

# Marble Rolling

reiya0104

2022 年 4 月 24 日

## 1 物理

### 1.1 ビー玉と天板の衝突後のビー玉の速度を算出する

#### 問題

速度  $\boldsymbol{v}_{\text{marble}}$  で動くビー玉 (marble) と, 速度  $\boldsymbol{v}_{\text{board}}$  で動く天板 (board) が衝突したとする. 衝突後のビー玉の速度  $\boldsymbol{v}'_{\text{marble}}$  を求めよ.

ここで, 天板の単位法線ベクトル (衝突面を上向きにしたもの) は  $\boldsymbol{n}$ , 天板とビー玉間のはね返り定数を  $e$  とする.

ただし, 天板の表面は滑らかであるとし, 衝突時に影響を受けないものとする.

#### 結論

$$\boldsymbol{v}'_{\text{marble}} = \boldsymbol{v}_{\text{marble}} - (1 + e)((\boldsymbol{v}_{\text{marble}} - \boldsymbol{v}_{\text{board}}) \cdot \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n} \quad (1)$$

#### 方針

方針としては,

- (1) 静止している系から考えるのは難しいので, 天板から見た系を考える.
- (2) 天板から見た系におけるビー玉の速度を求める.
- (3) 天板から見た系において衝突後のビー玉の速度を求める.
- (4) 静止している系における衝突後のビー玉の速度を求める.

として求める.

## 解答

便宜上  $\mathbf{v}_m := \mathbf{v}_{\text{marble}}$ ,  $\mathbf{v}_b := \mathbf{v}_{\text{board}}$  とおく.

- (1) 天板から見た系を考える.  
 (2) 天板から見た系におけるビー玉の速度を  $\mathbf{v}_{m \leftarrow b}$  とする. このとき,  $\mathbf{v}_{m \leftarrow b}$  は天板に対するビー玉の相対速度であるから,

$$\mathbf{v}_{m \leftarrow b} = \mathbf{v}_m - \mathbf{v}_b \quad (2)$$

である.

- (3) 天板から見た系において衝突後のビー玉の速度を  $\mathbf{v}'_{m \leftarrow b}$  とする.  
 $\mathbf{v}_{m \leftarrow b}$  を天板の鉛直方向成分  $\mathbf{v}_{m \leftarrow b}^n$  と平行方向成分  $\mathbf{v}_{m \leftarrow b}^{n'}$  に分解すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{m \leftarrow b}^n &= (\mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ \mathbf{v}_{m \leftarrow b}^{n'} &= \mathbf{v}_{m \leftarrow b} - \mathbf{v}_{m \leftarrow b}^n \\ &= \mathbf{v}_{m \leftarrow b} - (\mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \end{aligned}$$

である.

天板との衝突後, ビー玉の速度の鉛直方向の成分を  $\mathbf{v}'_{m \leftarrow b}^n$  とすると  $\mathbf{v}'_{m \leftarrow b}^n = -e \mathbf{v}_{m \leftarrow b}^n$  である. 平行方向成分は変わらず  $\mathbf{v}_{m \leftarrow b}^{n'}$  であるから,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_{m \leftarrow b} &= \mathbf{v}'_{m \leftarrow b}^n + \mathbf{v}_{m \leftarrow b}^{n'} \\ &= -e \mathbf{v}_{m \leftarrow b}^n + \mathbf{v}_{m \leftarrow b}^{n'} \\ &= -e((\mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) + (\mathbf{v}_{m \leftarrow b} - (\mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) \\ &= \mathbf{v}_{m \leftarrow b} - (1 + e)(\mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3)$$

である.

- (4) 静止している系における衝突後のビー玉の速度  $\mathbf{v}'_{\text{marble}}$  は,  $\mathbf{v}'_{m \leftarrow b}$  と  $\mathbf{v}_b$  で表すと,  
 $\mathbf{v}'_{\text{marble}} = \mathbf{v}'_{m \leftarrow b} + \mathbf{v}_b$  である. これと式 (2), (3) を用いると,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_{\text{marble}} &= (\mathbf{v}_{m \leftarrow b} - (1 + e)(\mathbf{v}_{m \leftarrow b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) + \mathbf{v}_b \\ &= ((\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_b) - (1 + e)((\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) + \mathbf{v}_b \\ &= \mathbf{v}_m - (1 + e)((\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \end{aligned}$$

である.

したがって,

$$\mathbf{v}'_{\text{marble}} = \mathbf{v}_{\text{marble}} - (1 + e)((\mathbf{v}_{\text{marble}} - \mathbf{v}_{\text{board}}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (1)$$

が成り立つ.