

Marble Rolling

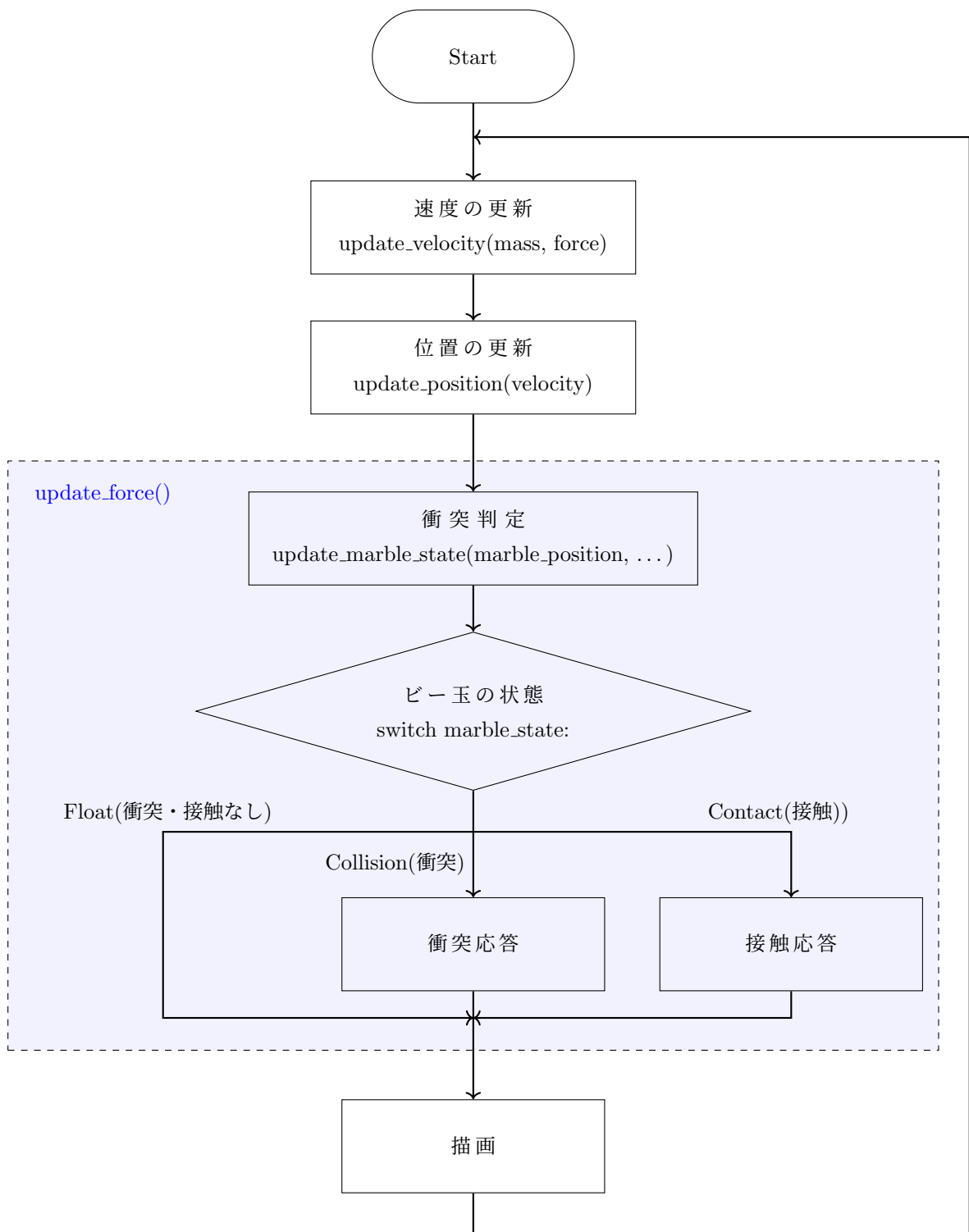
reiya0104

2022 年 5 月 13 日

1 物理

1.1 フローチャート

フローチャート



それぞれのオブジェクトを構成する要素

- Force 力: Vec3
- Velocity 速度: Vec3

- Position 位置: Vec3
- 衝突判定
 - 衝突 (Collision) or 接触 (Contact)
- 衝突応答

1.2 ビー玉と天板の衝突後のビー玉の速度を算出する

問題

速度 $\mathbf{v}_{\text{marble}}$ で動くビー玉 (marble) と, 速度 $\mathbf{v}_{\text{board}}$ で動く天板 (board) が衝突したとする. 衝突後のビー玉の速度 $\mathbf{v}'_{\text{marble}}$ を求めよ.

