Annexe 3

Annexe 1 : Exercices Supplémentaires

Dans cette annexe

Enoncés des exercices supplémentaires

Annexe 1 : Enoncés des exercices supplémentaires

Le corrigé de ces exercices est disponible sur le lien suivant :

https :……

1 Histoire de la lumière

Exercice 1

A partir de ses mesures, Roemer a estimé qu'il fallait Δt =22 minutes à la lumière pour parcourir une distance égale au diamètre de l'orbite de la Terre autour du Soleil.

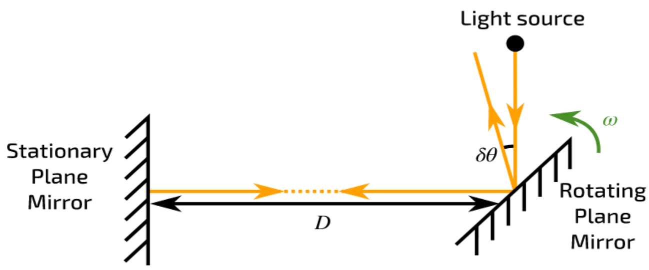
1°) En utilisant cette estimation et le diamètre connu de l'orbite terrestre, donner une valeur approximative de la vitesse de la lumière.

2°) La lumière met en réalité 16,5 minutes pour parcourir cette distance. Calculer la vitesse de la lumière. Le diamètre de l'orbite de la Terre autour du Soleil est approximativement : D = 3.10^8 kms.

Exercice 2

Foucault a utilisé un miroir tournant pour déterminer la vitesse de la lumière. Dans une expérience similaire, un miroir plan tournant à 2100 tours par minute réfléchit un faisceau de lumière collimaté sur un miroir fixe situé à une distance D = 100 m, qui le renvoie normalement pour qu'il soit à nouveau réfléchi par le miroir tournant. La lumière réfléchie fait un angle de $\delta\theta$ = 0,0170° avec la direction de la lumière incidente émise par la source.

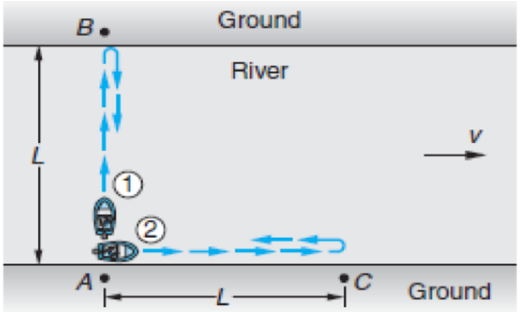
D'après cette expérience, quelle serait la vitesse calculée de la lumière ?



Exercice 3

Soient une rivière de largeur L = 50 m et deux nageurs qui nagent à la même vitesse $\vec{V} = 2$ m/s. La rivière coule à allure modérée $\vec{v} = 1$ m/s. Les nageurs font la course de la manière suivante : ils partent tous les deux d'un même point A d'une rive. L'un d'eux nage directement à travers la rivière vers le point B le plus proche de la rive opposée, puis fait demi-tour pour revenir.

L'autre reste d'un même côté de la rivière et se dirige vers le point C située à une distance L puis remonte le courant pour revenir au point A.



1°) Donner les expressions littérales des temps T_{ABA} et T_{ACA} mis par les deux nageurs.
2°) Quel est le nageur qui arrive le premier ?
Examiner le cas où la course a lieu dans un lac. Comparer les résultats des deux situations.

Exercice 4

Partie A

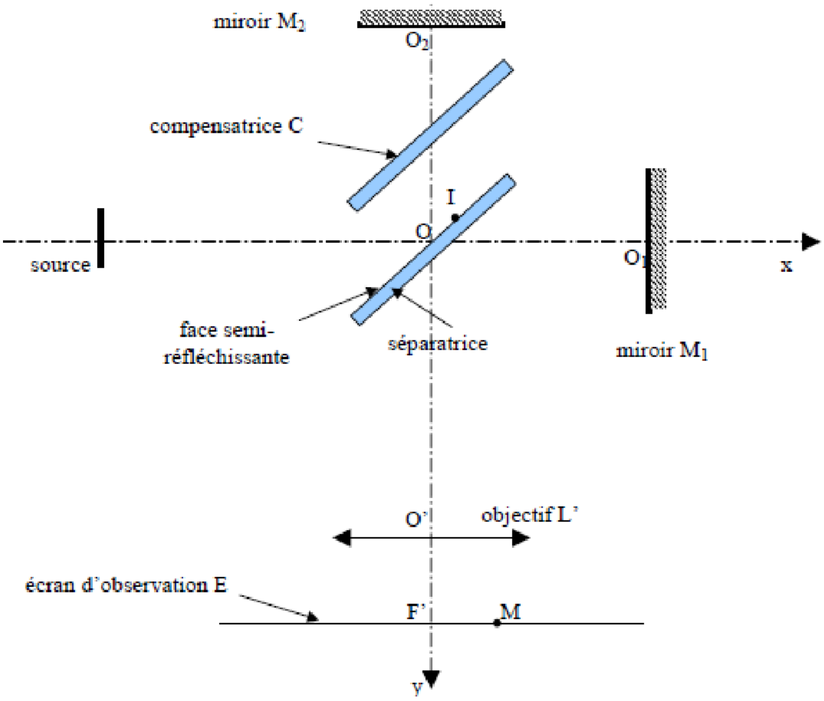
L'expérience de Michelson-Morley (1887) avait pour but de mettre en évidence la présence d'un hypothétique éther luminifère dans lequel la Terre se déplace et qui définit le référentiel d'inertie dans lequel la lumière se propage à la vitesse c. Le résultat négatif de cette expérience est une des expériences fondamentales qui ont mené à la relativité restreinte. L'interféromètre de Michelson est constitué d'une lame semi-réfléchissante 50 - 50 (appelée séparatrice) séparant le faisceau lumineux incident en deux, et de deux miroirs M_1 et M_2 perpendiculaires et placés à égale distance $IO_1 = IO_2 + e$. Les deux faisceaux réfléchis sont recombinés par la lame séparatrice et leur figure d'interférence est observée sur un écran.

1°) Soit deux vibrations lumineuses parallèles, d'égales amplitudes, cohérentes et synchrones : $S_1 = a \cos (\omega t - \varphi_1)$ et $S_2 = a \cos (\omega t - \varphi_2)$.
Calculer la somme $S = S_1 + S_2$. Discuter les différents cas en fonction de la quantité $(\varphi_2 - \varphi_1)$.

2°) On supposera d'abord que l'interféromètre est immobile dans le référentiel de l'éther. En déplaçant le miroir M_1, calculer, en fonction de la différence des bras de l'interféromètre $e = IO_1 - IO_2$, l'intensité en un point situé au milieu de l'écran.

Partie B

On supposera que l'interféromètre est en mouvement à la vitesse v = 30 km/s dans le référentiel de l'éther.
Un des bras de l'interféromètre est parallèle à la vitesse de la Terre sur son orbite autour du Soleil par rapport à l'éther, et l'autre lui est perpendiculaire.



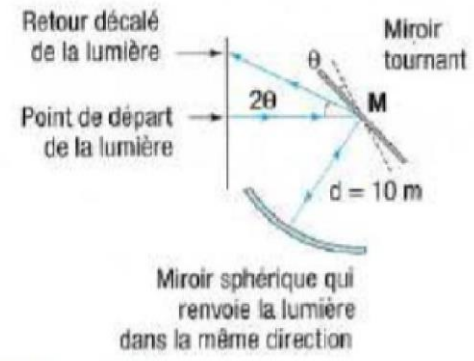
1°) En utilisant la loi de composition des vitesses de Galilée, déterminer le temps d'aller-retour de la lumière le long de chacun des deux bras supposés d'égale longueur L (e = 0).
2°) En déduire, dans la limite où $v << c$, le décalage temporel des deux rayons lumineux ainsi que la différence de marche δ entre les rayons lumineux à la sortie de l'interféromètre quand on éclaire l'interféromètre en lumière monochromatique. Calculer l'ordre d'interférence $p = \frac{\delta}{\lambda}$ ainsi que le déphasage φ au centre de l'écran d'observation.
On admettra que le dispositif interférentiel de Michelson est sensible au centième d'interfrange.
3°) Si l'éther existait, quelle serait alors sa vitesse maximale par rapport à la Terre ?

A.N : L= 11 m et λ = 5890 Å

4°) Quelle propriété de la vitesse de la lumière découle de cette expérience ?

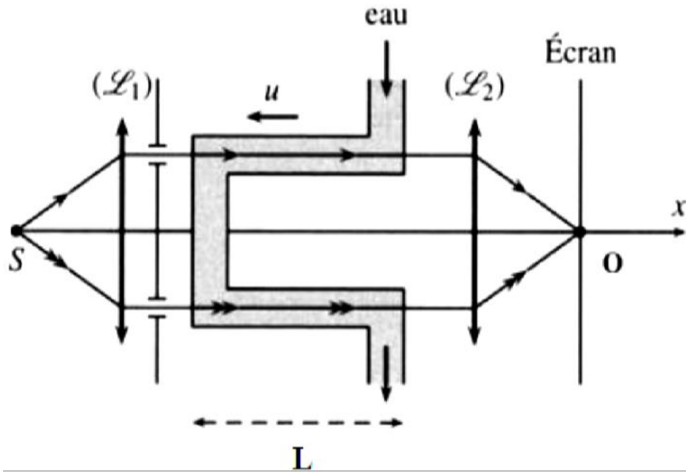
Exercice 5

En 1862, Foucault utilise un miroir tournant à 400 tours/s. Le miroir M tourne d'un angle θ pendant que la lumière fait l'aller-retour du miroir M au miroir sphérique. A son retour sur M, la lumière, en application des lois de la réflexion, est déviée d'un angle 2θ. Connaissant la distance 2d = 20 m, l'angle 2θ = 0,02° et la vitesse de rotation du miroir, déterminer la vitesse de la lumière.



