Numerikus módszerek 2B.

1–2. előadás: Interpoláció polinomokkal

Dr. Bozsik József

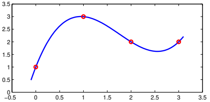
ELTE IK

2020. szeptember 10–27.

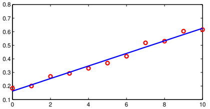
Tartalomjegyzék

A gyakorlatban sokszor előfordul, hogy egy költségesen számolható függvény helyett egyszerűbbel dolgozzunk. Az egyszerűbb függvény általában polinom, mely hatékonyan kiértékelhető.

- Olyan egyszerűbb függvényt keresünk, amely illeszkedik adott pontokra $\rightarrow$ ez az **interpolációs feladat**.



- Olyan egyszerűbb függvényt keresünk, amely közel van a mérési eredményekhez. A mérés hibája miatt nem cél a pontos illeszkedés $\rightarrow$ ez az **approximációs feladat**.



Az interpoláció alkalmazási területei:

1. Numerikus integrálás alapja.
2. Diff.egyenletek numerikus módszereinél a többlépéses módszerek konstrukciójának alapja.
3. Grafika: függvények ábrázolása számítógépen.
4. Képfeldolgozásnál: nagyításnál, forgatásnál.
5. Meteorológiai állapothatározók megállapításánál.
6. Térinformatikai rendszereknél digitális terepmodelleknél.

Tartalomjegyzék

Definíció: Az interpoláció alapfeladata

Adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a; b]$ különböző alappontok, $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ függvényértékek. Olyan $p_n \in P_n$ polinomot keresünk, melyre

$$p_n(x_i) = y_i, \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

A feltételnek eleget tevő polinomot *interpolációs polinomnak* nevezzük. P_n a legfeljebb n-edfokú polinomok halmaza.

Megj.: Ha adott az $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ függvény, amit közelíteni szeretnénk, akkor $y_i = f(x_i)$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Tétel: Az interpolációs polinom létezése és egyértelműsége

$$\exists! \;\; p_n \in P_n : \quad p_n(x_i) = y_i, \;\; (i = 0, 1, \ldots, n)$$

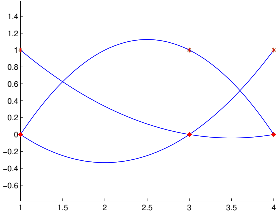
Biz.: Táblán a határozatlan együtthatók módszerével, LER megoldásával.

Megj.: A LER megoldást a gyakorlatban sosem használjuk, mert a Vandermonde-mátrix rosszul kondícionált. A hatványfüggvény rendszer $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ helyett más bázisokat fogunk használni az előállításhoz.

Definíció: Lagrange-alappolinomok

Az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ különböző alappontok által meghatározott *Lagrange-alappolinomok* a következők:

$$\ell_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1 \ldots, n).$$



Tétel: A Lagrange-alappolinomok tulajdonságai

1.
$$\ell_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

2.
$$\ell_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\,\omega_n'(x_k)}, \quad \text{ahol} \quad \omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

3.
$$L_n(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x) \equiv p_n(x)$$

L_n-t az interpolációs polinom *Lagrange-alakjának* nevezzük.

Biz.: Egyszerűen meggondolható.

Tétel: Hibaformula

1. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges,
2. $[a; b]$ az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ és x által kifeszített intervallum,
3. továbbá $f \in C^{n+1}[a; b]$.

1. Ekkor $\exists\, \xi_x \in [a; b]$, melyre

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \omega_n(x).$$

2. A hibabecslés

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_n(x)|, \quad M_{n+1} := \max_{\xi \in [a;b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Biz.: Táblán a Rolle-tétel többszöri alkalmazásával.

Definíció: Osztott differenciák

Az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ különböző alappontok által meghatározott

- *elsőrendű osztott differenciák* a következők:

$$f[x_i, x_{i+1}] := \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

- A *k-adrendű osztott differenciákat* rekurzívan definiáljuk:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i},$$

$$k = 1, \ldots, n, \quad i = 0, \ldots n-k.$$

- Ha a 0-adrendű osztott differenciákat $f[x_i] := f(x_i)$-vel definiáljuk, akkor az elsőrendű osztott differenciát is a rekurzióval számolhatjuk.

