Supplément

Corrigé des exercices supplémentaires

Dans ce document

Corrigé des exercices supplémentaires

Corrigé des exercices supplémentaires

1 Histoire de la lumière

Exercice 1

1°) La valeur approximative de la vitesse de la lumière est :

$$D = c_{Estimée}.\Delta t \quad \Rightarrow \quad c_{Estimée} = \frac{D}{\Delta t} = \frac{3.10^8}{22.60} = 227272 \ \text{km}/s$$

2°) La valeur réelle de la vitesse de la lumière est :

$$D = c_{Réelle}.\Delta t \quad \Rightarrow \quad c_{Réelle} = \frac{D}{\Delta t} = \frac{3.10^8}{16{,}5.60} = 303030 \ \text{km}/s$$

Exercice 2

De combien a tourné le miroir ? Comme le rayon réfléchi a tourné d'un angle $\delta\theta = 0{,}0170°$, on peut dire que le miroir rotatif a tourné uniquement d'un angle moitié soit $\frac{\delta\theta}{2} = 0{,}0085°$.

$$2D = c\Delta t \ \text{ et } \ \frac{\delta\theta}{2} = \omega\Delta t$$

$$\frac{2D}{c} = \frac{\delta\theta}{2\omega} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{4D\ \omega}{\delta\theta}$$

$$c = \frac{4.100.2\pi.2100.180}{60.0{,}017.\pi} = \frac{800.6300}{0{,}017} = 296470588 \ \text{m/s}$$

Exercice 3

Dans le cas où la course se fait dans le lac on a V = 0. Les deux nageurs arrivent en même temps au bout d'un temps

$$T_0 = \frac{2L}{V} = 50 \text{ s}$$

Cas où la course se fait dans le fleuve :

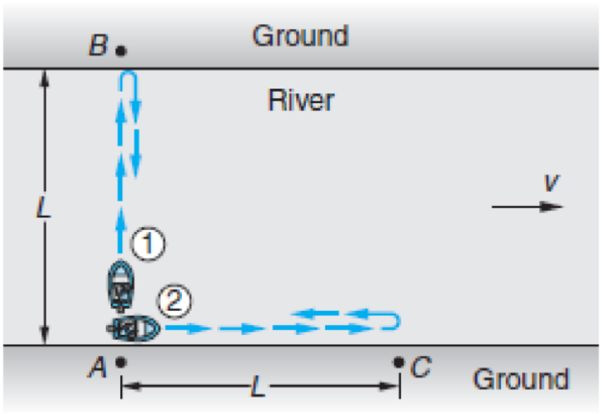
$$L = 50 \text{ m} \quad V_{Nageur-Fleuve} = 2 \text{ m/s} \quad v_{Fleuve-Berge} = 1 \text{ m/s}$$

Calcul de la vitesse du nageur par rapport à la berge :

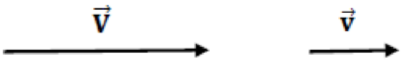
$$\overrightarrow{V_{Nageur/Berge}} = \overrightarrow{V_{Nageur/Fleuve}} + \overrightarrow{V_{Fleuve/Berge}}$$

$$\begin{cases} \vec{W}\text{: Vitesse du nageur par rapport à la berge} \\ \vec{V}\text{: Vitesse du nageur par rapport au fleuve} \\ \vec{v}\text{: Vitesse du fleuve par rapport à la berge} \end{cases}$$

$$\vec{W} = \vec{V} + \vec{v}$$



Nage parallèle à la berge (2):



Aller : A→ C

Retour : C →A

$$T_{ACA} = T_{AC} + T_{CA} = \frac{L}{V+v} + \frac{L}{V-v} = \frac{2L}{V} \frac{1}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} = T_0 \frac{1}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

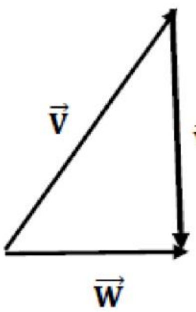
$$T_{ACA} = T_{//} = 66{,}66\ \mathrm{s}$$

Nage perpendiculaire à la berge (1) :

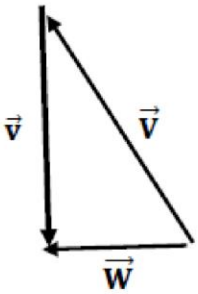
$$T_{ABA} = T_{AB} + T_{BA} = \frac{L}{W} + \frac{L}{W} \qquad \text{où} \qquad W = \sqrt{V^2 - v^2}$$

$$W = \sqrt{3} = 1{,}73\ \ \mathrm{m/s}$$

$$\text{Orientation de } \vec{V}\text{:}\ \ \sin\theta = \frac{v}{V} = 0{,}5 \qquad \theta = 30°$$



Aller : A → B



Retour : B → A

$$T_{ABA} = \frac{2L}{\sqrt{V^2 - v^2}} = T_0 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} \qquad \Rightarrow\ T_{\perp} = 57{,}73\ \mathrm{s}$$

$$\frac{T_{ACA}}{T_{ABA}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} > 1 \qquad \Rightarrow T_{//} > T_{\perp}$$

$T_0 = \frac{2L}{V} = 50$ s   Temps mis si la vitesse du courant v est nulle.

Si v = 0 $T_{ABA} = T_{ACA}$

Si v = V/2 $T_{ACA} = 66{,}66$ s   et $T_{ABA} = 57{,}73$ s

Si $v \rightarrow V$ $T_{ACA} \rightarrow$ Infini   et $T_{ABA} \rightarrow$ Infini.

Exercice 4

Partie A

1°) Cas général :

$S_1 = a_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$ et $S_2 = a_2 \cos(\omega t - \varphi_2)$.

En notation complexe on peut écrire :

$$S_1 = a_1 e^{j(\omega t - \varphi_1)} \qquad S_2 = a_2 e^{j(\omega t - \varphi_2)}$$

$$S_1 + S_2 = e^{j\omega t}\left[a_1 e^{-j\varphi_1} + a_2 e^{-j\varphi_2}\right]$$

$$\text{Intensité : } \quad I = (S_1 + S_2)(S_1 + S_2)^*$$

$$I = e^{j\omega t}\left[a_1 e^{-j\varphi_1} + a_2 e^{-j\varphi_2}\right] e^{-j\omega t}\left[a_1 e^{j\varphi_1} + a_2 e^{j\varphi_2}\right]$$

$$I = a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2\left[e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-j(\varphi_1 - \varphi_2)}\right]$$

$$I = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi \quad \text{où} \quad I_1 = a_1^2 \quad I_2 = a_2^2 \quad \varphi = (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\varphi = 2k\pi : \ I_{max} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2$$

$$\varphi = (2k+1)\pi : \ I_{min} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2$$

Contraste C :
$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Cas particulier : Soit une source lumineuse monochromatique qui émet une vibration $S = a \cos \omega t$ vers la séparatrice 50 - 50 d'un interféromètre de Michelson.

$$S_1 = \frac{a}{2} e^{j(\omega t - \varphi_1)} \qquad S_2 = \frac{a}{2} e^{j(\omega t - \varphi_2)}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{a}{2}\left(e^{-j\varphi_1} + e^{-j\varphi_2}\right) \quad \text{et} \quad S^* = \frac{a}{2}\left(e^{+j\varphi_1} + e^{+j\varphi_2}\right)$$

$$I = S.S^* = \frac{a^2}{2}[1 + \cos\varphi] \quad \text{avec} \quad \varphi = (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\varphi = 2k\pi : \ I = I_{max} = a^2 \quad \text{et} \quad \varphi = (2k+1)\pi : \ I = I_{min} = 0$$

Contraste : C = 1

2°) Comme $e = IO_1 - IO_2$, la différence de marche entre les deux vibrations est égale à $\delta = 2e$. A cette différence de marche on associe une différence de phase $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{4\pi e}{\lambda}$. Comme les amplitudes des deux vibrations sont égales, on a :

$$I = \frac{a^2}{2}[1 + \cos\varphi] = a^2\cos^2\frac{\varphi}{2} = I_{max}\cos^2\frac{2\pi e}{\lambda}$$

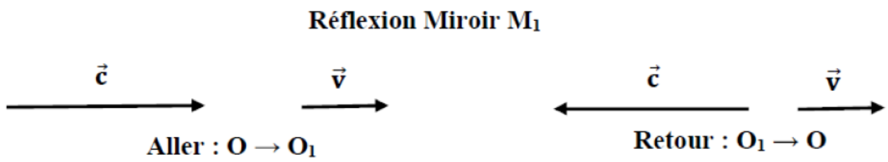
Comme les longueurs des deux bras sont égales, on a $e = 0$ soit une intensité maximale au centre de l'écran $I = I_{max}$.

Partie B

1°) On calcule la différence de temps de parcours en appliquant la loi d'additivité des vitesses de Galilée où $\vec{v}$ est la vitesse du vent d'éther et $\vec{c}$ la vitesse de la lumière (voir figure en haut à gauche pour les notations).

$$\overrightarrow{V_{\text{Lumière/Terre}}} = \overrightarrow{V_{\text{Lumière/Ether}}} + \overrightarrow{V_{\text{Ether/Terre}}} \qquad \vec{V} = \vec{c} + \vec{v}$$

Réflexion sur le miroir M_1 et parallèle à $\vec{v}$:



$$T_{M1} = T_{OO_1} + T_{O_1O} = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2L}{c}\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Réflexion sur le miroir M_2 et perpendiculaire à $\vec{v}$:

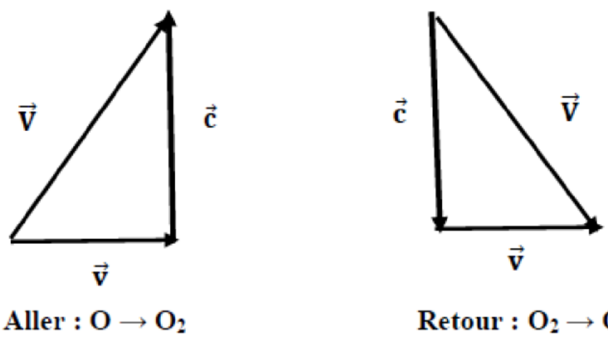
$$T_{M2} = T_{OO_2} + T_{O_2O} = \frac{L}{V} + \frac{L}{V} \quad \text{où } V = \sqrt{c^2 - v^2}$$

$$T_{M2} = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Le décalage temporel entre les deux rayons est :

$$\Delta T = T_{M1} - T_{M2} = \frac{2L}{c}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right]$$

Réflexion Miroir M_2



2°) Comme la vitesse de la Terre est très inférieure à la célérité de la lumière (v = 30 km/s << c = 300000 km/s), on obtient :

$$\Delta T = \frac{2L}{c}\left[\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right] \cong \frac{L}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

La valeur du décalage temporel est égale à :

$$\Delta T \cong \frac{L}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 3{,}66.10^{-16}\ \mathrm{s}$$

Le décalage temporel entre les deux rayons lumineux est trop faible pour être mesuré directement.

Par contre on peut mettre en évidence un phénomène d'interférence puisque les deux rayons lumineux qui vont se superposer dans le dispositif interférentiel de Michelson ont des temps de parcours différents.

A la différence ΔT on associe une différence de marche $\delta = c\,\Delta T$ et une différence de phase φ entre les deux rayons lumineux soit :

$$\delta = L\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1100\ \text{Å} \quad \text{et} \quad \varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = 2\pi\frac{L}{\lambda}\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

A.N : L = 11 m, λ = 5890 Å et v = 30 km/s.

L'ordre d'interférence au centre de l'écran est :

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{L}{\lambda}\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 0{,}18$$

A la sortie de l'interféromètre on devrait observer une différence de phase égale à :

$$\varphi = 2\pi\frac{L}{\lambda}\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 0{,}186.2\pi = 1{,}17\ \mathrm{rad}$$

mais le résultat de l'expérience a donné une absence de déphasage à mieux qu'un centième d'interfrange.

3°) Pour un déphasage à mieux qu'un centième d'interfrange $\Delta\varphi = 0{,}01.2\pi$, la vitesse de la Terre devra être égale à :

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{\Delta\varphi.\lambda}{2\pi.L}} = \sqrt{\frac{0{,}01.5890}{11.10^{10}}} = 2{,}313.10^{-5}$$

$$v = 6{,}9\ \mathrm{km/s}$$

Cette vitesse est très faible par rapport à celle observée expérimentalement qui est de 30 km/s.

4°) La lumière a une vitesse constante quel que soit le référentiel.

Exercice 5

Le miroir M tourne d'un angle θ = 0,01° quand la lumière fait un aller-retour entre le miroir plan R et le miroir sphérique soit pendant un intervalle de temps Δt :

$$\theta\ (\mathrm{radian}) = \omega.\Delta t = \omega.\frac{2d}{c}$$

La vitesse de la lumière est :

$$c = \omega.\frac{2d}{\theta} = 2\pi.400\frac{20.180}{0{,}01.\pi} = 288000000\ \mathrm{m/s}$$

$$c = 288000000\ \mathrm{m/s} = 288000\ \mathrm{km/s}$$

Exercice 6

1°) L'indice de réfraction de l'eau immobile est donné par le rapport des vitesses de la lumière dans le vide et dans l'eau soit c et v :

$$n = \frac{c}{v} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{n} \quad \Rightarrow \quad v = 2{,}25.10^{8}\ \mathrm{m/s}$$

2°) On utilise la loi de composition des vitesses de la mécanique classique, La vitesse $\vec{V}$ de la lumière dans l'eau en mouvement est égale à la somme de la vitesse $\vec{v}$ de la lumière dans l'eau immobile et de la vitesse d'écoulement de l'eau $\vec{u}$ soit :

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{u}$$

Le rayon lumineux qui pénètre dans la partie supérieure du tube a une vitesse v opposée à celle de l'eau au cours de son trajet.