Exercice 6

En 1851, Fizeau réalisa une expérience pour étudier la vitesse de la lumière dans un milieu transparent en mouvement. Le principe de l'expérience repose sur la mesure des franges d'interférence entre deux signaux lumineux issus de la même source, mais se propageant dans un sens différent à travers un tube où circule un courant d'eau.



On considère une source S émettant à une longueur d'onde et située au foyer objet d'une lentille convergente L_1. A la sortie de la lentille L_1, la lumière passe d'abord par deux fentes de Young puis ensuite par un tuyau en forme de U dont chaque branche a une longueur L = 3 m. On laisse couler de l'eau à une vitesse u dans ce tube.
La lumière arrive ensuite sur une lentille convergente L_2. Le résultat est observé sur un écran situé au foyer image O de la lentille L_2.

1°) Quelle est la vitesse v de la lumière dans l'eau immobile en fonction de la vitesse $c = 3.10^8$ m/s de la lumière dans le vide et de l'indice de réfraction n = 1,33 de l'eau immobile.

2°) On veut déterminer la vitesse $\vec{V}$ de la lumière dans l'eau en mouvement en fonction de la vitesse $\vec{v}$ de la lumière dans l'eau immobile et de la vitesse $\vec{u}$ d'écoulement de l'eau. On suppose que l'on peut utiliser la loi de composition des vitesses de la mécanique classique. Déterminer la vitesse $\vec{V}$ de la lumière dans les deux cas qui interviennent.

3°) On procède à un écoulement d'eau. Exprimer en fonction de c, L, n, u la différence entre les durées de parcours Δt des deux ondes qui interfèrent en O au centre de l'écran. Quelle est l'expression de la différence de marche en O ? Calculer la nouvelle valeur de l'ordre d'interférence au point O sachant qu'il était nul quand l'eau était immobile.

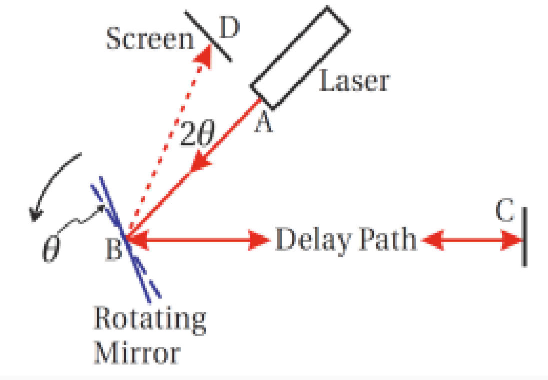
On donne : $\lambda = 5400$ Å et u = 7 m/s.

4°) En réalité, il faut tenir compte de la théorie relativiste pour interpréter cette expérience. La loi de composition des vitesses est à améliorer par rapport à la théorie classique. On a, non pas $v = v_1 + v_2$ mais $v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 . v_2}{c^2}}$

Quelle est la nouvelle expression de la différence de marche en O ? Calculer la nouvelle valeur de l'ordre d'interférence au point O. Commenter votre résultat.

Exercice 7

Dans l'expérience de Foucault, on donne :
Distance entre le laser et le miroir tournant : AB = 4 mètres.
Distance entre le miroir tournant et le miroir plan fixe C : BC = 40 mètres.
Vitesse de rotation du miroir plan tournant : N = 540 tours par seconde.
Vitesse de la lumière $c = 3.10^8$ m.
Quel est le déplacement AD des images sur l'écran ?



Quel est l'intérêt de mettre cinq miroirs sphériques concaves de rayon de courbure 40 mètres à la suite du miroir tournant à la place du miroir plan C ?

Exercice 8

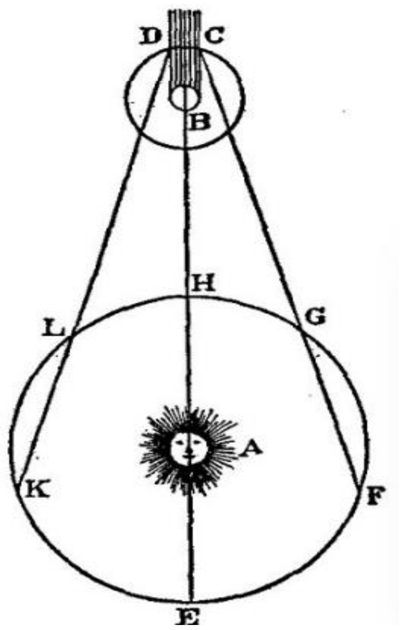
On considère la situation de la figure ci-dessous, lorsque le satellite Io de Jupiter est en émersion au point D (Io sort de l'ombre de Jupiter). Durant un premier événement (émersion), la Terre est au point L de son orbite, lors de l'événement suivant, elle est en K.

1°) Si la lumière se propage instantanément, quel intervalle de temps sépare ces deux événements ?

2°) Même question si la lumière se déplace à la vitesse $c = 3.10^8$ m/s ?

3°) Calculer en unités astronomiques la distance Terre-Jupiter à l'opposition c'est-à-dire lorsque les deux planètes sont au plus près.

4°) On effectue une première observation d'éclipse à l'opposition. A quel moment peut-on effectuer une seconde observation pour laquelle le décalage temporel sera maximum ?



5°) On observe 261 jours après l'opposition. De quels angles se sont déplacés Jupiter et la Terre sur leurs orbites respectives depuis l'opposition ? Quel est l'angle Jupiter-Soleil-Terre à ce moment ?

6°) Calculer la distance $D_{T\text{-}J}$ Terre-Jupiter en unités astronomiques au moment de la deuxième observation.

7°) Le second événement est observé avec 14 minutes de retard par rapport à un phénomène régulier. En déduire une estimation de la vitesse de la lumière.

On donne : 1 unité astronomique = 1ua = 150.10^6 km.

Exercice 9

Romer observe, le 31 juillet 1676, date à laquelle Jupiter est le plus proche de la Terre, la disparition d'Io à 23h 31mn 30s. Il sait par ailleurs que la période de révolution d'Io autour de Jupiter vaut 42 h 28 mn 24s et qu'une révolution synodique de Jupiter vaut environ 400 jours. Il en conclut que le temps séparant le moment où Jupiter et la Terre sont le plus proche (position opposition) de celui où les deux planètes sont le plus éloignées (position conjonction) vaut environ 200 jours.

1°) Calculer le nombre de révolutions N effectuées par Io. A quelle heure Romer s'attend - il à observer une nouvelle disparition d'Io ?

2°) En fait il observe la nouvelle disparition d'Io à 23h 56mn 45s. Quel est le décalage entre l'heure prévue et l'heure réelle de la disparition d'Io ? Expliquer la cause de ce décalage. En déduire la vitesse de la lumière.

Données Jupiter : Distance Soleil-Jupiter : 780 millions de km.
Période de révolution : 11,862 années (11 ans 314 jours = 4 330 jours)
Période synodique de Jupiter : 398, 86 jours.
Distance Terre-Jupiter en opposition : 630 millions de km.
Distance Terre-Jupiter en conjonction : 930 millions de km.

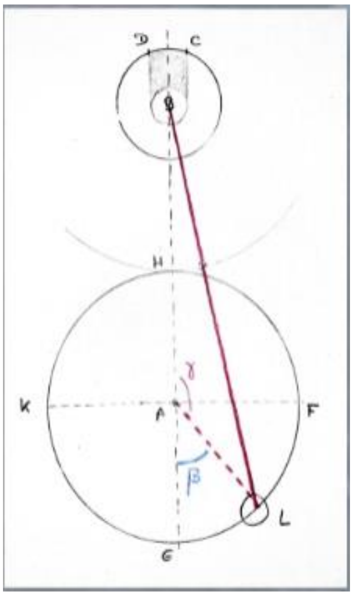
La période de révolution synodique de Jupiter est de 13 mois. Si à une date donnée, Jupiter est à l'opposition, il s'écoulera 13 mois avant l'opposition suivante.

Données Satellite Io : Période de révolution 42 h 28 mn 24s
Rayon orbite d'Io : 420000 km.

Exercice 10

Le but de cet exercice est de donner une estimation de la vitesse de la lumière d'après le calcul de Romer.

1°) Rappeler les définitions des expressions suivantes :
Les deux astres (Terre et Jupiter) sont en opposition, en quadrature et en conjonction. Donner les distances en unités astronomiques entre la Terre et Jupiter dans chaque cas.
2°) Dites pourquoi quand la Terre et de Jupiter sont en conjonction, il est impossible de voir les éclipses de Io.



3°) Trente jours après la conjonction, Romer remarqua que l'éclipse de Io se produisait avec un retard T = 16 minutes par rapport au calendrier établi à partir des périodes d'éclipses de Io. Calculer la distance entre Jupiter et la position de la Terre. En déduire la vitesse de la lumière. On supposera pour simplifier les calculs que l'astre Jupiter est fixe.

Données : Distance Soleil-Jupiter : 780 millions de km.
Rayon de la Terre : 150 millions de km.
Unité astronomique : 1ua = 150 millions de km.

2 Naissance de la relativité restreinte

Exercice 1

Un observateur A se trouve sur un pont dont la hauteur est H = 20 m. Un bateau animé d'une vitesse uniforme U = 10 m/s se déplace sur le fleuve supposé calme. A l'instant t = 0 où le bateau passe sous le pont, l'observateur A lâche une pierre sans vitesse initiale. Décrire les trajectoires de la pierre vues par l'observateur A et l'observateur B lié au bateau.
On reprend le même exercice sauf que cette fois-ci, l'observateur B placé au sommet du mât du bateau de hauteur h = 20 m lâche la pierre. Décrire les trajectoires de la pierre vues par l'observateur A sur le pont et l'observateur B lié au bateau. On donne g = 10 m/s^2.

Exercice 2

On veut montrer que la quantité de mouvement et que l'énergie cinétique se conservent dans une transformation galiléenne lors d'une collision élastique à une dimension entre deux corps A et B.
Soit un repère mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{U}$ parallèle à l'axe Ox du repère fixe.
Dans le repère fixe R, on notera par V les vitesses des corps A et B avant la collision puis par v les vitesses après collision. Dans le repère mobile R' les vitesses des corps A et B avant la collision seront notées par V' puis par v' les vitesses des corps A et B après collision.