Az osztott differenciákat táblázatba rendezve szokás kiszámolni:

x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

Definíció: Newton-féle bázis

Az interpolációs polinom felírásához a következő bázisra lesz szükségünk:

$$1,\ (x - x_0),\ (x - x_0)(x - x_1),\ \dots,\ \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i).$$

Tétel: Az osztott differenciák tulajdonságai

1.
$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\omega_k'(x_j)}$$

2. Ha σ a $(0, 1, \ldots, k)$ értékek egy permutációja, akkor
$$f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}] = f[x_0, x_1, \ldots, x_k].$$

Biz.: Az 1. állítás teljes indukcióval bizonyítható, a 2. állítás ebből egyszerűen következik.

Tétel: Newton-alak

$$N_n(x) := f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \cdot \omega_{k-1}(x) \equiv L_n(x)$$

N_n-t az interpolációs polinom *Newton-alakjának* nevezzük.
A rekurzív formula új x_{n+1} alappont hozzávétele esetén:

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}] \cdot \omega_n(x).$$

Biz.: Alakítsuk át a Lagrange-alakot:

$$L_n(x) = L_0(x) + \sum_{k=1}^{n} (L_k(x) - L_{k-1}(x)),$$

ahol L_k az $x_0, x_1, \ldots, x_k$ alappontokra felírt Lagrange-alak.

- $L_0(x) = \text{konstans} = f(x_0)$
- $L_k(x_j) - L_{k-1}(x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0, \quad (j = 0, 1, \ldots, k-1)$
- Tehát $L_k - L_{k-1}$ legfeljebb k-adfokú polinom és k db gyöke van, így alakja

  $$(L_k - L_{k-1})(x) = c_k \cdot (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}) = c_k\, \omega_{k-1}(x).$$

- $$(L_k - L_{k-1})(x_k) = f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = c_k\, \omega_{k-1}(x_k) \quad \mid : \omega_{k-1}(x_k)$$

- $$\frac{f(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} - \frac{L_{k-1}(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} = c_k$$
- Felhasználva, hogy
  $L_{k-1}(x_k) = \sum_{j=0}^{k-1} f(x_j) \cdot \underbrace{\frac{\omega_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_j)\,\omega'_{k-1}(x_j)}}_{=\ell_j(x_k)},$
- $$\frac{f(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{(x_k - x_j)\,\omega'_{k-1}(x_j)} = c_k.$$
- De $\omega_{k-1}(x_k) = \omega'_k(x_k)$ és
- $(x_k - x_j)\,\omega'_{k-1}(x_j) = -(x_j - x_k)\,\omega'_{k-1}(x_j) = -\omega'_k(x_j)$.
- $$\frac{f(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{-\omega'_k(x_j)} = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\omega'_k(x_j)} = f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = c_k$$

Numerikus módszerek 2B.

3. előadás: Csebisev polinomok

Dr. Bozsik József

ELTE IK

2020. szeptember 24.

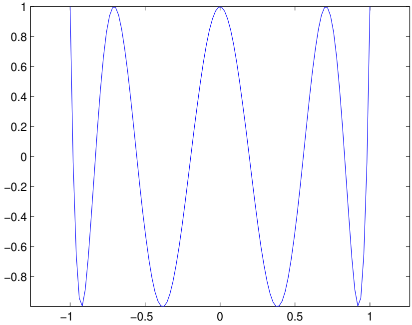
Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék

Definíció: Csebisev-polinom

A $T_n(x) := \cos(n \cdot \arccos(x))$, $x \in [-1; 1]$ függvényt n-edfokú (elsőfajú) Csebisev-polinomnak nevezzük.

