

Séminaire

ANALYSE MATHÉMATIQUE DE L'EFFET DE SERRE SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Réjane JOYARD, Océanne BOUSQUET, Yannis LEBRUN,
Alexis ALZURIA, Raphaël BARATEAU, Aurélien LONCQ

Encadré par Catherine CHOQUET

Table des matières

1	Introduction	3
2	Analyse des températures du globe terrestre par Fourier	3
2.1	Sources de chaleur	3
2.1.1	Chaleur géothermique	4
2.1.2	Rayonnements des astres environnants	4
2.1.3	Rayonnement solaire	5
2.2	Rôle des masses d'air et de l'eau	7
2.2.1	Masses d'air	7
2.2.2	Masses d'eau	9
2.3	Bilan énergétique et effet de serre	10
3	Modèle de transfert radiatif pour l'effet de serre	11
3.1	Hypothèses et résultats selon Bardos et Pironneau	12
3.2	Élargissement des hypothèses et résultats	15
4	Conclusion	18
	Table des figures	21

1 Introduction

Dans le cadre d'un projet lié à l'enseignement Séminaires Juniors, et en tant qu'étudiants du Master MIX, nous sommes amenés à explorer le monde de la recherche aussi bien d'un point de vue bibliographique que de celui de la restitution d'une problématique spécifique. Nous avons eu l'occasion de nous intéresser aux travaux de Fourier [1] ainsi qu'à un article récent [2] qui traitent tous les deux de l'effet de serre.

Joseph Fourier travaillait à l'origine sur la transmission de la chaleur sur les barres de fer. Il a donc développé la théorie de la chaleur, qui permet d'étudier les échanges thermiques au sein de différents milieux. Il s'est ensuite attaché à appliquer ses travaux sur les températures de la Terre dans son *Mémoire sur les températures du globe terrestre et des espaces planétaires* publié en 1824. Malgré une complexité bien plus importante du problème et un manque de connaissances sur la structure même de la Terre ainsi que des couches atmosphériques, il a malgré tout montré un réchauffement global et a ainsi pu mentionner pour la première fois l'impact de l'activité humaine sur le climat terrestre.

L'article de Claude Bardos et d'Olivier Pironneau offre un point de vue plus moderne qui modélise et simule numériquement l'effet de serre, et qui cherche donc à comprendre l'impact des gaz à effet de serre sur le réchauffement climatique. Après avoir utilisé plusieurs méthodes numériques pour minimiser l'erreur résultant des approximations numériques, l'article offre des résultats assez surprenants en terme de températures de l'atmosphère et dénote notamment un refroidissement des températures terrestres à mesure de la prise en compte des gaz à effet de serre. Ces résultats doivent donc être abordés avec précaution et ne prouvent en aucun cas que les gaz à effet de serre contribuent au refroidissement de la Terre compte tenu des hypothèses utilisées pour étudier le problème.

Nous nous sommes alors intéressés aux travaux de Fourier ainsi que de ceux de Bardos et Pironneau afin de comprendre les différentes sources de chaleur qui concourent au réchauffement de la Terre ainsi que les raisons pour lesquelles les-dits résultats sont surprenants. Nous avons alors tenté d'approfondir les travaux déjà réalisés en prenant notamment en compte l'albédo terrestre.

Nous nous intéresserons dans une première partie, à l'étude de Fourier dans laquelle les effets de chacune des sources de chaleur sont étudiées indépendamment les unes des autres grâce au caractère linéaire de l'équation de la chaleur. Nous étudierons par la suite le modèle de transfert radiatif proposé par [2] dans lequel nous analyserons les hypothèses ainsi que les résultats de l'article. Nous proposerons alors par la suite un nouveau modèle qui cherche à prendre en compte l'albédo à la surface terrestre mais également à différentes altitudes.

2 Analyse des températures du globe terrestre par Fourier

2.1 Sources de chaleur

Dans son analyse, Joseph Fourier identifie trois sources de chaleur principales contribuant à l'échauffement du globe terrestre. Chacune de ces sources joue un rôle distinct dans le bilan thermique de la Terre :

- **La chaleur géothermique :**

Cette source de chaleur provient de l'intérieur de la Terre. Elle résulte des processus géologiques tels que le flux de chaleur provenant du manteau terrestre et du noyau. Bien que cette contribution soit relativement constante à l'échelle des temps humains, il semble important de la prendre en compte au vu de l'activité volcanique de la Terre.

- **La chaleur provenant des astres environnants :**

Cette source de chaleur englobe les rayonnements électromagnétiques reçus par la Terre en raison de sa localisation dans l'Univers observable.

- **Les rayonnements solaires :**

Il s'agit de la principale source de chaleur externe pour la Terre. L'énergie solaire est émise par le Soleil sous forme de rayonnement électromagnétique, comprenant principalement la lumière visible, les infrarouges et les rayons ultraviolets. Une partie de cette énergie est absorbée par l'atmosphère terrestre, le sol et les océans, tandis qu'une autre partie est réfléchie par la surface terrestre et l'atmosphère.

2.1.1 Chaleur géothermique

Durant sa formation, la Terre a accumulé une grande quantité de chaleur provenant des profondeurs du globe à cause de toutes les collisions qu'elle a subit lors de l'agglomération des amas de matière. En effet, Fourier avait supposé que lors de la formation de la Terre, la température de cette sphère solide s'est extrêmement réchauffée puis immédiatement refroidie à cause de la température ambiante de l'espace, et qu'elle continuait de diminuer lentement. On sait aujourd'hui que Fourier avait raison puisque la température de cette Terre primitive (au début de sa formation) était de l'ordre de 4 700°C, alors que la température actuelle de la surface terrestre est de 15°C.

L'idée principale de Fourier était que cette source de chaleur se dissipait extrêmement lentement à la surface de la Terre malgré une forte température interne du noyau terrestre. Effectivement, grâce à plusieurs observations et calculs, Fourier a pu montrer que depuis l'Antiquité jusqu'à son temps, la température de la surface terrestre n'avait augmenté que de 0.3°C. Il avait également calculé que si l'on remplaçait les couches terrestres allant du centre de la Terre jusqu'à environ 60 kilomètres de profondeur par de la matière chauffée à 5 000°C, il faudrait attendre 200 000 ans pour en ressentir les effets à la surface de la Terre. Ces calculs ont ainsi permis de conforter Fourier sur l'hypothèse suivante : la chaleur de la Terre n'a donc qu'un effet moindre à la surface de la Terre.

De plus, en utilisant les données de nombreux forages qui ont été réalisés, il a pu constater des variations de température sur différents points d'une verticale se prolongeant de la surface à l'intérieur de la Terre : plus la profondeur était grande, plus la température augmentait. Selon Fourier, cet accroissement de température était d'environ 1°C tous les 32 mètres de profondeur. Donc en faisant le calcul suivant, on obtient un noyau à 200 000°C, ce qui est 28 fois plus que la température de la surface du Soleil :

$$T_{noyau} = \frac{6.4 \times 10^6}{32} = 200\,000^\circ C$$

On sait aujourd'hui que c'est faux, puisque la température du noyau de la Terre est de 5 000°C. Fourier s'était donc trompé, mais même en ayant surestimé la température du noyau, il a réussi à montrer qu'elle avait un effet négligeable à la surface.

2.1.2 Rayonnements des astres environnants

À l'époque de Fourier, les connaissances sur la température dans l'espace étaient rudimentaires, ce qui a entraîné des suppositions incorrectes telles que la comparaison entre la température de l'espace et celle des pôles planétaires. Tout d'abord, il a identifié que les rayons solaires arrivaient de façon oblique sur les pôles et perpendiculaire au niveau de l'équateur : ceci expliquerait en partie les températures plus basses. Cependant, Fourier a calculé que cette seule explication ne justifiait pas les températures observées aux pôles qui seraient beaucoup plus froids que ce qu'ils ne sont réellement. Il cherche alors à identifier une autre source de chaleur qui réchauffe les pôles : le rayonnement des astres environnants.

La Terre est continuellement irradiée par les astres de tout l'Univers observable agissant ainsi comme une enveloppe de température constante autour de la planète. De cette façon, Fourier va conclure que les pôles sont à une température à peine plus élevée que celle de l'espace.

Aujourd'hui, nous comprenons que la température dans l'espace est proche du zéro absolu depuis le milieu du 20ème siècle, ne variant que près des sources de chaleur telles que les astres. En effet, tous les points de l'Univers sont loin d'être tous à la même température. Fourier va cependant considérer que la température de l'espace au voisinage de la Terre est constante au vu de la grande différence des échelles. Ceci peut être traduit mathématiquement par une continuité de la température. Cependant, Fourier n'avait pas accès à beaucoup de données et a donc supposé, à tort, que les pôles sont à une température similaire au vide spatial.

De nos jours, nous savons que l'excentricité de l'orbite terrestre ainsi que l'obliquité de la Terre sont responsables de la variation des saisons. De plus, la chaleur géothermique et l'effet de serre empêchent la température de s'approcher du zéro absolu sur Terre. Le grand nombre de corps célestes contribue également à atténuer de nombreuses inégalités que l'on pourrait observer : ce qui résulte en une irradiation plutôt uniforme de la part de l'Univers.

En conclusion, Fourier mentionne que la Terre est immergée dans un environnement de température constante. Cependant, il estime cette température en se basant sur les températures les plus extrêmes jamais mesurées sur Terre (de l'ordre de -60°C en Sibérie). Il fixe alors cette température à environ -50°C alors qu'en réalité, le vide spatial est de -270°C .