ここで, 天板の単位法線ベクトル (衝突面を上向きにしたもの) は \mathbf{n} , 天板とビー玉間のはね返り定数を e とする.

ただし, 天板の表面は滑らかであるとし, 衝突時に影響を受けないものとする.

結論

$$\mathbf{v}'_{\text{marble}} = \mathbf{v}_{\text{marble}} - (1 + e)((\mathbf{v}_{\text{marble}} - \mathbf{v}_{\text{board}}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (1)$$

方針

方針としては,

- (1) 静止している系から考えるのは難しいので, 天板から見た系を考える.
- (2) 天板から見た系におけるビー玉の速度を求める.
- (3) 天板から見た系において衝突後のビー玉の速度を求める.
- (4) 静止している系における衝突後のビー玉の速度を求める.

として求める.

解答

便宜上 $\mathbf{v}_m := \mathbf{v}_{\text{marble}}$, $\mathbf{v}_b := \mathbf{v}_{\text{board}}$ とおく.

- (1) 天板から見た系を考える.
- (2) 天板から見た系におけるビー玉の速度を $\mathbf{v}_{m \leftarrow b}$ とする. このとき, $\mathbf{v}_{m \leftarrow b}$ は天板に対するビー玉の相対速度であるから,

$$\mathbf{v}_{m \leftarrow b} = \mathbf{v}_m - \mathbf{v}_b \quad (2)$$

である.

- (3) 天板から見た系において衝突後のビー玉の速度を $\mathbf{v}'_{m \leftarrow b}$ とする.
 $\mathbf{v}_{m \leftarrow b}$ を天板の鉛直方向成分 $\mathbf{v}_{m \leftarrow b}^n$ と平行方向成分 $\mathbf{v}_{m \leftarrow b}^{n'}$ に分解すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{m \leftarrow b}^n &= (\mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ \mathbf{v}_{m \leftarrow b}^{n'} &= \mathbf{v}_{m \leftarrow b} - \mathbf{v}_{m \leftarrow b}^n \\ &= \mathbf{v}_{m \leftarrow b} - (\mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \end{aligned}$$

である。

天板との衝突後、ビー玉の速度の鉛直方向の成分を $\mathbf{v}'_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}$ とすると $\mathbf{v}'_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n} = -e \mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}$ である。平行方向成分は変わらず $\mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}'$ であるから、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}'_{m \leftarrow b} &= \mathbf{v}'_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}' \\
 &= -e \mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}' \\
 &= -e((\mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) + (\mathbf{v}_{m \leftarrow b} - (\mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) \\
 &= \mathbf{v}_{m \leftarrow b} - (1 + e)(\mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}
 \end{aligned} \tag{3}$$

である。

- (4) 静止している系における衝突後のビー玉の速度 $\mathbf{v}'_{\text{marble}}$ は、 $\mathbf{v}'_{m \leftarrow b}$ と \mathbf{v}_b で表すと、 $\mathbf{v}'_{\text{marble}} = \mathbf{v}'_{m \leftarrow b} + \mathbf{v}_b$ である。これと式 (2), (3) を用いると、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}'_{\text{marble}} &= (\mathbf{v}_{m \leftarrow b} - (1 + e)(\mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) + \mathbf{v}_b \\
 &= ((\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_b) - (1 + e)((\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) + \mathbf{v}_b \\
 &= \mathbf{v}_m - (1 + e)((\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}
 \end{aligned}$$

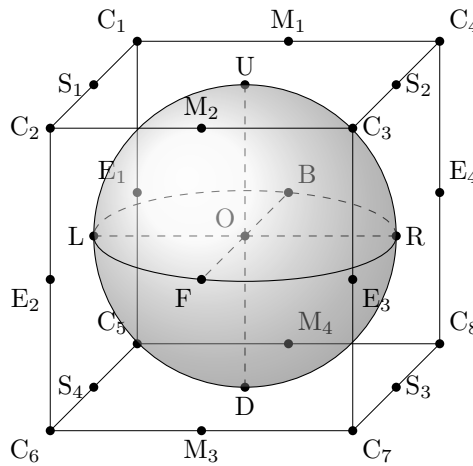
である。

したがって、

$$\mathbf{v}'_{\text{marble}} = \mathbf{v}_{\text{marble}} - (1 + e)((\mathbf{v}_{\text{marble}} - \mathbf{v}_{\text{board}}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \tag{1}$$