A 8-adfokú Csebisev-polinom:



1. Tétel: Rekurzió

$$T_0(x) := 1, \quad T_1(x) := x,$$
$$T_{n+1}(x) := 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Biz.: Vezessük be az $\alpha = \arccos(x)$ jelölést ($x = \cos(\alpha)$):

$$2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) = 2\cos(\alpha)\cos(n\alpha) - \cos((n-1)\alpha) =$$
$$= 2\cos(\alpha)\cos(n\alpha) - [\cos(n\alpha)\cos(\alpha) + \sin(n\alpha)\sin(\alpha)] =$$
$$= \cos(n\alpha)\cos(\alpha) - \sin(n\alpha)\sin(\alpha) = \cos((n+1)\alpha) = T_{n+1}(x).$$

Következmény:

$T_n \in P_n$ és főegyütthatója: 2^{n-1} ($n \geq 1$)-re.

Definíció:

$$\widetilde{T}_n := \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

az 1 főegyütthatós Csebisev-polinom. $\widetilde{T}_n \in P_n^{(1)}$, ahol $P_n^{(1)}$: az 1 főegyütthatós n-edfokú polinomok halmaza.

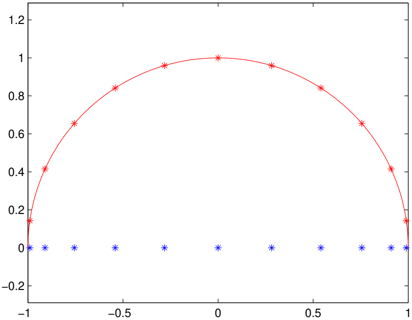
2. Tétel:

- T_n-nek n db különböző valós gyöke van $[-1;1]$-en.
- A gyökök a 0-ra szimmetrikusan helyezkednek el.
- Ha n páros, akkor T_n páros függvény,
  ha n páratlan, akkor T_n páratlan függvény.

Biz.: $\cos(n \arccos(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \ (k \in Z)$

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \ \ (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

A 11-edfokú Csebisev-polinom gyökei (kékkel):



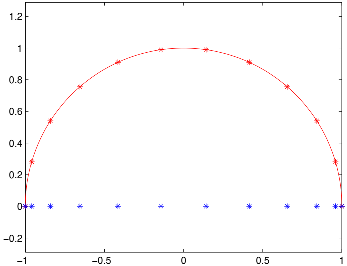
3. Tétel:

T_n-nek $n+1$ db szélsőérték helye van $[-1;1]$-en.

Biz.: $\cos(n \arccos(x)) = (-1)^k \quad \Leftrightarrow \quad n \arccos(\xi_k) = k\pi, \quad (k \in Z)$

$$\xi_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

A 11-edfokú Csebisev-polinom szélsőértékhelyei (kékkel):



4. Tétel: Csebisev-tétel

A $(T_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer extremális tulajdonsága:

$$\min_{\widetilde{Q} \in P_n^{(1)}} \|\widetilde{Q}\|_\infty = \|\widetilde{T}_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}},$$

ahol $\|\widetilde{Q}\|_\infty := \max_{x \in [-1;1]} |\widetilde{Q}(x)|$.

Alkalmazás: Az interpolációs hibaformulában az $\omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ függvény 1 főegyütthatós $n+1$-edfokú polinom, alkalmazhatjuk rá a Csebisev-tételt. Ha a $[-1;1]$-en vett interpoláció során az alappontok az $n+1$-edfokú Csebisev-polinom gyökei, vagyis $\omega_n(x) \equiv \widetilde{T}_{n+1}(x)$, akkor a hiba a $[-1;1]$ intervallumon minimális lesz.

5. Tétel: Az interpoláció hibája $[-1;1]$-en

A $[-1;1]$-en vett interpoláció és $f \in C^{(n+1)}[-1;1]$ függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok a Csebisev-polinom gyökei. Ekkor

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \|\widetilde{T}_{n+1}\|_\infty = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Biz.: Lásd a Csebisev-tételt és a következményét.

Megj.: Ha az interpolációs alappontokat választhatjuk, akkor azok a Csebisev-polinom gyökei legyenek.

