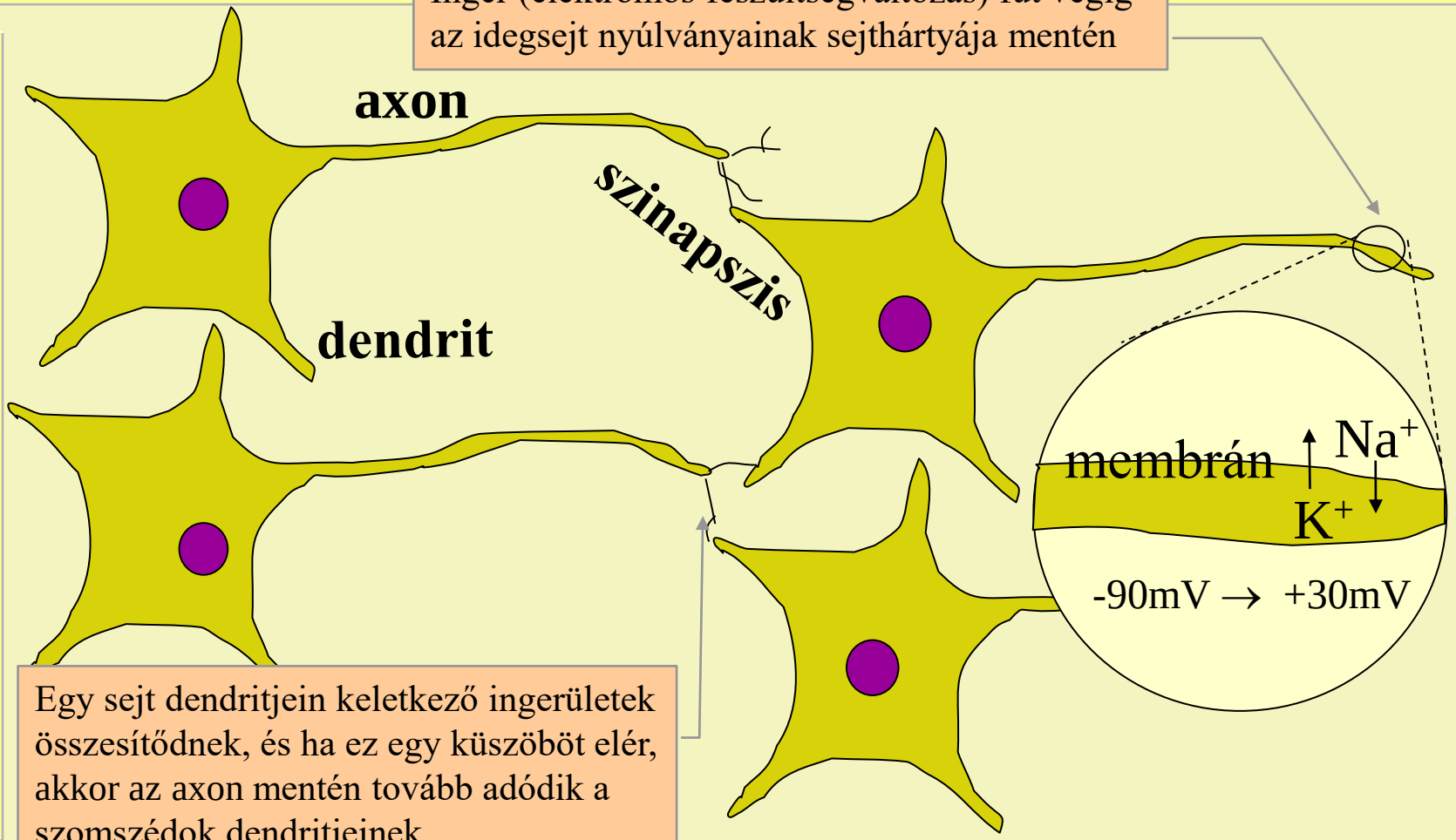
3. Mesterséges neuronhálók

Inger (elektromos feszültségváltozás) fut végig az idegsejt nyúlványainak sejthártyája mentén

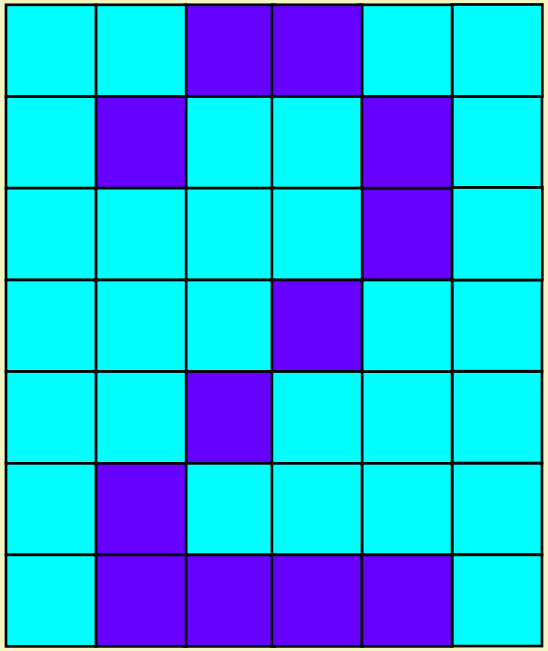


Egy sejt dendritjein keletkező ingerületek összesítődnek, és ha ez egy küszöböt elér, akkor az axon mentén tovább adódik a szomszédok dendritjeinek.

Számjegy felismerés egy mesterséges neuronhálózata

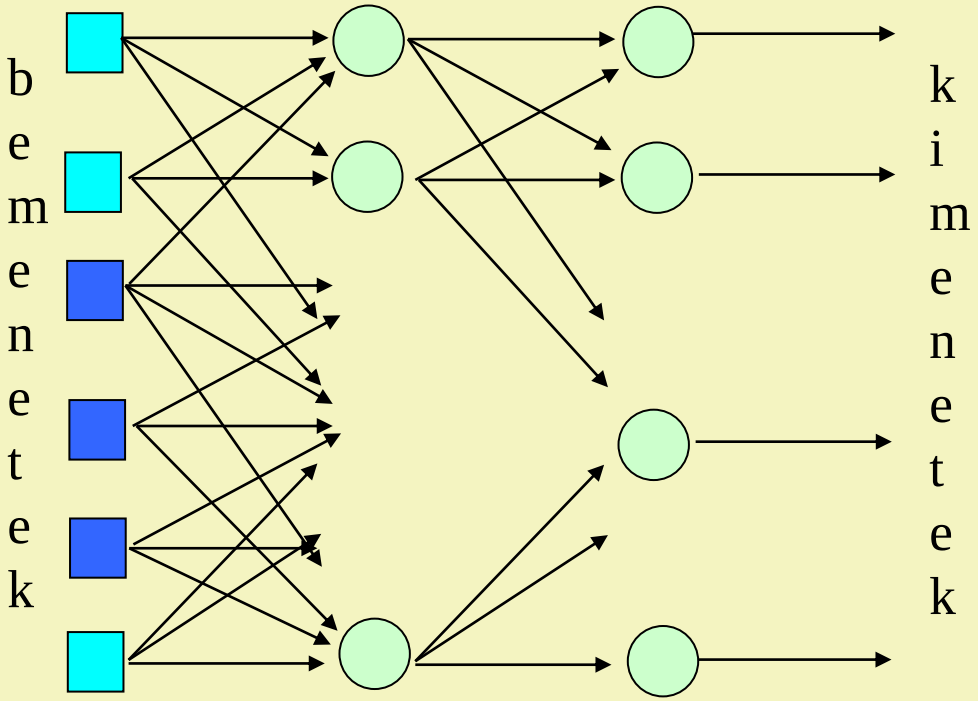
Bemeneti értékek száma: 42

Minden pixel generál egy bemeneti értéket.