On donne les masses et les vitesses initiales et finales des corps A et B après collision :
$m_A = 3$ kg $m_B = 6$ kg $V_A = +2$ m/s $V_B = -10$ m/s
Après la collision, le corps A a une vitesse $V'_A = -14\ \text{m/s}$.

1°) En appliquant le principe de conservation de la quantité de mouvement, calculer la vitesse du corps B après collision. Quelle est la nature de la collision ?
2°) Soit un observateur mobile animé d'une vitesse U = + 8 m/s par rapport au repère fixe. Dites, oui ou non, s'il y a conservation de la quantité de mouvement lors de la collision dans une transformation galiléenne.
3°) Calculer la variation de l'énergie cinétique lors de la collision dans le repère mobile. En comparant votre résultat avec celui de la première question, dites, oui ou non, s'il y a conservation de l'énergie cinétique lors de la collision dans une transformation galiléenne.

Exercice 3

Soit une charge électrique q placée au point A tel que OA = a sur l'axe Oz d'un repère fixe R noté Oxyz. La charge électrique est animée d'un mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse $\vec{V}$ parallèle à l'axe Ox. Tout au long de son déplacement, elle est soumise à l'action simultanée d'un champ électrique uniforme $\vec{E}$ et d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. Pour simplifier on supposera les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont parallèles à l'axe Oz.

1°) Calculer la force $\vec{F}$ appliquée à la charge q mesurée par un observateur lié au repère R.
2°) Considérons un deuxième repère mobile R' noté $O'x'y'z'$. Lors de leur déplacement les axes $O'x'$, $O'y'$et $O'z'$ restent parallèles respectivement aux axes Ox, Oy et Oz. On supposera que le repère R' se déplace avec une vitesse uniforme $\vec{U}$ parallèle à l'axe Ox.
Calculer la force $\vec{F'}$ appliquée à la charge q mesurée par un observateur lié au repère R'. Comparer les forces $\vec{F}$ et $\vec{F'}$. Commenter le résultat.

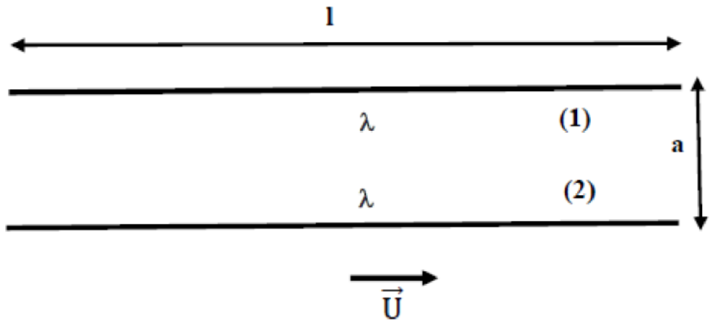
Exercice 4

Un observateur sur le quai d'une gare voit passer un train roulant à une vitesse de V = + 20 m/s. Dix (10) secondes plus tard il observe un avion qui se déplace dans la même direction que le train et qui se trouve horizontalement à + 500 m et verticalement à + 300 m (Evénement 1).
Cinq (05) secondes plus tard il constate que l'avion se trouve horizontalement à + 700 m et verticalement à + 450 m (Evénement 2).

1°) Donner les coordonnées espace-temps des événements 1 er 2 par rapport à l'observateur et au passager du train.
2°) Donner la vitesse (module et direction) de l'avion par rapport au passager et à l'observateur.
Reprendre les questions précédentes en supposant que le train roule à la vitesse de + 40 m/s puis à + 50 m/s.

Exercice 5

Imaginons l'expérience de pensée suivante : deux barres parallèles infinies (1) et (2) chargées d'électricité statique avec une densité linéaire positive λ à la distance **a** l'une de l'autre. Les deux barres sont supposées immobiles dans le référentiel R (voir figure ci-dessous). Soit un observateur dans un repère mobile R' animé d'une vitesse $\vec{U}$ par rapport au repère R. Calculer la force subie par la barre (2) dans les repères R et R'.



En déduire que les lois de l'électromagnétisme ne sont pas invariantes sous la transformation de Galilée.

Exercice 6

On se propose de montrer que la loi de propagation d'un champ E soit $\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}$ n'est pas invariante dans une transformation galiléenne.
Montrer, qu'en appliquant la transformation de Galilée qui correspond au passage du repère fixe R au repère mobile R' (x' = x – U t y' = y z' = z et t'= t), on obtient :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + 2\frac{U}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial x' \partial t'} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} = 0$$

On utilisera les relations entre les opérateurs suivants :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - U\frac{\partial}{\partial x'}$$

Exercice 7

Vérifier que la loi de Navier – Stokes $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = 0$ est invariante dans la transformation de Galilée. La masse volumique du fluide ρ (x, t) est exprimée en kg/m^3 et la vitesse d'écoulement du fluide V en m/s. Les équations de Navier – Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides.

3 Cinématique relativiste 01

3.1 Transformation de Lorentz

Exercice 1

1°) Quatre événements (ct, x) de coordonnées respectives (0,0), (1,0), (1,1) et (0,1) exprimées en mètre dans un repère fixe R sont observés depuis un repère mobile R' animé d'un mouvement de translation rectiligne suivant l'axe Ox avec une vitesse U = 15 m/s.

a) Donner la transformation permettant de passer des coordonnées des événements exprimées dans le repère R aux coordonnées des événements exprimées dans le repère R'.
b) Calculer les coordonnées de ces événements dans R'.

2°) Les quatre événements (ct, x) précédents sont observés depuis un repère mobile R' animé d'un mouvement de translation rectiligne suivant l'axe Ox avec une vitesse U = c/2.

a) Donner la transformation permettant de passer des coordonnées des événements exprimées dans le repère R aux coordonnées des événements exprimées dans le repère R'.
b) Calculer les coordonnées de ces événements dans R'.

Exercice 2

Montrer explicitement que deux transformations de Lorentz successives dans la même direction sont équivalentes à une seule transformation de Lorentz avec une vitesse

$$U = \frac{U_1 + U_2}{1 + \frac{U_1 U_2}{c^2}}$$

Quel commentaire peut-on faire ?

Exercice 3

On pose tangente hyperbolique $\tanh\varphi = \frac{U}{c}$.

1°) Définir le domaine de variation de φ. Donner le graphe de $\tanh\varphi = \frac{U}{c}$

2°) Ecrire les formules de transformation de Lorentz à l'aide de coshφ et sinhφ.

Exercice 4

Un train de longueur propre L = 90 m se déplace à une vitesse U = 5c/13 par rapport au sol. Un passager lance une balle de l'arrière vers l'avant du train. La vitesse de la balle par rapport au train est c/3. Pour un observateur au sol, calculer le temps mis par la balle pour aller de l'arrière à l'avant du train ainsi que la distance parcourue par le train.

Exercice 5

Soit deux horloges A et B au repos à 180 m l'une de l'autre dans le référentiel fixe R. Une fusée joue le rôle de référentiel R' mobile se déplaçant sur la droite joignant A et B à la vitesse U = 0,6 c. L'horloge A' est fixe par rapport au centre de la fusée.
Combien de temps lui faut-il pour se rendre de A à B selon un observateur dans R et un observateur dans R' ?

3.2 Dilatation du temps

Exercice 1

On considère deux horloges H_1 et H_2 qui indiquent le même temps dans un laboratoire terrestre. L'horloge H_1 est placée dans un vaisseau spatial qui quitte la Terre avec une vitesse uniforme $U = 3.10^6$ m/s que l'on supposera faible devant la vitesse de la lumière alors que l'horloge H_2 est maintenue au laboratoire.

De combien de secondes par jour puis par année l'horloge H_1 retardera-t-elle par rapport l'horloge H_2 ? Quelle doit-être la vitesse du vaisseau spatial pour que les deux horloges diffèrent seulement d'une seconde en une journée ?

Exercice 2

Un vaisseau spatial est animé d'un mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse égale à U = 0,20 c. A l'intérieur de ce vaisseau spatial on trouve une horloge optique composée de deux miroirs plans placés l'un dessus de l'autre et distants de D = 15 cm. Une source lumineuse placée sur le miroir inférieur envoie un flash lumineux vers le miroir supérieur qui le réfléchit vers le miroir inférieur et ainsi de suite.
1°) Calculer le temps mis par le flash lumineux pour faire un aller-retour pour un observateur qui se trouve dans le vaisseau spatial. Comment est appelé ce temps ?
2°) Calculer le temps mis par le flash lumineux pour faire un aller-retour pour un observateur qui se trouve sur Terre. Comment est appelé ce temps ?
3°) De combien de secondes par jour une horloge placée à bord d'un tel vaisseau retardera-t-elle par rapport à une horloge terrestre ?
4°) Quelle doit-être la vitesse maximale U_{max} du vaisseau spatial pour que l'horloge placée à bord d'un tel vaisseau retarde au plus d'une minute par rapport à une horloge terrestre ?

Exercice 3

Le fonctionnement d'un G.P.S (Global Position System) illustre une application de la dilatation du temps. Un satellite pour G.P.S décrit une orbite circulaire de rayon 26567 km. Cette orbite est décrite en 12 heures avec une vitesse uniforme U que l'on supposera faible devant la vitesse de la lumière. De combien de secondes par jour puis par année une horloge placée à bord d'un tel satellite retardera-t-elle par rapport une horloge terrestre ? Combien de temps s'écoulera-t-il pour que les deux horloges diffèrent d'une seconde ?

Exercice 4

Un astronaute s'éloigne de la Terre avec une vitesse de valeur constante U = 0.9 c suivant une trajectoire rectiligne jusqu'à une planète distante de D = 4 années - lumière. La durée du voyage mesurée T par une horloge sur Terre est différente de la durée T_0 mesurée par une horloge fixe dans un référentiel lié à l'astronaute supposé galiléen.

Quelle est la relation qui lie T et T_0 ? Quelle est la durée du trajet pour un observateur terrestre ? Quelle est la durée de ce même trajet pour l'astronaute ?

