Στατιστική στην Εκπαιδευτική Έρευνα

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Εξάμηνο 5ο

Δρ. Αλέξανδρος Ρέκκας

2025-09-07

1 Βασικές στατιστικές έννοιες

Η έρευνα στην εκπαίδευση κατά ένα πολύ σημαντικό μέρος της περιλαμβάνει τη συλλογή πληροφοριών. Συνήθως, με τη λήξη συλλογής της πληροφορίας οι ερευνητές/τριες καταλήγουν με έναν τεράστιο όγκο μετρήσεων είτε, παλιότερα, σε χαρτί είτε σήμερα σε ηλεκτρονική μορφή. Για την επεξεργασία και αξιοποίηση αυτής της πληροφορίας χρησιμοποιούνται μέθοδοι που συνοπτικά αποκαλούμε «στατιστική». Η στατιστική μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για την οργάνωση και τη συνόψιση της συγκεντρωμένης πληροφορίας όσο και για την συστηματική κατασκευή μίας ερμηνείας της κατάστασης από την οποία η πληροφορία αυτή προέκυψε.

1.1 Πληθυσμός και δείγμα

Κατά την εκτέλεση μίας μελέτης ο/η ερευνητής/τρια ξεκινά διατυπώνοντας ένα γενικό ερώτημα για μία συγκεκριμένη ομάδα ανθρώπων που τον/την ενδιαφέρουν. Με στατιστικούς όρους, το σύνολο όλων των ατόμων ενδιαφέροντος μίας μελέτης ονομάζεται *πληθυσμός*. Για παράδειγμα, πληθυσμός σε μία εκπαιδευτική έρευνα θα μπορούσε να είναι όλοι οι μαθητές νηπιαγωγείων της Δυτικής Μακεδονίας.

Προφανώς, σε μία μελέτη είναι πολύ δύσκολο να συλλεχθούν οι απαιτούμενες πληροφορίες για το σύνολο του πληθυσμού ενδιαφέροντος, καθώς, τις περισσότερες φορές, αυτός μπορεί να είναι απαγορευτικά μεγάλος. Οπότε, η αμέσως καλύτερη προσέγγιση είναι να χρησιμοποιηθεί ένα υποσύνολο του πληθυσμού, με την ελπίδα ότι αυτό θα «μοιάζει» με τον πληθυσμό. Ένα τέτοιο υποσύνολο ονομάζεται *δείγμα*. Με στατιστικούς όρους, *δείγμα* ονομάζεται ένα σύνολο ατόμων το οποίο διαλέχτηκε από τον πληθυσμό με στόχο να τον αντιπροσωπεύσει σε μία ανάλυση.

Μία μελέτη εκπαιδευτικής έρευνας στοχεύει να περιγράψει ή να βγάλει συμπεράσματα για συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του πληθυσμού. Τα χαρακτηριστικά αυτά πρέπει να είναι επακριβώς καθορισμένα και μετρήσιμα. Στη στατιστική, τα χαρακτηριστικά αυτά αποκαλούνται *παράμετροι*. Επομένως, *παράμετρος* είναι ένα χαρακτηριστικό του πληθυσμού, άγνωστο αλλά μετρήσιμο.

Καθώς η γνώση της τιμής μιας παραμέτρου συνήθως απαιτεί τη λήψη μετρήσεων από το σύνολο του πληθυσμού — πράγμα συνήθως αδύνατο — κατά την εκτέλεση στατιστικών αναλύσεων αρκούμαστε στην εξαγωγή εκτιμήσεων για αυτήν την τιμή με την αξιοίηση του δείγματος. Η *εκτίμηση* της τιμής μιας παραμέτρου υπολογίζεται συνήθως με τον συνδυασμό των μετρήσεων του δείγματος (π.χ. άθροισμα, μέσος όρος). Με τη χρήση στατιστικής ορολογίας, ένας μαθηματικός συνδυασμός των μετρήσεων ενός δείγματος από τον πληθυσμό ενδιαφέροντος ονομομάζεται *στατιστικό* ή *στατιστική συνάρτηση* ή *δειγματοσυνάρτηση*.

