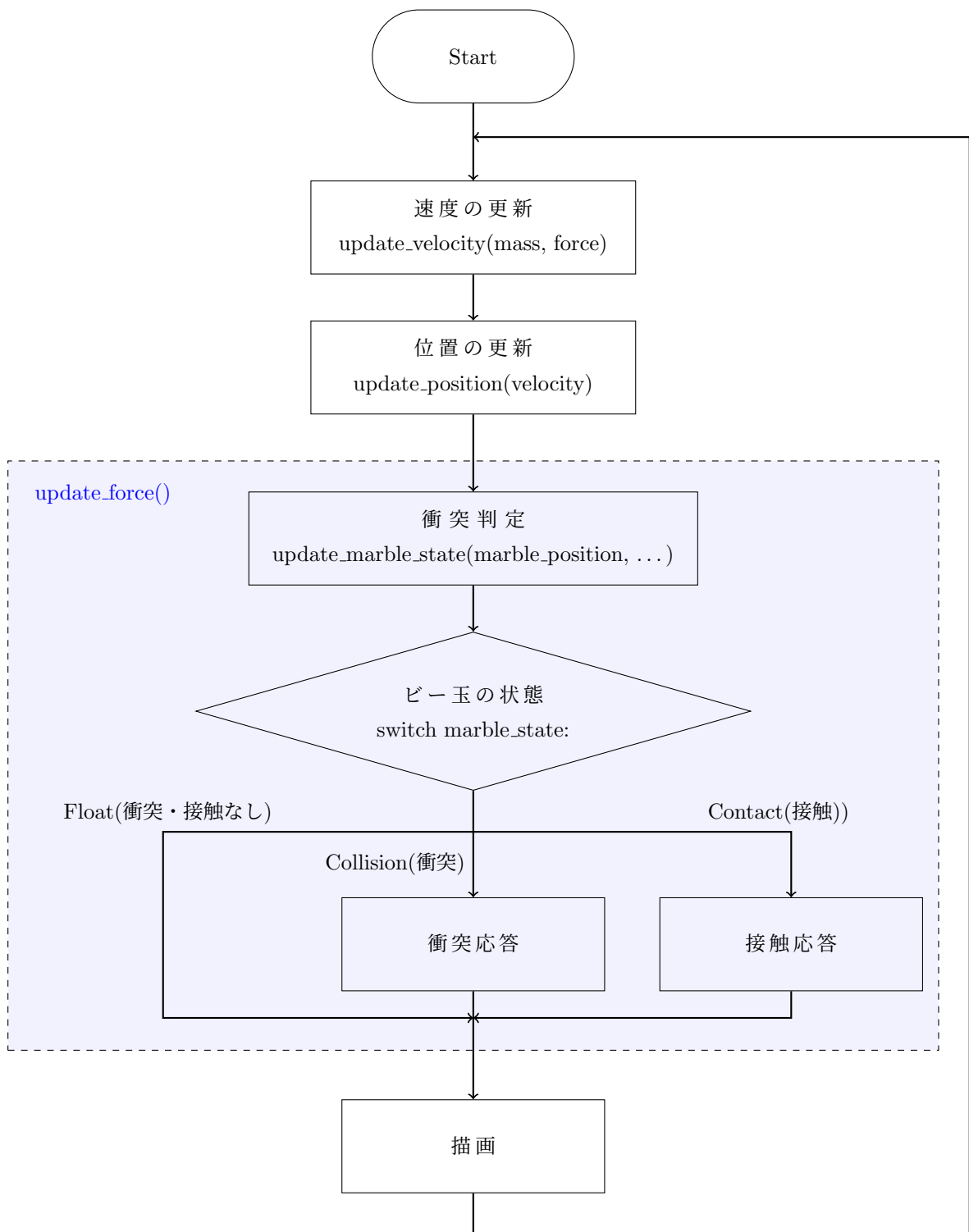
reiya0104

2022 年 4 月 29 日

## 1 物理

### 1.1 フローチャート

フローチャート



それぞれのオブジェクトを構成する要素

- Force 力: Vec3
- Velocity 速度: Vec3

- Position 位置: Vec3
- 衝突判定
  - 衝突 (Collision) or 接触 (Contact)
- 衝突応答

## 1.2 ビー玉と天板の衝突後のビー玉の速度を算出する

### 問題

速度  $\mathbf{v}_{\text{marble}}$  で動くビー玉 (marble) と, 速度  $\mathbf{v}_{\text{board}}$  で動く天板 (board) が衝突したとする. 衝突後のビー玉の速度  $\mathbf{v}'_{\text{marble}}$  を求めよ.

ここで, 天板の単位法線ベクトル (衝突面を上向きにしたもの) は  $\mathbf{n}$ , 天板とビー玉間のはね返り定数を  $e$  とする.

ただし, 天板の表面は滑らかであるとし, 衝突時に影響を受けないものとする.