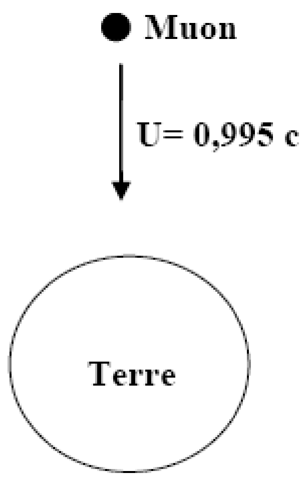
Exercice 5

Un muon, formé en haute atmosphère, a une vitesse moyenne U = 0,995 c. Il parcourt en moyenne 6600 mètres avant de se désintégrer. Calculer la durée de vie moyenne τ de ce muon dans un repère R lié à un observateur terrestre et sa durée de vie moyenne τ_0 dans le repère R' auquel il est lié.

Exercice 6

L'expérience de Frisch et Smith, réalisée en 1963, a pour objectif de mettre en évidence la dilatation relativiste des durées. Les muons μ^- sont des particules instables ayant la même charge que les électrons mais avec une masse 207 fois plus importante. Ils sont créés dans la haute atmosphère par l'interaction des rayons cosmiques (essentiellement des protons) avec les molécules de la haute atmosphère. Les muons ont, dans leur référentiel propre, une durée de vie de 2,26 µs. Relativement à la Terre les muons ont une vitesse de U = 0,995 c.

1°) Un muon qui est créé à une altitude H = 1910 mètres, peut-il atteindre le sol ?
2°) Quand il est créé, à quelle distance d « voit-il » la Terre ?
3°) A – t - il le temps de parcourir cette distance en allant à la vitesse U = 0,995 c pendant sa durée de vie ?



Exercice 7

Un étudiant doit passer un examen en une heure, temps mesuré par la montre du professeur. Celui-ci se déplace à une vitesse U = 0,6 c par rapport à l'étudiant et envoie un signal lumineux au bout de l'heure indiquée par sa montre. L'étudiant arrête d'écrire quand le signal lumineux lui parvient.

1°) Combien de temps l'étudiant a – t – il eu pour son examen ?
2°) A quelle vitesse doit se déplacer le professeur pour l'examen dure 4 heures ?

Exercice 8

Dans un référentiel R, une lampe rouge et une lampe verte sont espacées d'une distance $\Delta x = x_R - x_V = 2000$ m. La lampe rouge s'allume 4 µs après la lampe verte.

1°) Considérons un repère mobile R' qui se déplace à une vitesse de 0,866 c dans le sens des x positifs et parallèlement à l'axe Ox.
Quelle est la distance qui sépare les deux flashs et le temps qui s'écoule entre les deux flashs dans le repère R' ? Quelle est la lampe qui s'allume en premier ?
2°) Quelle doit-être la vitesse du repère R' pour que les lampes s'allument simultanément ?
3°) Quelle doit-être la vitesse du repère R' pour que les lampes s'allument en sens opposé à celui de la question 1°) ?
4°) Supposons que le repère R' se déplace à une vitesse U = 0,5 c par rapport au repère R.
Quelle est la distance qui sépare les deux flashs et le temps qui s'écoule entre les deux flashs dans le repère R' ? Quelle est la lampe qui s'allume en premier ?

Exercice 9

Un observateur (A) à bord d'une fusée croise selon un mouvement rectiligne uniforme un autre observateur terrestre (B) à la vitesse U = 0,6c. Les horloges de (A) et (B) sont synchronisées et mises à zéro au moment du croisement. Chaque minute, mesurée à bord de la fusée, (A) émet un flash lumineux soit $T_1 = 1$ mn.

1°) Quelle est la période T_1' des flashs émis par (A) quand elle est mesurée par l'observateur (B) ?
2°) Quelle est la période T_2' des flashs reçus par (B) quand elle est mesurée par l'observateur (B) ?
3°) Quelle est la période T_3' des flashs reçus par B quand elle est mesurée par l'observateur (A) ?

Remarque importante : Une attention doit être accordée à la différence entre les périodes d'émission et de réception des flashs selon les observateurs A et B.

3.3 Contraction des longueurs

Exercice 1

On imagine une fusée se déplaçant de la Terre à la Lune, à la vitesse constante de 0,8 c. La distance à parcourir dans le repère terrestre est 384 000 km.

1°) Quelle est la durée du trajet pour un observateur terrestre ?
2°) Trouver la durée du voyage pour un passager de la fusée.
3°) Calculer la distance Terre-Lune pour un passager de la fusée.

Exercice 2

Soit un rectangle ABCD de côté AB = 6 cm et AD = 4 cm. Le côté AB fait un angle $\alpha = 30°$ avec l'axe Ox. Sachant que le rectangle se déplace avec une vitesse parallèle à l'axe Ox et telle que $\gamma = 2$, préciser la nature de la figure géométrique obtenue. On supposera que le sommet A du rectangle se trouve sur l'axe Ox

Exercice 3

Un triangle rectangle ABC dont l'angle droit est en B et de côtés AB = a et BC = b avec $a < b$ se déplace avec une vitesse U suivant le côté BC. Déterminer la vitesse U pour que la figure soit un triangle rectangle isocèle. *A.N* : a = 15 cm et b = 20 cm.

Exercice 4

Soit un observateur au repos par rapport à un cube de cuivre dont la masse volumique au repos est égale à $\rho = 8{,}9.10^3$ kg/m^3. Un observateur se déplace parallèlement à une arête à la vitesse de 0,6 c par rapport au cube. Quelle est la masse volumique observée par l'observateur fixe ?

Exercice 5

Deux vaisseaux spatiaux, de même longueur L = 100 m dans leur propre référentiel, se déplacent dans le même sens en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. Un observateur placé à la tête du vaisseau le moins rapide mesure la durée T = 2,5 µs qui sépare le passage de la tête et de la queue du vaisseau le plus rapide.

1°) Déterminer la vitesse relative d'un vaisseau par rapport à l'autre.
2°) Pour l'astronaute du vaisseau le plus rapide, quel est le temps mis pour dépasser entièrement le vaisseau le moins rapide ?

Exercice 6

Un proton est animé d'une vitesse égale à 0,75.c dans le repère du laboratoire. Il passe successivement devant deux détecteurs distants de 2 mètres. On notera « Evénement 1 » le passage du proton devant le détecteur 1 et « Evénement 2 » le passage du proton devant le détecteur 2.

Déterminer l'intervalle temps et l'intervalle espace entre les deux événements dans le repère du laboratoire. En appliquant l'invariance du carré de l'intervalle espace-temps, en déduire l'intervalle temps dans le repère du proton.

Exercice 7

Supposons que nous sommes dans un univers où la vitesse de la lumière est égale à 200 km/h. Considérons trois véhicules : Une Toyota de longueur propre 4 mètres, une Mercedes de 5 mètres et une Cadillac de 6 mètres. En supposant que la Toyota roule à 100 km/h, quelle doit être la vitesse de la Mercedes et de la Cadillac pour que les trois voitures aient la même longueur pour un observateur au repos ?

Quelle doit-être la vitesse d'un train de longueur propre 100 mètres pour qu'il ait la même longueur que la Toyota ?

Exercice 8

Soit une règle rigide AB de longueur L'immobile dans un repère mobile R' en translation rectiligne uniforme par rapport à un repère fixe R et que les origines O et O' coïncident à l'instant t = 0. Un observateur dans R veut mesurer la longueur de la règle. Il mesure le temps de passage de chaque extrémité de la règle devant O. En déduire la longueur de la règle en fonction de sa vitesse ainsi que des temps de passage t_A et t_B des extrémités de la règle.

Exercice 9

Un train de longueur L = 100 m pour un passager du train R', est animé d'une vitesse U = 0,6c par rapport à un observateur lié au repère R du sol. Ce train entre dans un tunnel rectiligne de longueur l = 80 m pour l'observateur terrestre de R.

1°) Quelle est la longueur du train pour l'observateur terrestre ?
2°) Quelle est la longueur du tunnel pour le passager du train ?

3°) On prend comme origine l'événement E_1 = « l'avant du train sort du tunnel » et l'événement E_2 = « l'arrière du train entre dans le tunnel ». Préciser l'ordre temporel d'apparition des deux événements pour le passager du train et l'observateur terrestre. En prenant l'événement E_1 comme origine, écrire les coordonnées de l'événement E_2 dans les repères R et R'. Montrer que la phrase « le train est entièrement dans le tunnel », à un instant donné que l'on précisera, a un sens dans R.

4 Cinématique relativiste 02

4.1 Composition des vitesses

Exercice 1

Une particule a une vitesse $\vec{V'} = 0{,}4\,c\,\vec{\imath} + 0{,}8\,c\,\vec{\jmath}$ dont les composantes sont exprimées en m/s dans le repère R' animé d'une vitesse U = 0,866 c parallèle à l'axe des x du repère fixe et dans la direction positive.

1°) Quelles sont les coordonnées V_x et V_y du vecteur vitesse $\vec{V}$ dans le repère fixe ?
2°) Quel est l'angle que fait le vecteur vitesse $\vec{V}$ avec l'axe des X ? Comparer les orientations des deux vecteurs vitesses $\vec{V}$ et $\vec{V'}$.

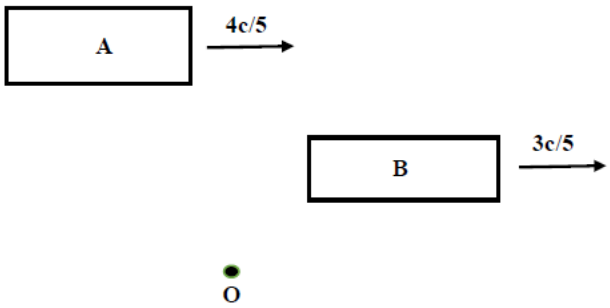
Exercice 2

Alors que des voleurs s'échappent à l'aide d'une voiture allant à la vitesse 3c/4, des policiers, à bord d'une voiture ayant la vitesse c/2, tirent en direction de ces voleurs. La vitesse de la balle est de c/3 par rapport au pistolet. Est-ce-que la balle atteint la voiture des voleurs :

1°) d'après la mécanique classique. 2°) d'après la mécanique relativiste.