Le rayon lumineux qui pénètre dans la partie inférieure du tube a une vitesse v dans la direction de l'écoulement de l'eau au cours de son trajet.

Branche supérieure du tube : $V_- = v - u$

Branche inférieure du tube : $V_+ = v + u$

3°) Les durées de parcours Δt dans les deux cas sont égales à :

$$V_- = v - u \qquad \Delta t_- = \frac{L}{v-u} = 13333333{,}748.10^{-15}\ \mathrm{s}$$

$$V_+ = v + u \qquad \Delta t_+ = \frac{L}{v+u} = 13333332{,}918.\,10^{-15}\ \text{s}$$

La différence de temps de parcours est égale à :

$$\Delta t = \Delta t_- - \Delta t_+ = \frac{L}{v-u} - \frac{L}{v+u} = \frac{2\,L\,u}{v^2-u^2} = 0{,}830.\,10^{-15}\ \text{s}$$

Comme v >> u, on peut également écrire la relation suivante :

$$\Delta t_{Cla} = \frac{2Lu}{v^2}\frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{v^2}\right)} \cong \frac{2Lu}{v^2} = 2\frac{L\,u\,n^2}{c^2} = 0{,}8296.\,10^{-15}\ \text{s}$$

La différence de marche au point O est égale à :

$$\delta_{Cla} = c\,\Delta t_{Cla} = 2\frac{L\,u\,n^2}{c} = 2{,}488.\,10^{-7}\ \text{m} = 0{,}2488\ \mu\text{m}$$

La nouvelle valeur de l'ordre d'interférence au point O est égale à :

$$p_{Cla} = \frac{\delta_{Cla}}{\lambda} = \frac{c\,\Delta t_{Cla}}{\lambda} = 2\frac{L\,n^2\,u}{\lambda\,c} = 0{,}46$$

4°) L'application de la composition des vitesses en mécanique relativiste donne :

$$V_- = \frac{v-u}{1-\frac{vu}{c^2}} \qquad \Delta t_- = \frac{L}{V_-} = \frac{L}{v-u}\left(1-\frac{v\,u}{c^2}\right)$$

$$V_+ = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}} \qquad \Delta t_+ = \frac{L}{V_+} = \frac{L}{v+u}\left(1+\frac{v\,u}{c^2}\right)$$

$$\Delta t_- = 13333333{,}5148\,.\,10^{-15}\text{s}$$

$$\Delta t_+ = 13333333{,}1512.\,10^{-15}\ \text{s}$$

$$\Delta t_{Rel} = \Delta t_- - \Delta t_+ = \frac{L}{v-u}\left(1-\frac{v\,u}{c^2}\right) - \frac{L}{v+u}\left(1+\frac{v\,u}{c^2}\right)$$

$$\Delta t_{Rel} = \frac{L}{v-u} - \frac{L}{v+u} - \frac{v\,u}{c^2}\left(\frac{L}{v-u}+\frac{L}{v+u}\right)$$

$$\Delta t_{Rel} = \frac{L}{v-u} - \frac{L}{v+u} - \frac{v^2}{c^2}\left(\frac{2\,u\,L}{v^2-u^2}\right)$$

$$\Delta t_{Rel} = \frac{L}{v-u} - \frac{L}{v+u} - \frac{v^2}{c^2}\left(\frac{2\,u\,L}{v^2-u^2}\right) = \frac{2\,u\,L}{v^2-u^2} - \frac{v^2}{c^2}\left(\frac{2\,u\,L}{v^2-u^2}\right)$$

$$\Delta t_{Rel} = \frac{2\,u\,L}{v^2-u^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{2\,u\,L}{v^2-u^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

La différence de marche au point O est égale à :

$$\delta_{Rel} = c\,\Delta t_{Rel} = 0{,}1092\ \ \mu\text{m}$$

La nouvelle valeur de l'ordre d'interférence au point O est égale à :

$$p_{Rel} = \frac{\delta_{Rel}}{\lambda} = \frac{c\,\Delta t_{Rel}}{\lambda} = \frac{2\,u\,L\,c}{\lambda(v^2 - u^2)}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \cong \frac{2Ln^2u}{\lambda\,c}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$p_{Rel} = p_{Cla}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 0{,}2$$

Fizeau obtient expérimentalement ce résultat qui est différent de celui obtenu par la mécanique classique soit p_{Cla} =0,46. A l'époque Fizeau ne disposait que de la théorie de l'éther comme milieu matériel nécessaire à la propagation de la lumière. Ce ne fut plus tard que le résultat fut expliqué par la relativité restreinte où la loi de composition des vitesses est différente de celle de Galilée.

Exercice 7

Soit $\Delta t = \frac{2\,BC}{c}$ le temps que met la lumière pour faire un aller - retour soit 2BC = distance miroir tournant - miroir fixe - miroir tournant.

Comme le miroir tourne d'angle θ pendant Δt, on a la relation suivante :

$$\theta = \omega\,\Delta t = \omega\frac{2\,BC}{c} = 2\pi N\frac{2\,BC}{c} = 2\pi.540\,\frac{2.40}{3.10^8} = 0{,}00090\text{ rad}$$

$$\tan 2\theta = \frac{AD}{AB} = 0{,}0018$$

$$\text{Distance des images} = AD = 7{,}2.10^{-3}\text{ m} = 7{,}2\text{ mm}$$

L'intérêt de remplacer le miroir plan C par cinq miroirs concaves est d'augmenter le trajet que fait la lumière et de renvoyer la lumière en direction du miroir tournant. Le trajet de la lumière est cinq fois plus important soit 400 mètres au lieu de 80 mètres. La distance des images est égale à 5.7,2 mm = 36 mm = 3,6 cm.

Exercice 8

1°) Si la lumière se propage instantanément les événements sont observés à intervalles réguliers, qui ne dépendent que du mouvement de Io. Cet intervalle est simplement la période de révolution de Io autour de Jupiter soit :

T = 48h 28mn

2°) Si la lumière se propage avec une vitesse finie c, le premier événement est observé avec un décalage $t_0 = \frac{DL}{c}$, le second avec $t_1 = \frac{DK}{c}$. L'intervalle entre les deux observations est donc T'= T + ($t_1 - t_0$). Attention les points D, L et K ne sont pas alignés comme sur la figure mais on peut considérer que $c(t_1 - t_0) \cong LK$ car la Terre n'a pas beaucoup bougé.

3°) On appelle $D_{S\text{-}J}$ la distance Soleil-Jupiter mesurée en unités astronomiques. La distance Terre-Jupiter à l'opposition est $D_{T\text{-}J} = (D_{S\text{-}J} - D_{S\text{-}T}) = (5{,}2 - 1) = 4{,}2$ ua.

4°) Lors de la conjonction (lorsque les deux planètes sont éloignées au maximum) l'observation est impossible car le Soleil s'interpose devant Jupiter. La seconde observation s'effectue donc soit avant soit après la conjonction, lorsque l'écart angulaire entre Jupiter et le Soleil est suffisamment grand pour observer de nouveau les satellites soit un angle de l'ordre de 20°.

5°) On donne la période sidérale de Jupiter soit 4335,35 jours, bien connue à l'époque. En 261 jours, la Terre s'est déplacée d'un angle :

$$\alpha_T = \frac{261}{365{,}25} . 360° = 257{,}24°$$

Quant à la planète Jupiter, elle s'est déplacée de :

$$\alpha_J = \frac{261}{4335{,}35} \, 360° = 21{,}67°$$

L'angle Jupiter-Soleil-Terre est donc à ce moment : $\alpha = 235{,}57°$

6°) On considère le triangle JST. Appliquons la loi des cosinus soit :

$$D_{T-J}^2 = D_{S-J}^2 + D_{S-T}^2 - 2D_{S-J}D_{S-T}\cos(2\pi - \alpha)$$

$$D_{T-J} = 5{,}82 \text{ u.a}$$

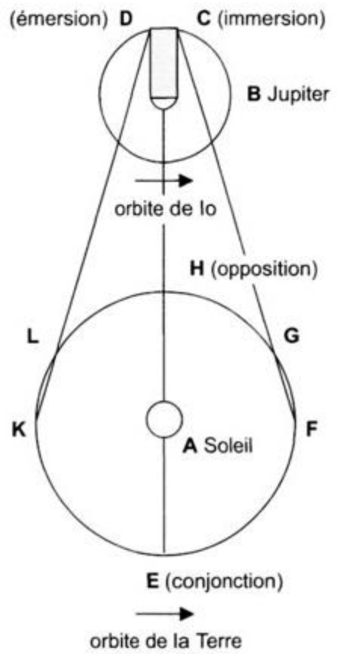
7°) La différence de trajet entre la première position (Terre – Jupiter) = 4,2 u.a et la deuxième position (Terre – Jupiter) = 5,82 u.a est égale à :

$$\left(D_{T-J}\right)_{\text{Position2}} - \left(D_{T-J}\right)_{\text{Position1}} = 1{,}62 \text{ u.a}$$

On peut estimer la vitesse de la lumière égale à :

$$c = \frac{1{,}62.150.10^6}{14.60} = 289285 \text{ km/s}$$

L'unité astronomique (distance Terre-Soleil) et la distance Jupiter-Soleil étaient les plus gros facteurs d'incertitude à l'époque. Römer semble avoir trouvé une valeur de 231000 km/s (soit une erreur de 30% mais un ordre de grandeur correct), et pensait surtout avoir démontré que la lumière se propage à vitesse finie.



Cette étude peut être considérée comme le premier exemple historique d'effet Doppler, c'est-à-dire la variation de période apparente d'un phénomène régulier avec le déplacement de l'observateur.

Exercice 09

1°) Le nombre de révolutions N effectuées en 200 jours par le satellite Io quand il passe de la position « opposition » à la position « conjonction » est égal à :

$$N = \frac{200}{1{,}7697} = 113{,}0135 \text{ révolutions}$$

Le temps qui s'écoule entre les positions « opposition et conjonction » des trois planètes Soleil-Terre-Jupiter est de 113 révolutions et 0,0135 révolution. Comme une révolution dure 42 h 28 mn 24s qui est équivalente à 152904 secondes, on trouve que 0,0135 révolution dure 2065 s soit 34'25''.

La disparition de Io a eu lieu à :

(23h 31mn 30s – 2065 s) = 22h 57mn 5 s

Römer s'attend à observer une nouvelle disparition d'Io à 22h 57mn 5s

2°) Le décalage entre l'heure prévue et l'heure réelle de la disparition d'Io est :

23h 56mn 45s - 22h 57mn 5s = 59mn 40s = 3580 s.

Le décalage est dû au fait que la lumière doit parcourir la distance Jupiter – Terre en position de conjonction soit une distance supplémentaire de 930 millions de km. (On a négligé la distance Io – Jupiter). La vitesse de la lumière est égale à :

$$c = \frac{930.10^6}{3580} = 259776 \text{ km/s}$$

Exercice 10

1°) On dit que la Terre et Jupiter sont en « opposition » lorsque les deux astres sont à 180° l'un de l'autre vus de la Terre. La Terre et Jupiter sont en « quadrature » lorsque les deux astres sont à 90° l'un de l'autre vus de la Terre (l'angle JTS est droit). La Terre et Jupiter sont en « conjonction » lorsque les deux astres sont dans la même direction vus de la Terre.

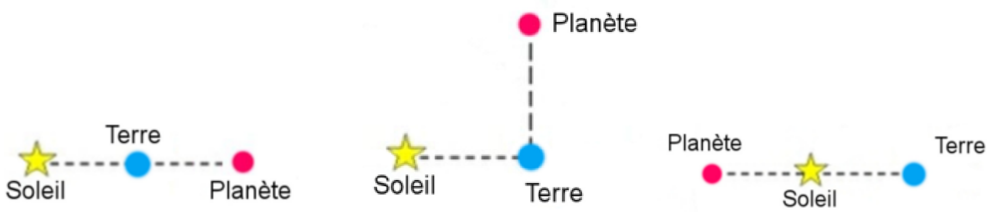
En « opposition », la distance Terre – Jupiter est : $D_{T\text{-}J} = D_{S\text{-}J} - D_{S\text{-}T}$

$$D_{T\text{-}J} = 780 - 150 = 630.10^6 \text{ km} = 4{,}2 \text{ u.a}$$

En « quadrature », la distance Terre – Jupiter est :

$$D_{T-J} = \sqrt{D_{SJ}^2 - D_{ST}^2} = \sqrt{780^2 - 150^2} = 765{,}44.10^6 \text{ km}$$

$$D_{T-J} = 5{,}10 \text{ u.a}$$



Opposition **Quadrature** **Conjonction**

En « conjonction », la distance Terre – Jupiter est : $D_{T\text{-}J} = D_{S\text{-}J} + D_{S\text{-}T}$

$$D_{T\text{-}J} = 780 + 150 = 930.10^6 \text{ km} = 6{,}2 \text{ u.a}$$

2°) Quand la Terre et de Jupiter sont en « conjonction », il est impossible de voir les éclipses de Io car on est gêné par le Soleil. Le Soleil nous empêche de voir Jupiter. Les éclipses de Io ne seront pas visibles en moyenne 30 jours avant et après la conjonction.