2.1.3 Rayonnement solaire

L'atmosphère terrestre est donc chauffée par les rayonnements des astres environnants ainsi que par la chaleur propre de la Terre mais elle reçoit également les rayons du Soleil. Ces rayons, sous forme de "chaleur lumineuse", irradient la surface terrestre et peuvent aujourd'hui être quantifiés grâce à des satellites qui mesurent la rayonnement incident :

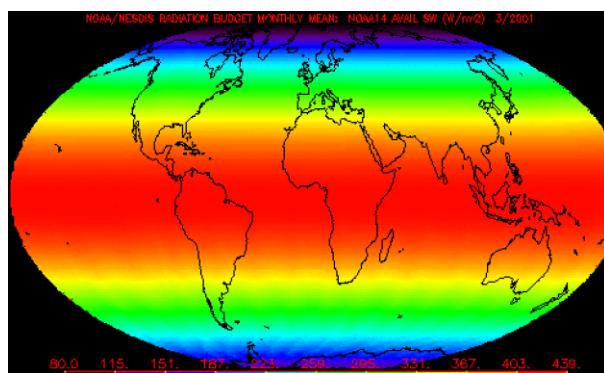


FIGURE 1 – Énergie radiative incidente mesurée en W/m^2 (mars 2001)

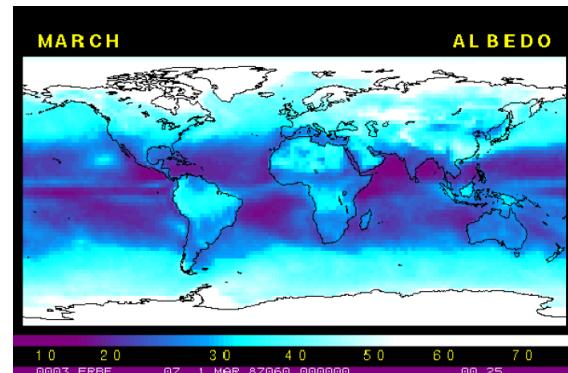


FIGURE 2 – Rayonnement solaire réfléchi vers l'espace (albédo)

On constate alors que cette énergie est plus intense à l'équateur et plus faible aux pôles ainsi qu'aux tropiques. Il y a une répartition inégale de l'énergie incidente à la surface du globe [Figure 1].

Fourier connaissait déjà la cause de cette distribution inégale. Nous l'avons déjà abordée dans la section précédente. En effet, le flux solaire incident dépend uniquement de la latitude. Ceci s'explique par le fait que les rayons solaires sont perpendiculaires à la surface de l'équateur mais que le rayonnement incident est oblique par rapport à la surface des pôles. Ainsi pour un même rayon, les rayons sont répartis sur une surface plus grande aux pôles et la quantité d'énergie reçue par unité de surface y est donc moins grande. Cette disparité est également accompagnée des cycles diurnes et saisonniers créés par la rotation de la Terre sur elle-même ainsi qu'autour du Soleil. Fourier a aussi constaté l'effet de cette périodicité sur les températures des couches terrestres supérieures.

Un des phénomènes que Fourier n'a cependant pas traité est l'albédo. Il s'agit de la proportion de rayonnements lumineux réfléchis vers l'espace. Cette quantité varie entre 0% et 100% où 100% correspond à un miroir parfait qui renverrait tout ce qu'il reçoit. L'albédo permet donc de quantifier la capacité d'un objet à renvoyer l'énergie lumineuse qu'il reçoit.

Nous pouvons observer [Figure 2] que les pôles ainsi que les grands déserts possèdent un fort pouvoir réfléchissant. De plus, les océans tropicaux absorbent une grande partie du rayonnement car les masses océaniques absorbent d'avantage d'énergie que les masses continentales. Une fine ligne plus claire peut également être observée à l'équateur. Ceci s'explique par le fait que les zones équatoriales sont connues pour être plus nuageuses. La réflexion des nuages accroît alors l'albédo.

En moyenne, la Terre réfléchit 30% du rayonnement solaire incident. 70% de l'énergie reçue pénètre alors sa masse et s'y convertit en "chaleur obscure" aujourd'hui appelée rayonnement infrarouge [Figure 4]. Une grande absorption de l'énergie a pour conséquence une hausse des températures du milieu concerné. C'est pourquoi les pôles sont plus froids que l'équateur. Fourier avait expliqué cette différence par le fait que les rayonnements solaires pénètrent la masse de la Terre par la surface équatoriale et se dissipent à travers les régions polaires qui possèdent une température semblable à celle du vide spatial mais ce phénomène est en fait majoritairement dû à un albédo important et un apport énergétique moindre au niveau des pôles.

Afin d'illustrer la conversion de la "chaleur lumineuse" en "chaleur obscure", Fourier reprend une expérience très importante dans la compréhension du bilan radiatif terrestre : celle du physicien et voyageur suisse Horace-Bénédict de Saussure. Celle-ci consiste à exposer aux rayonnements solaires une boîte couverte d'une ou plusieurs lames de verre transparentes qui joueront le rôle de l'atmosphère. L'intérieur du vase est garni d'une couche de liège noir qui jouera le rôle de la surface terrestre. Nous pouvons déjà souligner que, de cette manière, on cherche à obtenir un albédo proche de 0% dans le but de maximiser l'absorption de l'énergie solaire. Le liège permet également d'assurer une certaine isolation qui a pour but de minimiser les pertes énergétiques. On place ensuite plusieurs thermomètres à l'intérieur de la boîte ainsi que dans chaque intervalle compris entre deux plaques de verre. On a alors constaté après exposition au Soleil, que les températures relevées entre les plaques de verre étaient beaucoup moins importantes que celles du fond de la boîte. Ce phénomène s'accompagnait également d'une décroissance des températures depuis le fond de la boîte jusqu'à la couche supérieure.

Fourier vient apporter deux arguments principaux pour expliquer ces résultats. Tout d'abord, la chaleur acquise se concentre car elle n'est pas dissipée immédiatement par le renouvellement de l'air. De plus, la chaleur lumineuse a des propriétés différentes de la chaleur obscure. C'est ce point qui joue un rôle fondamental dans le réchauffement du milieu observé. En effet, quand les rayonnements solaires atteignent le fond de la boîte après avoir traversé les différentes couches de verre successives, ils échauffent l'air et les parois du contenant. L'énergie cesse alors d'être lumineuse, elle est convertie en chaleur obscure (ou rayonnement infrarouge). Dans cet état, elle ne peut plus traverser librement les plaques de verre car celles-ci sont transparentes pour le rayonnement solaire mais opaques aux rayonnements infrarouges. L'énergie s'accumule alors de plus en plus jusqu'à ce que l'énergie affluente soit compensée par l'énergie qui se dissipe. Fourier assure par la suite, que cette expérience (avec des plaques de verre solides) est équivalente au cas de la Terre et de son atmosphère gazeuse qui possède plusieurs couches distinctes.

On sait cependant aujourd'hui que la température des couches de l'atmosphère n'est pas décroissante depuis la surface jusqu'à la partie supérieure de l'atmosphère [Figure 3]. En effet, la diversité des couches atmosphériques empêche cette décroissance. Par exemple la mésopause, limite entre la mésosphère et la thermosphère située à 80 kilomètres d'altitude, marque une forte différence de température car la mésosphère possède moins de gaz (ce qui implique une diminution des températures) mais la thermosphère, bien que plus haute, est plus chaude car elle n'est plus protégée des rayonnements solaires. On peut aussi citer la stratosphère (de 10 à 50 km d'altitude) qui est plus chaude que la troposphère (de 0 à 10 km) en raison de la forte absorption des rayons ultraviolets de l'ozone qui s'y trouve. Fourier n'a alors pas pris en compte le rôle de la diversité des couches atmosphériques, faute de connaissances.

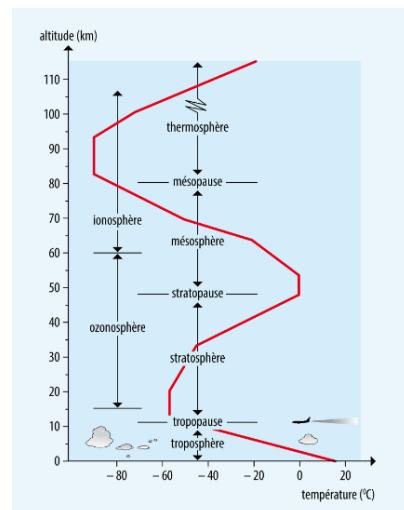


FIGURE 3 – Température des différentes couches de l'atmosphère

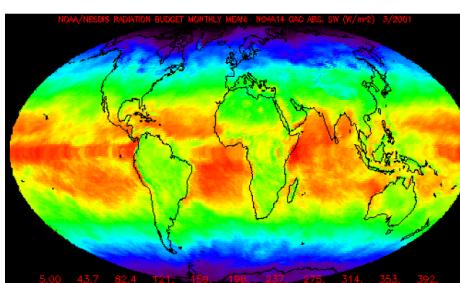


FIGURE 4 – Rayonnement solaire absorbé (mars 2001)

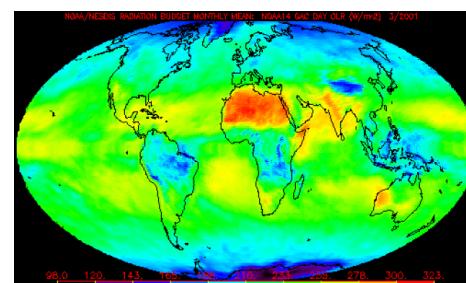


FIGURE 5 – Rayonnement infrarouge de la Terre (mars 2001)

On peut alors mesurer le rayonnement infrarouge ré-émis par la Terre et l'on constate que les pôles ré-émettent très peu d'énergie car ils en reçoivent déjà peu. Enfin, l'émission maximale correspond au désert du Sahara.

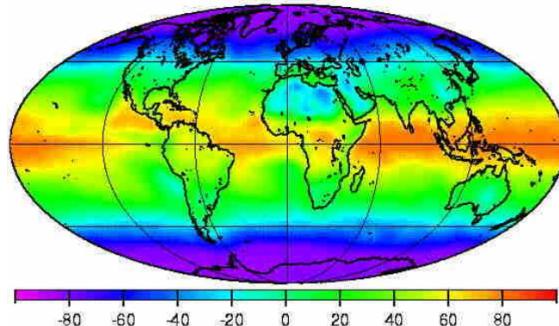


FIGURE 6 – Bilan radiatif de la Terre (moyenne annuelle)

On peut maintenant dresser le bilan radiatif de la Terre. Celui-ci correspond à la différence entre le flux solaire absorbé et le flux d'infrarouge émis. On constate un déséquilibre de par un excédent de chaleur autour de l'équateur et un déficit des pôles aux tropiques. Cependant, tout système physique cherche à être à l'équilibre. C'est pourquoi cette disparité entraîne certains phénomènes atmosphériques et océaniques.

2.2 Rôle des masses d'air et de l'eau

Fourier a pu comprendre que les mouvements de l'atmosphère et des eaux modifient la température du globe terrestre, car ceux-ci permettent de répartir uniformément la chaleur, mais il ne savait pas exactement comment.

En effet, les rayons du Soleil chauffent inégalement les couches atmosphériques en fonction de l'épaisseur de celles-ci parce que les substances diaphanes (substances plus ou moins transparentes qui laissent passer la lumière), comme l'air ou bien l'eau, sont capables d'absorber les ondes lumineuses provenant du Soleil mais perdent cette capacité lorsqu'il s'agit de rayons infrarouges (chaleur obscure), qui correspondent aux ondes lumineuses transformées au contact de la Terre puis ré-émises vers l'espace.