Exercice 3

Deux trains A (Voyageurs) et B (Marchandises), de longueurs propres respectives $L_A = 100$ m et $L_B = 200$ m, se déplacent dans le même sens avec des vitesses $V_A = \frac{4\,c}{5}$ et $V_B = \frac{3\,c}{5}$ par rapport à l'observateur fixe O. Le train A se trouve derrière le train B (voir schéma).



On entend par « le train A dépassera entièrement le train B », lorsque l'arrière du train A dépassera l'avant du train B.

1°) Calculer la vitesse de A par rapport à B. Comparer ce résultat avec celui donné par la mécanique classique. Quelle est la longueur du train A pour un passager du train B ?

Selon le passager du train B, combien de temps mettra le train A pour dépasser entièrement le train B ?

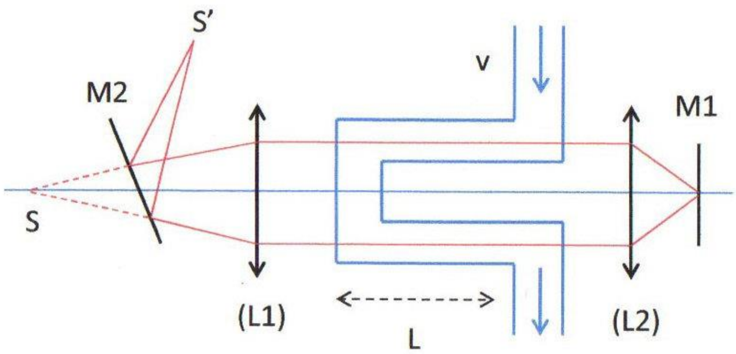
2°) Cette fois-ci, selon le passager du train A, combien de temps mettra le train A pour dépasser entièrement le train B ?

3°) Selon cet observateur O, combien de temps mettra le train A pour dépasser entièrement le train B ? Comparer ce résultat à celui qu'on obtiendrait en appliquant la mécanique classique.

Exercice 4

En 1851, Fizeau fait passer le rayon lumineux dans un courant d'eau. Pour mettre en évidence une très faible variation de la vitesse de la lumière, il utilisa les phénomènes d'interférence. Grâce à une lame semi-réfléchissante M_2 il fait passer le rayon lumineux deux fois dans un courant d'eau.

Un courant d'eau régulier (vitesse v de l'ordre de 10 m/s) est maintenu dans le tube. La lumière issue de S effectue un aller-retour dans chaque branche, une fois avec le courant et l'autre à contre-courant.



L_1 et L_2 sont deux lentilles convergentes. Le miroir M_2 joue le rôle de lame semi-transparente. On obtient l'image en S'. Fizeau y observa des interférences et expliqua l'expérience suivant le raisonnement de la mécanique classique.
L'expérience donne un résultat sous forme d'une formule empirique, qui n'est pas en accord avec la formule d'addition des vitesses de la mécanique classique. Par contre le résultat sera expliqué par la relativité restreinte.

1°) Quelle est la vitesse v de la lumière dans l'eau immobile en fonction de la vitesse $c = 3.10^8$ m/s de la lumière dans le vide et de l'indice de réfraction n = 1,33 de l'eau immobile.

2°) On veut déterminer la vitesse $\vec{V}$ de la lumière dans l'eau en mouvement en fonction de la vitesse $\vec{v}$ de la lumière dans l'eau immobile et de la vitesse $\vec{u}$ d'écoulement de l'eau.
On suppose que l'on peut utiliser la loi de composition des vitesses de la mécanique classique.
Déterminer la vitesse $\vec{V}$ de la lumière dans les deux cas qui interviennent. Calculer la différence de temps entre les deux rayons qui interférent en S'. En déduire la différence de marche entre les deux rayons qui interférent en S'.
3°) L'expérience donne un résultat sous forme d'une formule empirique, qui n'est pas en accord avec la formule d'addition des vitesses de la mécanique classique. Pour expliquer le résultat on se propose d'utiliser la loi de composition des vitesses en mécanique relativiste.
Calculer la différence de temps entre les deux rayons qui interférent en S'. En déduire la différence de marche entre les deux rayons qui interférent en S'.

A.N: L = 10 m λ = 5400 Å u = 10 m/s.

Exercice 5

Une fusée se déplace à une vitesse de 0,7c par rapport à la Terre. Elle éjecte un projectile à une vitesse de 0,8c relativement à elle-même et perpendiculairement à la direction de sa vitesse, selon l'axe des y.

1°) Classiquement, quelle serait le module de la vitesse du projectile par rapport à la Terre ?
2°) Quelles sont les composantes en x et en y de la vitesse du projectile par rapport à la Terre ?
3°) Quelle est le module de la vitesse du projectile par rapport à la Terre ?
4°) Au lieu d'éjecter un projectile, on suppose que la fusée émet un rayon lumineux de vitesse c vers l'avant. Calculer, en utilisant la loi de composition des vitesses, la vitesse du rayon lumineux. Répondre à la même question en supposant la fusée émet un rayon lumineux de vitesse c vers la Terre.
5°) La fusée émet un rayon lumineux de vitesse c dans une direction perpendiculaire à la direction de la vitesse de la fusée. Calculer, en utilisant la loi de composition des vitesses, la vitesse du rayon lumineux. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 6

On appelle $\vec{v}$ la vitesse d'une particule dans le repère mobile R' qui se déplace à la vitesse

$\vec{U} = (U, 0, 0)$ par rapport au repère fixe R et parallèle à l'axe Ox. La composante V_x de la vitesse $\vec{V}$ de la particule par rapport au repère fixe R est égale à :

$$V_x = \frac{v_x + U}{1 + \frac{U}{c^2} v_x}$$

Soient r_U la rapidité du repère R' par rapport au repère R puis r_R et $r_{R'}$ les rapidités de la particule par rapport aux repères R et R'. Rappeler la définition de la rapidité.
Quelle est la relation entre les différentes rapidités ? On utilisera la relation suivante en trigonométrie hyperbolique soit :

$$\tanh(a + b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + (\tanh a)(\tanh b)}$$

4.2 Effet Doppler

Exercice 1

Le radar (**RA**dio **D**etection **A**nd **R**anging) émet des ondes électromagnétiques de fréquence f en direction d'un véhicule s'approchant à la vitesse U. Comme le véhicule est animé d'une vitesse, il reçoit cette onde avec une fréquence f '. Il réfléchit une partie de ces ondes vers le radar, se comportant à son tour comme une source mobile se déplaçant à la vitesse U en émettant des ondes de fréquence f '. Le radar capte cette onde réfléchie à la fréquence f ''.

1°) Exprimer la fréquence f ' en fonction de f, U et de la vitesse des ondes électromagnétiques c.
2°) Exprimer la fréquence f '' en fonction de f, U et de c.
3°) En déduire la valeur de la vitesse du véhicule.

Application : Un véhicule circulant en agglomération (vitesse limitée à 50 km/h) est contrôlé par un radar Doppler qui émet des impulsions électromagnétiques de fréquence f = 24,124 GHz. Au passage du véhicule la variation de fréquence enregistrée $\Delta f = f'' - f$ est égale à 2500 Hz. Calculer la vitesse de ce véhicule. Ce véhicule est-il en infraction ?

Exercice 2

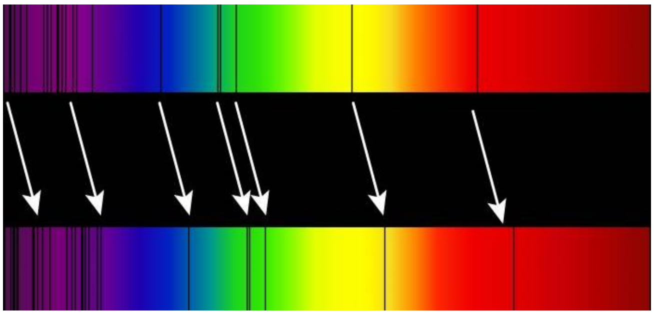
On détermine la vitesse V de déplacement des globules sanguins en utilisant une sonde à ultrasons constituée de deux cristaux piézoélectriques. L'un A pour l'émission et l'autre B pour la réception des ondes réfléchies par les globules. La vitesse V des globules sanguins est faible devant la vitesse V_S = 1500 m/s de propagation du son dans le sang. On considère le cas où l'angle est nul entre la vitesse V de déplacement des globules sanguins et la direction de propagation de la vitesse du son. La combinaison du faisceau émis, de fréquence ν_A = 5,4 MHz, et du faisceau reçu après réflexion sur les globules sanguins donne des battements de fréquence $\Delta\nu$ = 1,4 kHz. En déduire la vitesse de déplacement du sang dans les vaisseaux.

Exercice 3

Un automobiliste se fait arrêter par un policier parce qu'il a « brûlé » un feu rouge. En raison du décalage Doppler le conducteur dit avoir vu un feu vert (λ = 5500 Å) alors que feu est au rouge (λ = 6700 Å). Es-ce-que le policier croit la version de l'automobiliste ?

Exercice 4

Expliquer pourquoi, quand on étudie la lumière provenant d'une étoile, son spectre est d'autant plus décalé vers le rouge que cette étoile s'éloigne rapidement.
Les figures du haut et du bas montrent le spectre émis par l'étoile et le spectre observé alors que la figure du milieu en noire montre le sens de déplacement des raies..



Exercice 5

Une source S, fixe dans le référentiel R du laboratoire, émet selon l'axe Ox, une onde lumineuse de longueur d'onde $\lambda_S = 6560$ Å, qui est caractéristique de la raie rouge de l'atome d'hydrogène. Elle est réfléchie par un miroir en mouvement qui s'éloigne de S, avec la vitesse $\vec{U} = U\,\vec{e_x}$.