Kimenetek száma: 10

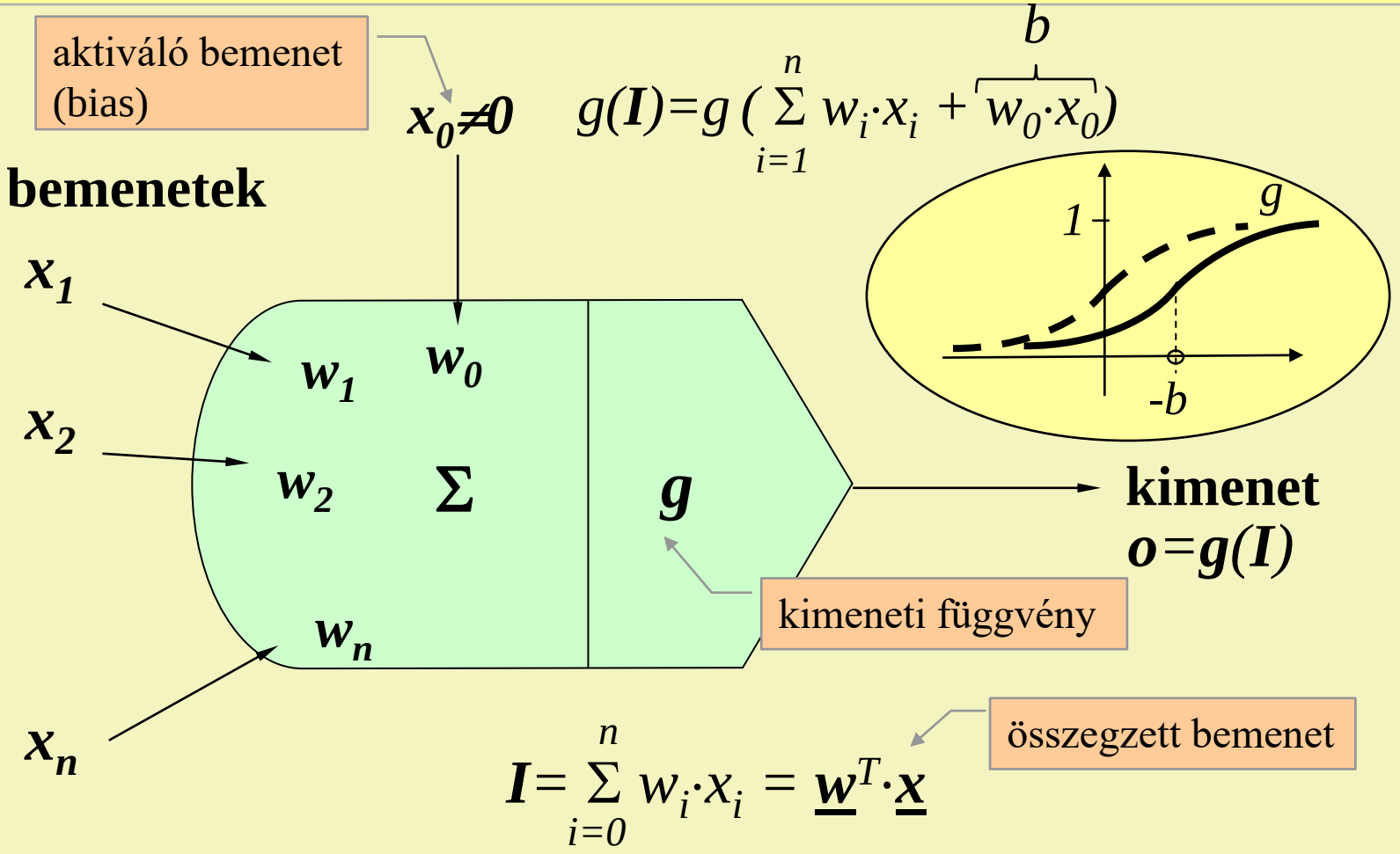
Minden számjegyhez tartozik egy neuron a kimeneti rétegben, amely akkor tüzel, ha az adott számjegyet véli felismerni a rendszer.



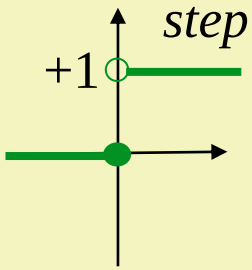
Mesterséges neuronhálók alkotóelemei

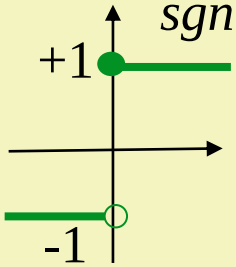
- Mesterséges neuron
  - bemenő értékekből kimenő értéket számoló egység, amelynek számítási képlete változtatható, tanítható
- Hálózati topológia
  - sok mesterséges neuron egymáshoz kapcsolva, ahol egyik neuron kimenete egy másik neuron bemenete lesz
  - bizonyos neuronok a bemenetüket a hálózaton kívülről kapják, mások kimeneteit pedig hálózat kimenetének tekintjük
- Tanulási szabály
  - egy neuron számítási képletét meghatározó eljárás, amely lehet egy tanító példák alapján működő algoritmus is.

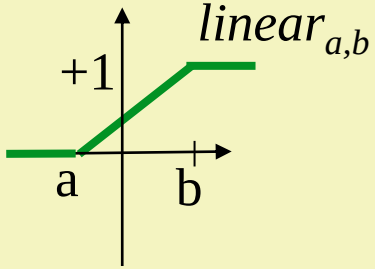
Általánosított perceptron

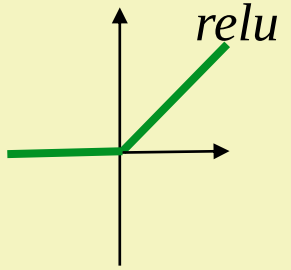


Kimeneti függvények

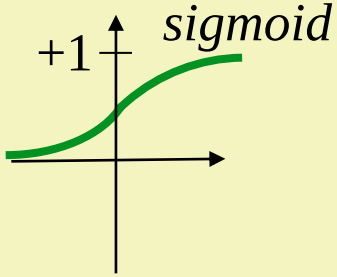




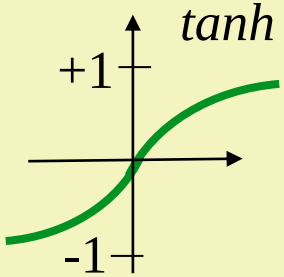




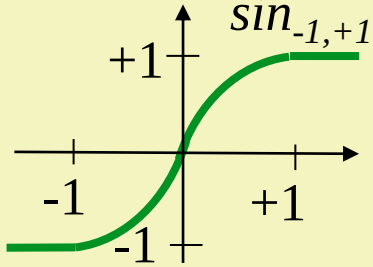
max(0, x)