が成り立つ。

1.3 衝突判定



ビー玉の衝突判定の流れ

1. ビー玉の位置をタイルの座標系に変換 (1.3.1)
2. ビー玉の各軸の最大最小の座標に基づくタイルの位置を抽出 (1.3.2)
3. 抽出された 8 つのタイルの位置とその間のタイルの位置についてタイルが存在するものを取り出す (1.3.3)

4. 存在するタイルについてそのタイルとビー玉との距離を計算 (1.3.4)
5. 距離がビー玉の半径よりも小さかったら衝突してると判定 (1.3.5)

それぞれについて見ていく。

1.3.1 ビー玉の位置をタイルの座標系に変換

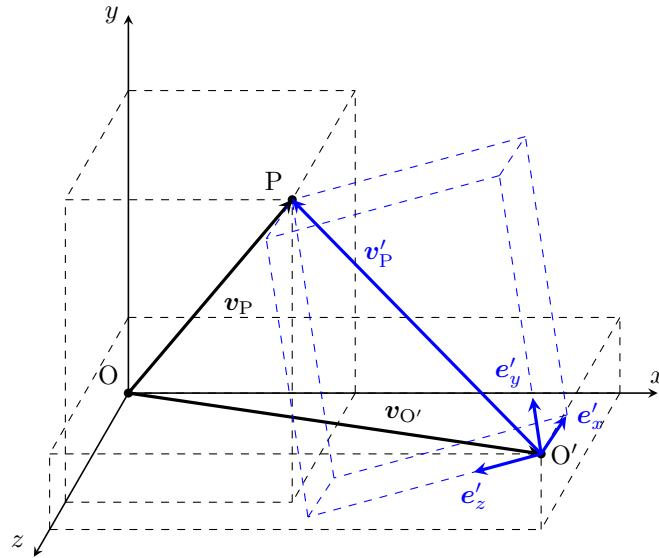
タイルの (直交) 座標系の基本ベクトルを e'_x, e'_y, e'_z とおく。また、タイルの座標系の原点 O' のワールドの座標系における位置ベクトルを $v_{O'}$ とする。

ここで、ビー玉について、ビー玉のある点を P とし、ワールドの座標系における位置ベクトルを v_P 、タイルの座標系における位置ベクトルを v'_P とする。

このとき、 v'_P は $e'_x, e'_y, e'_z, v_{O'}, v_P$ を用いて

$$v'_P = (e'_x \ e'_y \ e'_z)^{-1} (v_P - v_{O'}) \quad (4)$$

と表せる。



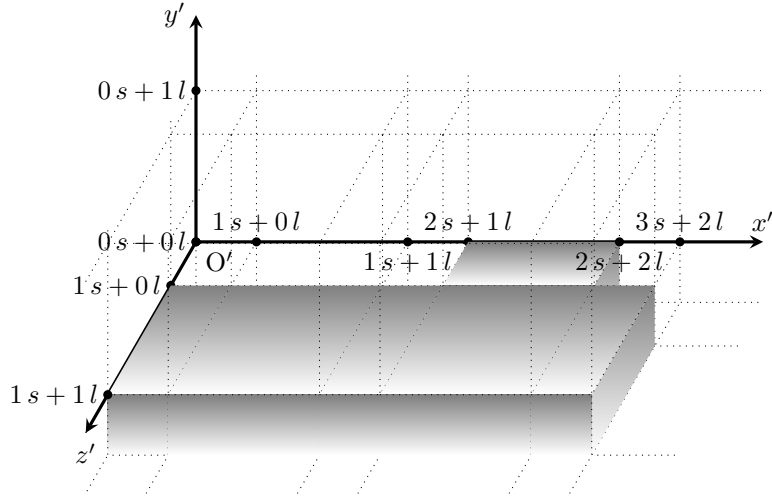
1.3.2 ビー玉の各軸の最大最小の座標に基づくタイルの位置を抽出

以下はタイルの座標系として考える。

本題に入る前に、タイルの構成と、点とタイルの位置関係について述べる。

タイルの構成

タイルは直方体できており、下の図のように敷き詰められている。ここで、 $s = \text{TILE_SHORT_WIDTH}$, $l = \text{TILE_LONG_WIDTH}$ とする。



この図のように、 x', y', z' 軸のそれぞれの方向における i, j, k 番目 ($i, j, k = 0, 1, 2, \dots$) のタイルは、

$$\begin{aligned}
 x' \text{ 軸: } & \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor s + \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor l \leq x' < \left\lfloor \frac{i+2}{2} \right\rfloor s + \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor l \\
 y' \text{ 軸: } & \left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor s + \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor l \leq y' < \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor s + \left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor l \\
 z' \text{ 軸: } & \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor s + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor l \leq z' < \left\lfloor \frac{k+2}{2} \right\rfloor s + \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor l
 \end{aligned} \tag{5}$$