3°) De combien de degré la Terre a tourné en un mois ?

La Terre tourne de 360° en une année soit 365,25 jours. En 30 jours, elle aura tourné d'un angle β égal à :

$$\frac{\beta}{30} = \frac{360}{365{,}25} \qquad \Rightarrow \qquad \beta = 30\frac{360}{365{,}25} = 29{,}56° = 0{,}516 \text{ rad}$$

Calculons la distance Terre – Jupiter soit :

$$LJ^2 = SL^2 + SJ^2 - 2.SL.SJ.\cos\gamma = SL^2 + SJ^2 - 2.SL.SJ.\cos(\pi - \beta)$$

$$LJ^2 = 1^2 + 5{,}2^2 - 2.1.5{,}2.\cos(\pi - 0{,}516) = 28{,}04 + 9{,}04 = 37{,}08$$

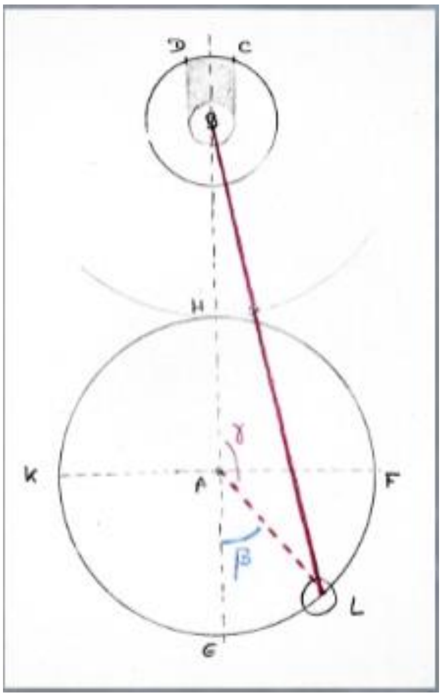
$$LJ = 6{,}09 \text{ u.a}$$

Examinons le cas où la Terre s'éloigne de Jupiter suivant le trajet HKG.

Supposons que la fin d'une éclipse de Io a lieu quand la Terre est au point H (soit en opposition) et à l'instant t pour un observateur lié au référentiel de Jupiter. Un observateur terrestre au point H situé à une distance d_H = JH de Jupiter verra la fin de l'éclipse à l'instant t_H soit :

$$t_H = t + \frac{d_H}{v} \qquad (1)$$

où $\frac{d_H}{v}$ représente le temps que met la lumière pour atteindre le point H.



Examinons maintenant le cas d'une fin d'éclipse quand la Terre est au point L. Pour un observateur lié au référentiel de Jupiter, la fin de l'éclipse a lieu à l'instant t'= t + n*T_{Io} où n représente 119 révolutions effectuées par Io. Un observateur terrestre au point L situé à une distance d_L = JL de Jupiter verra la fin de l'éclipse à l'instant t soit :

$$t_L = t' + \frac{d_L}{v} \quad (2)$$

En combinant les relations (1) et (2), on obtient :

$$t_L - t_H = \left(t' + \frac{d_L}{v}\right) - \left(t + \frac{d_H}{v}\right) = n * T_{Io} + \frac{d_L - d_H}{v}$$

$$t_L - t_H = n * T_{Io} + \frac{JL - JH}{c} = n * T_{Io} + \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{JL - JH}{v} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{JL - JH}{\Delta t}$$

Si la vitesse de la lumière était infinie, on aurait $t_L - t_H = n * T_{Io}$ c'est-à-dire que le temps qui s'écoule entre les deux observations est égal au nombre de révolutions de Io.
Comme la vitesse de la lumière est finie, on voit que Δt représente le retard constaté par l'observateur en L dans l'observation de la fin de l'éclipse. La détermination de la vitesse de la lumière nécessite la connaissance des distances Terre – Jupiter aux points H (distance minimale) et L soit :

$$v = \frac{JL - JH}{\Delta t} = \frac{(6{,}09 - 4{,}20).150.10^6}{16.60} = 296312 \text{ km/s}$$

2 Naissance de la relativité restreinte

Exercice 1

1er Cas : Pour l'observateur A la trajectoire de la pierre est verticale (Chute libre) :

$$z = \frac{1}{2}gt^2 \text{ et } x = 0$$

$$H = \frac{1}{2}gT^2 \qquad T = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2.20}{10}} = 2 \text{ s} \quad \text{et} \quad V = g\,T = 20 \text{ m/s}$$

Durée de la chute : T = 2 s et V = Vitesse absolue de la pierre = 20 m/s.

Pour l'observateur B lié au bateau, la pierre s'éloigne du bateau avec une vitesse U = - 10 m/s.

Ecrivons les équations [X(t), Z(t)] du mouvement de la pierre dans le repère du bateau :

$$X = -U\,t \quad \text{et} \quad Z = H - \frac{1}{2}gt^2$$

$$Z = H - \frac{1}{2}g\left(\frac{X}{-U}\right)^2 = 20 - \frac{10}{2.100}X^2 = 20 - 0{,}05\,X^2$$

La trajectoire est une parabole soit :

$$Z = -0{,}05\, X^2 + 20$$

La pierre touche l'eau du fleuve quand Z = 0 soit à l'instant :

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 2\ s$$

Elle touche l'eau du fleuve au point X obtenu pour Z = 0 soit :

$$X = \sqrt{\frac{20}{0{,}05}} = -20\ m$$

Pour l'observateur A sur le pont la pierre tombe au point x = 0 et pour l'observateur B sur le bateau la pierre tombe au point X = - 20 m.

Elle touche l'eau du fleuve avec une vitesse relative v obtenue à partir de la loi de composition des vitesses soit $\vec{v} = \vec{V} - \vec{U}$.

Le module de la vitesse v est égal à : $v = \sqrt{V^2 + U^2} = 22{,}36\ m/s$

La vitesse v fait un angle α avec la surface de l'eau :

$$\tan\alpha = \frac{v}{U} = \frac{22{,}36}{10} = 2{,}23 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 65{,}8°$$

2ème Cas : Pour l'observateur B lié au bateau la trajectoire de la pierre est verticale (Chute libre).

$$Z = \frac{1}{2}gt^2 \ \text{ et } \ X = 0$$

$$h = \frac{1}{2}gT^2 \qquad T = \sqrt{\frac{2\,h}{g}} = \sqrt{\frac{2\,.20}{10}} = 2\ s \ \text{ et } \quad V = g\,T = 20\ m/s$$

Au bout de 2 secondes de chute, la pierre touchera le plancher du bateau avec une vitesse verticale v = 20 m/s.

Ecrivons les équations [x(t), z(t)] du mouvement de la pierre dans le repère fixe de l'observateur A :

$$x = U\,t \quad \text{ et } \ z = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$z = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{U}\right)^2 = 20 - \frac{10}{2.100}\ x^2 = 20 - 0{,}05\ x^2$$

La trajectoire est une parabole soit :

$$z = 20 - 0{,}05\ x^2$$

La pierre touche le plancher du bateau quand z = 0 soit à l'instant :

$$T = \sqrt{\frac{2\,h}{g}} = 2\ s$$

Elle touche le plancher du bateau avec une vitesse absolue V obtenue à partir de la loi de composition des vitesses soit $\vec{V} = \vec{v} + \vec{U}$ dont le module est égal à :

$$V = \sqrt{v^2 + U^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} = \quad 22{,}36 \text{ m/s}$$

La vitesse V fait un angle α avec la surface du plancher :

$$\tan\alpha = \frac{v}{U} = \frac{22{,}36}{10} = 2{,}23 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 65{,}8°$$

Exercice 2

$m_A = 3$ kg $m_B = 6$ kg $V_A = +2$ m/s $V_B = -10$ m/s

Après la collision, le corps A a une vitesse $V'_A = -14 \text{ m/s}$.

Ecrivons : $P_i = P_f$

$$P_i = m_A V_A + m_B V_B = 3 * 2 + 6 * -10 = -54 \text{ kg.m.s}^{-1}$$

$$P_f = m_A V'_A + m_B V'_B = 3 * -14 + 6 * V'_B = -54 \text{ kg.m.s}^{-1}$$

Après la collision, le corps B a une vitesse : $V'_B = -2 \text{ m/s}$

Repère fixe : $V_A = +2$ m/s $V_B = -10$ m/s

$$V'_A = -14 \text{ m/s} \qquad V'_B = -2 \text{ m/s}$$

Energie cinétique initiale :

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2 = \frac{1}{2} * 3 * 4 + \frac{1}{2} * 6 * 100 = 306 \text{ J}$$

Energie cinétique finale :

$$E_{cf} = \frac{1}{2} m_A V_A'^2 + \frac{1}{2} m_B V_B'^2 = \frac{1}{2} * 3 * 196 + \frac{1}{2} 6 * 4 = 306 \text{ J}$$

$$E_{ci} = 306 \text{ J} \quad \text{et} \quad E_{cf} = 306 \text{ J}$$

$$E_{ci} = E_{cf} \qquad \text{Collision élastique}$$

Dans une collision élastique, il y a conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique.

2°) Repère mobile :

$V_A = +2$ m/s $V_B = -10$ m/s $V'_A = -14$ m/s $V'_B = -2$m/s

$V = v + U$ $U = 8$ m/s

$$v_A = V_A - U = -6 \text{ m/s} \qquad \text{et} \quad v_B = V_B - U = -18 \text{ m/s}$$

$$v'_A = V'_A - U = -22 \text{ m/s} \quad v'_B = V'_B - U = -10 \text{ m/s}$$

Quantité de mouvement avant collision :

$$P'_i = m_A v_A + m_B v_B = 3 * -6 + 6 * -18 = -126 \ \text{kg.m/s}$$

Quantité de mouvement après collision :

$$P'_f = m_A v'_A + m_B v'_B = 3 * -22 + 6 * -10 = -126 \ \text{kg.m/s}$$

$$P'_i = P'_f$$

Oui : Il y a conservation de la quantité de mouvement lors de la collision dans le repère mobile.

3°) $m_A = 3$ kg $V_A = +8$ m/s $m_B = 6$ kg $V_B = -6$ m/s

$$V'_A = 4 \ \text{m/s} \qquad V'_B = +6 \ \text{m/s}$$

$$v_A = -6 \ \text{m/s} \quad \text{et} \quad v_B = -18 \ \text{m/s}$$

$$v'_A = -22 \ \text{m/s} \quad \text{et} \quad v'_B = -10 \ \text{m/s}$$

Energie cinétique initiale :

$$E'_{ci} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2}(3 * 36 + 6 * 324) = 2052 \ \text{J}$$

Energie cinétique finale :

$$E'_{cf} = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2 = \frac{1}{2}(3 * 484 + 6 * 100) = 2052 \ \text{J}$$

Variation d'énergie cinétique : $\Delta E' = 0$

Oui : Il y a conservation de la variation de l'énergie cinétique lors de la collision dans le repère mobile.

En conclusion on peut dire que la quantité de mouvement et que l'énergie cinétique des deux corps sont conservées dans une transformation galiléenne lors d'une collision élastique à une dimension entre deux corps A et B.

Exercice 3

1°) La charge q est soumise à une force électrique :

$$\overrightarrow{F_{Ele}} = q\vec{E}$$

Comme la charge q est animée d'une vitesse uniforme $\vec{V}$, elle est soumise à une force magnétique :

$$\overrightarrow{F_{Mag}} = q\,\vec{V} \times \vec{B}.$$

Au total la charge q est soumise à la force :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}).$$

2°) Pour l'observateur mobile la vitesse $\vec{v'}$ de la charge q est donnée par la loi de composition des vitesses de Galilée soit :

$$\vec{v'} = \vec{V} - \vec{U}.$$

La force électrique reste inchangée soit :

$$\overrightarrow{F'_{Ele}} = q\vec{E}.$$

La force magnétique est égale à :

$$\overrightarrow{F'_{Mag}} = q\ \vec{v'} \times \vec{B} = q\left[\left(\vec{V} - \vec{U}\right) \times \vec{B}\right] = q\,\vec{V} \times \vec{B} - q\,\vec{U} \times \vec{B}.$$

Au total la charge q est soumise à la force :

$$\vec{F'} = \ q\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \vec{U} \times \vec{B}\right).$$

En comparant les forces observées par les deux observateurs on obtient :

$$\vec{F'} = \vec{F} - q\,\vec{U} \times \vec{B}$$

On remarque que les deux observateurs (fixe et mobile) ne mesurent pas la même force appliquée à la charge électrique q. On constate que les forces d'origine électromagnétique ne sont pas invariantes lors d'un changement de repère galiléen.
Ce résultat est en contradiction avec le fait que la force est invariante en mécanique newtonienne.