1.2 Μεταβλητές

Μεταβλητή είναι οποιοδήποτε μετρήσιμο χαρακτηριστικό ατόμων ή πραγμάτων το οποίο μπορεί να παίρνει διαφορετικές τιμές. Σε αντίθεση, μία *σταθερά* είναι ένα χαρακτηριστικό το οποίο παίρνει μία και μοναδική τιμή σε ολόκληρο τον πληθυσμό. Οι σταθερές, αν και φαίνεται ότι δεν έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, στην πραγαμτικότητα αντικατοπτρίζουν τις αποφάσεις του ερευνητή/τριας για περιορισμό του πληθυσμού ενδιαφέροντος. Για παράδειγμα, σε μία μελέτη με στόχο το σύνολο των *μαθητριών* στα νηπιαγωγεία της Δυτικής Μακεδονίας το φύλο είναι μία σταθερά.

Οι μεταβλητές μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τις τιμές που μπορούν να λάβουν:

- Οι *διακριτές μεταβλητές* παίρνουν τιμές μέσα από ένα σύνολο αδιαίρετων κατηγοριών πλήρως διαχωρίσιμων μεταξύ τους (π.χ. επίπεδο εκπαίδευσης γονέων, δήμος κατοικίας μαθητή, πλήθος μαθητών σε μία τάξη).
- Οι *συνεχείς μεταβλητές* μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα σύνολο. Μεταξύ δύο πιθανών τιμών μίας συνεχούς μεταβλητής υπάρχει άπειρο πλήθος διαφορετικών δυνατών τιμών (π.χ. ηλικία διδάσκοντος, βάρος μαθητή).

Στην περίπτωση των συνεχών μεταβλητών (σε αντίθεση με τις διακριτές μεταβλητές), είναι πολύ σπάνιο να μετρήσουμε την ίδια τιμή πολλές φορές σε ένα δείγμα που έχουμε συλλέξει. Αν παρατηρήσουμε κάτι τέτοιο για μία συνεχή μεταβλητή που μετρήσαμε, τότε θα πρέπει να αναθεωρήσουμε τον τρόπο μέτρησης της μεταβλητής ή να επανεξετάσουμε αν η εν λόγω μεταβλητή είναι πράγματι συνεχής. Τέλος, καθώς η ακρίβεια των εργαλείων που έχουμε για την μέτρηση των συνεχών μεταβλητών δεν είναι τέλεια, θα πρέπει να αντιμετωπίζουμε τις τιμές των συνεχών μεταβλητών περισσότερο ως διαστήματα και λιγότερο ως απόλυτες τιμές. Για παράδειγμα, αν το βάρος δύο μαθητών μίας τάξης νηπιαγωγείου μετρηθεί ως 19 kg, δεν είναι λογικό να υποθέσουμε ότι οι μαθητές έχουν το ίδιο ακριβώς βάρος. Το πιο σωστό θα ήταν να θεωρήσουμε ότι και οι δύο μαθητές έχουν ένα βάρος μεταξύ π.χ. 18.5 και 19.5 κιλών. Το εύρος του διαστήματος αυτού εξαρτάται κατά κύριο λόγο από την ακρίβεια της ζυγαριάς που χρησιμοποιήθηκε.

1.3 Κλίμακες μέτρησης μεταβλητών

Η συλλογή των τιμών μίας μεταβλητής που παρατηρούνται σε ένα δείγμα με τον έναν ή τον άλλον τρόπο προϋποθέτει τη μέτρηση με τη χρήση κάποιας κλίμακας. Για παράδειγμα, το ύψος των μαθητών μίας τάξης μπορεί να μετρηθεί είτε χρησιμοποιώντας τις κατηγορίες κοντός, μέτριος, ψηλός (διακριτή μεταβλητή) ή να μετρηθεί με ακρίβεια εκατοστού (συνεχής μεταβλητή). Οι κλίμακες μέτρησης έχουν μεγάλη σημασία γιατί επηρεάζουν τις στατιστικές μεθόδους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυσή τους.

Η *ονομαστική κλίμακα* ορίζει ως επιτρεπόμενες τιμές μίας μεταβλητής τα *ονόματα* διακριτών κατηγοριών. Οι κατηγορίες αυτές δεν μπορούν να διαταχθούν, δηλαδή δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τη μία τιμή με την άλλη. Αν και οι κατηγορίες δεν είναι αριθμητικές μπορεί να παρουσιαστούν με αριθμητικές τιμές, π.χ. μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αριθμός 1 για να δηλώσει ως τόπο κατοικίας του μαθητή τον δήμο Φλώρινας και ο αριθμός 2 για να δηλώσει τον δήμο Καστορίας, χωρίς αυτό όμως να υποδηλώνει κάποια διάταξη για τους δύο δήμους.