L'eau, tout comme l'air, a la propriété de transporter la chaleur rapidement dans plusieurs directions. Les courants océaniques et atmosphériques, dus aux propriétés physiques et à la force centrifuge de la Terre, peuvent ainsi rendre la distribution de la chaleur à la surface du globe plus uniforme et donc permettre de modérer les fortes variations de température aux régions équatoriales et polaires.

2.2.1 Masses d'air

Le phénomène expliqué dans la section précédente démontre l'utilité de l'atmosphère dans la répartition de la chaleur sur le globe.

En effet, Fourier a décrit les différents échanges inégaux de chaleur dus au rayonnement solaire qui se produisent entre les couches atmosphériques et la surface terrestre sans prendre en compte la circulation des masses d'air. Les rayons lumineux, absorbés par la Terre et en partie réfléchis sous forme de chaleur obscure en sens inverse, traversent l'atmosphère quasiment sans perte d'énergie ; tandis que la chaleur obscure est partiellement retenue dans les couches inférieures qu'elle réchauffe.

Il suppose également que si l'on rajoutait les mouvements d'air rapides multidirectionnels, l'intensité des effets de la chaleur obscure accumulée dans l'atmosphère diminuerait mais ne serait pas pour autant éloignée des résultats observés ci-dessus. Fourier avait effectivement raison, mais il avait négligé la complexité de la circulation atmosphérique, puisque l'on constate des variations de température dans toutes les couches atmosphériques, ce qui entraîne des déplacements de masses d'air plus ou moins présents dans l'optique d'uniformiser les températures.

On sait maintenant que l'atmosphère joue un rôle important dans la répartition de la chaleur dans les différentes zones de la planète en générant des courants de convection verticaux (à petite échelle) et horizontaux (à grande échelle). De nos jours, nous savons identifier ces différents types de circulations atmosphériques dus aux variations de température.

Les mouvements verticaux consistent en deux processus convectifs [Figure 7] :

- Les mouvements ascendants lorsque l'air chaud s'élève et se refroidit ensuite avec la baisse de pression dans les hautes altitudes, ce qui provoque une dépression.
- Les mouvements subsidents lorsque l'air froid descend et se réchauffe avec l'augmentation de la pression dans les basses altitudes, ce qui provoque un anticyclone.

Un autre facteur permettant le déplacement des masses d'air verticalement est la force de déviation associée à la rotation de la Terre que l'on appelle la force de Coriolis. Ce courant dévie les anticyclones vers la droite dans l'hémisphère Nord et vers la gauche dans l'hémisphère Sud, et permet ainsi d'uniformiser la chaleur dans les couches inférieures de l'atmosphère.

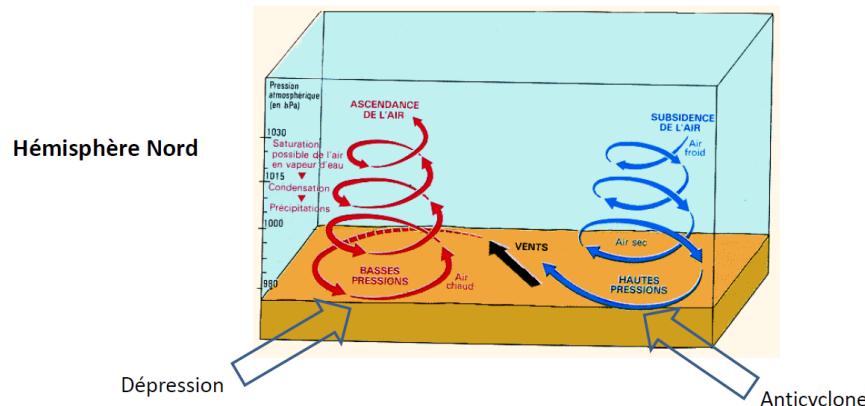


FIGURE 7 – Mouvements verticaux dans l'hémisphère nord

Des mouvements horizontaux, appelés cellules de convection, permettent de transporter l'énergie depuis les régions excédantes en chaleur vers les régions déficientes des deux hémisphères.

Les cellules reliant les régions équatoriales vers les régions tropicales sont des cellules de Hadley, qui sont définies par un mouvement ascendant de l'air chaud et humide à l'équateur et un mouvement subsident de l'air refroidit au niveau de la tropopause (≈ 10 km d'altitudes) lorsque l'air est déplacé vers les tropiques (30° latitude). Cet air est ensuite réchauffé par le climat sec et chaud des régions subtropicales et retourne vers les régions équatoriales par les Alizés, des vents forts qui relient les zones anticycloniques tropicales et les zones de dépressions équatoriales.

Les cellules d'air polaire sont des boucles d'air partant des régions polaires où l'air est froid et lourd, et se propageant à travers les océans à l'aide des vents polaires. L'air gagne ainsi en humidité et en énergie, ce qui provoque une dépression vers 60° de latitude pour que l'air réchauffé retourne ensuite vers les pôles.

Lorsque les masses d'air polaire et tropicales se rencontrent, on observe la formation d'un front polaire où l'air chaud tropical remonte au dessus de l'air froid polaire. Cette boucle, nommée cellule de Ferrel, permet à l'air de circuler ensuite vers les tropiques où il y est refroidi pour ainsi redescendre et retourner vers les pôles grâce aux vents d'Ouest.

On observe donc des formations de masses d'air ayant les mêmes caractéristiques thermiques et hygrométriques en fonction des différentes régions : zones de haute pression aux pôles et aux tropiques (anticyclones) et zones de basse pression à l'équateur et aux fronts polaires (dépressions) [Figure 8].

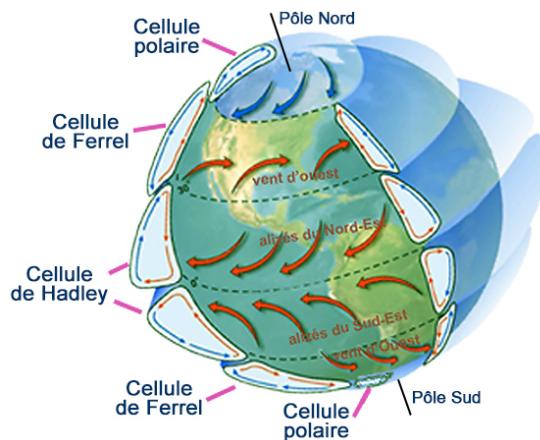


FIGURE 8 – Schéma des cellules de convection

D'autres cellules de convection existent, les cellules de Walker disposées selon la longitude permettent d'uniformiser la chaleur le long de l'équateur sur trois centres de convection majeurs qui correspondent aux Océans Pacifique, Indien et Atlantique. Cependant, les positions de ces cellules (latitude et longitude) sont approximatives car elles dépendent des variations saisonnières qui avaient déjà été explorées par Fourier.

2.2.2 Masses d'eau

Les différents transports de température dans les océans ou les lacs permettent également de répartir la chaleur. Les deux principales masses d'eau présentes dans les océans sont les eaux chaudes superficielles et les eaux froides profondes séparées au niveau de la thermocline, une zone de transition thermique rapide présente dans tous les grands océans.

Comme nous avons pu le voir sur la partie précédente avec les échanges de chaleur au niveau des masses d'air, les océans et les lacs contribuent également à uniformiser les températures terrestres. Effectivement, elles absorbent et retiennent la chaleur lumineuse provenant des rayons du Soleil et la ré-émettent sous forme de chaleur obscure (infrarouge) en petite quantité dans l'air, car l'eau laisse plus facilement entrer la chaleur lumineuse que sortir le rayonnement infrarouge.

Fourier démontre, que lorsque la température des eaux en surface diminue jusqu'à atteindre une température supérieure de quelques degrés à celle de la glace fondante, la densité du liquide augmente. Ainsi les eaux des couches supérieures descendent vers le fond solide des mers pour le refroidir continuellement au contact de ce liquide plus froid.

Ces courants sont aujourd'hui nommés courants downwelling : ils expriment la capacité des masses d'eaux superficielles à se déplacer vers les couches profondes quand la température diminue à cause de la dilatation de l'eau en surface.

Après avoir réalisé des échantillonnages à différentes profondeurs de certains lacs présents en Europe, Fourier a pu en déduire que la température moyenne des eaux profondes étaient d'environ 4°C . Il émit également l'hypothèse que dans les grandes profondeurs gelées, les courants océaniques et les propriétés physiques des eaux (taux de salinité) permettent de diminuer et d'empêcher la densité de l'eau de dépasser sa limite maximale atteinte à la température de $3,98^{\circ}\text{C}$ (et non pas à la limite de la solidification de l'eau à 0°C).

Fourier pensait que la surface du globe se réchauffait sur des temps très longs, à cause de l'influence de la chaleur primitive du noyau terrestre ; il suggérait également que cette augmentation de température s'étendait à de grandes profondeurs à l'intérieur du globe. Donc si des cavités, creusées dans les sols terrestres étaient remplies d'eau, la température de l'eau des couches inférieures augmenterait au contact du fond marin et sa densité, diminuant, permettrait au liquide de s'élever vers les couches supérieures. Lors de son trajet vers la surface des océans, l'eau provenant du fond se refroidirait petit à petit et à son tour, redescendrait vers les masses d'eaux inférieures pour ainsi former un circuit de transfert de chaleur entre les masses d'eau chaude et froide.

Cependant, Fourier considérait que la température présente en-dessous du fond marin n'était pas soumise à la loi de l'accroissement de la chaleur géothermique qu'il a pu retrouver au niveau des terres continentales, mais uniquement déterminée par un facteur de refroidissement lorsque cette couche terrestre était en contact avec un liquide d'une température constante.

Ce type de courant, vérifié grâce aux expériences et calculs de Fourier, est appelé de nos jours courants d'upwelling. Ce phénomène se produit lorsque la température augmente dans les profondeurs des mers ou des lacs, en raison de la compressibilité de l'eau, entraînant ainsi une remontée vers la surface.