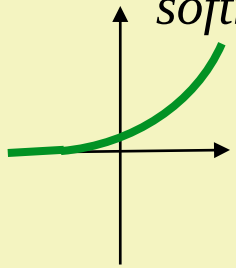


$$\frac{1}{1+e^{-x}}$$



$$\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

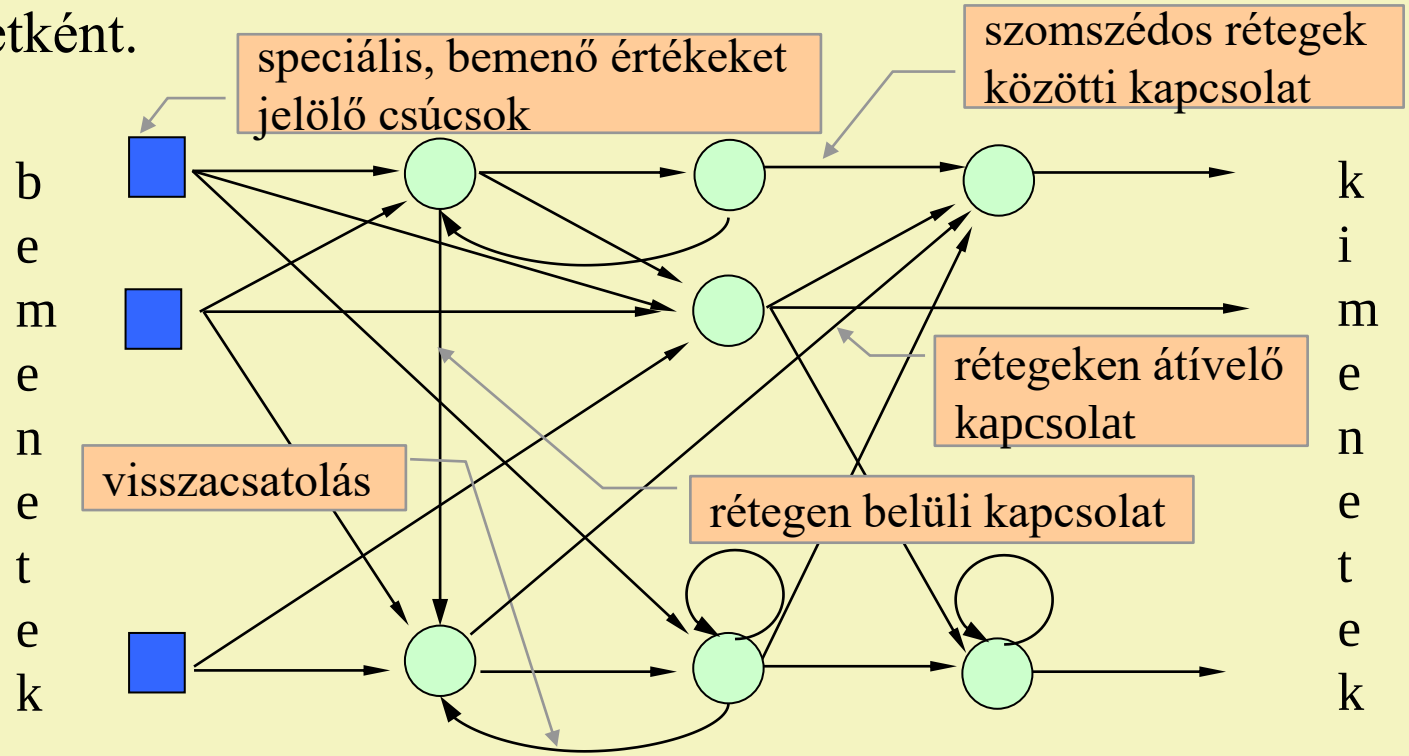




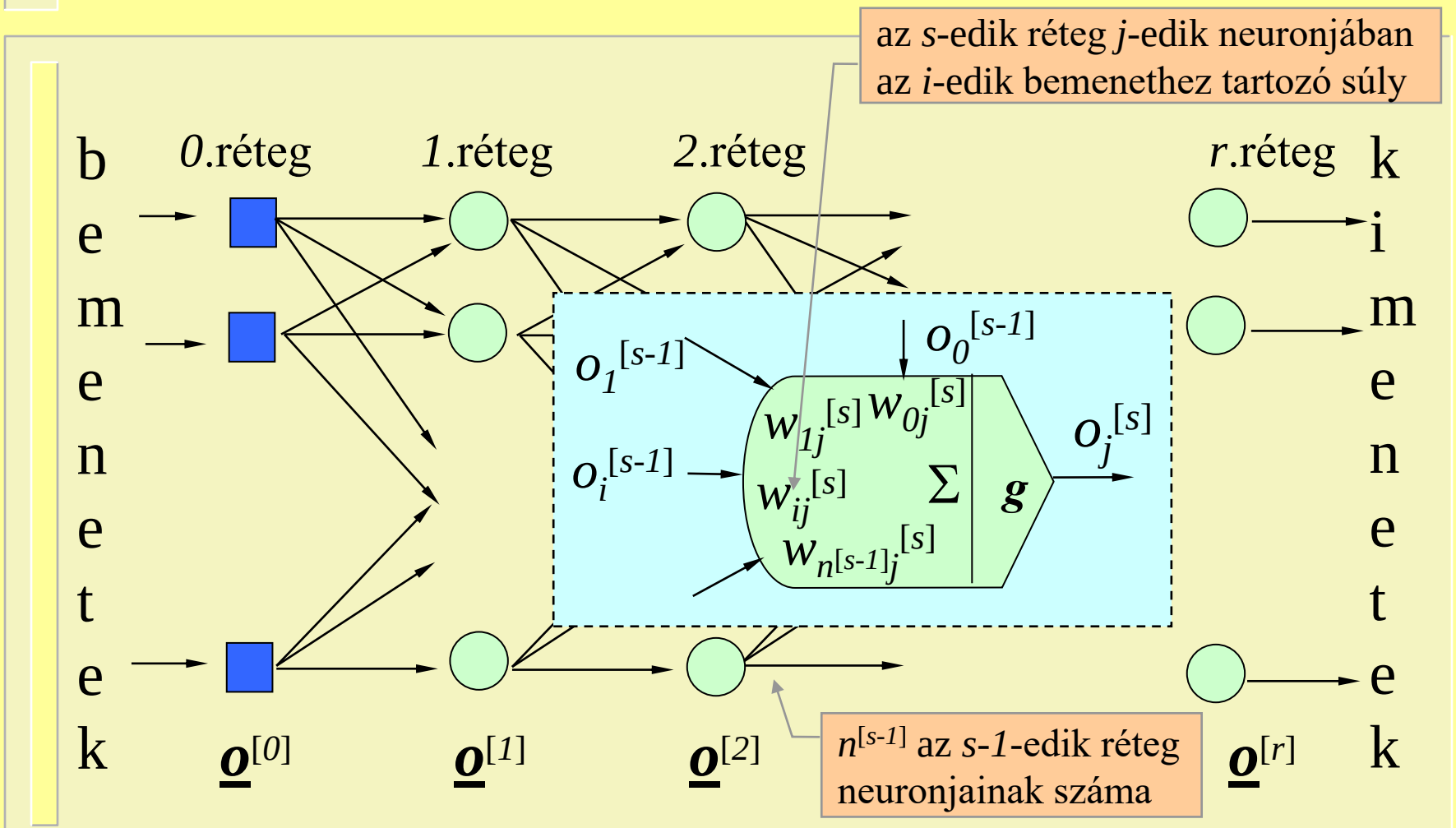
$$\frac{e^{x_j}}{\sum e^{x_k}}$$

Hálózati topológia

Irányított gráf, amelynek csúcsai mesterséges neuronok, amelyek rétegekbe csoportosíthatók. Az irányított élek az adatáramlás irányát jelölik: $a \rightarrow b$: az a neuron kimeneti értékét kapja meg a b neuron bemenetként.