Αντίθετα, σε μία *διατάξιμη κλίμακα* οι κατηγορίες παίρνουν τιμές η οποίες υποδηλώνουν διάταξη. Για παράδειγμα, η οικονομική κατάσταση του σπιτικού των μαθητών μίας τάξης θα μπορούσε να μετρηθεί χρησιμοποιώντας τις τιμές χαμηλή, μέτρια, υψηλή. Οι τιμές παρόλο που επιτρέπουν τη σύγκριση μεταξύ των μετρήσεων του δείγματος, δεν επιτρέπουν συμπεράσματα για το μέγεθος των διαφορών.

Τέλος, μεταβλητές που μετρήθηκαν χρησιμοποιώντας την *ισοδιαστημική κλίμακα* ή την *αναλογική κλίμακα* επιτρέπουν την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τη διάταξη του δείγματος. Οι τιμές μίας μεταβλητής μετρημένης με μία *ισοδιαστημική κλίμακα* ιεραρχούνται και ταυτόχρονα τα διαστήματα μεταξύ διαδοχικών τιμών είναι σταθερά και τα ίδια. Για παράδειγμα, η θερμοκρασία μίας αίθουσας τους καλοκαιρινούς μήνες.

Η βασική διαφορά μίας ισοδιαστημικής κλίμακας από μία αναλογική κλίμακα, είναι ότι στην πρώτη περίπτωση η τιμή 0 είναι αυθαίρετη. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να πούμε ότι για δύο μετρήσεις θερμοκρασίας 20 και 40 βαθμών Κελσίου, η πρώτη είναι διπλάσια από την δεύτερη. Αν άλλη κλίμακα είχε χρησιμοποιηθεί (π.χ. Fahrenheit) τότε ο λόγος των τιμών θα ήταν διαφορετικός. Σε μία *αναλογική κλίμακα*, το 0 έχει σημασία και υποδηλώνει απουσία. Η ύπαρξη ενός απόλυτου 0, υποδηλώνει ότι μπορούμε να μετρήσουμε το απόλυτο μέγεθος της μεταβλητής. Για παράδειγμα ύψος ίσο με 0 σημαίνει απουσία ύψους και ύψος 120 εκατοστών είναι διπλάσιο από το ύψος 60 εκατοστών. Το 0 σε αυτήν την περίπτωση δεν είναι σχετικό, αλλά απόλυτο. Επομένως, η αναλογική κλίμακα είναι μία ισοδιαστημική κλίμακα με την ύπαρξη ενός απόλυτου μηδέν.

1.4 Μαθηματικοί συμβολισμοί

Συνήθως, στις στατιστικές αναλύσεις συμβολίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές με κεφαλαία γράμματα του λατινικού αλφαβήτου. Για παράδειγμα, μπορούμε να συμβολίσουμε με X το ύψος των μαθητών των νηπιαγωγείων της περιφέρειας Δυτικής Μακεδονίας. Για συγκεκριμένες μετρήσεις της μεταβλητής X χρησιμοποιούμε το ίδιο *πεζό* γράμμα (x). Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε ένα δείγμα μεγέθους $n = 100$ από μαθητές των νηπιαγωγείων της περιφέρειας Δυτικής Μακεδονίας. Για κάθε έναν από αυτούς τους μαθητές, συμβολίζουμε την μέτρηση του ύψους με $x_i, i = 1, ..., 100$.

Με τις μετρήσεις μίας μεταβλητής X συνήθως θέλουμε να κάνουμε πράξεις. Μία από τις πιο συχνές ανάγκες που πορκύπτουν κατά την εκτέλεση μίας στατιστικής ανάλυσης είναι να αθροίσουμε τις τιμές x_i που συλλέχθηκαν. Ο μαθηματικός συμβολισμός στην περίπτωση αυτή είναι το $\sum$. Στο προηγούμενο παράδειγμα, το άθροισμα όλων των μετρήσεων του ύψους των 100 μαθητών θα μπορούσε να συμβολιστεί με

$$\sum X = \sum_{i=1}^{100} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_{100}$$

Οι πράξεις αυτές μπορούν να γίνουν αρκετά πιο σύνθετες, π.χ. να αθροίσουμε τα τετράγωνα των μετρήσεων του ύψους ($\sum X^2$) ή να αθροίσουμε το ύψος τους μειωμένο κατά μία μονάδα ($\sum(X - 1)$).