Exercice 4

1°) A) <u>Vitesse du train 20 m/s :</u>

<u>Observateur sur le quai</u>

Evénement 1 : $x_1 = +500$ m $y_1 = 0$ $z_1 = +300$ m $t_1 = 10$ s

Evénement 2 : $x_2 = +700$ m $y_2 = 0$ $z_2 = +450$ m $t_2 = 15$ s

<u>Passager du train</u>

Le train s'est déplacé de 200 m en 10 s puis de 300 m en 15 s. Les coordonnées spatio-temporelles des événements 1 et 2 sont :

Evénement 1 : $x'_1 = +300$ m $y'_1 = 0$ $z'_1 = +300$ m $t'_1 = 10$ s

Evénement 2 : $x'_2 = +400$ m $y'_2 = 0$ $z'_2 = +450$ m $t'_2 = 15$ s

On remarquera que les coordonnées spatio-temporelles d'un événement dépendent du repère.

2°) **<u>Observateur sur le quai</u>**

On calcule le déplacement horizontal Δx et le déplacement vertical Δz de l'avion pendant l'intervalle de temps Δt soit :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 200\text{ m} \quad \Delta y = y_2 - y_1 = 0$$

$$\Delta z = z_2 - z_1 = 150\text{ m} \quad \Delta t = t_2 - t_1 = 5\text{ s}$$

Les composantes absolues V_x et V_z de la vitesse absolue $\vec{V}$ de l'avion sont :

$$V_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 40\ \text{ m/s} \qquad V_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} = 30\text{ m/s}$$

Le module de la vitesse absolue de l'avion est égal à :

$$V_{Quai}^{Avion} = \sqrt{V_x^2 + V_z^2} = 50\ m/s$$

$$\tan\theta = \frac{V_z}{V_x} = \frac{30}{40} = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad \theta = 36{,}9°$$

<u>Passager dans le train</u>

Les composantes relatives V'_x et V'_z de la vitesse relative $\overrightarrow{V'}$ de l'avion par rapport au passager du train sont :

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 400 - 300 = 100\ \text{m} \qquad \Delta z' = \Delta z = 150\ \text{m} \qquad \Delta t' = \Delta t = 5\ \text{s}$$

$$V'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{100}{5} = 20\ \ m/s \qquad V'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{150}{5} = 30\ m/s$$

Le module de la vitesse relative de l'avion est égal à :

$$V' = \sqrt{V_x'^2 + V_z'^2} = 36\ \ m/s$$

$$\tan\theta' = \frac{V'_z}{V'_x} = \frac{30}{20} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \theta' = 56{,}31°$$

On constate que la composante verticale de la vitesse de l'avion reste inchangée. Par contre la composante horizontale obéit à la loi de composition des vitesses de Galilée.

B) <u>Vitesse du train 40 m/s :</u> Il faut réécrire les coordonnées des deux événements

<u>Observateur sur le quai</u>

Evénement 1 : $x_1 = +500$ m $y_1 = 0$ $z_1 = +300$ m $t_1 = 10$ s
Evénement 2 : $x_2 = +700$ m $y_2 = 0$ $z_2 = +450$ m $t_2 = 15$ s

Le module de la vitesse absolue de l'avion est égal à :

$$V_{Quai}^{Avion} = 50\ \ m/s \quad \text{et} \quad \theta = 36{,}9°$$

Il n'y a aucun changement pour l'observateur sur le quai. Ses observations sont indépendantes de la vitesse du train.

<u>Passager du train</u>

Evénement 1 : $x'_1 = +100$ m $y'_1 = 0$ $z'_1 = +300$ m $t'_1 = 10$ s
Evénement 2 : $x'_2 = +100$ m $y'_2 = 0$ $z'_2 = +450$ m $t'_2 = 15$ s

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 0\ \text{m} \qquad \Delta y' = y'_2 - y'_1 = 0$$

$$\Delta z' = z'_2 - z'_1 = 150\ \text{m} \qquad \Delta t' = t'_2 - t'_1 = 5\ \text{s}$$

Comme $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 0$ m dans le repère du train, on peut dire que la composante horizontale V'_x de la vitesse de l'avion est nulle. La vitesse V' de l'avion se réduit à sa composante verticale V'_z soit :

$$V' = V'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{150}{5} = +30 \text{ m/s}$$

Dans ce cas on a un angle θ' égal à :

$$\tan\theta' = \frac{V'_z}{V'_x} = \infty \quad \Rightarrow \quad \theta' = 90°$$

En appliquant la loi de composition des vitesses de Galilée, on comprend pourquoi la composante horizontale V'_x de la vitesse de l'avion est nulle pour le passager du train car la composante horizontale V'_x de l'avion est égale à la vitesse du train.

C) <u>Vitesse du train 50 m/s :</u> Il faut réécrire les coordonnées des deux événements

<u>Observateur sur le quai</u>

Evénement 1 : $x_1 = +500$ m $y_1 = 0$ $z_1 = +300$ m $t_1 = 10$ s
Evénement 2 : $x_2 = +700$ m $y_2 = 0$ $z_2 = +450$ m $t_2 = 15$ s

Le module de la vitesse absolue de l'avion est égal à :

$$V_{Quai}^{Avion} = 50 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad \theta = 36{,}9°$$

Il n'y a aucun changement pour l'observateur sur le quai. Ses observations sont indépendantes de la vitesse du train.

<u>Passager du train</u>

Evénement 1 : $x'_1 = 0$ m $y'_1 = 0$ $z'_1 = +300$ m $t'_1 = 10$ s
Evénement 2 : $x'_2 = -50$ m $y'_2 = 0$ $z'_2 = +450$ m $t'_2 = 15$ s

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = -50 \text{ m} \qquad \Delta y' = y'_2 - y'_1 = 0$$

$$\Delta z' = z'_2 - z'_1 = 150 \text{ m} \qquad \Delta t' = t'_2 - t'_1 = 5 \text{ s}$$

Les composantes relatives V'_x et V'_z de la vitesse relative $\overrightarrow{V'}$ de l'avion sont :

$$V'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{-50}{5} = -10 \text{ m/s} \qquad V'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{150}{5} = 30 \text{ m/s}$$

Le module de la vitesse relative de l'avion est égal à :

$$V' = \sqrt{V'^2_x + V'^2_z} = 31{,}62 \text{ m/s}$$

$$\tan\theta' = \frac{V'_z}{V'_x} = -\frac{30}{10} = -3 \quad \Rightarrow \quad \theta' = 161{,}56°$$

On constate que la composante verticale de la vitesse de l'avion reste inchangée. Par contre la composante horizontale obéit à la loi de composition des vitesses de Galilée.

L'avion s'éloigne du passager du train car sa vitesse horizontale est négative dans le repère du train.

Exercice 5

Travaillons dans le repère fixe R.

Soit E le champ électrique crée par la barre (1) en un point de la barre (2). Le théorème de Gauss donne :

$$2\,\pi\,a\,l\,E = \frac{\lambda\,l}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\,\pi\,a\,\varepsilon_0} \quad \text{avec} \quad \lambda > 0$$

où λl est la charge positive du fil (1) de longueur l.

Le champ électrique $\vec{E}$ est dirigé vers l'extérieur du fil (2). La force électrique $\overrightarrow{F_E}$ appliquée sur le fil (2) est répulsive. Elle est donnée par l'expression :

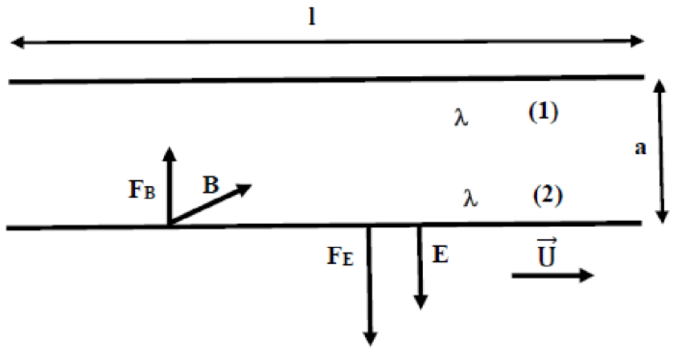
$$F_E = \lambda\,l\,E = \frac{\lambda^2\,l}{2\,\pi\,a\,\varepsilon_0}$$

Il n'y a pas de force magnétique car les charges électriques des fils (1) et (2) sont immobiles dans le repère R. On aura une seule force soit :

$$(F)_R = F_E = \frac{\lambda^2\,l}{2\,\pi\,a\,\varepsilon_0}$$

Travaillons dans le repère mobile R'.

Pour l'observateur du repère mobile R', les deux fils sont en mouvement et sont animés d'une vitesse uniforme $-\vec{U}$.



Les charges en mouvement du fil (1) correspondent à un courant d'intensité $I = \rho US = \lambda U$ car $\lambda = \rho\,S$ où λ est la densité volumique des charges et S la section du fil. Appliquons le théorème d'Ampère pour calculer le champ magnétique au niveau fil (2) soit :

$$2\,\pi\,a\,B = \mu_0\,I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,a} = \frac{\mu_0\;U}{2\,\pi\,a}$$

La direction du champ magnétique $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de la figure. La force magnétique F_B appliquée sur le fil (2) traversé par le courant I est donnée par la force de Laplace soit :

$$F_B = I\,B\,l = \frac{\lambda U\,\mu_0 \lambda U\;l}{2\,\pi\,a} = \frac{\mu_0\,\lambda^2\,U^2\,l}{2\,\pi\,a}$$

La force magnétique F_B est attractive. La force électrique F_E est inchangée.

La force totale appliquée sur le fil (2) est égale à :

$$(F)_{R'} = F_E - F_B = \frac{\lambda^2\, l}{2\,\pi\, a\, \varepsilon_0} - \frac{\mu_0\, \lambda^2\, U^2\, l}{2\,\pi\, a}$$

On constate que $(F)_R \neq (F)_{R'}$, ce qui est en contradiction avec l'invariance de la force en mécanique newtonienne. On a supposé que les équations de l'électromagnétisme sont valables dans les référentiels fixe R et mobile R' et on est arrivé à une contradiction avec le postulat de la relativité galiléenne.

Exercice 6

On rappelle que la transformation de Galilée est donnée par :

$$x' = a_1 x + a_2 t \qquad y' = y \quad z' = z \quad \text{et} \quad t' = a_3 x + a_4 t$$

La différentielle totale dE s'exprime de deux façons :

$$dE = \frac{\partial E}{\partial x} dx + \frac{\partial E}{\partial y} dy + \frac{\partial E}{\partial z} dz + \frac{\partial E}{\partial t} dt \quad (1)$$

$$dE = \frac{\partial E}{\partial x'} dx' + \frac{\partial E}{\partial y'} dy' + \frac{\partial E}{\partial z'} dz' + \frac{\partial E}{\partial t'} dt' \quad (2)$$

$$dx' = a_1 dx + a_2 dt \qquad dy' = dy \qquad dz' = dz \qquad dt' = a_3\, dx + a_4\, dt$$

En remplaçant dx', dy', dz'et dt' dans l'équation (2), on obtient :

$$dE = \frac{\partial E}{\partial x'}(a_1 dx + a_2 dt) + \frac{\partial E}{\partial y'} dy' + \frac{\partial E}{\partial z'} dz' + \frac{\partial E}{\partial t'}(a_3 dx + a_4 dt)$$

$$dE = \left(a_1 \frac{\partial E}{\partial x'} + a_3 \frac{\partial E}{\partial t'}\right) dx + \frac{\partial E}{\partial y'} dy + \frac{\partial E}{\partial z'} dz + \left(a_2 \frac{\partial E}{\partial x'} + a_4 \frac{\partial E}{\partial t'}\right) dt$$

En comparant cette expression à celle donnée par (1), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} = a_1 \frac{\partial}{\partial x'} + a_3 \frac{\partial}{\partial t'} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = a_2 \frac{\partial}{\partial x'} + a_4 \frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1 \frac{\partial E}{\partial x'} + a_3 \frac{\partial E}{\partial t'}\right) = \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x'} + a_3 \frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(a_1 \frac{\partial E}{\partial x'} + a_3 \frac{\partial E}{\partial t'}\right)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + 2 a_1 a_3 \frac{\partial^2 E}{\partial x' \partial t'} + a_3^2 \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}$$

Par analogie on obtient la même équation pour la variable t :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\left[a_2^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + 2 a_2 a_4 \frac{\partial^2 E}{\partial x' \partial t'} + a_4^2 \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}\right]$$

Ces deux relations sont valables à condition que les différents coefficients a_i soient constants (indépendants de x et t).

On obtient l'expression de l'équation d'onde dans le repère mobile :

$$a_1^2\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}+2a_1a_3\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'}+a_3^2\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}=\frac{1}{c^2}\left[a_2^2\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}+2a_2a_4\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'}+a_4^2\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}\right]$$

$$\left(a_1^2-\frac{a_2^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}+2\left(a_1a_3-\frac{a_2a_4}{c^2}\right)\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'}+\left(a_3^2-\frac{a_4^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}=0 \quad (3)$$

La transformation de Galilée correspond à :

$$a_1 = 1 \quad a_2 = -U \quad a_3 = 0 \quad \text{et} \quad a_4 = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'} \qquad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y'} \qquad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y'} \qquad \frac{\partial}{\partial t}=-U\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial t'}$$

où U représente la vitesse du repère mobile par rapport au repère fixe.

$$\left(1-\frac{U^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}+2\frac{U}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}=0$$

On indique ci-dessous l'équation d'onde dans les repères fixe et mobile soit :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0\\ \dfrac{\partial^2 E}{\partial x'^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t'^2}=\dfrac{U^2}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial x'^2}-2\dfrac{U}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'}\end{cases}$$

On constate que la forme de l'équation d'onde dans le repère mobile est différente de celle du repère fixe. L'équation d'onde n'est pas conservée par la transformation de Galilée.