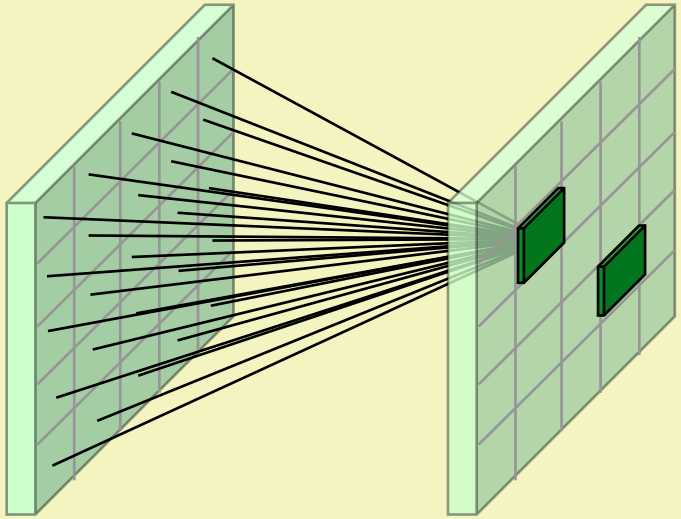


Többrétegű előrecsatolt hálózat (feed forward MLP)



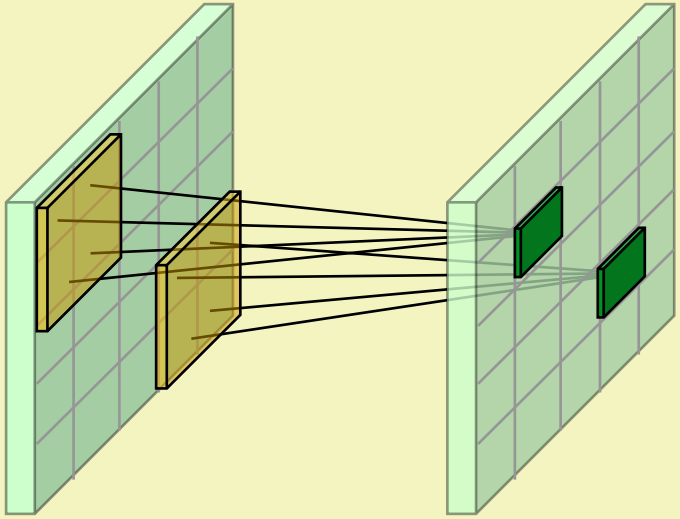
Konvolúciós neuron hálózat

Teljesen összekötött (sűrű) fully connected neural net



Pl.: 1000×1000-es első réteg esetén a második réteg egy neuronjában 10^6 darab súlyt kell tárolni.

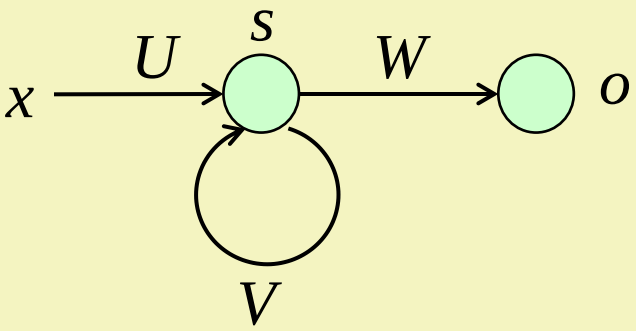
Lokálisan összekötött convolutional neural net

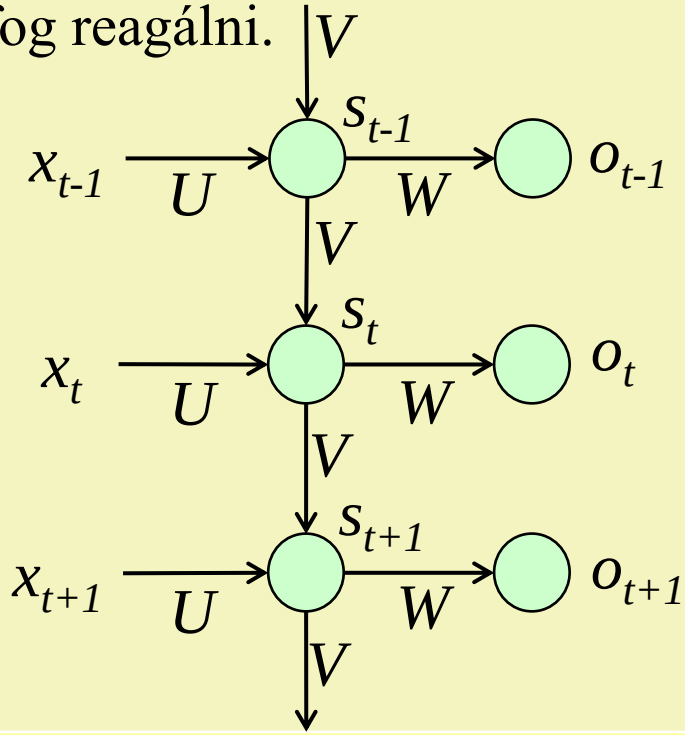


Pl.: 1000×1000-es első réteg esetén egy 2×2-es szűrőt használva a második réteg egy neuronjában csak 4 súlyt kell tárolni.

Rekurrens neurális hálózat

- Az input és/vagy az output változó hosszúságú sorozat.
- A számítási képlet azt utánozza, mintha a neuron emlékezne a megelőző inputokra, mivel egy új inputra a megelőző inputokra kiszámolt outputot is felhasználva fog reagálni.