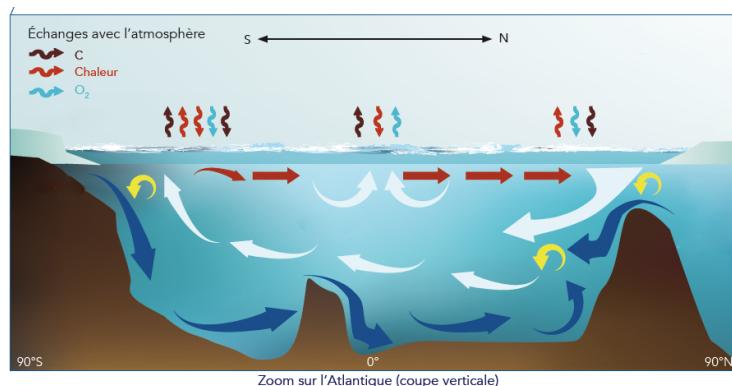


FIGURE 9 – Schéma des courants upwelling et downwelling

Fourier a également remarqué que plus la superficie des mers était grande, plus ces phénomènes permettaient de grands échanges de chaleur entre les régions éloignées dues aux fortes différences de température. On pourrait citer par exemple, le transport de chaleur en surface des eaux équatoriales vers les pôles et la circulation des eaux polaires en profondeur vers l'équateur [Figure 9].

2.3 Bilan énergétique et effet de serre

La Terre reçoit alors les rayons du Soleil qui pénètrent sa masse et s'y convertissent en rayonnements infrarouges. Elle possède également une chaleur propre (dite géothermique) qui se dissipe continuellement à la surface. Enfin, elle reçoit des rayons lumineux des astres environnants.

En étudiant ces trois sources et en analysant les données dont il disposait sur les températures terrestres, Fourier a ainsi pu décrire le phénomène de l'effet de serre. Peu après lui, Josef Stefan et Ludwig Boltzmann ont établi une loi portant leur nom qui définit la relation entre le rayonnement thermique d'un corps noir et sa température :

$$M = \sigma T^4$$

où M est l'exitance énergétique par unité de surface ($W \cdot m^{-2}$), $\sigma = 5.7 \times 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ est la constante de Stefan-Boltzmann et $T(K)$ est la température du corps.

Grâce à elle, on peut calculer la température que la Terre devrait acquérir en ne considérant uniquement les rayonnements solaires. En effet, en sachant que $T_{\text{soleil}} = 6000K$, on peut appliquer cette formule au Soleil et on obtient :

$$M_{\text{soleil}} = \sigma \times 6000^4 = 7.3 \times 10^7 W \cdot m^{-2}$$

On souhaite maintenant calculer l'énergie reçue au niveau de l'orbite terrestre, aussi appelée insolation terrestre. Celle-ci dépend de la distance entre les corps célestes et se calcule de la manière suivante :

$$\text{Insolation} = S = M_{\text{soleil}} \times \left[\frac{R_{\text{soleil}}}{R_{\text{orbite}}} \right]^2 = 1557 W \cdot m^{-2}$$

En considérant de plus que la Terre renvoie 30% de l'énergie qu'elle reçoit (albédo) et en supposant que la surface terrestre ensoleillée soit un disque de rayon R_{terre} , on obtient l'énergie reçue :

$$E_{\text{reçue}} = \pi R_{\text{terre}}^2 \times S \times (1 - \text{albedo})$$

Enfin, on peut déterminer l'énergie émise rayonnée par toute la surface de la sphère terrestre en appliquant la loi de Stefan-Boltzmann :

$$E_{\text{émise}} = 4\pi R_{\text{terre}}^2 \times \sigma T^4$$

On rappelle que nous souhaitions déterminer T , la température de la Terre. On y parvient grâce au premier principe de la thermodynamique : la conservation de l'énergie.

$$\begin{aligned} E_{\text{reçue}} &= E_{\text{émise}} \iff T^4 = \frac{S \times (1 - \text{albedo})}{4\sigma} \\ &\implies T = 265^\circ K = -8^\circ C \end{aligned}$$

Toutefois, on sait aujourd'hui que la température moyenne globale terrestre est de $15^\circ C$, soit une différence de $23^\circ C$. En effet, dans nos calculs, nous n'avons pas pris en compte l'effet de serre !

Nous savons aujourd'hui que les causes de l'effet de serre sont principalement le rayonnement solaire, les masses atmosphériques et océaniques. Afin de définir la température que devrait acquérir la Terre suite aux différents échanges de chaleur, nous pouvons établir le bilan énergétique du globe terrestre en comparant la Terre à un vase percés de multiples trous. Le vase reçoit une énergie constante et laisse échapper une quantité égale par les issues. De cette façon la température globale terrestre s'accumule dans l'intérieur du globe mais elle y est aussi continuellement renouvelée.

Nous savons aujourd'hui que tous les effets terrestres des sources de chaleur sont modifiés par l'interposition des masses d'air et d'eau. En effet, l'uniformisation des températures décrites précédemment ainsi que les propriétés différentes des chaleurs lumineuse et obscure conduisent à l'augmentation de la température terrestre. Il s'agit du phénomène d'effet de serre qui se trouve amplifié par la présence de gaz dits "à effet de serre". La présence de ces gaz dans l'atmosphère a été étudiée plus en profondeur en 1861 par John Tyndall (1820-1893) qui a montré que la vapeur d'eau et le gaz carbonique étaient les principaux responsables de l'élévation des températures en raison des bandes d'absorption qu'ils présentent dans l'infrarouge.

Fourier fut également l'un des premiers à décrire le réchauffement climatique dû à l'action humaine. Il a émis l'hypothèse que l'impact des sociétés humaines sur la distribution des eaux, sur la circulation atmosphérique ainsi que sur l'état de la surface du sol (désertification, urbanisation massive) modifie fortement le climat global.

Grâce à ses travaux sur la théorie de la chaleur ainsi que sur les températures du globe terrestre, Fourier a fondé une nouvelle branche des sciences mathématiques : la climatologie mathématique. Cette discipline utilise les équations aux dérivées partielles afin de modéliser les flux de chaleur dans les solides et liquides ainsi que d'autres phénomènes physiques au sein d'un domaine défini.

De nos jours, cette discipline a évolué et nous avons maintenant de meilleurs outils (à la fois mathématiques et informatiques), ainsi que de nouvelles connaissances pour décrire l'évolution de la température du globe.

3 Modèle de transfert radiatif pour l'effet de serre

Le transfert radiatif est au cœur du mécanisme qui explique le phénomène d'effet de serre présenté ci-dessus. Il est basé sur l'opacité partielle dans le spectre de l'infrarouge de différents gaz à effet de serre présents dans l'atmosphère, comme le dioxyde de carbone en particulier. C'est un phénomène souvent étudié sous forme de modèles mathématiques impliquant des équations aux dérivées partielles, et est également étudié d'un point de vue numérique. Des études récentes, faites par deux mathématiciens Claude Bardos et Olivier Pironneau, ont montré des variations de température contradictoires en fonction des changements appliqués aux propriétés d'absorption de ces gaz. Ces contradictions nous suggèrent donc de manipuler avec prudence les simulations de ce transfert radiatif. En effet, les simulations numériques réalisées nous montrent que le modèle de transfert radiatif seul, sans prise en compte de la diffusion thermique et dans une atmosphère simplifiée, ne parvient pas à expliquer pleinement les conséquences de l'effet de serre causé par ces gaz.

3.1 Hypothèses et résultats selon Bardos et Pironneau

Pour étudier le phénomène d'effet de serre, Bardos et Pironneau ont établi plusieurs hypothèses et choix afin de simplifier le modèle et de permettre une analyse mathématique et numérique.

Leur première hypothèse stipule que la Terre est traitée comme un corps noir lors de l'évaluation de son bilan énergétique. En utilisant cette hypothèse, ils peuvent appliquer certains principes de la physique des corps noirs pour estimer le rayonnement thermique transmis par la Terre, avec plus de simplicité. Simuler la Terre comme un corps noir va permettre d'explorer plus facilement les variations de la température.

Un corps noir implique l'émission d'un rayonnement thermique selon la loi de Planck en fonction d'une température et d'une fréquence ν donné. On ne tient donc pas en compte la réflexion de la lumière solaire à la surface de la Terre. Ce qui signifie que nous considérons que la Terre absorbe et émet de manière idéale sans réfléchir le rayonnement solaire. Cependant, cette hypothèse n'implique pas le fait que la Terre ne puisse pas émettre de rayonnement.

Le corps noir est introduit dans le modèle à l'aide de la formule basée sur la loi de Planck :

$$B_\nu(T) = \frac{2\hbar\nu^3}{c^2[e^{\frac{\hbar\nu}{kT}} - 1]} \quad (1)$$

avec T la température, ν la fréquence présente dans le visible (10^{14} Hz = PHz), c la vitesse de la lumière (3×10^8 m/s), k la constante de Boltzmann (1×10^{-23} J/K) et \hbar la constante de Planck (6×10^{-34} J.s). Elle permet de modéliser le rayonnement thermique émis par la Terre vers l'espace.

Les auteurs font l'hypothèse de négliger d'autres phénomènes atmosphériques comme le vent ou la pluie en raison de leurs échelles de temps et d'espace différentes de ces phénomènes par rapport aux transferts radiatifs. Par exemple, en excluant la présence de nuages, Bardos et Pironneau retirent le fait que ceux-ci réfléchissent une partie du rayonnement solaire et émettent un rayonnement thermique vers l'espace. Ce modèle réduit donc l'impact réel de ces facteurs sur le climat.

Suite à ces hypothèses, le modèle de transfert radiatif ne dépend alors plus que de l'intensité du rayonnement $I_\nu(x, \omega)$ de fréquence ν dans la direction ω au point x du domaine Ω , et nous notons $T(x)$ la température. Ainsi, nous avons :

$$\omega \cdot \nabla I_\nu + \rho \kappa_\nu a_\nu \left[I_\nu - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} p(\omega, \omega') I_\nu(\omega') d\omega' \right] = \rho \kappa_\nu (1 - a_\nu) [B_\nu(T) - I_\nu], \quad (2)$$

$$\kappa_T \Delta T = \nabla \cdot \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^2} I_\nu(\omega') \omega' d\omega' d\nu, \quad (3)$$

avec : \mathbb{S}^2 la sphère unitaire, $\rho(x)$ la densité du milieu étudié, κ_ν le coefficient d'absorption, a_ν l'albédo moyen à la surface de la Terre ; $\frac{1}{4\pi} p(\omega, \omega')$ la probabilité qu'un rayon dans la direction ω se disperse dans la direction ω' et enfin, κ_T la constante de diffusion thermique. Il est important de noter qu'il y a une composante probabiliste dans ce modèle, ce qui le distingue du modèle déterministe de Fourier.