Exercice 7

On appelle $\rho(x,t)$ et $\rho'(x',t')$ les masses volumiques respectives dans les repères fixe et mobile. On rappelle que la transformation de Galilée est donnée par :

$$x' = x - Ut \quad y' = y \quad z' = z \quad \text{et } t' = t$$

La différentielle totale de la masse volumique s'exprime de deux façons :

$$d\rho=\frac{\partial\rho}{\partial x}dx+\frac{\partial\rho}{\partial y}dy+\frac{\partial\rho}{\partial z}dz+\frac{\partial\rho}{\partial t}dt \quad (1)$$

$$d\rho'=\frac{\partial\rho'}{\partial x'}dx'+\frac{\partial\rho'}{\partial y'}dy'+\frac{\partial\rho'}{\partial z'}dz'+\frac{\partial\rho'}{\partial t'}dt' \quad (2)$$

$$dx' = dx - U dt \qquad dy' = dy \qquad dz' = dz \qquad dt' = dt$$

Portons les expressions de dx', dy', dz'et dt' dans l'équation (2), on obtient :

$$d\rho' = \frac{\partial\rho'}{\partial x'}(dx - U\,dt) + \frac{\partial\rho'}{\partial y'}dy + \frac{\partial\rho'}{\partial z'}dz + \frac{\partial\rho'}{\partial t'}dt$$

$$d\rho' = \left(\frac{\partial\rho'}{\partial x'}\right)dx + \frac{\partial\rho'}{\partial y'}dy + \frac{\partial\rho'}{\partial z'}dz + \left(-U\frac{\partial\rho'}{\partial x'} + \frac{\partial\rho'}{\partial t'}\right)dt$$

En comparant cette expression à celle donnée par (1), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - U\frac{\partial}{\partial x'}$$

où U représente la vitesse du repère mobile par rapport au repère fixe.

L'expression de la loi de Navier – Stokes dans le repère mobile est :

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_R + \left[\frac{\partial(\rho V)}{\partial x}\right]_{R'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t'} - U\frac{\partial\rho}{\partial x'} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x'} = 0$$

Si on introduit la vitesse relative v' soit V = v' + U on obtient :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t'} + \frac{\partial(V-U)\rho}{\partial x'} = \frac{\partial\rho}{\partial t'} + \frac{\partial(v'\rho)}{\partial x'} = 0$$

Si on suppose que ρ(x,t) = ρ'(x',t'), on aura :

$$\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t'}\right)_{R'} + \left[\frac{\partial(v'\rho')}{\partial x'}\right]_{R'} = 0$$

On remarque que la loi de Navier – Stokes est invariante lors de la transformation de Galilée.

3 Cinématique relativiste 01

3.1 Transformation de Lorentz.

Exercice 1

1°) a) Transformation de Galilée : x' = x - v t et t'= t.

b) [(0,0) → (0, 0)] [(1,0) → (1,0)] [(1,1) → (-14,1)] [(0,1) → (-15,1)].

2°) a) Transformation de Lorentz :

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \qquad ct' = \gamma(ct - \beta x) \qquad \beta = 0{,}5 \qquad \gamma = 1{,}15$$

b) [(0,0) → (0, 0)] [(1,0) → (γ, −γ/2)] [(1,1) → (γ/2, γ/2)] [(0,1) → (−γ/2, γ)]

Exercice 2

On passe de l'état (x_1, ct_1) à l'état (x'_1, ct'_1) et enfin à l'état (x''_1, ct''_1) par l'intermédiaire de deux transformations de Lorentz dans la même direction soit :

$$\begin{cases} x_1' = \gamma_1\,(x_1 - \beta_1\, ct_1) \quad ct_1' = \gamma_1\,(ct_1 - \beta_1 x_1) \text{ où } \gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \text{ et } \beta_1 = \dfrac{U_1}{c} \\ x_1'' = \gamma_2\,(x_1' - \beta_2\, ct_1') \quad ct_1'' = \gamma_2\,(ct_1' - \beta_2 x_1') \text{ où } \gamma_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}} \text{ et } \beta_2 = \dfrac{U_2}{c} \end{cases}$$

En remplaçant x_1' et ct_1' dans les équations x_1'' et ct_1'' on obtient :

$$\begin{cases} x_1'' = \gamma_1\gamma_2[\,(x_1 - \beta_1\, ct_1) - \beta_2\,(ct_1 - \beta_1 x_1)] \\ ct_1'' = \gamma_1\gamma_2[(ct_1 - \beta_1 x_1) - \beta_2\,(x_1 - \beta_1\, ct_1)\,] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1'' = \gamma_1\gamma_2[\,(1+\beta_1\beta_2)\,x_1 - (\beta_1+\beta_2)ct_1] \\ ct_1'' = \gamma_1\gamma_2[(1+\beta_1\beta_2)ct_1 - (\beta_1+\beta_2)x_1] \end{cases}$$

Si on fait une seule transformation de Lorentz où on passe de l'état (x_1, ct_1) à l'état (x_1'', ct_1'') on a :

$$x_1'' = \gamma(x_1 - \beta ct_1) \qquad ct_1'' = \gamma(ct_1 - \beta\, x_1)$$

En identifiant les coefficients des variables x_1 et ct_1 dans les deux équations x_1'' et ct_1'' on obtient :

$$\gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) = \gamma \quad \text{et} \quad \gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) = \gamma \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}(1+\beta_1\beta_2)$$

$$\frac{1}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta_1^2}\frac{1}{1-\beta_2^2}(1+\beta_1\beta_2)^2$$

$$1-\beta^2 = (1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)\frac{1}{(1+\beta_1\beta_2)^2}$$

$$\beta^2 = \left[\frac{2\beta_1\beta_2 + (\beta_1^2+\beta_2^2)}{(1+\beta_1\beta_2)^2}\right] = \left[\frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{(1+\beta_1\beta_2)^2}\right]$$

$$\beta = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{U}{c} = \frac{\frac{U_1+U_2}{c}}{1+\frac{U_1U_2}{c^2}}$$

$$U = \frac{U_1+U_2}{1+\frac{U_1U_2}{c^2}}$$

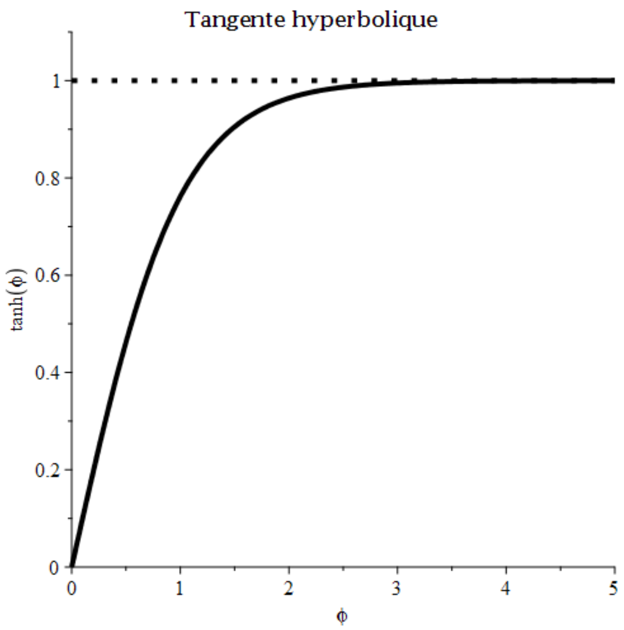
On remarque que deux transformations de Lorentz successives et dont les vitesses U_1 et U_2 ont même direction, sont équivalentes à une seule transformation de Lorentz dont la vitesse U est donnée par la loi de composition des vitesses.

Exercice 3

1°)

$$0 < \varphi < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \tanh\varphi < 1$$

φ	0	1	2	3	4	5	6	8	10
$\tanh\varphi$	0	0,76	0,96	0,995	0,999	0,9999	0,99998	0,999999	$\cong 1$



2°)

$$x = \gamma\,(x' + \beta\, ct') \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad c\,t = \gamma(\beta x' + c\,t')$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{\sqrt{1-\beta^2}} + \dfrac{\beta\, ct'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ ct = \dfrac{\beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} + \dfrac{ct'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{U}{c}\right)^2}} \ \text{et}\ \beta = \frac{U}{c}$$

A partir de la relation $\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$, on :

$$1 - \tanh^2\varphi = \frac{1}{\cosh^2\varphi} \quad \Rightarrow \quad \cosh\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\sinh\varphi = \cosh\varphi.\tanh\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\varphi}}\frac{U}{c} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\begin{cases} x = \gamma\,(x' + \beta\, ct') \\ ct = \gamma(\beta x' + ct') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cosh\varphi x' + \sinh\varphi(ct') \\ ct = \sinh\varphi x' + \cosh\varphi(\,ct') \end{cases}$$

Exercice 4

La valeur du facteur de Lorentz est :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}} = \frac{13}{12}$$

Evénement 1 : Lancer de la balle (x'₁, t'₁)

Evénement 2 : Arrivée de la balle (x'₂, t'₂)

Dans le repère du train, la distance entre les deux événements est :

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = L$$

Dans le repère du train, le temps mis par la balle pour parcourir la distance L est :

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{\Delta x'}{\text{Vitesse (Balle/Train)}} = \frac{3L}{c}$$

$$\Delta t' = \frac{3L}{c} = \frac{3.90}{3.10^8} = 9.10^{-7} = 0{,}9\ \mu s$$

On utilise les équations de Lorentz pour écrire les coordonnées spatiales puis les coordonnées temporelles des deux événements dans le repère terrestre soit :

$$x_1 = \gamma(x'_1 + \beta c t'_1) \quad \text{et} \quad x_2 = \gamma(x'_2 + \beta c t'_2)$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \gamma[(x'_2 - x'_1) + \beta c(t'_2 - t'_1)]$$

$$\Delta x = \gamma[\Delta x' + \beta c \Delta t'] = \gamma\left[L + 3\beta c \frac{L}{c}\right]$$

La distance parcourue par le train est égale à :

$$\Delta x = \frac{13}{12}\left[L + 3\frac{5}{13}L\right] = \frac{13}{12}\frac{28}{13}L = \frac{7}{3}L = 210\ \text{m}$$

Le temps mis par la balle pour aller de l'arrière à l'avant du train est égal à :

$$ct_1 = \gamma(\beta x'_1 + ct'_1) \quad \text{et} \quad ct_2 = \gamma(\beta x'_2 + ct'_2)$$

$$ct_2 - ct_1 = c\Delta t = \gamma[\beta(x'_2 - x'_1) + c(t'_2 - t'_1)]$$

$$c\Delta t = \gamma[\beta \Delta x' + c\Delta t']$$

$$c\Delta t = \frac{13}{12}\left[\frac{5}{13}L + c\frac{3L}{c}\right] = \frac{13}{12}\frac{44}{13}L = \frac{11}{3}L \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{11}{3}\frac{L}{c} = 1{,}10.10^{-6}\ s = 1{,}1\ \mu s$$

Exercice 5

Dans le référentiel R la distance entre A et B est de 180 m et la vitesse est 0,6c = 1,8 .10^8 m/s. On trouve un temps impropre soit :

$$T = \frac{d}{V} = 1\ \mu s$$

L'horloge A' indique le temps propre T_0 correspondant à la durée du trajet : en effet les événements qui définissent l'intervalle (croisement de A et A' et croisement de B et A') se produisent au même point dans le référentiel R', soit à l'endroit où se trouve A'.

$$\beta = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}25$$

L'horloge A', fixe par rapport au centre de la fusée, indique un temps propre T_0 qui peut être déduit de T soit :

$$T_0 = \frac{T}{\gamma} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8\ \mu s$$

Il faut donc 1 μs selon l'observateur dans R et 0,8 μs selon l'observateur dans R'

3.2 Dilatation du temps.

Exercice 1

La relation entre le temps propre ou temps donné par l'horloge H_1 placée dans un vaisseau spatial et le temps impropre ou temps donné par l'horloge H_2 maintenue au laboratoire est obtenue comme suit :

$$U = 10^{-2}c \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{U}{c}\right)^2 = 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad U \ll c \Rightarrow \quad \gamma \cong 1 + \frac{1}{2}.\left(\frac{U}{c}\right)^2$$

$$T \cong T_0 \left[1 + \frac{1}{2}.\left(\frac{U}{c}\right)^2\right]$$

1er cas : En une journée soit T = 1 jour = 86 400 s, le retard ΔT de l'horloge H_1 par rapport à l'horloge H_2 est égal à :

$$\Delta T = T - T_0 = \ T_0 \frac{1}{2}.\left(\frac{U}{c}\right)^2 = 4{,}32\ \ s$$

L'horloge H_1 du vaisseau spatial retarde de 4,32 s par jour par rapport à l'horloge H_2 terrestre.

2eme cas : En une année soit T = 365 jours, le retard ΔT est égal à :

$$\Delta T = T - T_0 = 4{,}32 * 365 = 1576{,}8\ \ s = 26\ mn\ 16\ s$$

L'horloge H_1 du vaisseau spatial retarde de 26mn16s par an par rapport à l'horloge H_2 terrestre.