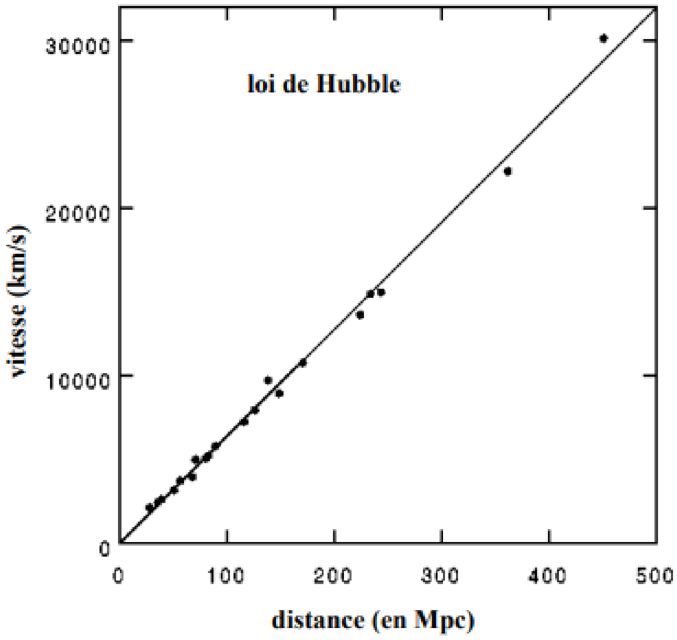
1°) Quelle est, en fonction de U et de ν_S, la fréquence ν'_d de l'onde lumineuse reçue par le miroir ?
2°) Le miroir réfléchit l'onde reçue vers la source. La longueur d'onde λ'_S de l'onde détectée par la source, après réflexion par le miroir, vaut $\lambda'_S = 1{,}97$ µm . Calculer la vitesse du miroir.
3°) Dans le cas où le miroir se rapproche de la source S avec la vitesse calculée ci-dessus, calculer la longueur d'onde détectée par la source.

Exercice 6

En 1929, E. Hubble a établi que les galaxies lointaines s'éloignent de la Terre avec une vitesse V proportionnelle à leur distance à la Terre (voir graphe de la loi de Hubble).

Dans le spectre d'émission d'une des galaxies, on détecte la raie H_α de la série de Balmer de l'atome d'hydrogène dont la mesure de la longueur d'onde donne $\lambda' = 6890$ Å. Quelle est la vitesse de la galaxie et à quelle distance (en année-lumière) se situe-t-elle ? On rappelle que la mesure de longueur d'onde de la raie H_α au laboratoire donne $\lambda = 6563$ Å. Que deviennent ces résultats si on ne tient pas compte de la relativité restreinte.
Le parallaxe seconde ou parsec est une unité de longueur utilisée en astronomie. Il est défini comme suit : 1 parsec = $3{,}08.10^{16}$ m = 3,26 année-lumière.

La loi de Hubble $V = H_0.d$ affirme que la vitesse d'éloignement des galaxies est proportionnelle à leur distance. Dans cette formule v est en km/s, d en Mpc ou Méga-parallaxe-seconde et H_0 = 67 km/s/Mpc la constante de Hubble.



Exercice 7

Deux vaisseaux spatiaux A et B s'approchent l'un de l'autre avec des vitesses absolues mesurées par un observateur terrestre placé en O soit $V_A = +\ 0{,}70\ c$ et $V_B = -\ 0{,}50\ c$ (voir schéma).

1°) Quelle est la vitesse de A par rapport à B selon Galilée puis selon les lois de la relativité ?
2°) Un astronaute à bord du vaisseau spatial A envoie à sa base sur Terre une impulsion lumineuse toutes les secondes dans le référentiel du vaisseau spatial A. Quel est l'intervalle de temps séparant la réception de deux flashs lumineux consécutifs pour un observateur terrestre en O ?
3°) Le vaisseau A envoie des signaux en même temps vers le vaisseau B et vers la Terre à l'aide d'un laser à rubis (λ_S = 6940 Å). Quelles sont les longueurs d'onde des signaux mesurées respectivement par un observateur en B et par un observateur terrestre en O ?

5 Diagramme de Minkowski

5.1 Intervalle espace-temps

Exercice 1

1°) Dans le cas d'un intervalle genre temps, montrer qu'il existe toujours un référentiel R', animé d'une vitesse U, où les événements E_1 (ct_1, x_1) et E_2 (ct_2, x_2) se passent au même endroit mais à des instants différents. On précisera la position $x'_1 = x'_2$ ainsi que les temps t'_1et t'_2.

Calculer le carré de l'intervalle espace-temps dans les deux référentiels. Commenter le résultat obtenu.
Déterminer la vitesse U du référentiel R'. Quelles sont les coordonnées de ces deux événements dans le référentiel R' ? Peut-t-il y avoir un lien de causalité possible entre ces deux événements ? Examiner les cas suivants où : E_1 (2, 1) et E_2 (6, 2).
2°) Dans le cas d'un intervalle genre espace, montrer qu'il existe toujours un référentiel R' où les événements E_1 (ct_1, x_1) et E_2 (ct_2, x_2) se passent au même instant (simultanés) mais à des endroits différents.
Déterminer la vitesse U du référentiel R'. Quelles sont les coordonnées de ces deux événements dans le référentiel R' ? Examiner les cas suivants où : E_1 (2, 1) et E_2 (4, 5).

Exercice 2

1°) Soit deux événements E_1 ($ct_1 = 0.4$, $x_1 = 1$) et E_2 ($ct_2 = 1.6$, $x_2 = 2$) dont les coordonnées spatio-temporelles sont exprimées en mètre. Calculer le carré de l'intervalle entre ces deux événements. Préciser le genre de cet intervalle. Peut-il y avoir un lien de causalité entre les deux événements ? Montrer qu'il existe un référentiel galiléen particulier dans lequel les deux événements se produisent au même point de l'espace.

2°) Soit deux événements E_1 ($ct_1 = 1$, $x_1 = 0.4$) et E_2 ($ct_2 = 0.8$, $x_2 = 2$) dont les coordonnées spatio-temporelles sont exprimées en mètre. Calculer le carré de l'intervalle entre ces deux événements. Préciser le genre de cet intervalle. Peut-il y avoir un lien de causalité entre les deux événements ? Montrer qu'il existe un référentiel galiléen particulier dans lequel les deux événements sont simultanés.

Exercice 3 :

Dans le repère fixe R, on considère deux événements $E_1 = (t_1 = T, x_1 = a)$ et $E_2 = (t_2 = T/2, x_2 = 2a)$.

1°) Calculer le carré de l'intervalle d'espace-temps entre ces deux événements. Quelles conditions doivent vérifier les paramètres a et T pour que ces événements soient reliés causalement ? Donner la vitesse U du référentiel R' dans lequel ces deux événements sont simultanés ?
2°) A quel instant t' du référentiel R' ces événements se produisent-ils simultanément ?

Exercice 4

Un événement A a lieu à l'origine du repère R à l'instant t = 0. Un autre événement B, séparé du premier par une distance de $2{,}5.10^9$ m a lieu 10 secondes plus tard. Trouver la vitesse de R' par rapport à R pour laquelle les deux événements A et B.

1°) ont lieu au même point ?

2°) ont lieu simultanément ?

3°) dans le cas de la première question, quel est le délai $\Delta t'$ entre A et B ?

Exercice 5

Deux événements se produisent dans R soit E_0 : ($ct_0 = 0$, $x_0 = 0$) et E_1 : ($ct_1 = 1.2$, $x_1 = 2$) où les coordonnées spatio-temporelles sont en mètre.

1°) Peut-il y avoir une relation de cause à effet entre ces deux événements ?
2°) Quelle serait, par rapport au repère R, la vitesse d'un repère dans lequel ces deux événements seraient simultanés ?
3°) Quelle durée sépare ces deux événements pour un observateur se déplaçant à une vitesse $U = 0,8\ c$ par rapport à R ? Que devient la situation si E_0 a $ct_0 = 0$ m et $x_0 = 0$ m et E_1 a $ct_1 = 1,2$ m et $x_1 = 1$ m ?

Exercice 6

Considérons les deux événements E_1 ($ct_1 = 3$, $x_1 = 1$) et E_2 ($ct_2 = 4$, $x_2 = 3$) dont les coordonnées spatio-temporelles sont exprimées en mètre. Quel est le genre de l'intervalle espace-temps ? Y-a-t-il une relation de causalité entre les événements E_1 et E_2 ? Peut-on trouver un référentiel pour lequel les deux événements apparaissent au même endroit ? Montrer qu'il existe un référentiel galiléen particulier de vitesse U_S dans lequel les deux événements sont simultanés. Préciser l'ordre d'apparition des deux événements dans un repère mobile dont la vitesse est plus grande ou plus petite que U_S.

Exercice 7

Dans le diagramme espace-temps, on a représenté trois événements A, B et C dont les coordonnées spatio-temporelles (ct, x) sont : A (2, 1), B (3, 3), C (-1, 2) et D (4, 0). En travaillant uniquement avec les cônes de lumière dites :

1°) Y-a-t-il un effet de causalité entre l'événement A et les événements B, C et D ?
2°) Y-a-t-il un effet de causalité entre l'événement B et les événements C et D ?
3°) Préciser le genre des intervalles espace-temps suivants : AB, AC, AD, BC et BD.

Exercice 8

Soit les trois événements A ($ct_1 = 1$, $x_1 = 2$), B ($ct_2 = 6$, $x_2 = 5$) et C ($ct_3 = 4$, $x_3 = 7$).

1°) Calculer l'intervalle espace-temps entre les deux événements A et B. Préciser le genre de cet intervalle. En utilisant la notion de cône de lumière, existe-t-il un lien de causalité possible entre les deux événements A et B ? Montrer que l'ordre des événements est le même dans les deux repères. Calculer la vitesse U du repère mobile R' pour laquelle les deux événements se produisent au même endroit. Quel est l'écart temporel entre les deux événements A et B dans le repère mobile ?