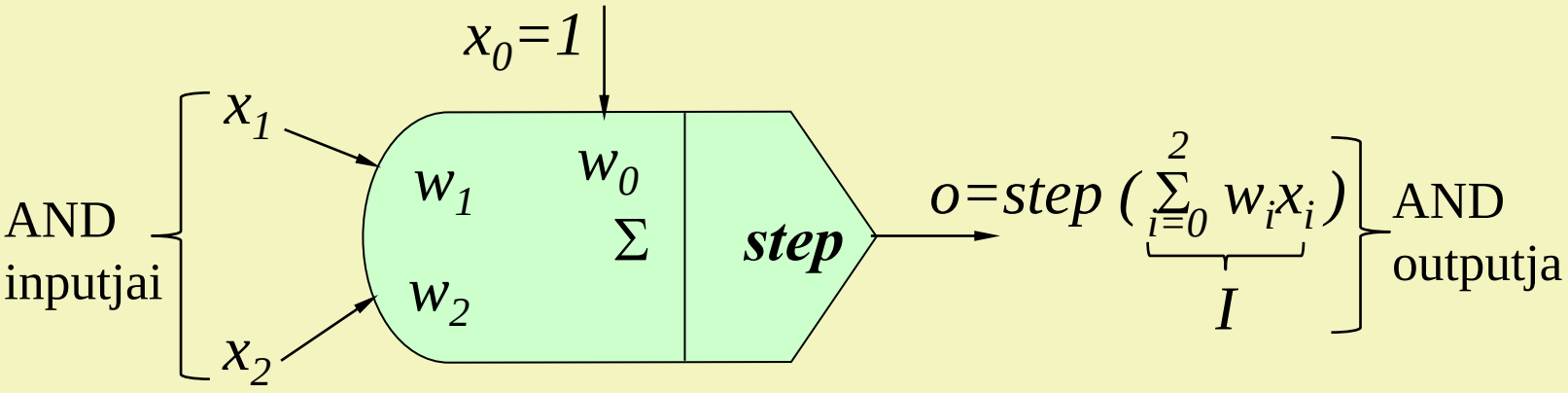


Általánosított perceptron tanulása

- Egy neuron számítási képletét a neuron *w* súlyai határozzák meg.
- A súlyok implicit módon a hálózat topológiáját is kijelölik, hiszen neuronhoz vezető nulla értékű súllyal ellátott él lényegében az él figyelmen kívül hagyását (törlését) jelenti.
- Tanulás során a súlyokat fokozatosan módosítjuk ($w:=w+\Delta w$).
- A Δw a neuron bemeneti értékeitől és a neuron által kiszámított kimeneti értéktől függ.
  - Felügyelt tanulás esetén felhasználjuk az elvárt kimenetet.
  - Felügyelet nélküli tanulás esetén az elvárt kimenetre nincs szükség.

Példa felügyelt tanulásra

Tanítsuk meg egy egyszerű számoló egységnek (egyetlen mesterséges neuronnak) a logikai AND művelet működését!



x_i a neuron i-dik bemenete ($x_i \in \{0,1\}$, $x_0 = 1$)
w_i a neuron i-dik bemenetének súlya ($w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$)
I a neuron összegzett bemenete
o a neuron számított kimenete ($o \in \{0,1\}$)

Delta szabály

felügyelt tanulási szabály: $\Delta w_i = \eta \cdot x_i \cdot (y - o)$

hiba (e)
y ~ várt
o ~ számított

$\eta = 0.1$

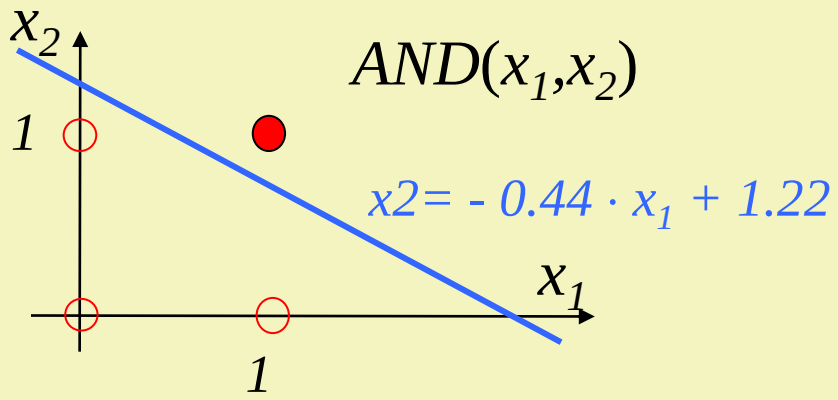
	x_1	x_2	y	w_0	w_1	w_2	I	o	e
				0.08	**0.08**	**0.08**			
1.	1	0	0	0.08	+ 0.08	+ 0	= 0.160	1	-1
				-0.02	**-0.02**	**0.08**			
2.	0	1	0	-0.02	+ 0	+ 0.08	= 0.06	1	-1
				-0.12	**-0.02**	**-0.02**			
3.	1	1	1	-0.12	+ -0.02	+ -0.02	=-0.16	0	1
				-0.02	**0.08**	**0.08**			
4.	1	0	0	-0.02	+ 0.08	+ 0	= 0.06	1	-1
				-0.12	**-0.02**	**0.08**			
5.	0	1	0	-0.12	+ 0	+ 0.08	= -0.04	0	0
				-0.12	**-0.02**	**0.08**			
6.	1	1	1	-0.12	+ -0.02	+ 0.08	= -0.06	0	1
...									
13.				**-0.22**	**0.08**	**0.18**			
14.	1	0	0	-0.22	+ 0.08	+ 0	= -0.14	0	0
15.	0	1	0	-0.22	+ 0	+ 0.18	= -0.04	0	0
16.	1	1	1	-0.22	+ 0.08	+ 0.18	= 0.04	1	0
17.	**0**	**0**	**0**	-0.22	+ 0	+ 0	= -0.22	**0**	0

első epoch

második epoch

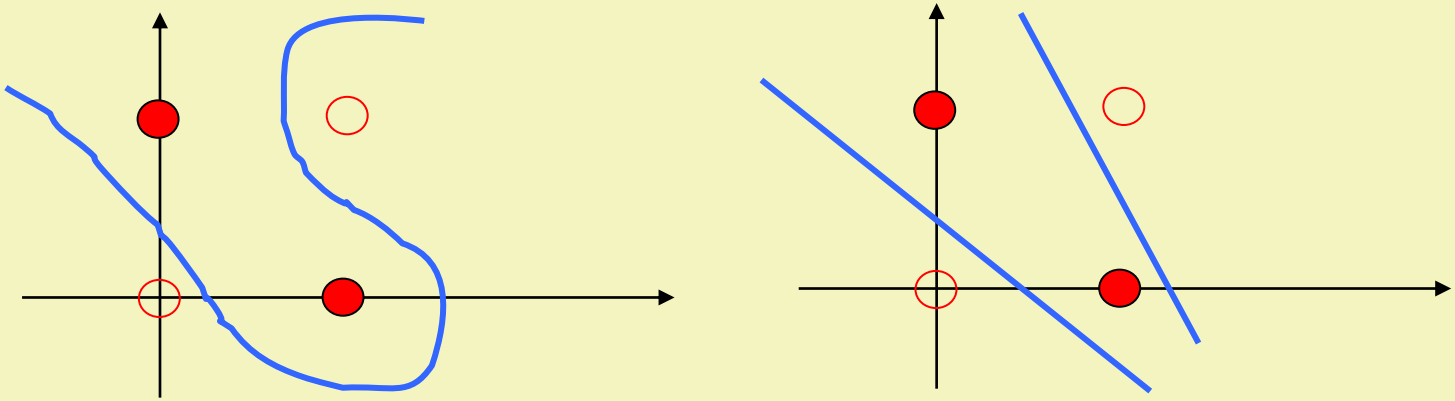
Mit tanultunk meg?