L'équation (3) correspond à l'équation de la chaleur de Fourier qui contient l'ensemble des effets dus aux rayons lumineux. Cette équation de température peut être écrite comme suit après plusieurs calculs d'intégrations sur la sphère unitaire \mathbb{S}^2 et l'ensemble des fréquences ν :

$$\kappa_T \Delta T = \int_0^\infty \rho \kappa_\nu (1 - a_\nu) \left(4\pi B_\nu(T) - \int_{\mathbb{S}^2} I_\nu(\omega) d\omega \right) d\nu \quad (4)$$

De plus, si la diffusion thermique est négligée, nous avons :

$$\int_0^\infty \kappa_\nu (1 - a_\nu) B_\nu d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu (1 - a_\nu) \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} I_\nu(\omega) d\omega \right) d\nu \quad (5)$$

On pourra négliger le coefficient de diffusion thermique κ_T , car il est de l'ordre de 10^{-5} . Cela va les amener à supposer qu'il n'y a aucune perte d'énergie de la Terre par diffusion.

Il est important de remarquer que lorsque κ_ν est constant et a_ν est nul, (5) conduit à la loi de Stefan-Boltzmann que nous avons explorée dans la partie évoquant le bilan radiatif :

$$\int_0^\infty B_\nu d\nu = \sigma_b T^4 = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} I_\nu(\omega) d\omega d\nu \quad \text{avec} \quad \sigma_b = \frac{2\hbar}{15c^2} \left(\frac{k\pi}{\hbar} \right)^4 \quad (6)$$

Elle va permettre d'isoler le terme T et ainsi récupérer la température en fonction de l'altitude sous les hypothèses énoncées précédemment.

La lumière du soleil frappe le plan tangent à la Terre P à un angle constant θ avec une intensité dépendante de la fréquence Q_ν et une direction μ . Nous pouvons schématiser ce propos de la manière suivante :

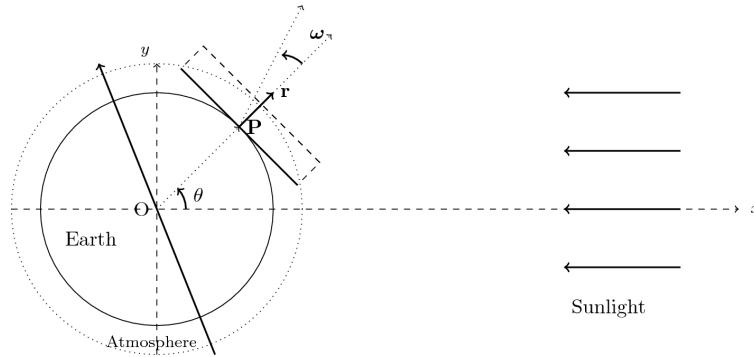


FIGURE 10 – Schéma du problème simplifié

En se plaçant dans ce contexte et à l'aide de calculs, une nouvelle simplification peut être appliquée : la réduction de la dimension de résolution du modèle, qui va permettre d'offrir plusieurs avantages et une analyse simplifiée. En modélisant le problème dans un segment, il est plus facile de comparer les résultats et de conclure sur la pertinence du modèle. Concrètement, nous allons considérer l'atmosphère comme un segment unidimensionnel partant du sol jusqu'à la couche supérieure correspondant à la troposphère.

Ce contexte d'étude permet de poser deux conditions aux bords. La première traduit le rayon solaire qui arrive à la surface de la Terre et la seconde traduit un bord adiabatique au sommet du segment et implique une intensité lumineuse renvoyée vers l'espace nulle :

- à la surface de la Terre, pour $\mu < 0$, nous avons $I_\nu(0, \mu) = \mu Q_\nu := Q_0 \mu B_\nu(T_{sun})$ avec $T_{sun} = 1.209$ et $Q_0 = 3.042 \times 10^{-5}$,
- au sommet de la troposphère, pour $\mu > 0$, nous avons $I_\nu(Z, \mu) = 0$.

Dans les conditions aux bords, il aurait été possible de considérer divers flux tels que ceux des masses d'air et d'eau. Cependant, la décision de les exclure a été prise afin de focaliser l'analyse uniquement sur le phénomène d'effet de serre.

Étant donné que l'étude du phénomène se concentre uniquement du sol jusqu'à la troposphère, le modèle sera simulé sur une altitude de 12km : ce qui va nous donner $Z = 1 - e^{-12}$, après une normalisation exponentielle. Cette condition ne permet pas de prendre en compte les différentes couches atmosphériques supérieures à la troposphère qui pourraient également influencer le bilan énergétique de la Terre.

En limitant la simulation à la troposphère, certains aspects comme les interactions entre le rayonnement solaire et l'atmosphère, sont simplifiés. Cela entraîne une perte de précision dans la représentation des processus atmosphériques. Cependant, cette hypothèse semble justifiée car on peut considérer que l'énergie est assez dissipée au dessus de la troposphère.

La simulation est basée sur l'équation suivante, obtenue à l'aide d'une méthode de discréétisation implicite à partir d'une résolution d'équation par point fixe :

$$I_\nu^{n+1}(\tau, \mu) = \mathbf{1}_{\mu>0} \left[\mu Q_\nu e^{-\kappa_\nu \frac{\tau}{\mu}} + \int_0^\tau \frac{e^{-\kappa_\nu \frac{t-\tau}{\mu}}}{\mu} \kappa_\nu B_\nu(T^n(t)) dt \right] + \mathbf{1}_{\mu<0} \int_\tau^Z \frac{e^{-\kappa_\nu \frac{\tau-t}{\mu}}}{\mu} \kappa_\nu B_\nu(T^n(t)) dt \quad (7)$$

Pour la simulation, nous utilisons des plages de fréquences correspondant, sur la figure ci-dessous, à des longueurs d'ondes associées aux différents gaz à effet de serre.

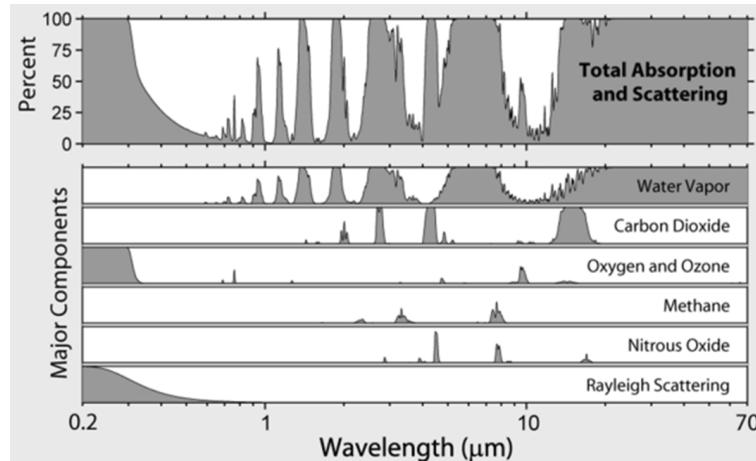


FIGURE 11 – Fréquences pour les différents gaz à effet de serre : c/ν en μm (10^{-6}) où $c = 3 \times 10^8$ et ν en 10^{14}

En tenant compte de tous ces paramètres, nous obtenons le résultat de simulation suivant :

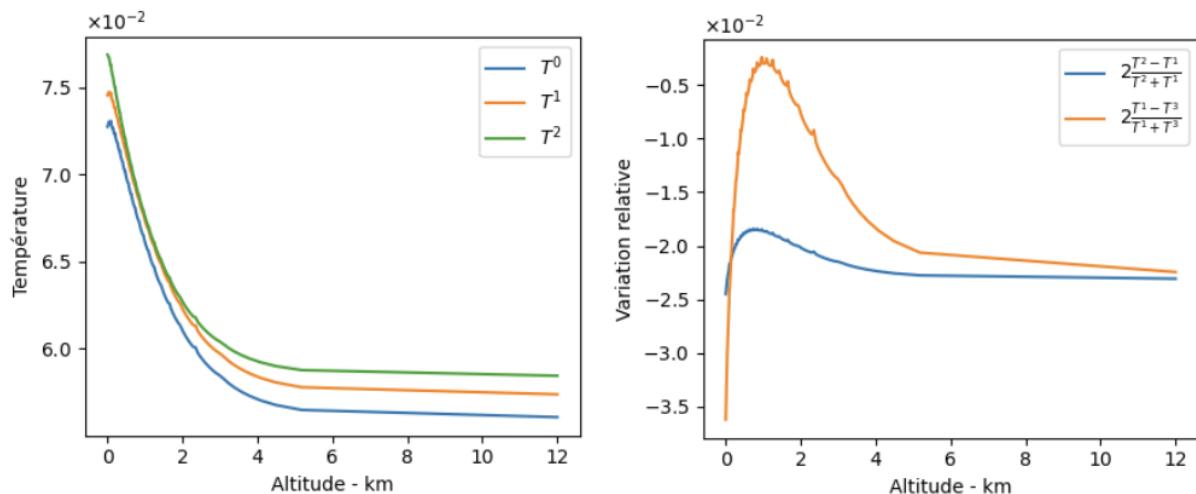


FIGURE 12 – Simulation de 3 scénarios - Variations relatives entre les scénarios, en fonction de l'altitude

Sur la figure 12, le premier graphe représente la simulation de trois scénarios :

- Scénario 1 : la fréquence ν est considérée constante et le coefficient d'absorption $\kappa_\nu = 1.225$; ici, le coefficient d'absorption est maximal et permet la prise en compte de l'ensemble des gaz à effet de serre. (courbe bleue)
- Scénario 2 : la fréquence ν varie sur un petit intervalle de fréquences (0.2, 0.3) et le coefficient d'absorption $\kappa_\nu = 1.225 - 0.51_{\nu \in (0.2, 0.3)}$; cet intervalle de fréquences correspond, en longueur d'ondes, à la vapeur d'eau et au dioxyde de carbone : nous retirons donc ces gaz de la simulation afin de prendre en compte moins de gaz à effet de serre. (courbe orange)
- Scénario 3 : la fréquence ν varie sur un plus grand intervalle de fréquences (0.1, 0.4) et le coefficient d'absorption $\kappa_\nu = 1.225 - 0.51_{\nu \in (0.1, 0.4)}$; cet intervalle de fréquences correspond, en longueur d'ondes, à la vapeur d'eau, le méthane, l'oxygène et l'ozone, protoxyde d'azote, ainsi que le dioxyde de carbone : nous considérons donc que cette simulation traduit la présence d'aucune gaz à effet de serre. (courbe verte)

Nous pouvons préciser également que le coefficient d'absorption κ_ν est choisi en fonction de la masse volumique de l'air.

Le deuxième graphe nous informe sur les variations relatives entre les différents scénarios : nous avons en bleu les variations relatives des scénarios 1 et 2 et en orange celles des scénarios 1 et 3.