6. Tétel: Az interpoláció hibája $[a;b]$-n

Az $[a;b]$-n vett interpoláció és $f\in C^{(n+1)}[a;b]$ függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok az $[a;b]$-be transzformált Csebisev gyökök. Ekkor

$$\begin{aligned}\|f-L_n\|_\infty &\le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\cdot\|\widetilde{T}_{n+1}\|_\infty = \\ &= \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Biz.: Lásd a Csebisev-tételt és a $\varphi:[-1;1]\to[a;b]$ lineáris transzformációt:

$$\varphi(x):=\frac{b-a}{2}x+\frac{a+b}{2},\quad x\in[-1;1].$$

Az interpolációs polinomok konvergenciája

Az $(x_k^{(n)} : k = 0, 1 \ldots, n)$ alappontsorozat esetén jelöljük (L_n)-nel az alappontokhoz tartozó interpolációs polinom sorozatot.

$$\begin{array}{ll}
\left(x_0^{(0)}\right) & \to L_0 \\
\left(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}\right) & \to L_1 \\
\left(x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) & \to L_2 \\
\vdots & \vdots \\
\left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\right) & \to L_n
\end{array}$$

Kérdések:

1. (L_n) egyenletesen konvergál-e f-hez, azaz
$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0 \ ?$$
2. Milyen f-re?
3. Milyen alappontrendszer esetén?

Tétel:

1. Tegyük fel, hogy $f \in C^\infty[a;b]$ és
2. $\exists\ M > 0 :\ \ \|f^{(n)}\|_\infty \leq M^n\ \ (\forall\ n \in \mathbb{N})$.

Ekkor $\forall\ (x_k^{(n)} : k = 0, 1 \ldots, n)$ alappontrendszer sorozat esetén

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0.$$

Biz.: A hibaformulából levezethető.

Tétel: Marcinkiewicz

$\forall\ f \in C[a;b]$ esetén $\exists\ (x_k^{(n)} : k = 0, 1 \ldots, n)$ alappontrendszer sorozat, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0.$$

Tétel: Faber

$\forall\ (x_k^{(n)} : k = 0, 1 \ldots, n)$ alappontrendszer sorozat esetén $\exists\ f \in C[a;b]$, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty \neq 0.$$

Az interpoláció alkalmazása $f(x) = 0$ típusú egyenletek megoldására, az x^* gyök közelítésére.

1. Az $x_0, \dots, x_n \in [a; b]$ alappontokra és $f(x_0), \dots, f(x_n)$ függvényértékekre felírjuk az $L_n(x)$ interpolációs polinomot.

   $$L_n(x^*) = 0 \text{ megoldjuk} \quad \rightarrow \quad x_{k+1} := x^*$$

   Ezt alkalmaztuk a szelő-módszer és a Newton-módszer esetén is. $n > 2$-re problémás a gyökkeresés, nem általánosítható.

2. Tegyük fel, hogy f invertálható $[a; b]$-n, ekkor az f függvény helyett az inverzét közelítjük.

   $$f(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^* = f^{-1}(0) \text{ helyettesítés}$$

   Az $f(x_0), \dots, f(x_n)$ alappontokra és $x_0, \dots, x_n \in [a; b]$ függvényértékekre felírjuk az $Q_n(y)$ interpolációs polinomot.

   $$Q_n(y) \approx f^{-1}(y), \quad \rightarrow \quad x_{k+1} := Q_n(0)$$

Numerikus módszerek 2B.

4. előadás: Hermite-interpoláció

Dr. Bozsik József

ELTE IK

2020. október 1.

Tartalomjegyzék

Definíció: Az interpoláció alapfeladata

1. Adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_k \in [a; b]$ különböző alappontok,
2. $m_0, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ multiplicitás értékek és
3. $y_0^{(j)}, y_1^{(j)}, \ldots, y_k^{(j)} \in \mathbb{R}$ függvény- és derivált értékek $(j = 0, \ldots, m_i - 1)$,
4. $m := \sum_{i=0}^{k} m_i - 1.$
5. Olyan $H_m \in P_m$ polinomot keresünk, melyre

$$H_m^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}, \ \ (i = 0, 1, \ldots, k; \ j = 0, \ldots, m_i - 1).$$

A feltételnek eleget tevő polinomot *Hermite-interpolációs polinomnak* nevezzük.