の領域に配置される。ここで、 $\lfloor x \rfloor$ は $n \leq x < n+1$ となる整数 n のことである。今後、この領域にあるタイルのことを $[i, j, k]$ と表し、この各軸の範囲をそれぞれ $X'_{[i,j,k]}, Y'_{[i,j,k]}, Z'_{[i,j,k]}$ と表すとする。

例えば、 $[1, 2, 3]$ は、($s \leq x' < s+l$ かつ $s \leq y' < s+l$ かつ $2s+l \leq z' < 2s+2l$) という領域のタイルを表し、 $X'_{[1,2,3]} = [s, s+l), Y'_{[1,2,3]} = [s, s+l), Z'_{[1,2,3]} = [2s+l, 2s+2l)$ である。

点とタイルの位置関係

このようなタイルの構成について、ある点 $P(a, b, c)$ がどのタイル $[i, j, k]$ に含まれているのかを考えたい。これは、上の式 (5) から逆算すると、 i, j, k はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 i &= 2 \left\lfloor \frac{a}{s+l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a-s}{s+l} - \left\lfloor \frac{a}{s+l} \right\rfloor \right\rfloor + 1 =: f_{x'}(a) \\
 j &= 2 \left\lfloor \frac{b+s}{s+l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{s+l} - \left\lfloor \frac{b+s}{s+l} \right\rfloor \right\rfloor + 1 =: f_{y'}(b) \\
 k &= 2 \left\lfloor \frac{c}{s+l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c-s}{s+l} - \left\lfloor \frac{c}{s+l} \right\rfloor \right\rfloor + 1 =: f_{z'}(c)
 \end{aligned} \tag{6}$$

となる。

求め方:

i を求める。 i は 0 以上の整数であるから、ある非負整数 n を用いて $i = 2n$ または $i = 2(n+1)$ と

表せる．このとき，式 (5) の x' の範囲はそれぞれ

$$\begin{aligned} i = 2n \text{ のとき: } & n(s+l) \leq x' < n(s+l) + s \\ i = 2n+1 \text{ のとき: } & n(s+l) + s \leq x' < (n+1)(s+l) \end{aligned}$$

となる．各辺を $s+l$ で割ると， $s+l > 0$ から，

$$\begin{aligned} i = 2n \text{ のとき: } & n \leq \frac{x'}{s+l} < n + \frac{s}{s+l} \\ i = 2n+1 \text{ のとき: } & n + \frac{s}{s+l} \leq \frac{x'}{s+l} < n+1 \end{aligned}$$

がいえる．これより， a について $n' \leq \frac{a}{s+l} < n' + \frac{s}{s+l}$ を満たすような非負整数 n' が存在すれば，この n' について $i = 2n'$ が成り立ち， $n' + \frac{s}{s+l} \leq \frac{a}{s+l} < n' + 1$ を満たすような非負整数 n' が存在すれば，この n' について $i = 2n' + 1$ が成り立つ．任意の a と n' について $\frac{a}{s+l} < n' + \frac{s}{s+l} \leq \frac{a}{s+l}$ は成立しないので，上の二つはどちらかしか成り立たない．

$m := \lfloor \frac{a}{s+l} \rfloor$ とすると， $m \leq \frac{a}{s+l} < m+1$ より， $n' = m$ である．このとき，

$$\begin{aligned} & i = 2m + g(a) \\ \left(\text{ここで, } g(a) = \begin{cases} 0 & \left((m \leq) \quad \frac{a}{s+l} < m + \frac{s}{s+l} \text{ のとき} \right) \\ 1 & \left((m+1 >) \frac{a}{s+l} \geq m + \frac{s}{s+l} \text{ のとき} \right) \end{cases} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ． $g(a)$ は複数の表示があるが，ここではガウス記号 (床関数) を用いると

$g(a) = \lfloor \frac{a}{s+l} - (m + \frac{s}{s+l}) \rfloor + 1 = \lfloor \frac{a-s}{s+l} - m \rfloor + 1$ と表せる．よって， $i = 2\lfloor \frac{a}{s+l} \rfloor + \lfloor \frac{a-s}{s+l} - \lfloor \frac{a}{s+l} \rfloor \rfloor + 1$ となる． j, k についても同様にして求められる．

