

Statystyka z modelami liniowymi

Lista 1 - Estymatory punktowe

Zadanie 1: Wygeneruj n ($n = 50$) obserwacji z rozkładu $N(\theta, \sigma^2)$. Rozważ przypadki:

(a) $\theta = 0, \sigma = 1$;

(b) $\theta = 0, \sigma = 2$;

(c) $\theta = 4, \sigma = 1$;

(d) $\theta = 4, \sigma = 2$.

Na tej podstawie oblicz wartość estymatora parametru θ postaci

(i) $\hat{\theta}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$;

(ii) $\hat{\theta}_2 = \text{median}(X_1, \dots, X_n)$;

(iii) $\hat{\theta}_3 = \sum_{i=1}^n X_i \omega_i$, gdzie $0 \leq \omega_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ z własnym wyborem wag;

(iv) $\hat{\theta}_4 = \sum_{i=1}^n X_{(i)} \omega_i$, gdzie $\omega_i = \varphi(\Phi^{-1}(\frac{i-1}{n})) - \varphi(\Phi^{-1}(\frac{i}{n}))$ przy czym φ jest gęstością, a Φ dystrybuantą rozkładu $N(0, 1)$;

(v) $\hat{\theta}_5 = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$ (średnia harmoniczna);

(vi) $\hat{\theta}_6 = \sqrt[3]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3}$ (średnia potęgowa rzędu 3);

(vii) $\hat{\theta}_7$ własny estymator.

Doświadczenie powtórz 10000 razy. Porównaj estymatory przy pomocy wykresów pudełkowych. Oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie każdego z estymatorów. Przedyskutuj uzyskane wyniki.

Powtórz eksperyment dla $n = 20$ i $n = 100$. Porównaj i przedyskutuj uzyskane wyniki w zależności od n .

Zadanie 2: Wygeneruj n ($n = 50$) obserwacji z rozkładów $N(\theta, \sigma^2)$, $\text{Logist}(\theta, \sigma)$, $\text{Cauchy}(\theta, \sigma)$. Rozważ przypadki:

(a) $\theta = 0, \sigma = 1$;

(b) $\theta = 0, \sigma = 2$;

(c) $\theta = 4, \sigma = 1$;

(d) $\theta = 4, \sigma = 2$.

Na tej podstawie oblicz wartość estymatora parametru θ postaci

(i) $\hat{\theta}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$;

(ii) $\hat{\theta}_2 = \text{median}(X_1, \dots, X_n)$.

Doświadczenie powtórz 10000 razy. Porównaj estymatory przy pomocy wykresów pudełkowych. Oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie każdego z estymatorów. Przedyskutuj uzyskane wyniki.

Zadanie 3: Wygeneruj $n - 1$ ($n = 50$) obserwacji z rozkładu $N(0, 1)$ i dodaj do tej próby obserwację k , $k = 10, 20, \dots, 100$. Na tej podstawie oblicz estymator wartości oczekiwanej postaci

(i) $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$;

(ii) $\text{median}(X_1, \dots, X_n)$.

Doświadczenie powtórz 10000 razy. Porównaj obciążenie, wariancję, błąd średniokwadratowy przy pomocy wykresów w zależności od k . Oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie każdego z estymatorów w zależności od k . Przedyskutuj uzyskane wyniki.

Zadanie 4: Wygeneruj n ($n = 50$) obserwacji z rozkładu $N(\mu, \theta)$. Rozważ przypadki:

(a) $\mu = 0, \theta = 1$;

(b) $\mu = 0, \theta = 4$;

(c) $\mu = 4, \theta = 1$;

(d) $\mu = 4, \theta = 4$.

Na tej podstawie oblicz wartość estymatora parametru θ postaci

(i) $\hat{\theta}_1 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$;

$$(ii) \quad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \text{median}(X_1, \dots, X_n))^2;$$

$$(iii) \quad \hat{\theta}_3 = \text{median}((X_1 - \bar{X})^2, \dots, (X_n - \bar{X})^2).$$

Doświadczenie powtórz 10000 razy. Porównaj estymatory przy pomocy wykresów pudełkowych. Oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie każdego z estymatorów. Przedyskutuj uzyskane wyniki.