3eme cas : Pour que les deux horloges diffèrent seulement d'une seconde en une journée, la vitesse du vaisseau spatial doit être égale à :

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{T_0}{2}.\left(\frac{U}{c}\right)^2 = 1\ s$$

$$\left(\frac{U}{c}\right)^2 = \frac{2\ \Delta T}{T_0} = 2{,}3148.10^{-5} \qquad \Rightarrow \quad U = 4{,}811.10^{-3}\ c = 1{,}44.10^{6}\ m/s$$

Exercice 2

1°) Pour le passager du vaisseau spatial, le temps mis par le flash lumineux pour faire un aller-retour est égal à :

$$\Delta t_0 = T_0 = \frac{2\ D}{c} = \frac{0,30}{3 * 10^8} = 1\ \text{ns}$$

Le temps T_0 est appelé temps propre.

2°) Pour un observateur terrestre, le temps mis par le flash lumineux pour faire un aller-retour est égal à :

$$\beta = \frac{U}{c} = 0,20 \quad (V = 60000 \quad \text{km/s}) \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1,020$$

$$\Delta t = T = \gamma\ T_0 = 1,02\ \text{ns}$$

Le temps T est appelé temps impropre.

3°) Quand il s'écoule une journée soit T_0 = 1 jour = 86 400 s, il s'écoulera un temps T égal à :

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \cong T_0 \frac{1}{1-\frac{\beta^2}{2}} = T_0\left(1+\frac{\beta^2}{2}\right) = T_0\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{U}{c}\right)^2\right]$$

$$\Delta T = T - T_0 = \ T_0\frac{1}{2}.\left(\frac{U}{c}\right)^2 = 86\ 400.\frac{1}{2}.(0,2)^2 = 86\ 400.\frac{1}{2}.\frac{1}{25}$$

Par rapport à une horloge terrestre, l'horloge placée à bord du vaisseau retardera de :

$$\Delta T = 1728\ \text{s} = 28\ \text{mn}\ 48\ \text{s}$$

4°) Si on veut un retard maximum d'une minute en une journée, la vitesse maximale du vaisseau spatial est donnée par :

$$\left(\frac{U_{max}}{c}\right)^2 = 2\frac{\Delta T}{T_0} = 2\frac{60}{86\ 400} = 1,3888.10^{-3}$$

$$\beta = 0,037 \quad \Rightarrow \quad U_{max} = 11200 \quad \text{km/s} < \ 60000 \quad \text{km/s}$$

Plus la vitesse du vaisseau spatial est petite, plus le retard de l'horloge spatiale par rapport à l'horloge terrestre est petit.

Exercice 3

La vitesse du satellite est égale à :

$$U = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi.26567.10^3}{12.3600} = 3864\ \text{m/s}$$

$$\left(\frac{U}{c}\right)^2 = 1,659.10^{-10} \quad \Rightarrow \quad U \ll c \Rightarrow \quad \gamma \cong 1+\frac{1}{2}.\left(\frac{U}{c}\right)^2$$

$$T \cong T_0\left[1+\frac{1}{2}.\left(\frac{U}{c}\right)^2\right]$$

1^er^ cas : T = 1 jour = 86 400 s. Le retard est :

$$\Delta T = T - T_0 = T_0 \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{U}{c}\right)^2 = 7{,}16\ \mu s$$

L'horloge du satellite retarde de 7,16 μs par jour par rapport à l'horloge terrestre.

2^eme^ cas : T = 1 année = 365 jours. Le retard est :

$$\Delta T = T - T_0 = 7{,}16.365 = 2{,}6\ ms$$

L'horloge du satellite retarde de 2,6 ms par année par rapport à l'horloge terrestre.

3^eme^ cas : Si on veut ΔT = 1 seconde alors il faudra un temps :

$$T = \frac{1}{2{,}6.10^{-3}} = 384{,}6 \text{ années} \cong 385 \text{ années}$$

Exercice 4

1°) La relation qui lie les durées T'et T_0 est :

$$T' = \gamma\, T_0 \quad \text{où} \ \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}9^2}} = 2{,}29$$

2°) La durée du trajet pour un observateur terrestre est égale à :

$$T' = \frac{D}{U} = \frac{4.365{,}25.24.3600.\,c}{0{,}9c} = 140{,}256.10^6\ s = 4{,}44 \text{ années}$$

3°) La durée du trajet pour un observateur terrestre est égale à :

$$T_0 = \frac{T'}{\gamma} = \frac{140{,}256.10^6\ s}{2{,}29} = 1{,}94 \text{ années}$$

Exercice 5

La durée de vie mesurée par un observateur terrestre est égale à :

$$\tau = \frac{\text{Distance parcourue}}{\text{Vitesse du muon}} = \frac{6600}{0{,}995.3.10^8} = 22.10^{-6}\ s$$

En appliquant la relation qui lie le temps propre τ_0 qui correspond à la durée de vie moyenne des muons au repos et le temps impropre τ qui correspond à la durée de vie moyenne des muons mesurée par un observateur terrestre soit :

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \tau_0 = \tau\sqrt{1-\beta^2} = 22.10^{-6}\sqrt{1-0{,}995^2} = 2{,}2.10^{-6}\ s$$

Exercice 6

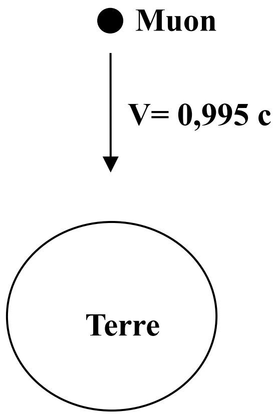
1°) Comme la durée de vie propre du muon est $T_0 = 2{,}26\ \mu s$, on peut en déduire la durée de vie impropre ou durée de vie du muon mesurée depuis la Terre soit :

$$T = \gamma T_0 \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 10 \quad \text{avec} \quad \beta = 0{,}995$$

$$T = 22{,}62\ \mu s$$

Vu depuis la Terre le muon peut parcourir la distance :

$$D = U.T = 0{,}995c.\,22{,}62.\,10^{-6} = 6752\ m$$



Comme cette distance est plus grande que l'altitude de création H = 1910 m du muon, celui-ci peut atteindre la Terre.

2°) Dans son repère, le muon voit la Terre à la distance :

$$d = \frac{H}{\gamma} = \frac{1910}{10} = 191\ m$$

Pour le muon, tout se passe comme-ci la Terre se trouvait à une distance de 191 m et non de 1910 m.

3°) A la vitesse V = 0,995c, le muon met un temps

$$t = \frac{d}{U} = \frac{190{,}8}{0{,}995\ c} = 0{,}64\ \mu s$$

pour parcourir la distance de 190,8 mètres. Ce temps est très inférieur à sa durée de vie qui est égale à $T_0 = 2{,}26$ µs. Donc il peut parcourir cette distance et atteindre la Terre.

Exercice 7

Combien de temps Δt_E s'est-il écoulé selon l'horloge de l'étudiant quand l'horloge du professeur indique Δt_P = 1 heure ?

$$\Delta t_E = \gamma \Delta t_P = \frac{\Delta t_P}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Quelle est la distance parcourue par le référentiel du professeur dans le référentiel de l'étudiant ?

$$D = U\ \Delta t_E$$

Combien de temps Δt_S a mis le signal lumineux pour parcourir dette distance D ?

$$\Delta t_S = \frac{D}{c} = \frac{U}{c}\Delta t_E = \beta\Delta t_E = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta t_P$$

La durée totale de l'examen pour l'étudiant est égale à :

$$\Delta t = \Delta t_E + \Delta t_S = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta t_P = \frac{1+\beta}{\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}}\Delta t_P$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\Delta t_P$$

A.N : $\Delta t_P = 1$ heure $\beta = 0{,}6$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{1+0{,}6}{1-0{,}6}}\,\Delta t_P = \sqrt{\frac{1{,}6}{0{,}4}}\Delta t_P = 2 \text{ heures}$$

$$\Delta t = 2 \text{ h}$$

On veut que $\Delta t = 4$ heures.

$$\Delta t = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\Delta t_P \quad \Rightarrow \quad (\Delta t)^2 = \frac{1+\beta}{1-\beta}(\Delta t_P)^2$$

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta t_P)^2} = 16 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{15}{17} = 0{,}882 \qquad U = 0{,}882\text{ c}$$

Exercice 8

1°) Ecrivons les relations de Lorentz :

$$x' = \gamma(x - Vt) \quad \text{et} \quad t' = \gamma\left(t - \frac{U}{c^2}x\right)$$

La distance qui sépare les deux flashs et le temps qui s'écoule entre les deux flashs dans le repère mobile R' est égale à :

$$x'_R - x'_V = \gamma(x_R - x_V) - \gamma U(t_R - t_V)$$

$$\Delta x' = \gamma\,(\Delta x - V\,\Delta t)$$

Comme $\Delta x = 2000$ m et $\Delta t = 4$ µs on obtient :

$$U = 0{,}866\text{ c} \qquad \gamma = 2 \qquad \Delta x' = 960{,}8\text{ m}$$

$$t'_R - t'_V = \gamma(t_R - t_V) - \gamma\,\frac{U}{c^2}(x_R - x_V)$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{U}{c^2}\,\Delta x\right) = \gamma\left(\Delta t - \frac{\beta}{c}\,\Delta x\right) = -3{,}54 \text{ µs}$$

La lampe rouge s'allume la première.

2°) Pour que les lampes s'allument simultanément, la vitesse du repère R' doit être égale à :

$$\Delta t' = 0 \quad \Rightarrow \quad U = c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} = 1{,}8.\,10^8 \text{ m/s} = 0{,}6\text{ c}$$

3°) Pour que les lampes s'allument en sens opposé à celui de la première question la vitesse du repère R' doit être égale à :

$$\Delta t' > 0 \quad \Rightarrow \quad U < c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} = 1{,}8.\,10^8 \text{ m/s} = 0{,}6\text{ c}$$

4°) Pour une vitesse U = 0,5 c, la distance et le temps qui séparent les deux flashs dans le repère R' sont :

$$\Delta x' = \gamma\,(\Delta x - U\,\Delta t) \text{ et } \gamma = 1{,}15 \quad \Rightarrow \quad \Delta x' = 1610\text{ m}$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{U}{c^2}\,\Delta x\right) = 0{,}76\ \mu\text{s}$$

La lampe verte s'allume la première contrairement au cas où la vitesse du repère R' est égale à 0,5 c.

Exercice 9

1°) La période T'_1 des flashs émis par A quand elle est mesurée par l'observateur terrestre (B) est :

$$T'_1 = \gamma T_1 = \frac{T_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{60}{0{,}8} = 75\text{ s} = 1\text{mn } 15\text{s}$$

2°) La période T'_2 des flashs reçus par (B) quand elle est mesurée par l'observateur (B) est :

$$T'_2 = T'_1 + \frac{\text{Distance parcourue par le référentiel de A entre deux impulsions}}{c}$$

$$\text{Distance parcourue par le référentiel A entre deux impulsions reçues par B} = \text{Vitesse}.\,T'_1$$

$$\text{Distance parcourue par le repère A entre deux impulsions reçues par B} = \text{Vitesse}.\,T'_1$$

où U = 0,6 c est la vitesse de la fusée A par rapport à l'observateur terrestre B

$$T'_2 = T'_1 + \frac{U.\,T'_1}{c}$$

où $\frac{U.T'_1}{c}$ est le temps que met le signal émis par A pour arriver en B.

$$T'_2 = T'_1 + \frac{U.\,T'_1}{c} = T'_1 + 0{,}6.\,T'_1 = 1{,}6.\,T'_1 = 120\text{ s} = 2\text{ mn}$$

3°) La période T'_3 des flashs reçus par B quand elle est mesurée par l'observateur (A) est égale à:

$$T'_3 = \frac{T'_2}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}25.\,T'_2 = 1{,}25.120 = 150\ s = 2mn\ 30s$$

3.3 Contraction des longueurs.

Exercice 1

1°) Pour un observateur terrestre la durée T du trajet est :

$$T = \frac{D}{v} = \frac{384.\,10^6}{0{,}8.3.\,10^8} = 1{,}6\ s$$

où T est un temps impropre et D une longueur propre.