- A neuron működése azonos az $AND(x_1,x_2)$ működésével, mert az összegzett bemenet előjele csak az $(1,1)$ bementre pozitív:
  - ha $I(x_1,x_2) \leqq 0$ akkor $step(I(x_1,x_2)) = 0$
  - ha $I(x_1,x_2) > 0$ akkor $step(I(x_1,x_2)) = 1$
- A w együtthatók megtanulásával azt az $I(x_1,x_2)=w_0 + w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2$ egyenest kaptuk meg a lehetséges bemenet-párok síkján, amely elszeparálja (osztályozza) a bemenet-párokat: egy oldalra (félsíkra) kerülnek az azonos eredményű bemenetek.

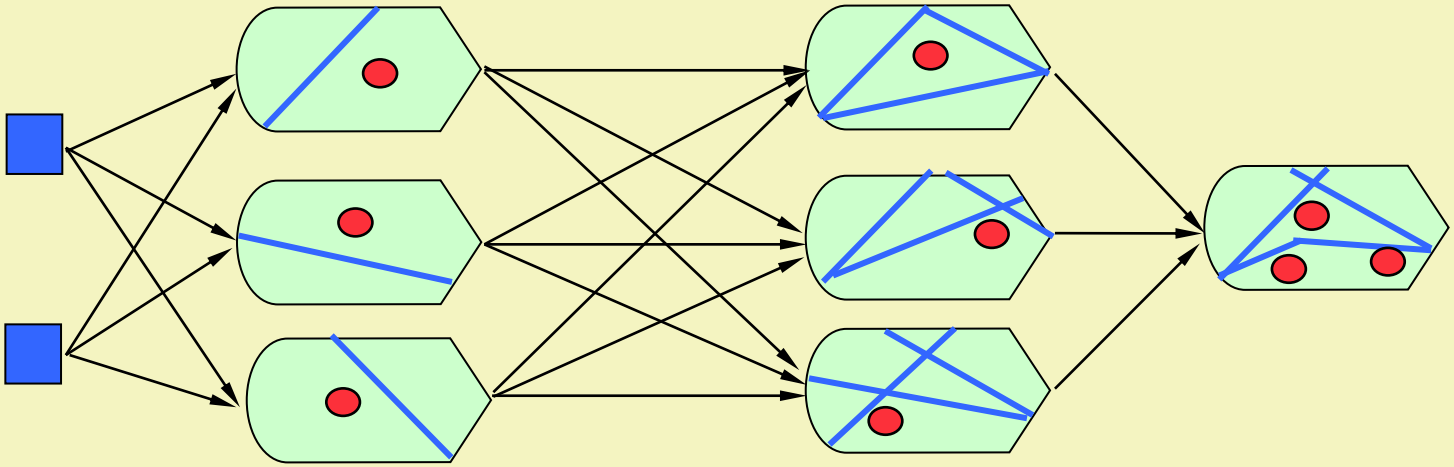


Lineáris szeparálhatóság

- Egyetlen perceptronnal olyan bonyolultságú feladatot vagyunk képesek megoldani, ahol az eredményük alapján a bemeneteket egy hipersík választja szét, azaz lineárisan szeparálhatók.
- De nem lehet például a XOR műveletet egyetlen perceptronnal megvalósítani, mert ez a feladat lineárisan nem szeparálható.



Rétegek „tudása”



- Több réteggel összetettebb problémák is megoldhatók, de mivel a *step* függvény (nem deriválható) egyszerű perceptronokkal eddig nem sikerült megfelelő tanuló algoritmust találni ehhez.
- De ha lecseréljük a kimeneti függvény (pl. szigmoidra), akkor már létrehozható olyan algoritmus, amellyel a háló tanítható (pl. error backpropagation).

Homogén MLP háló számítási modellje

- A teljes háló számítási modellje:

deriválható aktivizációs függvény

$$f(\Theta, \underline{x}) = g(\underline{\underline{w}}^{[r]} \cdot \ldots \cdot g(\underline{\underline{w}}^{[s]} \cdot \ldots \cdot g(\underline{\underline{w}}^{[2]} \cdot g(\underline{\underline{w}}^{[1]} \cdot \underline{x})) \ldots) \ldots)$$

a Θ paraméter a ($w_{ij}^{[s]}$) súlyok összessége

- Egy réteg számítási modellje

$$\underline{o}^{[s]} = g(\underline{\underline{w}}_j^{[s]} \cdot \underline{o}^{[s-1]}) = g(\sum_{i=0}^{n^{[s-1]}} w_{ij}^{[s]} \cdot o_i^{[s-1]})$$

Hiba visszaterjesztés módszere (error backpropagation)

A modell hibafüggvénye: $L(\Theta) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n^{[r]}} (y_j - o_j^{[r]})^2$

$f(\Theta, \underline{x})$

Az $L(\Theta)$ egy olyan több változós függvény, amely a $(w_{ij}^{[s]})$ súlyoktól függ. A tanulás során ennek a függvénynek keressük a minimum helyét gradiens módszerrel, azaz lépésről lépésre módosítjuk a súlyokat megfelelő irányban kis mértékben.

$$w_{ij}^{[s]} := w_{ij}^{[s]} - \Delta w_{ij}^{[s]}$$

$$I_j^{[s]} = \sum_{i=0}^{n} w_{ij}^{[s]} \cdot o_i^{[s-1]}$$

$$\Delta w_{ij}^{[s]} = \eta \cdot \frac{\partial L}{\partial w_{ij}^{[s]}} = \eta \cdot \frac{\partial L}{\partial I_j^{[s]}} \cdot \frac{\partial I_j^{[s]}}{\partial w_{ij}^{[s]}} = \eta \cdot \frac{\partial L}{\partial I_j^{[s]}} \cdot o_i^{[s-1]}$$

$e_j^{[s]}$

a számítási hibának az s-edik réteg j-edik neuronjára jutó hányada

Egy neuronra visszavetített számítási hiba

Ha $s=r$ akkor

$$e_j^{[r]} = o_j^{[r]}(1-o_j^{[r]})(t_j - o_j^{[r]})$$

$$\Delta w_{ij}^{[r]} = \eta\, e_j^{[r]}\, o_i^{[r-1]}$$

$$e_j^{[s]} = -\frac{\partial E}{\partial I_j^{[s]}}$$

ha g a szigmoid függvény

Ha $s<r$ akkor

$$e_j^{[s]} = o_j^{[s]}(1-o_j^{[s]}) \sum_{k=1}^{n^{[s+1]}} e_k^{[s+1]}\, w_{ik}^{[s+1]}$$

$$\Delta w_{ij}^{[s]} = \eta\, e_j^{[s]}\, o_i^{[s-1]}$$

ha g a szigmoid függvény

rekurzív szabályt kapjuk a súlyok módosítására.

Backpropagation tanuló algoritmus

1. Az $\underline{x}$ bemeneti vektorból indulva rétegenként számoljuk a neuronok kimenetét: $o_j^{[s]}$, a kimeneti réteg kimeneteit $o_j^{[r]}$ is.