2°) Calculer l'intervalle espace-temps entre les deux événements A et C. Préciser le genre de cet intervalle. En utilisant la notion de cône de lumière, existe-t-il un lien de causalité possible entre les deux événements A et C ? Calculer la vitesse U du repère mobile R' pour laquelle les deux événements se produisent au même endroit. Quel est l'écart spatial entre les deux événements A et C dans le repère mobile ?

5.2 Diagramme de Minkowski

Exercice 1

1°) En appliquant les principes de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique lors d'une collision élastique à une dimension entre deux masses m_1 et m_2, on trouve les vitesses de ces deux masses après collision égales à :

$$\begin{cases} \text{Avant collision : } V_1 = +2\ \text{m/s} \text{ et } V_2 = -10\ \text{m/s} \\ \text{Apès collision : } V_1' = -14\ \text{m/s} \text{ et } V_2' = -2\ \text{m/s} \end{cases}$$

Donner une représentation graphique (ct, x) des trajectoires avant et après la collision.

2°) Soit une bille animée d'un mouvement rectiligne uniforme entre les points A et B. En négligeant les forces de frottement et en supposant que la bille rebondit aux points A et B, Donner une représentation graphique (ct, x) de la trajectoire de la bille.

Exercice 2

Soit deux événements E_1 ($ct_1 = 1{,}5$, $x_1 = 3$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$) et E_2 ($ct_2 = 3$, $x_2 = 6$, $y_2 = 0$, $z_2 = 0$) dans un référentiel R et dans les coordonnées sont exprimées en mètre.

1°) Calculer le carré de l'intervalle entre ces deux événements. Préciser son genre. Peut-il y avoir une causalité entre ces deux événements ? Représenter les deux événements dans un diagramme espace-temps où sera également indiqué le cône de lumière.

2°) On se place dans un référentiel inertiel R' dans lequel ces deux événements sont simultanés. Donner la vitesse de R' par rapport à R.

3°) On se place dans un référentiel inertiel R'' dans lequel ces deux événements ont lieu au même endroit. Donner la vitesse de R'' par rapport à R.

Exercice 3

Dessiner un diagramme de Minkowski pour un repère mobile R' animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse V = 0.6c. Tracer les axes Oct' et Ox' du repère R'. Préciser les angles entre les axes (Oct, Oct') et (Ox, Ox'). Placer le point M dont les coordonnées dans le repère fixe R sont ct = 9 m et x = 7 m. Déterminer par une méthode graphique les coordonnées ct' et x' dans le repère mobile R'. Retrouver ces résultats en appliquant la transformation de Lorentz.

Exercice 4

On donne les coordonnées de deux événements A et B si se produisent simultanément dans un repère fixe R soit :

$$\text{A: } ct_1 = 8\ \text{m} \quad x_1 = 5\ \text{m} \quad \text{et} \quad \text{B: } ct_2 = 8\ \text{m} \quad x_2 = 10\ \text{m}$$

Montrer par la méthode graphique puis par le calcul que ces deux événements ne sont plus simultanés dans un repère mobile R' animé d'une vitesse V = 0,5 c.

Exercice 5

Dessiner

a) les axes Oct' et Ox' d'un repère R' qui se déplace à une vitesse V = 0,5 c dans la direction des x positifs et dont l'origine coïncide avec celle du repère R

b) la calibration des axes Ox’ et Oct’
c) le lieu des événements qui se produisent simultanément à l’instant t = 1 m.
d) le lieu des événements qui se produisent simultanément à l’instant t’= 1 m.
e) le lieu de l’événement qui se produit à t’= 0 et x’= 0,5 m.
f) le lieu des événements qui se produisent à x’= 1 m.

Exercice 6

On considère quatre lampes placées aux points dont les coordonnées spatio-temporelles (ct, x) sont :

A = (3,-1)   B = (1, -2)   C = (3,1)   D = (2, 2)

Déterminer l'ordre dans lequel les quatre éclairs se produisent. Déterminer ensuite l'ordre dans lequel un observateur situé en x = 0 du repère fixe R verrait les éclairs émis par les lampes.

Exercice 7

On considère deux événements A (ct = 0, x = 0) et B (ct = 2, x = 4) dont les coordonnées sont exprimées en mètre.
Préciser l’ordre temporel de ces deux événements dans un repère mobile animé des vitesses suivantes : 1°) $\beta = 0,2$ 2°) $\beta = 0,5$ 3°) $\beta = 0,8$.

Exercice 8

Un coureur avec une perche de longueur $L_P = 15$ m se dirige vers une grange de dimension $L_G = 10$ m. Un observateur au repos par rapport à la grange peut instantanément et simultanément fermer et ouvrir les portes de sortie et d'entrée de la grange à l'aide d'une télécommande.

1°) Pour un observateur lié à la grange, à quelle vitesse doit se déplacer le coureur pour que la perche soit entièrement contenue dans la grange ?
2°) Pour le coureur, est-ce-que la grange peut- elle contenir la perche ?
3°) Pour un observateur lié à la grange, préciser les instants pour lesquels l’avant et l’arrière de la perche entrent et quittent la grange.
4°) Pour le porteur de la perche, préciser les instants pour lesquels l’avant et l’arrière de la grange rencontrent l’avant et l’arrière de la perche. Est-il possible à l'observateur de fermer et d'ouvrir les portes de la grange de sorte que le coureur puisse passer à travers la grange en toute sécurité ?
5°) Répondre aux deux questions précédentes en utilisant le diagramme de Minkowski.

Exercice 9

On se propose de graduer les axes d’un diagramme de Minkowski.
1°) Pour une vitesse V = 0,6 c, tracer l’axe Oct’. Donner la valeur de l’angle entre les axes Oct et Oct’. Tracer le graphe de la fonction $(\mathrm{ct})^2 - \mathrm{x}^2 = 1$. Donner les coordonnées du point d’intersection entre l’hyperbole et l’axe Oct’. Préciser la valeur de l’unité de longueur de l’axe Oct’ par rapport à l’unité longueur de l’axe Oct. Répondre aux mêmes questions dans le cas du tracé des deux hyperboles $(\mathrm{ct})^2 - \mathrm{x}^2 = 0,5^2$ et $(\mathrm{ct})^2 - \mathrm{x}^2 = 1,5^2$.
2°) En déduire la graduation de l’axe Ox’.

Exercice 10

Les jumeaux F (fixe) et M (mobile) vivent sur la Terre. Le jour de leurs 20 ans, le jumeau M monte dans un vaisseau spatial et se dirige vers une étoile située à D = 3 années - lumière (tel que mesuré de la Terre) avec une vitesse égale à 0,6 c

1°) Quelles sont les durées du voyage des jumeaux F et M chacun selon son référentiel ? En déduire la différence d'âge au retour de l'astronaute M sur la Terre ?
2°) Quelle doit-être la vitesse du vaisseau spatial pour que la différence d'âge à la fin du voyage soit égale à 5 années ? Calculer les durées de voyage aller-retour des jumeaux F et M chacun selon son propre référentiel ? On négligera les phases d'accélération et de décélération de la fusée.
3°) Tracer le diagramme de Minkowski pour la vitesse V = 0,6c. Préciser les graduations des axes Ox, Oct et Oct'.
4°) Des flashs lumineux sont envoyés de la Terre vers le vaisseau spatial tous les ans selon l'horloge terrestre. A quelle fréquence les signaux lumineux seront-ils reçus par le vaisseau spatial selon les horloges du vaisseau spatial ? Utiliser l'espace-temps ci et vérifier le résultat par le calcul. Préciser cette fréquence suivant la phase aller puis la phase retour du vaisseau spatial.
5°) Cette fois-ci les flashs lumineux sont envoyés du vaisseau spatial vers la Terre tous les ans selon l'horloge du vaisseau spatial. A quelle fréquence les signaux lumineux seront-ils reçus par un observateur terrestre ? Utiliser l'espace-temps ci et vérifier le résultat par le calcul. Préciser cette fréquence suivant la phase aller puis la phase retour du vaisseau spatial.

6 Dynamique

Exercice 1

Dans le référentiel $\mathcal{L}$ du laboratoire un proton p^+ arrive avec une v_1 sur un proton immobile ($\mathrm{v}_2 = 0$).
1°) Quelle doit être l'impulsion minimale du proton incident pour que la réaction

$$\mathrm{p}^+ + \mathrm{p}^+ \rightarrow \mathrm{p}^+ + \mathrm{p}^+ + (\mathrm{p}^+ + \mathrm{p}^-)$$

soit possible ? En déduire la vitesse $\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}$ qui correspond à cette impulsion.
Au cours de cette réaction une partie de l'énergie cinétique sert à créer une paire proton-antiproton. L'antiproton p^- est une particule de même masse que le proton et de charge opposée. L'énergie seuil est atteinte lorsque les quatre particules sont immobiles dans le référentiel du centre de masse.
2°) Calculer cette énergie cinétique en Joules et en électron-volts. En déduire la tension d'accélération qui permet d'obtenir cette énergie. Quelle est la vitesse du proton incident ?