2°) On peut assimiler la distance Terre-Lune à une barre de longueur propre D = 384000 km. Un passager de la fusée ne peut mesurer la longueur de la barre qu'en considérant deux événements simultanés soit $t'_1 = t'_2$. Ces deux événements, associés aux deux extrémités de la barre, ont pour coordonnées $E'_1 = (ct'_1, x'_1)$ et $E'_2 = (ct'_2, x'_2)$. A l'aide la transformation de Lorentz $x_1 = \gamma(x'_1 + \beta ct'_1)$ et $x_2 = \gamma(x'_2 + \beta ct'_2)$ et en utilisant la relation $t'_1 = t'_2$ on obtient :

$$x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1) \quad \text{ou} \quad D = \gamma d$$

$$d = \frac{D}{\gamma} = D\sqrt{1-\beta^2} = 384000.0{,}6 = 230400\ km$$

3°) Pour le passager de la fusée, la durée T'du voyage dans le référentiel mobile est une durée propre. La mesure est effectuée par le passager immobile soit $x'_1 = x'_2$. A l'aide la transformation de Lorentz $ct = \gamma(ct' + \beta x')$ on aura :

$$\begin{cases} ct_1 = \gamma(ct'_1 + \beta x'_1) \\ ct_2 = \gamma(ct'_2 + \beta x'_2) \end{cases}$$

En utilisant la relation $x'_1 = x'_2$ on obtient :

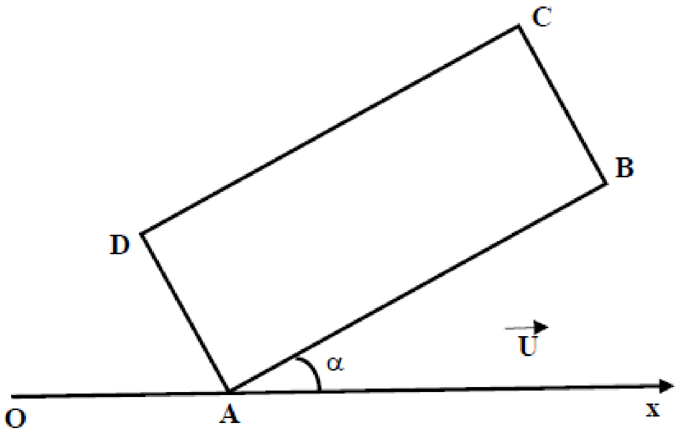
$$ct_2 - ct_1 = \gamma(ct'_2 - ct'_1) \quad \text{ou} \quad T = \gamma T'$$

$$T' = \frac{T}{\gamma} = T\sqrt{1-\beta^2} = 1{,}6.0{,}6 = 0{,}96\ s$$

Exercice 2

Le côté AB aura une longueur A'B' et une inclinaison α' avec l'axe Ox pour l'observateur fixe soit (voir exercice n°5) :

$$A'B' = \frac{AB}{\gamma}\sqrt{(\gamma \sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2} \qquad \tan\alpha' = \frac{L_0 \sin\alpha}{\frac{L_0 \cos\alpha}{\gamma}} = \gamma \tan\alpha$$



Le côté AD fait un angle $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ avec l'axe Ox. Il aura une longueur A'D' et une inclinaison β' avec l'axe Ox pour l'observateur fixe.

$$A'D' = \frac{AD}{\gamma}\sqrt{(\gamma \sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2} = \frac{AD}{\gamma}\sqrt{(\gamma \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2}$$

$$\tan\beta' = \frac{L_0 \cos\alpha}{\frac{L_0 \sin\alpha}{\gamma}} = \gamma\ \mathrm{cotan}\alpha = \frac{\gamma}{\tan\alpha}$$

A.N: $$A'B' = \frac{6}{2}\sqrt{(2\sin30°)^2 + (\cos30°)^2} = 3\sqrt{\left[1^2 + \frac{3}{4}\right]} = 3{,}97 \text{ cm}$$

$$\tan\alpha' = 2\tan30° = 1{,}15 \quad \Rightarrow \quad \alpha' = 49{,}10°$$

$$A'D' = \frac{4}{2}\sqrt{(2\cos30°)^2 + (\sin30°)^2} = 2\sqrt{3 + \frac{1}{4}} = 3{,}60 \text{ cm}$$

$$\tan\beta' = \frac{2}{\tan 30°} = 3{,}46 \quad \Rightarrow \quad \beta' = 73{,}90°$$

L'angle entre les côtés A'B' et A'D' vaut :

$$(\pi - \alpha' - \beta') = 180 - 49{,}10 - 73{,}90 = 57°$$

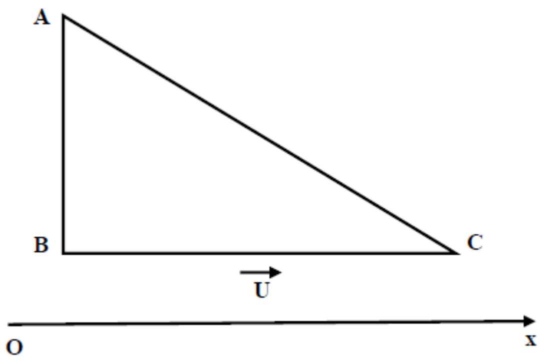
alors que l'angle entre les côtés AB et AD vaut 90°. La figure A'B'C'D' est un parallélogramme.

Exercice 3

Le côté BC aura une longueur B'C' pour l'observateur fixe.

$$B'C' = \frac{BC}{\gamma} = \frac{b}{\gamma}$$

La longueur du côté AB reste inchangée car AB se déplace perpendiculairement à l'axe Ox. On aura A'B' = AB = a. Comme on veut que le triangle A'B'C' soit un triangle rectangle isocèle soit A'B' = B'C', on aura la relation suivante :



$$A'B' = \frac{BC}{\gamma} = B'C' \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{B'C'}{A'B'}$$

$$1-\beta^2 = \frac{a^2}{b^2} \qquad \beta^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2-a^2}{b^2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} = \frac{\sqrt{20^2-15^2}}{20} = 0{,}66$$

$$U = 0{,}66\ c$$

Exercice 4

Le cube possède 12 arêtes. Seules quatre arêtes sont concernées par la contraction car elles se déplacent parallèlement au vecteur vitesse du repère mobile par rapport au repère fixe. Les douze autres arêtes ne sont pas concernées par la contraction car elles se déplacent perpendiculairement au vecteur vitesse du repère mobile par rapport au repère fixe.
A partir de la masse volumique au repos, on peut en déduire le volume du cube au repos puis son arête a.

$$\rho = 8{,}9\ \mathrm{kg/m^3}:\ V = 1\ \mathrm{m^3} \ \rightarrow \ a = 1\ \mathrm{m}\ \text{ et }\ M = 8{,}9.10^3\ \mathrm{kg}$$

Comme le facteur de Lorentz est égal à $\gamma = \frac{1}{0{,}8}$, pour l'observateur l'arête du cube en mouvement sera égale à 1.0,8 = 0,8 m. Le cube sera vu par l'observateur fixe comme un parallélépipède de sur face de base S = $0{,}8^2$ = 0,64 m^2 et de hauteur 1 m. Le volume du parallélépipède est égal à 0,64 m^3.

Comme la masse reste constante lors du mouvement du cube, on dira que 0,64 m^3 pèse $8{,}9.10^3$ kg soit une masse volumique égale à :

$$\rho' = \frac{8{,}9.10^3}{0{,}64} = 13{,}9.10^3\ \mathrm{kg/m^3}$$

Exercice 5

Pour l'observateur du vaisseau le moins rapide, la longueur L_{Rapide} du vaisseau qui le déplace est donnée par la loi de contraction soit :

$$L_{Rapide} = \frac{L}{\gamma} = L\sqrt{1-\beta^2} \quad (1)$$

Par rapport au vaisseau le moins rapide, celui-ci se déplace à la vitesse V. L'observateur du vaisseau le moins rapide voit la longueur du vaisseau rapide L_{Rapide} passer devant lui pendant la durée T à la vitesse V, on peut écrire :

$$L_{Rapide} = V.T \quad (2)$$

En utilisant les relations (1) et (2), on obtient :

$$VT = L\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad V^2 = \frac{L^2}{T^2 + \frac{L^2}{c^2}}$$

$$V = \frac{L}{\sqrt{(cT)^2 + L^2}}c = \frac{100}{\sqrt{(3.2{,}5.100)^2 + 100^2}}c = 0{,}13\ c$$

Exercice 6

Dans le repère du laboratoire la distance entre les deux détecteurs est : $\Delta x = 2$ m.

Au laboratoire, l'expérimentateur mesure un temps impropre soit :

$$\text{Temps impropre ou mesuré: } \Delta t_{impro} = \frac{2}{0{,}75\ c} = \frac{8}{3c} = 8{,}88 \text{ ns}$$

$$c\Delta t = \frac{8}{3} = 2{,}66 \text{ m} = \text{Distance parcourue par la lumière.}$$

L'intervalle espace-temps est défini comme suit :

$$\Delta_{12}^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

Quand on passe de référentiel du laboratoire au référentiel du proton, l'invariance de l'intervalle espace-temps s'écrit comme suit :

$$[(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2]_{Laboratoire} = [(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2]_{Proton}$$

Comme $\Delta x = 0$ dans le repère du proton, on en déduit l'intervalle espace-temps soit :

$$c.\Delta t_{Proton} = \sqrt{(c\Delta t_{Laboratoire})^2 - (\Delta x_{Laboratoire})^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 2^2}$$

$$c.\Delta t_{Proton} = 1{,}76 \text{ m} \qquad \Delta t_{Proton} = \frac{1{,}76}{3.10^8} = 5{,}88 \text{ ns}$$

Exercice 7

Pour une vitesse V= 100 km/h, le facteur de Lorentz est égal à :

$$\beta = \frac{V}{c} = \frac{100}{200} = 0{,}5 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta(\text{Toyota})^2}} = 1{,}154$$

La longueur apparente du véhicule « Toyota » est égale à :

$$L_{Impropre}(Toyota) = \frac{L_{Propre}(Toyota)}{\gamma(Toyota)} = \frac{4}{1{,}15} = 3{,}466$$

Quelle doit-être la vitesse du véhicule « Mercedes » pour que sa longueur impropre soit égale à sa longueur impropre du véhicule « Toyota » ?

$$L_{Impropre}(Mercedes) = \frac{L_{Propre}(Mercedes)}{\gamma(Mercedes)} = \frac{L_{Propre}(Toyota)}{\gamma(Toyota)}$$

$$\gamma(Mercedes) = \frac{L_{Propre}(Mercedes)}{L_{Propre}(Toyota)}.\gamma(Toyota) = \frac{5}{4}.1{,}154 = 1{,}442$$

$$\gamma(Mercedes) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta(Mercedes)^2}} = 1{,}442$$

$$\beta(Mercedes) = 0{,}72 \quad \Rightarrow \quad V(Mercedes) = 0{,}72.200 = 144\ km/h$$

Le calcul sera identique pour le véhicule « Cadillac ». On trouve une vitesse :

$$\beta(Cadillac) = 0{,}82 \quad \Rightarrow \quad V(Cadillac) = 0{,}82.200 = 164\ km/h$$

La longueur impropre du train devra être telle que :

$$L_{Impropre}(Train) = \frac{L_{Propre}(Train)}{\gamma(Train)} = \frac{100}{\gamma(Train)} = 3{,}464\ m$$

$$\gamma(Train) = 28{,}87 \quad \Rightarrow \quad \beta(Train) = 0{,}9994$$

$$V(Train) = 199{,}88\ km/h$$

Exercice 8

1°) Passage de A devant O ou Evénement 1 :

Référentiel R' : $E_1 = (x'_A = 0, t'_A = 0\ )$

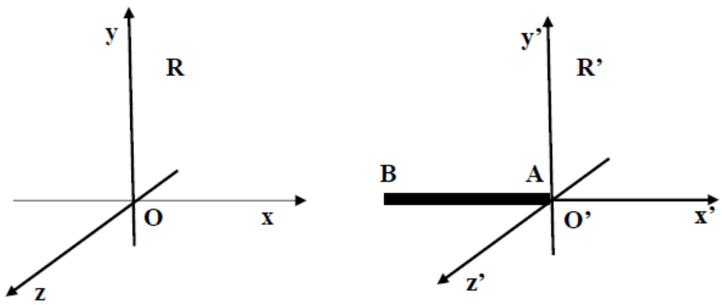
2°) Passage de B devant O ou Evénement 2 :

Référentiel R' : $E_2 = \left(x'_B = -L', t'_B = \frac{L'}{V}\right)$

Dans le référentiel fixe R, on utilise la transformation inverse de Lorentz :

$$x = \gamma\,(x' + \beta ct') \quad \text{et} \quad ct = \gamma(ct' + \beta x')$$

$$x_B = \gamma\left(-L' + \beta c\frac{L'}{V}\right) = -\gamma L' + \gamma\beta\left(\frac{cL'}{V}\right)$$



$$ct_B = \gamma\left(c\frac{L'}{V} - \beta L'\right) = -\gamma\beta L' + \gamma\left(\frac{cL'}{V}\right)$$

L'observateur O voit donc la règle défiler devant lui pendant un temps :

$$ct_B - ct_A = \gamma L'\left(-\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{L'}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{1-\beta^2}{\beta}\right)$$

$$ct_B - ct_A = \left(\frac{L'}{\beta}\right)\sqrt{1-\beta^2} \qquad x_B = 0 \quad \text{et} \quad ct_A = 0$$

Puisque la règle a une vitesse V par rapport à R, sa longueur dans R est donnée par :

$$L = V(t_B - t_A) = \left(\frac{VL'}{\beta c}\right)\sqrt{1-\beta^2} = L'\sqrt{1-\beta^2}$$

Exercice 9

1°) Pour un observateur terrestre, la longueur l du train est égale à :

$$\text{Longueur du train/Observateurterrestre} = \frac{L}{\gamma} = L\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) = 80 \ \text{ m} = l$$

Le tunnel contient entièrement le train

2°) Pour le passager du train, la longueur du tunnel est égale à :

$$\text{Longueur du tunnel/Passager du train} = \frac{l}{\gamma} = l\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) = 64 \ \text{ m}$$

Le tunnel ne peut pas contenir entièrement le train

3°) Evénement E_1 = « l'avant du train sort du tunnel » et événement E_2 = « l'arrière du train entre dans le tunnel ».