Les résultats nous montrent une corrélation directe entre l'altitude et le fait que la température diminue, ce qui est en accord avec les principes physiques bien établis. Cependant, les résultats révèlent un aspect surprenant : la courbe bleue qui simule le scénario 1 et prend en compte la totalité des gaz à effet de serre présents dans la troposphère, montre une température plus basse que celle qui traduit le scénario 3, sans ces gaz. Cette observation défie toute logique conventionnelle car nous devrions en effet observer le contraire. Ceci ne nous permet pas de conclure que les gaz à effet de serre contribuent à un réchauffement et même à l'inverse, cela nous démontre un refroidissement. De plus, la disparité entre ces deux scénarios devrait être considérablement plus grande. Comme indiqué dans la partie précédente, nous devrions avoir une différence de 23 degrés entre les deux scénarios, or ici il y a seulement une différence de 12 degrés.

Cette différence est confirmé sur le deuxième graphe : la variation relative entre ces deux scénarios (courbe orange) est de l'ordre de 10^{-2} et est négative, ce qui traduit la faible disparité entre ceux-ci. Nous remarquerons également que la plus grande différence est près du sol, puis celle-ci devient moins accentuée à 1 km pour ensuite légèrement augmenter à partir de 2 km.

3.2 Élargissement des hypothèses et résultats

Dans cette partie, nous allons enrichir les hypothèses du modèle précédent en apportant quelques modifications au modèle détaillé précédemment. En particulier, nous allons considérer le phénomène d'albédo, que l'on observe aussi bien à la surface de la Terre, qu'à différentes couches de l'atmosphère. L'albédo est essentiel pour modéliser l'impact de l'effet de serre sur les températures, comme nous l'avons vu dans les travaux de Fourier. Plus spécifiquement, en considérant l'effet de l'albédo moyen de la surface terrestre, a_ν , on obtient un nouveau modèle plus complet :

$$\begin{aligned} I_\nu^{n+1}(\tau, \mu) = & \mathbf{1}_{\mu>0} \left[\alpha I_\nu(0, -\mu) e^{\frac{-\kappa_\nu \tau}{\mu}} + \mu Q_\nu e^{-\kappa_\nu \frac{\tau}{\mu}} + \int_0^\tau \frac{e^{-\kappa_\nu \frac{t}{\mu}}}{\mu} \left(\kappa_\nu B_\nu(T^n(t)) + \frac{a_\nu \kappa_\nu}{2} \int_{-1}^1 I_\nu^n d\mu \right) dt \right] \\ & + \mathbf{1}_{\mu<0} \int_\tau^Z \frac{e^{-\kappa_\nu \frac{t}{\mu}}}{\mu} \left(\kappa_\nu B_\nu(T^n(t)) + \frac{a_\nu \kappa_\nu}{2} \int_{-1}^1 I_\nu^n d\mu \right) dt \\ & + \sum_{k \in K} \mathbf{1}_{\mu>0} \alpha_k I_\mu(\tau_k, -\mu) e^{-\kappa_\nu \frac{\tau}{\mu}} \end{aligned}$$

Dans ce modèle, nous distinguons principalement trois contributions distinctes :

- $\alpha I_\nu(0, -\mu) e^{\frac{-\kappa_\nu \tau}{\mu}}$, ce terme exprime l'albédo se reflétant sur le sol terrestre, c'est-à-dire à l'altitude 0. Dans notre cas, il s'agira essentiellement de cultures ainsi que d'océans.
- $\sum_{k \in K} \mathbf{1}_{\mu>0} \alpha_k I_\mu(\tau_k, -\mu) e^{-\kappa_\nu \frac{\tau}{\mu}}$ ce terme regroupe les albédos ajoutés à différentes altitudes. Il nous permet de simuler le rayonnement reflété en présence de nuages.
- $\frac{a_\nu \kappa_\nu}{2} \int_{-1}^1 I_\nu^n d\mu dt$, ce terme fait intervenir a_ν , l'albédo moyen de la surface terrestre, et représente donc la moyenne des albédos présents sur Terre. Il dépend du type de sol considéré (océans ou culture), ainsi que de la présence ou non de nuages.

Dans nos simulations, a_ν est fixé à 30% de lumière réfléchie, ce qui correspond à l'albédo moyen de la Terre. Ainsi, en considérant ce nouveau modèle faisant intervenir l'albédo, de nouveaux résultats peuvent être obtenus après simulations, en jouant sur les paramètres d'albédo α et α_k .

Voici un exemple de résultat observable en considérant ce nouveau modèle, en choisissant la valeur maximale de l'albédo de bond [0.5 - 0.8] correspondant à un nuage :

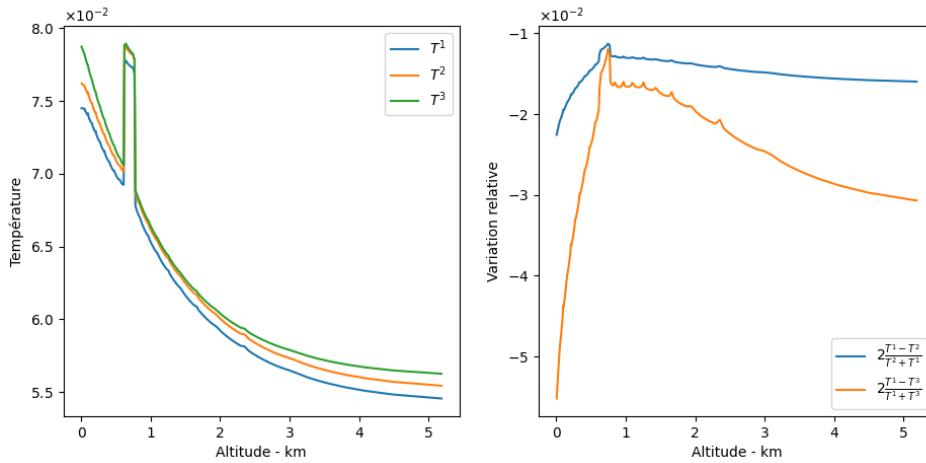


FIGURE 13 – Températures et variations relatives en fonction de l’altitude, pour les scénarios 1, 2 et 3

Une première observation est que les résultats sont toujours surprenants. En effet, pour un scénario donné, les températures diminuent à mesure que la quantité d’effet de serre augmente. Cependant, l’ajout d’albédo permet de constater l’apparition d’un pic à l’altitude à laquelle le nuage a été inclus. En s’intéressant à la variation relative des scénarios 1 avec 2 et 1 avec 3, on remarque que pour cette même altitude, la différence entre les températures est quasiment nulle, ce qui fournit un résultat plus cohérent.

Afin de mener une étude comparative des différents contextes obtenus avec le modèle incluant l’albédo, une interface graphique a été développée en [Python](#). Cette interface graphique permet de faciliter la visualisation ainsi que la comparaison des différents résultats.

Étude comparative 1

Nous pouvons dans un premier temps retrouver les courbes de températures de la figure 13 en choisissant la valeur maximale de l’albédo de bond [0.5 - 0.8] correspondant à un nuage, et les comparer aux courbes obtenues initialement par Bardos et Pironneau avec leur modèle :

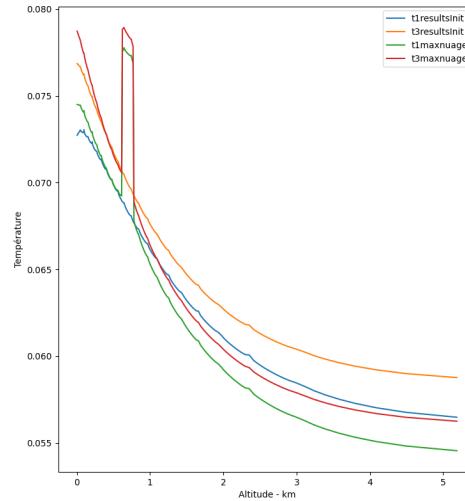


FIGURE 14 – Comparaison des températures en fonction de l’altitude des scénarios 1, 2 et 3 pour les résultats initiaux et l’ajout d’albédo correspondant au nuage

Nous retrouvons bien le pic à l’altitude à laquelle le nuage a été inclus, et nous pouvons noter que les températures sont plus faibles que celles des résultats de Bardos et Pironneau.

Étude comparative 2

Nous allons ici comparer les résultats obtenus par Bardos et Pironneau avec ceux issus de notre modèle, plus précisément en ajustant le coefficient d'albédo à la valeur maximale de l'albédo de bond [0.05 - 0.15] correspondant aux océans.

Voici les courbes obtenues, maxsol correspondant aux résultats avec ajout d'albédo se réfléchissant sur les océans :

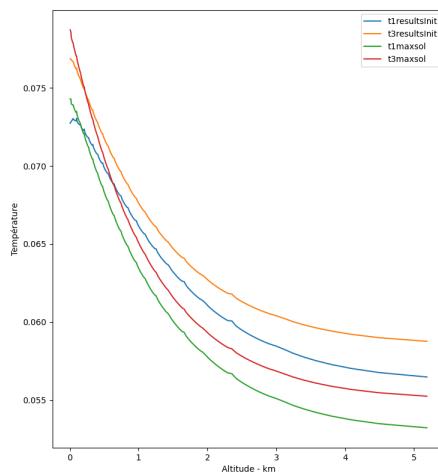


FIGURE 15 – Comparaison des températures en fonction de l'altitude des scénarios 1, 2 et 3 pour les résultats initiaux et l'ajout d'albédo au sol

Tout d'abord, l'ajout d'albédo au niveau du sol (altitude 0) permet de redresser les courbes de températures à ce niveau. A cet endroit, les températures observées sont plus grandes que celles obtenues par les modélisations de Bardos et Pironneau. Cependant, on peut observer que ces températures diminuent plus rapidement par la suite, ce qui correspond à une dissipation de l'énergie après réflexion des rayonnements solaires sur l'océan.

Étude comparative 3

Nous pouvons maintenant comparer les résultats des observations correspondants à l'albédo lorsque l'on intègre un nuage (maxnuage) avec ceux correspondants à l'albédo au sol et à l'altitude d'un nuage (maxsol_maxnuage).