ここから本題に入る．ビー玉の半径を r とし，ビー玉の中心がタイルの座標系において (a, b, c) の位置にあるとする．

このとき，各軸の最大最小の座標に基づくタイルの位置を求める． x' 軸における最大・最小値はそれぞれ $a+r, a-r$ である．同様に， y' 軸では $b+r, b-r$ ， z' 軸では $c+r, c-r$ である．ここで，式 (6) の $f_{x'}, f_{y'}, f_{z'}$ を用いて

$$\begin{aligned} i_- &:= f_{x'}(a-r), & i_+ &:= f_{x'}(a+r), \\ j_- &:= f_{y'}(b-r), & j_+ &:= f_{y'}(b+r), \\ k_- &:= f_{z'}(c-r), & k_+ &:= f_{z'}(c+r) \end{aligned} \tag{7}$$

とすると，求めるタイルは

$$\begin{aligned} T_1 &:= [i_-, j_-, k_-], & T_2 &:= [i_+, j_-, k_-], & T_3 &:= [i_-, j_+, k_-], & T_4 &:= [i_+, j_+, k_-], \\ T_5 &:= [i_-, j_-, k_+], & T_6 &:= [i_+, j_-, k_+], & T_7 &:= [i_-, j_+, k_+], & T_8 &:= [i_+, j_+, k_+] \end{aligned}$$

の 8 つである．

1.3.3 抽出された 8 つのタイルの位置とその間のタイルの位置についてタイルが存在するものを取り出す

前節 1.3.2 のタイル T_λ ($\lambda = 1, \dots, 8$) について，そのタイルらに囲まれた (T_λ を含む) タイルの集合は， $S := \{[i, j, k] \mid i_- \leq i \leq i_+, j_- \leq j \leq j_+, k_- \leq k \leq k_+\}$ と表せる．このうち，タイルが存在するものは，

$\{[i, j, k] \mid [i, j, k] \in S, \text{tile_state}[i][j][k] = 1\}$ である。ここで, `tile_state` はファイル `src/resources.rs` (変更の可能性あり) の `TileState` のインスタンスである。

1.3.4 存在するタイルについてそのタイルとビー玉との距離を計算

定義 1.1. あるタイルの境界の集合を $S_{\text{タイル}}$, ビー玉の境界の集合を $S_{\text{ビー玉}}$ とおく。このとき, タイルとビー玉の **距離** d を,

$$d = \min\{|p - q| \mid p \in S_{\text{タイル}}, q \in S_{\text{ビー玉}}\}$$

と定義する (すなわち、タイルとビー玉の最短距離のことである)。

ビー玉の位置を (a, b, c) , 衝突判定を行うタイルを $[i, j, k]$ とする。ビー玉の半径を r とする。

式 (5) について, x', y', z' 軸におけるタイルが存在する範囲の下限と上限をそれぞれ

$$\begin{aligned} x'_- &:= \inf(X'_{[i,j,k]}) = \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor s + \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor l, & x'_+ &:= \sup(X'_{[i,j,k]}) = \left\lfloor \frac{i+2}{2} \right\rfloor s + \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor l \\ y'_- &:= \inf(Y'_{[i,j,k]}) = \left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor s + \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor l, & y'_+ &:= \sup(Y'_{[i,j,k]}) = \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor s + \left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor l \\ z'_- &:= \inf(Z'_{[i,j,k]}) = \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor s + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor l, & z'_+ &:= \sup(Z'_{[i,j,k]}) = \left\lfloor \frac{k+2}{2} \right\rfloor s + \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor l \end{aligned}$$

とする。このとき, d_λ ($\lambda \in \{x'_\pm, y'_\pm, z'_\pm\}$) を

$$\begin{aligned} d_{x'_\pm} &:= \begin{cases} \pm(a - x'_\pm) & (\text{if } \pm(a - x'_\pm) \geq 0) \\ 0 & (\text{if } \pm(a - x'_\pm) < 0) \end{cases} \\ d_{y'_\pm} &:= \begin{cases} \pm(b - y'_\pm) & (\text{if } \pm(b - y'_\pm) \geq 0) \\ 0 & (\text{if } \pm(b - y'_\pm) < 0) \end{cases} \\ d_{z'_\pm} &:= \begin{cases} \pm(c - z'_\pm) & (\text{if } \pm(c - z'_\pm) \geq 0) \\ 0 & (\text{if } \pm(c - z'_\pm) < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

とする (複合同順)。

このとき, ビー玉とタイルの距離 d は,

$$d = \sqrt{\sum_{\lambda \in \{x'_\pm, y'_\pm, z'_\pm\}} d_\lambda^2} - r \quad (8)$$

である。

1.3.5 距離がビー玉の半径よりも小さかったら衝突してると判定