2 Κατανομές συχνοτήτων

Ο στόχος οποιασδήποτε συλλογής δεδομένων είναι κατανόηση του προβλήματος το οποίου ζητάμε την απάντηση και η εξαγωγή συμπερασμάτων τα οποία στη συνέχεια θα μπορέσουν με τον έναν ή τον άλλο τρόπο να τροφοδοτήσουν την πράξη. Πριν όμως το κάνουμε αυτό, σχεδόν πάντα, ξεκινάμε από μία απόπειρα κατανόησης των δεδομένων που μαζεύτηκαν. Δεν μπορεί κανείς να βγάλει εύκολα συμπεράσματα απλά κοιτώντας έναν πίνακα με μερικές δεκάδες στήλες και μερικές εκατοντάδες ή χιλιάδες γραμμές.

Μία από τις πιο απλές και χρήσιμες μεθόδους περιγραφής των δεδομένων που συλλέχθηκαν για ένα σύνολο μεταβλητών που μας ενδιαφέρει στηρίζεται στην έννοια της συχνότητας. Με απλά λόγια, η συχνότητα μίας τιμής μίας μεταβλητής που έχει μετρηθεί σε ένα δείγμα μας μετράει πόσες φορές εμφανίζεται η συγκγριμένη μεταβλητή σε σχέση τις υπόλοιπες.

Ξεκινάμε από την περίπτωση των διακριτών μεταβλητών. Έστω ότι έχουμε τη μεταβλητή X, το πλήθος των μαθητών ανά τάξη, και ένα δείγμα από 20 νηπιαγωγεία της χώρας με τιμές $x_1, ..., x_{20}$:

20	23	20	24	20
18	17	25	25	19
20	17	17	16	17
15	20	19	23	25

Βλέπουμε ότι οι τιμές κειμένονται από 15 μέχρι 25. Οπότε μπορούμε εύκολα να φτιάξουμε έναν *πίνακα συχνοτήτων*

x	**f**
15	1
16	1
17	5
18	1
19	2
20	5
23	2
24	1
25	3

Ως άσκηση, επιβεβαιώστε ότι $\sum X = \sum xf$.

Χρησιμοποιώντας τις συχνότητες εμφάνισης των τιμών μιας μεταβλητής μπορούμε να ορίσουμε τις αναλογίες. Η αναλογία q ορίζεται ως

$$q = \frac{f}{N},$$

όπου N είναι το μέγεθος του δείγματος. Επειδή η αναλογία περιγράφει τη συχνότητα μίας τιμής σε σχέση με μέγεθος του δείγματος, συχνά αποκαλείται και σχετική συχνότητα. Τέλος, μία αναλογία q μπορεί πολύ εύκολα να μετατραπεί σε ποσοστό p πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα με το 100

$$p = 100 \times q = 100 \times \frac{f}{N}\%$$

Στην προηγούμενη περίπτωση, το πλήθος των τιμών που τελικά πήρε η μεταβλητή X ήταν σχετικά μικρό (συνολικά 9 διαφορετικές τιμές). Τι γίνεται όμως αν το πλήθος των πιθανών τιμών είναι πολύ μεγάλο; Για παράδειγμα, έστω ότι ένα δείγμα 30 μαθητών δημιούργησε μία ζωγραφιά με τελείες. Έστω Y, το πλήθος των στιγμάτων που ζωγράφισε κάθε παιδί και οι τιμές που παρατηρήσαμε:

24	37	41	28	35
22	31	56	42	33
58	45	64	83	38
94	49	53	70	84
66	72	90	47	59
71	88	63	75	95

Για να δημιουργήσουμε έναν πίνακα συχνοτήτων ο οποίος να είναι χρήσιμος, μπορούμε να χωρίσουμε τις τιμές σε κατηγορίες. Για παράδειγμα, ένας πιθανός διαχωρισμός θα ήταν 21-40, 41-60, 61-80, 81-100, δημιουργώντας τον πίνακα συχνοτήτων

y	f
21−40	7
41−60	8
61−80	7
81−100	8