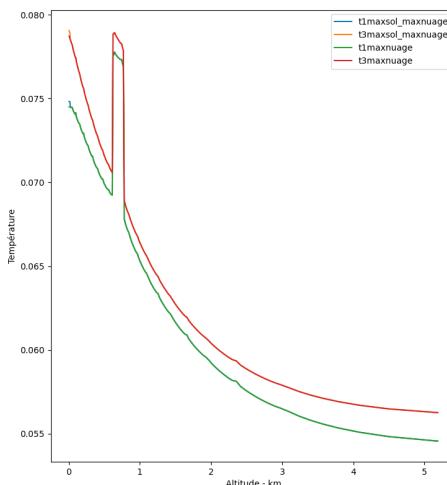


FIGURE 16 – Comparaison des températures en fonction de l'altitude des scénarios 1, 2 et 3 pour le résultats initiaux et l'ajout d'albédo au sol

A priori, les courbes semblent se superposer. Cependant, en se focalisant sur les températures observées à l'altitude 0, il apparaît une légère différence dans le comportement des courbes qui correspond à l'ajout d'albédo au sol. Cela correspond bien à la dissimilitude des deux contextes considérés.

L'intégration de l'albédo dans notre modèle génère des améliorations notables ainsi que des résultats légèrement plus cohérents. Néanmoins, nous observons des conclusions similaires à celles des modèles initiaux, dont les résultats sont surprenants puisque l'on observe toujours une diminution de la température lorsque nous prenons en compte le phénomène d'effet de serre.

4 Conclusion

Les résultats obtenus sont surprenants et contradictoires aussi bien avec notre modèle qu'avec celui de Bardos et Pironneau. En effet ils montrent que l'effet de serre n'induit pas un réchauffement de la Terre mais un refroidissement de celle-ci. Cette conclusion de nos résultats est très incohérente avec les mesures et montre que notre modèle ne prend pas en compte un ou plusieurs phénomènes (connus ou inconnus), ou alors que nos hypothèses les négligent. Premièrement on peut se demander si l'hypothèse de corps noir fait sur la Terre n'introduit pas une trop grande erreur.

Pour ce faire on va comparer les intensités lumineuses sans les gaz à effet de serre en les mesurant à l'aide de la loi de Planck avec les observations faite en novembre 1996.

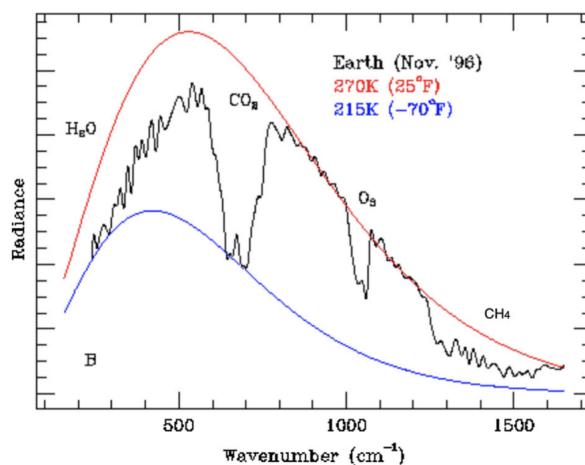


FIGURE 17 – Intensité lumineuse B_ν pour une longueur d'onde ν donnée

Lorsque nous comparons l'intensité lumineuse d'un corps noir à une température de $215K$ ($-58^\circ C$) et celle à une température de $270K$ ($-3,15^\circ C$) (représentées respectivement par les courbes bleue et rouge) [Figure 17], tout en considérant les observation de la Terre (représentée en noir), nous pouvons légitimement considérer que celle-ci a un comportement qui se rapproche de celui d'un corps noir. En effet nous pouvons voir que les observations suivent les courbes des corps noir parfait, et donne du sens à cette hypothèse. Nous constatons tout de même des variations dans le spectre d'émission de la Terre correspondant aux différents gaz à effet de serre. Ces baisses d'émission entraînent un réchauffement de l'atmosphère terrestre à cause de la conservation de l'énergie.

Cette hypothèse est également renforcée par un calcul appliquée au Soleil. En considérant celui-ci comme un corps noir, Stefan a pu approximer la température de sa surface à $5709K$ ($5435^\circ C$), soit une erreur de $63K$. Ceci marque une première approximation sérieuse de la température du Soleil et montre qu'appliquer cette hypothèse à la Terre a un sens.

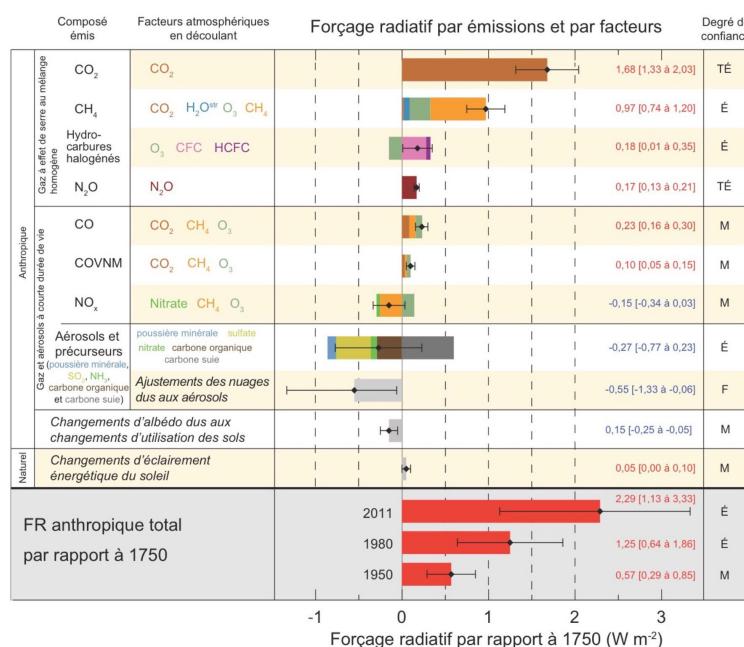
Nous pouvons ensuite se demander si l'adimensionalisation du modèle est une décision qui peut générer une erreur dans notre approche. Cependant, nous avons vérifié par les calculs que le modèle restait conservatif après unidimensionnalisation. De plus, si l'on considérait un nouveau modèle comprenant la circulation atmosphérique en deux dimensions dans les conditions aux bords, on pourrait alors montrer que cela in-

troduirait un terme supplémentaire lors de la réduction à une dimension. L'unidimensionalisation n'apporte donc aucune erreur et permet également de prendre en compte n'importe quels phénomènes.

Nous pouvons maintenant se questionner sur la non-prise en compte des circulations des masses d'air et d'eau. Il est possible que cette non-prise en compte des circulations peut expliquer les résultats surprenants que nous avons obtenus. Nous rappelons que cette hypothèse est soutenue puisque nous voulons nous concentrer uniquement sur l'effet de serre.

Comme rappelé précédemment les circulations atmosphérique et thermohaline uniformisent les températures de la Terre. Les prendre en compte dans notre modèle pourrait donc modifier nos résultats et les rendre plus cohérents.

Nous pourrions également prendre en compte les gaz à courte durée de vie ainsi que les aérosols présents dans l'atmosphère. Pour aborder ces sujets, il est nécessaire de définir une notion : le forçage radiatif. Il s'agit de la variation du rayonnement net (différence entre le flux radiatif reçu et le flux radiatif émis, exprimée en $W m^{-2}$) à la tropopause ou au sommet de l'atmosphère due à la variation d'un facteur du changement climatique, telle qu'une modification de la concentration de dioxyde de carbone ou du rayonnement solaire. Il est souvent d'usage de baser cette mesure sur l'année 1750 qui correspond à l'ère pré-industrielle. On obtient alors la figure suivante :



Source : 5ème rapport du GIEC, Groupe I chapitre 8 "Forçage radiatif anthropique"

FIGURE 18 – Forçage radiatif anthropique par rapport à 1750

Nous retrouvons ici le fait que les gaz à effet de serre présentent un forçage radiatif positif, donc ils contribuent au réchauffement climatique mais on observe aussi d'autres espèces chimiques.

Les gaz à courte durée de vie (par exemple le monoxyde de carbone CO) ne sont pas des gaz à effet de serre à proprement parler mais ils réagissent avec d'autres gaz présents dans l'atmosphère, ce qui produit des espèces qui sont quant à elles à effet de serre. Par exemple, le monoxyde de carbone (CO) s'associe à l'oxygène et donne du CO_2 . Ces gaz peuvent également réagir avec d'autres composés chimiques qui auraient autrement détruit du méthane (CH_4) ou de l'ozone (O_3). Notons ici qu'il est important de distinguer l'ozone troposphérique, qui est considéré comme polluant et à effet de serre, et l'ozone stratosphérique qui contribue à nous protéger des rayonnements ultraviolets.

Enfin, d'autres éléments sont présents dans l'atmosphère : les aérosols. Ce ne sont pas des gaz mais des particules en suspension. Il peut s'agir d'embruns marins ou du sable de Sahara qui présentent un forçage radiatif négatif [Figure 18] (donc un refroidissement) grâce à leur capacité à réfléchir le rayonnement solaire. Cependant, le carbone sous forme de suie, qui est aussi un aérosol, a l'effet inverse.

Il serait donc intéressant d'essayer de prendre en compte ces espèces chimiques dans un futur modèle afin de coller au mieux à la réalité. On pourrait par exemple se baser sur la stoechiométrie des réactions chimiques qui se produisent dans l'atmosphère et construire un système d'équations couplées qui modéliserait la concentration des-dites espèces chimiques dans l'atmosphère. Cependant, plus un modèle tente d'approcher la réalité, plus il devient complexe à étudier.

Pour finir, nous ne remettons pas en cause l'effet de serre et son rôle dans le réchauffement climatique. Nos résultats montrent que comprendre l'effet de serre à l'échelle de la Terre, est complexe et qu'une telle modélisation nécessite encore des recherches, notamment sur les rôles de la circulation atmosphérique et océanique dans l'effet de serre. Nous pouvons également supposer que nous ne comprenons pas certains phénomènes physiques qui pourraient jouer un rôle très important, tout comme à l'époque de Fourier.

Références

- [1] Fourier, J. (1824). Mémoire sur les Températures du globe terrestre et des Espaces Planétaires
https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Fourier/Fourier_pdf/Mem1827_p569_604.pdf
- [2] Bardos, C., Pironneau, O. The radiative transfer model for the greenhouse effect. SeMA 79, 489–525 (2022).
<https://doi.org/10.1007/s40324-021-00265-y>
- [3] Brenon, I., Toublanc, F. Cours de Découverte Sciences de la Terre, Planète bleue, La Rochelle Université (2020).