### 結論

$$\mathbf{v}'_{\text{marble}} = \mathbf{v}_{\text{marble}} - (1 + e)((\mathbf{v}_{\text{marble}} - \mathbf{v}_{\text{board}}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (1)$$

### 方針

方針としては,

- (1) 静止している系から考えるのは難しいので, 天板から見た系を考える.
- (2) 天板から見た系におけるビー玉の速度を求める.
- (3) 天板から見た系において衝突後のビー玉の速度を求める.
- (4) 静止している系における衝突後のビー玉の速度を求める.

として求める.

### 解答

便宜上  $\mathbf{v}_m := \mathbf{v}_{\text{marble}}$ ,  $\mathbf{v}_b := \mathbf{v}_{\text{board}}$  とおく.

- (1) 天板から見た系を考える.
- (2) 天板から見た系におけるビー玉の速度を  $\mathbf{v}_{m \leftarrow b}$  とする. このとき,  $\mathbf{v}_{m \leftarrow b}$  は天板に対するビー玉の相対速度であるから,

$$\mathbf{v}_{m \leftarrow b} = \mathbf{v}_m - \mathbf{v}_b \quad (2)$$

である.

- (3) 天板から見た系において衝突後のビー玉の速度を  $\mathbf{v}'_{m \leftarrow b}$  とする.  
 $\mathbf{v}_{m \leftarrow b}$  を天板の鉛直方向成分  $\mathbf{v}_{m \leftarrow b}^n$  と平行方向成分  $\mathbf{v}_{m \leftarrow b}^{n'}$  に分解すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{m \leftarrow b}^n &= (\mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ \mathbf{v}_{m \leftarrow b}^{n'} &= \mathbf{v}_{m \leftarrow b} - \mathbf{v}_{m \leftarrow b}^n \\ &= \mathbf{v}_{m \leftarrow b} - (\mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \end{aligned}$$

である。

天板との衝突後、ビー玉の速度の鉛直方向の成分を  $\boldsymbol{v}'_{\text{m} \leftarrow \text{b}} \boldsymbol{n}$  とすると  $\boldsymbol{v}'_{\text{m} \leftarrow \text{b}} \boldsymbol{n} = -e \boldsymbol{v}_{\text{m} \leftarrow \text{b}} \boldsymbol{n}$  である。平行方向成分は変わらず  $\boldsymbol{v}_{\text{m} \leftarrow \text{b}} \boldsymbol{n}'$  であるから、

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{v}'_{\text{m} \leftarrow \text{b}} &= \boldsymbol{v}'_{\text{m} \leftarrow \text{b}} \boldsymbol{n} + \boldsymbol{v}_{\text{m} \leftarrow \text{b}} \boldsymbol{n}' \\
 &= -e \boldsymbol{v}_{\text{m} \leftarrow \text{b}} \boldsymbol{n} + \boldsymbol{v}_{\text{m} \leftarrow \text{b}} \boldsymbol{n}' \\
 &= -e((\boldsymbol{v}_{\text{m} \leftarrow \text{b}} \cdot \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{v}_{\text{m} \leftarrow \text{b}} - (\boldsymbol{v}_{\text{m} \leftarrow \text{b}} \cdot \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n}) \\
 &= \boldsymbol{v}_{\text{m} \leftarrow \text{b}} - (1 + e)(\boldsymbol{v}_{\text{m} \leftarrow \text{b}} \cdot \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n}
 \end{aligned} \tag{3}$$

である。

- (4) 静止している系における衝突後のビー玉の速度  $\boldsymbol{v}'_{\text{marble}}$  は、 $\boldsymbol{v}'_{\text{m} \leftarrow \text{b}}$  と  $\boldsymbol{v}_{\text{b}}$  で表すと、 $\boldsymbol{v}'_{\text{marble}} = \boldsymbol{v}'_{\text{m} \leftarrow \text{b}} + \boldsymbol{v}_{\text{b}}$  である。これと式 (2), (3) を用いると、

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{v}'_{\text{marble}} &= (\boldsymbol{v}_{\text{m} \leftarrow \text{b}} - (1 + e)(\boldsymbol{v}_{\text{m} \leftarrow \text{b}} \cdot \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{v}_{\text{b}} \\
 &= ((\boldsymbol{v}_{\text{m}} - \boldsymbol{v}_{\text{b}}) - (1 + e)((\boldsymbol{v}_{\text{m}} - \boldsymbol{v}_{\text{b}}) \cdot \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{v}_{\text{b}} \\
 &= \boldsymbol{v}_{\text{m}} - (1 + e)((\boldsymbol{v}_{\text{m}} - \boldsymbol{v}_{\text{b}}) \cdot \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n}
 \end{aligned}$$

である。

したがって、

$$\boldsymbol{v}'_{\text{marble}} = \boldsymbol{v}_{\text{marble}} - (1 + e)((\boldsymbol{v}_{\text{marble}} - \boldsymbol{v}_{\text{board}}) \cdot \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n} \tag{1}$$

が成り立つ。