Exercice 2

Un oscillateur relativiste est constitué d'une particule de masse m qui se déplace le long d'un axe Ox sous l'action d'une force de rappel

$$F = -kx$$

1°) Exprimer le principe de conservation de l'énergie totale de la particule aux positions d'abscisses x = x et x = a où a désigne l'amplitude des oscillations. En déduire l'expression de la vitesse de la particule en fonction du paramètre

$$\alpha(x) = \frac{1}{2}\frac{k(a^2 - x^2)}{mc^2}$$

2°) L'énergie potentielle de la particule est très faible devant son énergie au repos. On peut alors assimiler le rapport $\alpha(x)$ à un infiniment petit. Montrer que la période de l'oscillateur relativiste peut s'écrire :

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1 + \frac{3ka^2}{16mc^2}\right)$$

Exercice 3

Le faisceau d'un accélérateur bombarde une cible qi émet alors un mésons π. L'énergie cinétique des derniers est $\mathcal{E}_c = 1.26 \times 10^3$ MeV.
1°) Quelle la vitesse des mésons π sachant que leur énergie au repos est $\mathcal{E}_0 = 140$ MeV ?
2°) La durée de vie moyenne de ces particules est $\tau = 2.6 \times 10^{-8}$ s. A quelle distance maximale de la cible doit-on placer un détecteur si on veut détecter au moins 1% de ceux qui ont été émis dans la direction du détecteur ?
Rappel : Loi de désintégration des particules :

$$N = N_0 e^{-t/\tau}$$

Exercice 4

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au laboratoire, une particule M_1 de masse m, d'énergie $\mathcal{E}_1$ et d'impulsion $\vec{p}_1$ heurte une particule identique qui se trouve au repos. A la suite de ce choc élastique M_1 est déviée d'un angle θ par rapport à la direction initiale.
1°) Montrer qu'après le choc, son impulsion a pour expression

$$p_1' = 2p_1 \frac{mc^2\cos\theta\,(\mathcal{E}_1 + mc^2)}{(\mathcal{E}_1 + mc^2) - (p_1 c\cos\theta)^2}$$

et son énergie

$$\mathcal{E}_1' = mc^2\frac{(\mathcal{E}_1 + mc^2) + (p_1 c\cos\theta)^2}{(\mathcal{E}_1 + mc^2) - (p_1 c\cos\theta)^2}$$

2°) On désigne par φ l'angle que fait M_2 avec la direction initiale de M_1. Calculer les expressions de p'_2 et $\mathcal{E}'_2$ de M_2 après le choc.
3°) Exprimer le produit $\tan\theta \cdot \tan\varphi$ en fonction de $\mathcal{E}_1$, m et c
Soit $\alpha = \theta - \varphi$ l'angle de diffusion. Montrer qu'en mécanique classique $\alpha = \pi/2$ et en mécanique relativiste $\alpha < \pi/2$.
Rappel :

$$\tan(\theta - \varphi) = \frac{\tan\theta - \tan\varphi}{1 + \tan\theta\tan\varphi}$$

Exercice 5

Une particule de masse m, initialement au repos, se déplace à la vitesse v et entre en collision avec une autre particule pour ne former qu'une seule particule de masse M.

1°) Etudier cette collision dans le référentiel du centre de masse. Exprimer M en fonction de m. Effectuer les calculs avec v $= \frac{4}{5}$ c.

2°) Retrouver ce résultat en raisonnant dans le référentiel du laboratoire.

Exercice 6

Un méson π^+ (pion) au repos se désintègre en méson μ (muon) et un neutrino. Quelle est l'énergie du muon et son énergie cinétique ? En déduire sa vitesse.

Anergie au repos du pion : $\mathcal{E}_0 = 139.6$ MeV

Energie au repos du muon : $\mathcal{E}_0 = 105.7$ MeV

Energie au repos du neutrino : $\mathcal{E}_0 \approx 0$ MeV

Exercice 7

On peut observer la création d'une paire électron-positron $(e^- + e^+)$ à partir de la collision d'un photon γ et d'un électron supposé au repos dans un référentiel lié au laboratoire.

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + (e^- + e^+)$$

Le positron est une particule de même masse que l'électron et de charge opposée.

Calculer l'énergie seuil du photon à partir de laquelle la réaction est possible. En déduire la fréquence de l'onde électromagnétique associée au photon.

Exercice 8

Un pion neutre π^0 de masse m animé d'une vitesse v se désintègre en vol suivant la réaction

$$\pi^0 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$$

Après la désintégration, les photons prennent des directions qui font des angles α_1 et α_2 avec v.

1°) Exprimer les énergies E_1 et E_2des photons en fonction de m, v et α_1 (puis α_2 pour E_2).

2°) Retrouver ces expressions à partir de l'effet Doppler, lorsqu'on considère des ondes émises dans le référentiel du centre de masse et réceptionnées par l'expérimentateur dans le référentiel du laboratoire.

Exercice 9

Comparer les pertes d'énergie du photon incident dans les cas suivants :

1°) Une diffusion Compton dans la direction θ =180°.

2°) Deux diffusions Compton successives dans la direction θ = 90° chacune avec un angle de 90°.

3°) Trois diffusions Compton successives dans la direction θ = 60° chacune avec un angle de 60°.

A.N : E_0 = 51,1 keV. Comparer les résultats dans les trois cas.

Exercice 10

1°) Rappeler les caractéristiques de photon diffusé (longueur d'onde et énergie), l'énergie de l'électron de recul ainsi que la relation entre les directions d'émission du photon de diffusion et de l'électron de recul.

2°) On envoie un faisceau monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = k\,\lambda_c$ où λ_c est la longueur d'onde Compton et k un nombre réel positif différent de zéro.

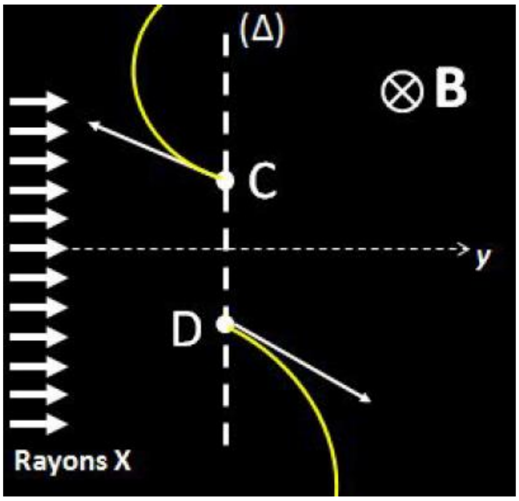
Montrer que l'énergie du photon incident est égale à $E_0 = \frac{m_e c^2}{k}$ où $m_e c^2 = 511$ keV est l'énergie au repos de l'électron. Donner les expressions du photon diffusé dans la direction θ (longueur d'onde, quantité de mouvement et énergie) et de l'électron de recul (énergie cinétique, quantité de mouvement et direction φ d'émission).

3°) Examiner les trois situations suivantes :

$$k = \frac{1}{2} \text{ et } \theta = \frac{\pi}{3} \qquad k = 1 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{2} \qquad k = 2 \text{ et } \theta = \frac{2\pi}{3}$$

Exercice 11

La chambre de Wilson est un dispositif utilisé pour matérialiser sous forme de traces les trajectoires des particules chargées qui la traversent. Les particules neutres et les photons n'y laissent pas de traces et sont donc invisibles. Le schéma ci-joint représente une photographie prise par un tel dispositif éclairé dans la direction Y par un faisceau de rayons X monochromatique d'énergie E_0.



On y observe deux traces qui correspondent à l'émission d'électrons Compton. La chambre est soumise à une induction magnétique B perpendiculaire au plan de la figure. Sous l'action de ce champ, que l'on suppose constant et uniforme, les électrons décrivent dans le sens des aiguilles d'une montre, des trajectoires circulaires dont le rayon R est proportionnel à leur quantité de mouvement. L'axe Δ reliant les points de départ des deux traces C et D est perpendiculaire à la direction du rayonnement incident. Les tangentes aux trajectoires de départ sont indiquées par des flèches.

L'échantillon, soumis au rayonnement X, est constitué d'une feuille très mince dont l'épaisseur est de l'ordre de quelques dixièmes de micromètre.

1°) Rappeler la relation de Compton donnant la variation de la longueur d'onde d'un photon subissant une diffusion sous un angle θ.

2°) Montrer que dans une interaction de type effet Compton, il n'est pas possible que le photon soit absorbé par l'électron libre, lui transférant ainsi la totalité de son énergie (contrairement à ce qui se passe dans une interaction d'effet photoélectrique).

3°) Etablir la relation donnant l'angle d'émission φ de l'électron Compton en fonction de l'angle de diffusion θ.

4°) Etablir que $\varphi \leq 90°$.
5°) En déduire, en précisant l'ordre dans lequel elles se sont produites, que les traces observées correspondent à des électrons produits par un photon qui a subi deux diffusions Compton successives.
6°) Les photons incidents ont une énergie $\mathcal{E}_0 = 10$ keV. Calculer :
a. L'énergie du premier photon diffusé.
b. L'énergie cinétique du premier électron Compton et son angle d'émission φ_1.
7°) Les rayons respectifs R_1 et R_2 de la première et de la seconde trace sont tels que :
$R_2 = 1.3\ R_1$.
Calculer :
a. L'énergie cinétique du second électron Compton puis l'énergie et l'angle de diffusion du second photon.
b. L'angle d'émission φ_2 du second électron.

7 Quadrivecteurs

Exercice 1

Soit un plan P caractérisé par deux axes Ox et Oy faisant un angle $\theta = (Ox, Oy) = 120°$. On appelle $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ les vecteurs unitaires portés respectivement par les axes Ox et Oy. A partir de l'origine, on place un vecteur $\vec{U}$ de module U = 7 unités arbitraires (1 unité arbitraire = 3 carreaux) et faisant un angle de 45° avec l'axe Ox.

1°) Sur un schéma, indiquer les composantes contra variantes U^1 et U^2 du vecteur $\vec{U}$. Donner leurs valeurs en unités arbitraires.

2°) Sur le même schéma, indiquer les composantes covariantes U_1 et U_2 du vecteur $\vec{U}$. Donner leurs valeurs en unités arbitraires. Quelle remarque peut-on faire dans le cas où l'angle (Ox, Oy) = 90° ?

3°) En utilisant toujours la condition (Ox, Oy) = 120°, écrire la relation matricielle qui permet de passer de composantes contra variantes aux composantes covariantes. En déduire la relation matricielle qui permet de passer de composantes covariantes aux composantes contra variantes.

Exercice 2

Soient un vecteur $\vec{U}$ de composantes contra variantes U^i, covariantes U_i et un vecteur $\vec{V}$ de composantes contra variantes V^i, covariantes V_i.

1°) Montrer que le produit scalaire entre $\vec{U}$ et $\vec{V}$ peut s'écrire sous les deux formes suivantes :

$$\vec{U}.\vec{V} = U^i V_i = U_i\, V^i$$

En déduire la norme du vecteur $\vec{U}$.

2°) Que deviennent les résultats précédents si on travaille dans une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$?

8 Electromagnétisme