Table des figures

1	Énergie radiative incidente mesurée en W/m^2 (mars 2001)	5
2	Rayonnement solaire réfléchi vers l'espace (albédo)	5
3	Température des différentes couches de l'atmosphère	6
4	Rayonnement solaire absorbé (mars 2001)	6
5	Rayonnement infrarouge de la Terre (mars 2001)	6
6	Bilan radiatif de la Terre (moyenne annuelle)	7
7	Mouvements verticaux dans l'hémisphère nord	8
8	Schéma des cellules de convection	9
9	Schéma des courants upwelling et downwelling	10
10	Schéma du problème simplifié	13
11	Fréquences pour les différents gaz à effet de serre : c/ν en μm (10^{-6}) où $c = 3 \times 10^8$ et ν en 10^{14}	14
12	Simulation de 3 scénarios - Variations relatives entre les scénarios, en fonction de l'altitude	14
13	Températures et variations relatives en fonction de l'altitude, pour les scénarios 1, 2 et 3	16
14	Comparaison des températures en fonction de l'altitude des scénarios 1, 2 et 3 pour les résultats initiaux et l'ajout d'albédo correspondant au nuage	16
15	Comparaison des températures en fonction de l'altitude des scénarios 1, 2 et 3 pour les résultats initiaux et l'ajout d'albédo au sol	17
16	Comparaison des températures en fonction de l'altitude des scénarios 1, 2 et 3 pour le résultats initiaux et l'ajout d'albédo au sol	17
17	Intensité lumineuse B_ν pour une longueur d'onde ν donnée	18
18	Forçage radiatif anthropique par rapport à 1750	19

'''

Code pour simuler l'effet de serre dans l'atmosphère par transfert radiatif. Met à jour la température dans l'atmosphère en fonction de l'absorption et de l'émission de rayonnement.

'''

```

import numpy as np
import threading

class RadiativeTransferModel:

    # constantes et paramètres

    def __init__(self, MM, n, kmax, Z, SBsun, Tsun, numax, jmax, dnu0, dtt, nt,
                 knu0, dknu, nu01, nu02, nu03, nu04, pi, anu):

        self.MM = MM
        self.n = n
        self.kmax = kmax
        self.Z = Z
        self.SBsun = SBsun
        self.Tsun = Tsun
        self.numax = numax
        self.jmax = jmax
        self.dnu0 = dnu0
        self.dtt = dtt
        self.nt = nt
        self.knu0 = knu0
        self.dknu = dknu
        self.nu01 = nu01
        self.nu02 = nu02
        self.nu03 = nu03
        self.nu04 = nu04
        self.pi = pi
        self.anu = anu
        self.alpha = [0.1]*5+ [0.0]*165 + [0.65]*7 + [0.0]*3
        self.alpha.reverse()

        self.Inut = np.zeros(self.MM) # mu intégrale de l'intensité lumineuse)
                                      # sur l'ensemble des points de l'atmosphère
        self.F = np.zeros(self.MM) # valeurs des contributions aux intégrales
        self.T = np.zeros(self.MM) # température
        self.T1 = np.zeros(self.MM) # température scénario 1
        self.T2 = np.zeros(self.MM) # température scénario 2
        self.T3 = np.zeros(self.MM) # température scénario 3
        self.Aaux = np.zeros(self.MM) # calculs intermédiaires

    def expint_E1(self, t, B=1): # fonction qui calcule l'intégrale E1(t)*B
        K = 8
        epst = 1e-5
        gamma = 0.577215664901533

```

```

if t == 0:
    return -1e12 * B

abst = np.abs(t)
if abst < epst:
    return -abst * (gamma + np.log(abst) - 1) * B

ak = abst
somme = -gamma - np.log(abst) + ak

for k in range(2, K): #intégrale trapèzes
    ak *= -abst * (k - 1) / (k**2)
    somme += ak

return somme * B

def Bsun(self, nu): # fonction qui calcule la puissance solaire normalisée
    return self.SBsun * nu**3 / (np.exp(nu / self.Tsun) - 1)

def BB(self, nu, T): # fonction qui calcule la fonction de boltzmann
    return nu**3 / (np.exp(nu / T) - 1)

def intB(self, kappa, nu, tau, tmin, tmax): # fonction qui retourne
    l'intégrale de convolution de E1*B sur un intervalle donné
    aux = 0
    dt = min(self.dtt, self.nt / (tmax - tmin))

    for t in np.arange(tmin, tmax, dt): # intégrale
        baux = self.BB(nu, self.T[int((self.MM - 1) * t / self.Z)])
        if kappa * (t - tau) != 0:
            aux += dt * kappa * self.expint_E1(kappa * np.abs(tau - t), baux)

    return aux

def getT(self, nu1, nu2, dknu): # maj de température dans l'atmosphère (loi
    de kirchhoff avec des corrections)
    for i in range(self.MM):
        Bik = self.F[i] / 2
        if dknu != 0:
            for nu in np.arange(nu1, nu2, self.dnu0):
                Bik -= self.BB(nu, self.T[i]) * dknu * self.dnu0
        self.T[i] = np.sqrt(np.sqrt(abs(15 * Bik / self.knu0))) / self.pi

def getInu2(self, kappa, nu, albedo_sol, albedos, altitudes):
    for i in range(self.MM):
        x = i * self.Z / (self.MM - 1)
        self.Inut[i] =
            self.intB(kappa, nu, x, 0, self.Z)
            + self.Bsun(nu) * (np.exp(-kappa * x) * (1 - kappa * x) +
            self.expint_E1(kappa * x, kappa * x**2)) / 2
            + (self.anu * kappa * self.Inut[i]) / 2 - self.anu *
            self.intB(kappa, nu, x, 0, self.Z)
    )

```

```

# Albedo nuage à une altitude spécifique
# for altitude, albedo in zip(altitudes, albedos):
#     if np.abs(x - altitude) < 1/24:
#         self.Inut[i] += albedo * self.Inut[i] * np.exp(kappa * (x - self.Z))

# # Albedo au sol
# if x < 0.02: # altitude moyenne globale de 250m (840m
# continental et 0m océanique -> 0.3 * 840 =250)
#     self.Inut[i] += albedo_sol * self.Inut[-1] * np.exp(kappa * (x - self.Z))

def multiBlock2(self, nu1, nu2, dknu):
    albedo_sol = 0.15 # coeff albédo sol
    albedos = [0.5] # coefficients albédo pour chaque altitude
    altitudes = [0.5] # altitudes coefficients d'albédo : altitude de 3 km
    for i in range(self.MM):
        self.T[i] = 0.07

    for k in range(self.kmax):
        for i in range(self.MM):
            self.F[i] = 0
            self.Inut[i] = 0
        nu = 0
        for j in range(1, self.jmax + 1):
            dnu = (2 * j - 1) * self.dnu0
            nu += dnu
            kappa = self.knu0 + dknu * (nu > nu1) * (nu < nu2)
            for i in range(self.MM):
                self.F[i] += kappa * self.Inut[i] * dnu / 2
            #self.getInu(kappa, nu)
            self.getInu2(kappa, nu, albedo_sol, albedos, altitudes)
            for i in range(self.MM):
                self.F[i] += kappa * self.Inut[i] * dnu / 2

        self.getT(nu1, nu2, dknu)
        print(f"k= {k} {self.T[0]} {self.T[self.MM - self.n]}")

if __name__ == "__main__":
    MM = 180 # nombre de points d'altitude dans l'atmosphère
    n = 6 # paramètre de l'atmosphère
    kmax = 12 # nombre maximum d'itérations
    Z = 1 - np.exp(-12.0) # hauteur totale de l'atmosphère (normalisée entre 0 et 1)
    SBsun = 3.042e-5 # puissance solaire rayonnée à la surface de l'étoile
    #constante de Stefan-Boltzmann pour le Soleil)
    Tsun = 1.209 # température de surface de l'étoile (en unités appropriées)
    numax = 20 # freq maximale
    jmax = 150 # nombre maximal de termes dans la sommation de l'intensité lumineuse
    dnu0 = numax / (jmax**2) # incrément de fréquence pour la sommation de l'intensité lumineuse
    dtt = 0.005 # incrément de temps pour l'intégration temporelle
    nt = 5 # nombre de points pour l'intégration temporelle
    knu0 = 1.225 # coeff d'absorption initial

```

```

dknu = -0.5 # variation du coefficient d'absorption
nu01, nu02, nu03, nu04 = 0.2, 0.3, 0.1, 0.4 # fréquences pour différents scénarios
pi = 4 * np.arctan(1.0) # valeur de pi
anu = 0.3 # albedo moyen de la Terre

model = RadiativeTransferModel(MM, n, kmax, Z, SBsun, Tsun, numax, jmax,
                                dnu0, dtt, nt, knu0, dknu, nu01, nu02, nu03, nu04, pi, anu)

scenarios = [(model.nu01, model.nu02, 0.0), (model.nu01, model.nu02,
                                                model.dknu), (model.nu03, model.nu04, model.dknu)]

# SCENARIO 1 : fréquence constante et coefficient d'absorption constant
print("\n kappa constant \n iterations \t [T] near Earth and far near Z\n")
model.multiBlock2(model.nu01, model.nu02, 0.0)
model.T1[:] = model.T[:]

# SCENARIO 2 : fréquence variable (étroite) et variation coefficient d'absorption
print("kappa variable\n iterations \t [T] near Earth and far near Z\n")
model.multiBlock2(model.nu01, model.nu02, model.dknu)
model.T2[:] = model.T[:]

# SCENARIO 3 : fréquence variable (large) et variation coefficient d'absorption
print("kappa variable\n iterations \t [T] near Earth and far near Z\n")
model.multiBlock2(model.nu03, model.nu04, model.dknu)
model.T3[:] = model.T[:]

print("\n tau\t \t [T1]:Milne [T2]:narrow [T3]:wide [T1-T2]/T [T2-T3]/T \n ")
with open("results_init.txt", "w") as myfile: #s précifier le nom du fichier à enregistrer ici
    for i in range(1, model.MM):
        print(
            -np.log(1 - i * model.Z / (model.MM - 1)),
            model.T1[i],
            model.T2[i],
            model.T3[i],
            2 * (model.T1[i] - model.T2[i]) / (model.T2[i] + model.T1[i]),
            2 * (model.T2[i] - model.T3[i]) / (model.T3[i] + model.T2[i]),
        )
        myfile.write(
            f"-np.log(1 - i * model.Z / (model.MM - 1))\t"
            f"{model.T1[i]}\t{model.T2[i]}\t{model.T3[i]}\t"
            f"{2 * (model.T2[i] - model.T1[i]) / (model.T2[i] + model.T1[i])}\t"
            f"{2 * (model.T1[i] - model.T3[i]) / (model.T1[i] + model.T3[i])}\t\n"
        )

```