Megj.: Adott $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ függvény esetén $y_i^{(0)} = f(x_i)$,

$$y_i^{(j)} = f^{(j)}(x_i) \ \ (i = 0, 1, \ldots, k; \ j = 0, \ldots, m_i - 1).$$

Tétel: Az Hermite-interpolációs polinom létezése és egyértelműsége

$$\exists! \ H_m \in P_m : \quad H_m^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k;\ j = 0, \ldots, m_i - 1).$$

Biz.: Határozatlan együtthatók módszerével, LER megoldása.

Megj.: Ha a függvény- és deriváltértékek hiányosan adottak, akkor hiányos (lakunáris vagy "lyukas") interpolációról beszélünk, mely általában nem oldható meg vagy nem egyértelmű.

Tétel: Hibaformula

1. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges,
2. $[a; b]$ az $x_0, x_1, \ldots, x_k$ és x által kifeszített intervallum,
3. továbbá $f \in C^{m+1}[a; b]$.

Ekkor

1. $\exists\, \xi_x \in [a; b]$, melyre

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!} \cdot \Omega_m(x).$$

2. Hibabecslés

$$|f(x) - H_m(x)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \cdot |\Omega_m(x)|,$$

$$M_{m+1} := \|f^{(m+1)}\|_\infty, \quad \Omega_m(x) := \prod_{i=0}^{k} (x - x_i)^{m_i}.$$

Az Hermite-interpoláció speciális esetei:

1. $\forall\, m_i = 1$: Lagrange-interpoláció
2. $\forall\, m_i = 2$: Fejér–Hermite-interpoláció, $m = 2k + 1$.
3. **Állítás:** Legyen $\forall\, m_i = 2$ és $f \in C[a;b]$ tetszőleges, ekkor a

$$H_m(x_i) = f(x_i),\ H_m'(x_i) = 0$$

feltételekkel definiált Hermite polinomokra, ahol az $x_i,\ (i = 0, \ldots, k)$ alappontok a Csebisev gyökök:

$$\lim_{m \to +\infty} \|f - H_m\|_\infty = 0$$

.

4. $k = 0, m_0 = m + 1$: m-edfokú Taylor-polinom.

Tartalomjegyzék

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

Eml.: Azonos alappontok esetén az osztott differencia határátmenettel definiálható:

$$f[x_i, x_i] := \lim_{x \to x_i} f[x_i, x] = \lim_{x \to x_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i} = f'(x_i)$$

Több azonos alappont esetén ugyanígy járunk el.

Definíció: Osztott differenciák azonos alappontok esetén

1. Az *elsőrendű osztott differenciák*:

$$f[x_i, x_i] := f'(x_i), \quad (i = 0, 1, \ldots, k).$$

2. A *k-adrendű osztott differenciák*:

$$f[\underbrace{x_i}_{0.}, \underbrace{x_i}_{1.}, \ldots, \underbrace{x_i}_{k.}] := \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}, \quad (i = 0, 1, \ldots, m_k - 1).$$

Az Hermite-interpolációs polinom felírásának menete:

1. Osztott differencia táblázatot készítünk, melyben minden alappontot annyiszor veszünk fel, amennyi a multiplicitása.
2. A 2. oszlopba beírjuk a függvényértékeket.
3. Az azonos alappontokhoz tartozó osztott differenciák helyére beírjuk a megfelelő derivált értékeket.
4. A táblázat többi részét hagyományos módon számoljuk.
5. A főátlóbeli elemek segítségével a szokásos módon felírjuk a Newton-alakot. A Newton-bázisban az alappontokat sorba vesszük.