2. A kimeneti réteg minden neuronjára kiszámoljuk a lokális hibát:

$$e_j^{[r]} := o_j^{[r]} \cdot (1 - o_j^{[r]}) \cdot (t_j - o_j^{[r]})$$

ha g a szigmoid függvény

3. Rétegenként hátulról előre haladva számoljuk a belső neuronok hibáit:

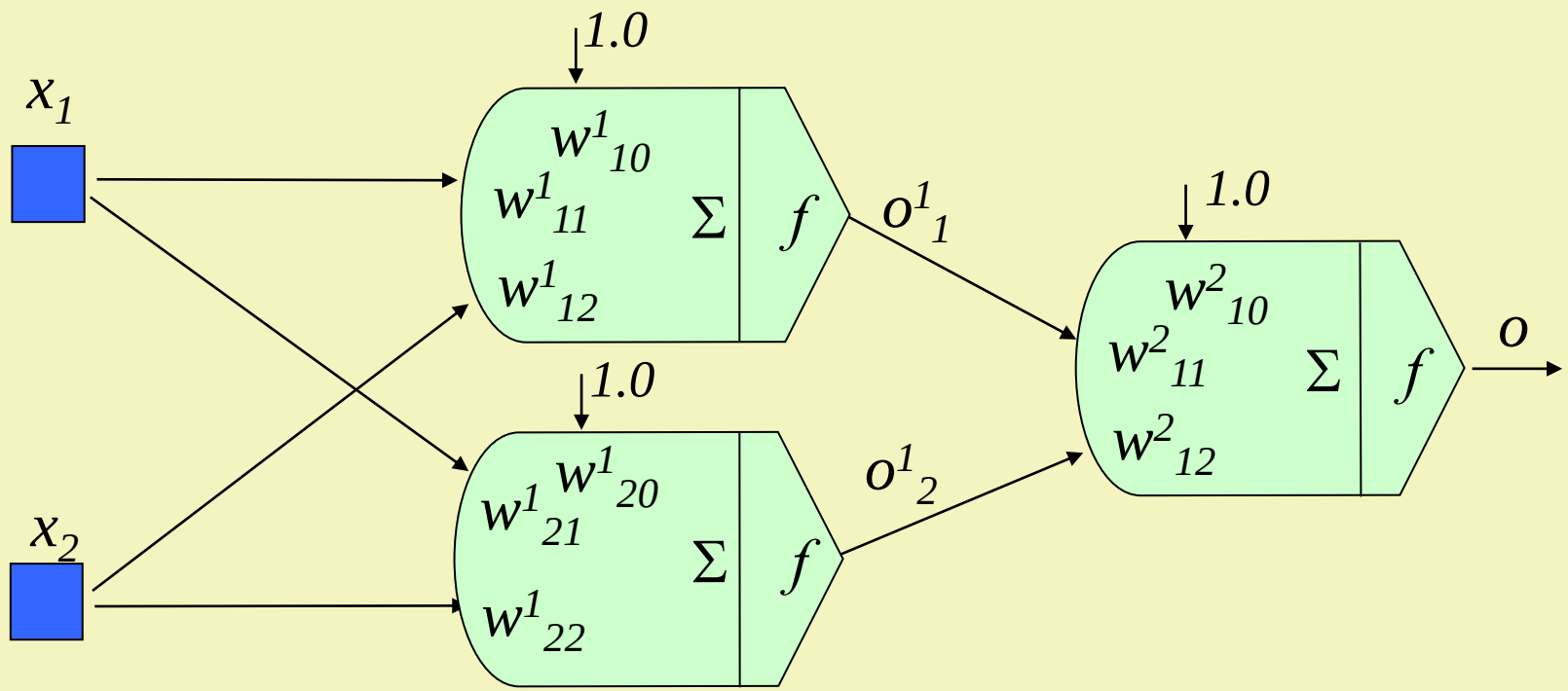
$$e_j^{[s]} := o_j^{[s]} \cdot (1 - o_j^{[s]}) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n^{[s+1]}} e_k^{[s+1]} \cdot w_{jk}^{[s+1]}\right)$$

ha g a szigmoid függvény

4. Végül módosítjuk a hálózat súlyait: $w_{ij}^{[s]} := w_{ij}^{[s]} + \Delta w_{ij}^{[s]}$ ahol a súlytényező-változás: $\Delta w_{ij}^{[s]} := \eta \cdot e_j^{[s]} \cdot o_i^{[s-1]}$

XOR művelet példája

Beállítások: $x_1, x_2 \in \{0,1\}$ $f(x)=sigmoid(x)$ $o^s_i \in (0,1)$
$w^s_{ij} = rand(-0.1 , 0.1)$ $o^s_0 = 1.0$ $\eta = 1.0$



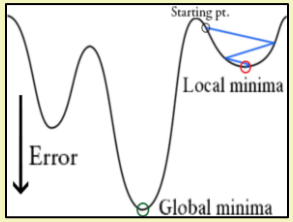
Rétegenként eltérő aktivizációs függvény

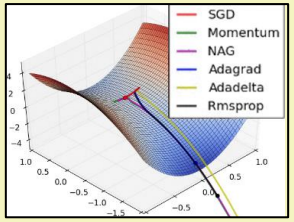
- Egy inhomogén MLP háló számítási modellje: $f : P \times X \rightarrow Y$

$$f(\Theta, \underline{x}) = g_r(\underline{\underline{W}}^{[r]}, g_{r-1}(\ldots g_2(\underline{\underline{W}}^{[2]}, g_1(\underline{\underline{W}}^{[1]}, \underline{x})) \ldots))$$

  - $\Theta = \{w^{[1]}, \ldots, w^{[r]}\}$ azaz a paraméterek a súlyok
  - $g_s : P \times X^{s-1} \rightarrow X^s$ s-edik réteg kimeneti függvénye ($X = X^0$, $Y = X^r$)