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

Példa: $m_0 = 3$, $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ esetén az osztott differencia táblázat:

x_0	$\mathbf{f(x_0)}$					
x_0	$f(x_0)$	$\mathbf{f'(x_0)}$				
x_0	$f(x_0)$	$\mathbf{f'(x_0)}$	$\mathbf{f''(x_0)/2}$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1]$	$\cdots$		
x_1	$f(x_1)$	$\mathbf{f'(x_1)}$	$f[x_0, x_1, x_1]$	$\cdots$	$\cdots$	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_1, x_2]$	$\cdots$	$\cdots$	$f[x_0, x_0, x_0, x_1, x_1, x_2]$

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja:

$$H_5(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 +$$
$$+ f[x_0, x_0, x_0, x_1] \cdot (x - x_0)^3 + f[x_0, x_0, x_0, x_1, x_1] \cdot (x - x_0)^3 (x - x_1) +$$
$$+ f[x_0, x_0, x_0, x_1, x_1, x_2] \cdot (x - x_0)^3 (x - x_1)^2.$$

Numerikus módszerek 2B.

5–6. előadás: Spline-interpoláció

Dr. Bozsik József

ELTE IK

2020. október 8–15.

Tartalomjegyzék

Definíció: Interpolációs spline

Tekintsük az $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ felosztást, ahol
$I_k := [x_{k-1}; x_k]$ részintervallum $(k = 1, \ldots, n)$.
Az $S_\ell : [a; b] \to \mathbb{R}$ függvényt *ℓ-edfokú spline*-nak nevezzük, ha

1. $S_\ell\big|_{I_k} \in P_\ell \;\; (k = 1, \ldots, n)$
2. $S_\ell \in C^{(\ell-1)}[a; b]$.
3. Az S_ℓ spline-t *interpolációs spline*-nak nevezzük, ha
   $S_\ell(x_i) = f(x_i) \;\; (i = 0, \ldots, n)$.

Meghatározás: Részintervallumonkénti polinomok együtthatóinak megkeresése:

$$p_k(x) := \sum_{j=0}^{\ell} a_j^{(k)} \cdot (x - x_{k-1})^j, \;\; (x \in I_k)$$

Tartalomjegyzék

$\ell = 1$: **elsőfokú spline megadása (szakaszonkénti lineáris interpoláció)**

$$p_k(x) := a_1^{(k)}(x - x_{k-1}) + a_0^{(k)} \quad (x \in I_k)$$

A megoldáshoz írjuk fel az interpolációs feltételeket az I_k részintervallum két szélére.

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= a_0^{(k)} = f(x_{k-1}) \\ p_k(x_k) &= a_1^{(k)}(x_k - x_{k-1}) + a_0^{(k)} = f(x_k) \\ &\Rightarrow a_1^{(k)} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f[x_{k-1}, x_k] \end{aligned}$$

(Az interpolációs feltételből a folytonosság azonnal következik.)

$\ell = 2$: **másodfokú spline megadása** A polinom alakja:

$p_k(x) := a_2^{(k)}(x - x_{k-1})^2 + a_1^{(k)}(x - x_{k-1}) + a_0^{(k)} \ \ (x \in I_k).$

- Látjuk, hogy az ismeretlenek száma: $3n$,
- a feltételek száma: interpolációs feltétel minden részintervallum két szélére: $2n$ feltétel,
- minden belső osztópontra a folytonos diff-hatóság: $n - 1$ feltétel.

Összesen: $3n - 1$ feltétel, vagyis az egyértelműséghez hiányzik egy feltétel. Ezt peremfeltételként szokás megadni:

$$S_2'(a) = f'(a) \ \text{vagy} \ S_2'(b) = f'(b).$$

A feladat szétbontható n db Hermite-interpolációs feladattá.
Megjegyzés: A LER-rel történő megadáskor elölről meghatározott spline esetén alsóháromszögű LER-t kell megoldani.

Másodfokú spline megadása intervallumonként

Az algoritmus: Balról meghatározott spline esetén

A polinom alakja az $I_k := [x_{k-1}; x_k]$ intervallumon:

$$p_k(x) := a_2^{(k)}(x - x_{k-1})^2 + a_1^{(k)}(x - x_{k-1}) + a_0^{(k)} \ \ (x \in I_k)$$

Az együtthatók a következő algoritmussal állíthatók elő:

$$\begin{aligned}
& m_1 := f'(x_0) \\
k = 1, \ldots, n : \quad & a_0^{(k)} := f(x_{k-1}) \\
& a_1^{(k)} := m_k \\
& a_2^{(1)} := \frac{f[x_{k-1}, x_k] - m_k}{x_k - x_{k-1}} \\
& m_{k+1} := 2f[x_{k-1}, x_k] - m_k
\end{aligned}$$

$\ell = 3$: **köbös spline megadása:** A polinom alakja I_k-n:

$$p_k(x) := a_3^{(k)} \cdot (x - x_{k-1})^3 + a_2^{(k)} \cdot (x - x_{k-1})^2 + a_1^{(k)} \cdot (x - x_{k-1}) + a_0^{(k)}.$$

- Látjuk, hogy az ismeretlenek száma: $4n$.
- A feltételek száma:
  1. interpolációs feltétel minden részintervallum két szélére: $2n$ feltétel,
  2. belső osztópontokban $S_3' \in C$: $n-1$ feltétel,
  3. belső osztópontokban $S_3'' \in C$: $n-1$ feltétel,

Összesen: $4n-2$ feltétel, vagyis az egyértelműséghez hiányzik két feltétel. Ezeket peremfeltételként szokás megadni.

1. **Hermite-féle peremfeltétel**:

$$S_3'(a) = f'(a) \text{ és } S_3'(b) = f'(b).$$

Fizikailag azt jelenti, hogy az $S(x)$ alakú vékony rugalmas fémszál a végpontokban be van fogva.

2. **Természetes peremfeltétel:**

$$S_3''(a) = 0 \text{ és } S_3''(b) = 0.$$

Fizikailag azt jelenti, hogy az $S(x)$ alakú vékony rugalmas fémszál a végpontokban csuklóval rögzített.

3. **Periodikus peremfeltétel:** csak periodikus függvények közelítése esetén, ha $[a; b]$ a periódus többszöröse.
   Ekkor $f(a) = f(b)$. A hiányzó két feltétel:

$$S_3'(a) = S_3'(b) \text{ és } S_3''(a) = S_3''(b).$$

4. **A "not a knot" peremfeltétel:**

$$S_3''' \in C\{x_1\} \text{ és } S_3''' \in C\{x_{n-1}\}.$$

   Ez azt jelenti, hogy az első két részintervallumon illetve az utolsó kettőn is ugyanaz a képlet. Grafikában szokás használni, mert nem kell új adatot megadni.

Megjegyzés: Az együtthatók meghatározása LER megoldásával lehetséges, lásd gyakorlaton.

Jelölés:

$\Omega_n := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ alappontrendszer
$S_\ell(\Omega_n)$: az Ω_n alappontrendszeren értelmezett ℓ-edfokú spline-ok halmaza.

Definíció: Jobb oldali hatványfüggvény

$$(x - x_k)_+^\ell := \begin{cases} (x - x_k)^\ell & \text{ha } x \geq x_k \\ 0 & \text{ha } x < x_k \end{cases}$$

Tétel:

$\ell \geq 2$ esetén $(x - x_k)_+^\ell$ folytonosan differenciálható, és

$$\left[(x - x_k)_+^\ell\right]' = \ell \cdot (x - x_k)_+^{\ell-1}.$$

Tétel:

1. Az $1, x, \ldots, x^\ell, (x-x_1)_+^\ell, \ldots, (x-x_{n-1})_+^\ell$ függvényrendszer lineárisan független $S_\ell(\Omega_n)$-en.
2. Bármely $S \in S_\ell(\Omega_n)$ egyértelműen előállítható a fenti rendszerrel.
3. $\dim S_\ell(\Omega_n) = n + \ell$

Tehát bármely spline-interpolációs feladat megoldását kereshetjük a megfelelő

$$1, x, \ldots, x^\ell, (x-x_1)_+^\ell, \ldots, (x-x_{n-1})_+^\ell$$

bázisban felírva.
Ekkor az ismeretlenek (azaz a bázisfüggvények együtthatóinak) száma csak $n+\ell$. Ennek oka, hogy a folytonos deriválhatóságra vonatkozó feltételek automatikusan teljesülnek.