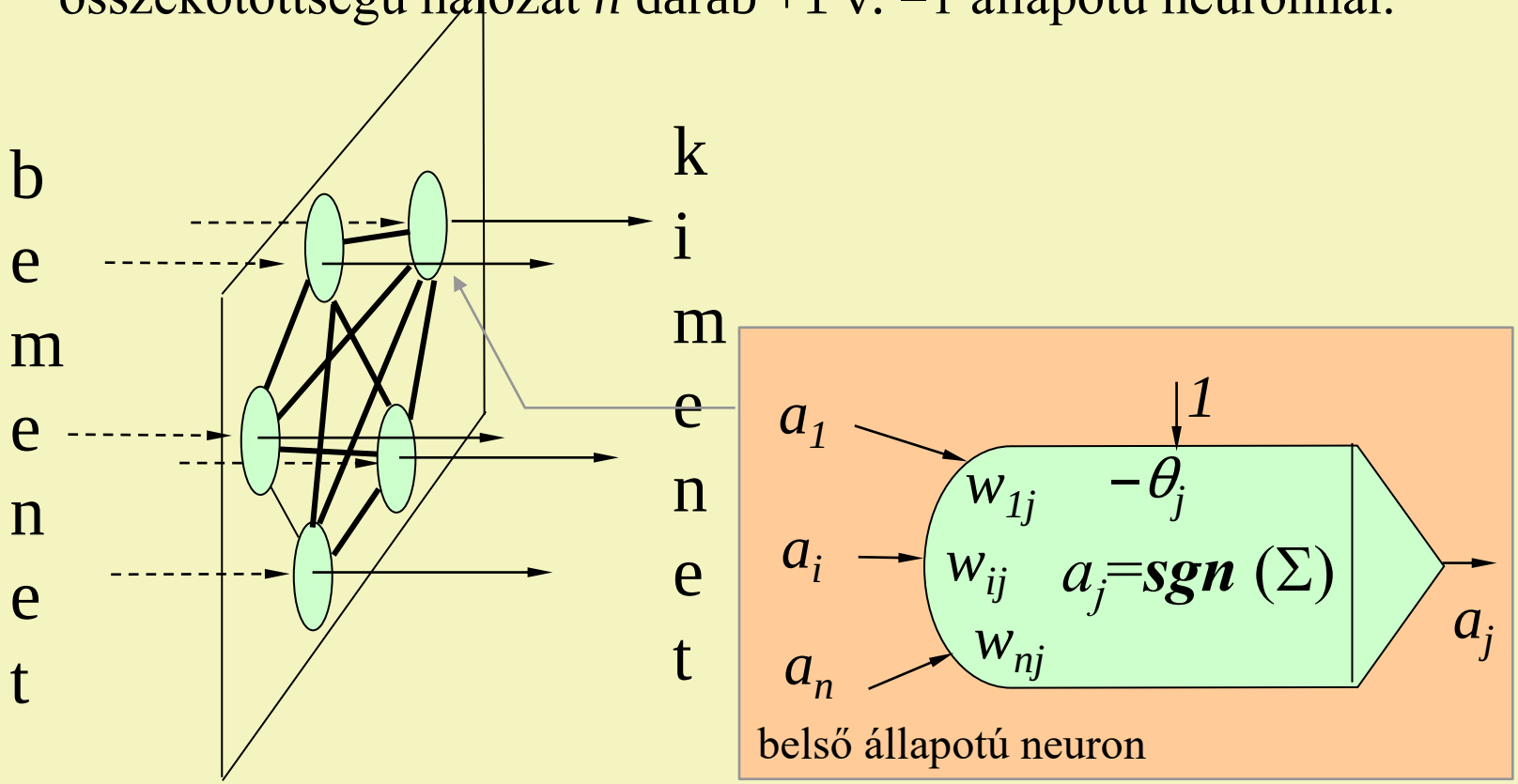
- A gradiens elméleti kiszámítása nehéz, ezért erre numerikus módszereket használnak. (Keras, TensorFlow)
- További problémák:
  - A tanító minták kiválasztása nehéz (homogén minták, overfitting).
  - A hiper-paraméterek (N, η) megtanulásának kérdése.
  - A lokális minimum-, illetve a nyeregpontok problémája.





Hopfield modell

- Aszinkron működésű Hopfield topológia: egyrétegű, teljes összekötöttségű hálózat *n* darab +1 v. −1 állapotú neuronnal.



Hopfield modell működése

- Kezdetben a neuronok kívülről kapják értékül az állapotaikat. A neuronok által felvett állapot-együttest hívjuk a háló egy konfigurációjának.
  (Az összes konfiguráció alkotja a konfigurációs teret.)
- Ezután elkezdik újra számolni az állapotukat, aszinkron módon többször is, folyamatosan változtatva a hálózat konfigurációját:

$$a_j^{új} = sgn\left(\sum_{i=1}^{n} w_{ij} a_i - \theta_j\right)$$

  (a_i az i-dik neuron állapota, w_{ij} i-dik neuronból a j-dik neuronba vezető kapcsolat súlya, a θ_j a j-dik neuron küszöbértéke)
- Végül, amikor a hálózat egy stabil konfigurációba jut (azaz az állapotok újraszámolásuk ellenére sem változnak tovább), akkor a neuronok állapotait a háló kimeneteinek tekintjük.

Hopfield hálózat felhasználása

- A modell eredetileg asszociatív memória megvalósítására készült. Ilyenkor a hálózat egy-egy stabil konfigurációja ad meg egy eltárolt mintát (pl. egy kép pixelpontjait).
- Amikor a minta zajos, torzított vagy hiányos változatát adjuk meg bemenetként a háló neuronjainak (kibillentve őket egy stabil konfigurációból), akkor a hálózat addig változtatgatja az állapotát a neuronjainak, amíg újra stabil konfigurációba nem kerül, azaz fel nem idézi az eredeti mintát (több minta esetén a leghasonlóbbat).
- A működéssel kapcsolatban megvizsgálandó kérdések:
  - Hogyan lehet (felügyelet nélkül) betanítani arra a hálózatot, hogy a tárolt minták a hálózat stabil konfigurációi legyenek?
  - Konvergál-e a hálózat a stabil konfigurációk valamelyikéhez?

Hopfield hálózat egyetlen minta tárolására

- Kell, hogy a tárolandó $\boldsymbol{p} \in \{+1, -1\}^n$ minta egy stabil állapot-konfigurációja legyen a hálónak, azaz $p_j = sgn(\Sigma_i w_{ij} \cdot p_i)$ – feltéve, hogy $\theta_j = 0$. Ez akkor teljesül, ha $w_{ij} \cong p_i \cdot p_j$.
- Az ilyen minta jelentős vonzáskörzettel bír: ekkor ugyanis minden olyan $\boldsymbol{a}$ konfigurációból, amely komponenseinek több, mint a fele azonos a mintáéval (tehát $\Sigma_i p_i \cdot a_i > 0$), a háló véges lépésben a mintához konvergál.
  - Ez abból következik, hogy amikor egy neuron újra számolja az állapotát, akkor az azonnal a minta megfelelő komponensével válik azonossá:
    $a_j^{új} = sgn(\Sigma_i w_{ij} \cdot a_i) = sgn(\Sigma_i p_i \cdot p_j \cdot a_i) = sgn(p_j \cdot \Sigma_i p_i \cdot a_i) = p_j$.

Hopfield hálózat több minta tárolására

- Legyen *d* darab tárolandó mintánk: $\underline{\boldsymbol{p}}^k \in \{+1, -1\}^n$ $(k=1 \,..\, d)$.
- Válasszuk a súlyoknak a $w_{ij}=1/n \cdot \Sigma_k p^k{}_i \cdot p^k{}_j$ szuperpozíciókat. Ugyanez inkrementális tanulási szabályként is felírható: $\Delta w_{ij} = 1/n \cdot p^k{}_i \cdot p^k{}_j$.

  Hebb szabály
- Véletlenszerűen választott (ortogonális) minták esetén annak, hogy a minták stabil konfigurációk legyenek, akkor a legnagyobb a valószínűsége, ha $d \leqq n/\log n$.
- Konvergencia: Vegyük a $-\frac{1}{2} \Sigma_{i,j} w_{ij} \cdot a_i \cdot a_j - \Sigma_i \theta_i \cdot a_i$ hibafüggvényt. Belátható, hogy ha a súlymátrix szimmetrikus, és a diagonális elemei nem-negatívak, akkor egy konfiguráció-váltás során a függvény értékének csökkennie kell. Mivel a konfigurációk száma véges, így a hálózat véges lépésben stabil konfigurációba fog jutni.