Les coordonnées de l'événement E_1 dans les repères R et R' sont respectivement :

$$E_1(R) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ ct_1 = 0 \end{cases} \qquad E_1(R') = \begin{cases} x'_2 = 0 \\ ct'_2 = 0 \end{cases}$$

Dans le repère du train les coordonnées de l'événement E_2 sont :

$$x'_2 = -L \quad \text{et} \quad ct'_2$$

Dans le repère du sol les coordonnées de l'événement E_2 sont :

$$x_2 = -\frac{L}{\gamma} \quad \text{et} \; ct_2$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2): \quad -L = \gamma\left(-\frac{L}{\gamma} - \beta ct_2\right) \quad \Rightarrow \quad ct_2 = 0$$

$$ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2) = -\gamma\,\beta x_2 = -\gamma\,\beta\left(-\frac{L}{\gamma}\right) = \beta L$$

$$E_2(R) = \begin{cases} x_2 = -\dfrac{L}{\gamma} \\ ct_2 = 0 \end{cases} \qquad E_2(R') = \begin{cases} x'_2 = -L \\ ct'_2 = \beta L \end{cases}$$

Les événements E_1 et E_2 sont simultanés dans le repère du tunnel R c'est-à-dire que lorsque que l'avant du train sort du tunnel alors au même moment l'arrière du train rentre dans le tunnel. Les événements E_1 et E_2 ne sont pas simultanés dans le repère du train R'. L'avant du train rentre dans le tunnel alors que l'arrière du train n'est pas rentré dans le tunnel ou bien l'arrière du train rentre dans le tunnel après que l'avant du train ait quitté le tunnel. Dans le repère du train R', on a d'abord l'événement E_1 à l'instant $t'_1 = 0$ puis après l'événement E_2 à l'instant $t'_2 = \frac{\beta L}{c} = 200$ ns.

4 Cinématique relativiste 02

4.1 Composition des vitesses.

Exercice 1

1°) Comme la vitesse du repère mobile R' par rapport au repère fixe R, le facteur de Lorentz est égal à :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2$$

Appliquons la loi de composition de vitesse en mécanique relativiste, on a :

$$V_x = \frac{V'_x + U}{1 + \dfrac{V'_x . U}{c^2}} = \frac{0{,}4\text{ c } + 0{,}866\text{ c}}{1 + 0{,}4.0{,}866} = 0{,}94\text{ c}$$

$$V_y = \frac{V'_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{V'_x . V}{c^2}\right)} = \frac{0{,}8\text{ c}}{2(1 + 0{,}4.0{,}866)} = 0{,}2970\text{ c}$$

2°) L'angle θ que fait le vecteur vitesse $\vec{V}$ avec l'axe des X est égal à :

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x} = 0{,}316 \qquad \theta = 17{,}53°$$

Exercice 2

1°) D'après Galilée la balle aura la vitesse suivante soit :

$$V_{Balle/Sol} = V_{Balle/Pistolet} + V_{Pistolet/Sol}$$

$$V_{Balle/Sol} = \frac{c}{3} + \frac{c}{2} = \frac{5c}{6} > \frac{3c}{4}$$

Comme la vitesse de la balle est supérieure à la vitesse de la voiture des malfaiteurs, la balle atteint la cible.

2°)

$$U = \frac{c}{2} \qquad V'_x = \frac{c}{3}$$

$$V_x = \frac{V'_x\ +\ U}{1 + \frac{U}{c^2} V'_x} = \frac{c/3\ +\ c/2}{1 + \frac{c/2}{c^2} c/3} = \frac{5c/6}{1 + 1/6} = \frac{5}{7} c < \frac{3c}{4}$$

Comme la vitesse de la balle est inférieure à la vitesse de la voiture des malfaiteurs, la balle n'atteint pas la cible.

Exercice 3

1°) La vitesse de A par rapport à B est égale à :

$$V_{A/B} = \frac{V_{A/O} + V_{O/B}}{1 + \frac{V_{A/O}. V_{O/B}}{c^2}} = \frac{V_{A/O} - V_{B/O}}{1 - \frac{V_{A/O}. V_{B/O}}{c^2}} = \frac{+0{,}8c - 0{,}6c}{1 - \frac{0{,}8c. 0{,}6c}{c^2}}$$

$$V_{A/B} = 0{,}3846\ c$$

Résultat donné par la mécanique classique : $V_{A/B} = V_{A/O} - V_{B/O} = 0{,}2\ c$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_{A/B}}{c}\right)^2}} = 1{,}0833$$

Longueur du train A pour le passager du train B :

$$l = \frac{L_A}{\gamma} = 92{,}30\ m$$

Temps mis par A pour dépasser B : Le train A doit parcourir la distance $(l + L_B)$ à la vitesse $V_{A/B}$ soit :

$$t = \frac{l +\ L_B}{V_{A/B}} = \frac{292{,}30}{0{,}3846\ c} == 2{,}533\ \mu s$$

2°)

$$V_{B/A} = \frac{V_{B/O} + V_{O/A}}{1 + \frac{V_{B/O}.V_{O/A}}{c^2}} = \frac{V_{B/O} - V_{A/O}}{1 - \frac{V_{B/O}.V_{A/O}}{c^2}} = \frac{+0{,}6c - 0{,}8c}{1 - \frac{0{,}6c.\,0{,}8c}{c^2}} = -\,0{,}3846\ c$$

Longueur du train B pour le passager du train A : $l = \frac{L_B}{\gamma} = 184{,}62\ \mathrm{m}$

Temps mis par B pour dépasser A : Le train B doit parcourir la distance ($l + L_A$) à la vitesse $V_{B/A}$ soit :

$$t = \frac{l + L_A}{V_{A/B}} = \frac{284{,}62}{0{,}3846\ c} = 2{,}466\ \mu s$$

3°) Longueur du train B pour l'observateur fixe O :

$$\gamma_B = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_{B/O}}{c}\right)^2}} = 1{,}25 \qquad l_B = \frac{L_B}{\gamma_B} = \frac{200}{1{,}25} = 160\ \mathrm{m}$$

Longueur du train A pour l'observateur fixe O :

$$\gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_{A/O}}{c}\right)^2}} = 1{,}666 \qquad l_A = \frac{L_A}{\gamma_A} = \frac{100}{1{,}666} = 60\ \mathrm{m}$$

Temps mis pour l'observateur fixe O par A pour dépasser B : Le train A doit parcourir la distance ($l_A + l_B$) à la vitesse $V_{A/O} = 4c/5$ soit :

$$t = \frac{l_A + l_B}{V_{A/O}} = \frac{60 + 160}{0{,}8\ c} = 0{,}916\ \mu s$$

Mécanique classique :

$$t = \frac{L_A + L_B}{V_{A/O}} = \frac{100 + 200}{0{,}8\ c} = \frac{300}{0{,}8\ c} = 1{,}25\ \mu s$$

Exercice 4

1°) L'indice de réfraction de l'eau immobile est donné par le rapport des vitesses de la lumière dans le vide et dans l'eau soit c et v :

$$n = \frac{c}{v} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{n} \quad \Rightarrow \quad v = 2{,}25.\,10^8\ \mathrm{m/s}$$

2°) On utilise la loi de composition des vitesses de la mécanique classique, La vitesse $\vec{V}$ de la lumière dans l'eau en mouvement est égale à la somme de la vitesse $\vec{v}$ de la lumière dans l'eau immobile et de la vitesse d'écoulement de l'eau $\vec{u}$ soit :

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{u}$$

Le rayon lumineux qui pénètre dans la partie supérieure du tube a une vitesse v opposée à celle de l'écoulement de l'eau à l'aller puis dans la direction de l'écoulement de l'eau.
Le rayon lumineux qui pénètre dans la partie inférieure du tube a une vitesse v dans la direction de l'écoulement de l'eau puis dans la direction opposée de l'écoulement de l'eau.
Branche supérieure du tube :

$$\mathrm{V_-} = (\mathrm{v} - \mathrm{u}) \text{ puis } (\mathrm{v} + \mathrm{u}) \text{ après réflexion sur } \mathrm{M_1}$$

Branche inférieure du tube :

$$\mathrm{V_+} = (\mathrm{v} + \mathrm{u}) \text{ puis } (\mathrm{v} - \mathrm{u}) \text{ après réflexion sur } \mathrm{M_1}$$

La différence de temps de parcours est égale à :

$$\Delta t_{Cla} = \frac{2\,L}{v-u} - \frac{2\,L}{v+u} = \frac{4\,L\,u}{v^2-u^2} \cong \frac{4\,L\,u}{v^2} = \frac{4\,L\,u}{c^2} n^2$$

$$\Delta t_{Cla} = \frac{4\,L\,\beta}{c} n^2 \quad \text{où} \quad \beta = \frac{u}{c} = 3{,}33.\,10^{-8}$$

$$\Delta t_{Cla} = \frac{4.10.3{,}33.\,10^{-8}}{3.\,10^{8}} 1{,}33^2 = 7{,}89.\,10^{-15}\ \mathrm{s}$$

La différence de marche au point S'est égale à :

$$\delta_{Cla} = c\,\Delta t_{Cla} = 4L\,\beta n^2 = 4.10.3{,}33\,.\,1{,}33^2.\,10^{-8} = 2{,}369\ \mu\mathrm{m}$$

3°) La composition des vitesses en mécanique relativiste donne :

$$V_- = \frac{v-u}{1-\frac{vu}{c^2}} \qquad \text{et} \qquad V_+ = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}}$$

$$\Delta t_- = \frac{2\,L}{V_-} = \frac{2\,L}{v-u}\left(1-\frac{v\,u}{c^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \Delta t_+ = \frac{2\,L}{V_+} = \frac{2\,L}{v+u}\left(1+\frac{v\,u}{c^2}\right)$$

$$\Delta t_{Rel} = \frac{2\,L}{v-u} - \frac{2\,L}{v+u} - \frac{v\,u}{c^2}\left(\frac{2\,L}{v-u} + \frac{2L}{v+u}\right)$$

$$\Delta t_{Rel} = \frac{2L}{v-u} - \frac{2\,L}{v+u} - \frac{v^2}{c^2}\left(\frac{4\,u\,L}{v^2-u^2}\right)$$

$$\Delta t_{Rel} = \frac{4\,u\,L}{v^2-u^2} - \frac{v^2}{c^2}\left(\frac{4\,u\,L}{v^2-u^2}\right)$$

$$\Delta t_{Rel} = \frac{4\,u\,L}{v^2-u^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \cong \frac{4\,u\,L}{v^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Delta t_{Rel} \cong \frac{4\,u\,L}{c^2} n^2 \left(1-\frac{1}{n^2}\right) = 4\,L\,n\,\beta\,\frac{n}{c}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Delta t_{Rel} \cong 3{,}41.\,10^{-15}\ \mathrm{s}$$

La différence de marche au point S’est égale à :

$$\delta_{Rel} = c\,\Delta t_{Rel} = 4\,L\,n^2\,\beta\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = 1{,}023\ \ \mu m$$

Fizeau obtient expérimentalement ce résultat qui est différent de celui obtenu par la mécanique classique. Il n’a pas pu expliquer ce résultat. C’est plus tard que le résultat fut expliqué par la relativité restreinte (Loi de composition des vitesses différente de celle de Galilée).

Exercice 5

1°) Classiquement, la vitesse du missile M_1 par rapport à la Terre est donnée par la loi de composition des vitesses de Galilée soit :

$$V_{Missile1/Terre} = V_{M1/V} + V_{V/T} = 0{,}5c + 0{,}6c = 1{,}1c$$

On obtient un résultat supérieur à la vitesse de la lumière, ce qui est impossible en relativité restreinte.

2°) Appliquons la loi de composition des vitesses en relativité restreinte. La vitesse du premier missile M_1 est :

$$V_{Missile1/Terre} = \frac{V_{M1/V} + V_{V/T}}{1+\frac{V_{M1/V}.V_{V/T}}{c^2}} = \frac{1{,}1}{1{,}3}c = 0{,}8461c$$

3°) La vitesse du deuxième missile M_2 est :

$$V_{Missile2/Terre} = \frac{V_{M2/V} + V_{V/T}}{1+\frac{V_{M2/V}.V_{V/T}}{c^2}} = \frac{0{,}99c + 0{,}6c}{1 + 0{,}99.0{,}6} = 0{,}997c$$

Exercice 6

1°) Sous forme vectorielle, la loi de composition des vitesses s’écrit :

$$\overrightarrow{V_{Projectile/Terre}} = \overrightarrow{V_{Projectile/Fusée}} + \overrightarrow{V_{Fusée/Terre}}$$

Les composantes du vecteur vitesse sont :

$$\begin{cases} V_x(Projectile/Terre) = V_x(Projectile/Fusée) + V_x(Fusée/Terre) \\ V_y(Projectile/Terre) = V_y(Projectile/Fusée) + V_x(Fusée/Terre) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{V_{P/T}} = \left(V_x, V_y, V_z\right) \quad \overrightarrow{V_{P/F}} = (0{,}0.8c, 0) \quad \overrightarrow{V_{F/T}} = (0.7c, 0{,}0)$$

$$\overrightarrow{V_{P/T}} = \begin{cases} V_x(Projectile/Terre) = 0{,}7c \\ V_y(Projectile/Terre) = 0{,}8\ c \end{cases}$$

Le module de la vitesse du projectile par rapport à la Terre est égal à :

$$V_{Projectile/Terre} = c\sqrt{0{,}7^2 + 0{,}8^2} = 1{,}06c > c$$

On obtient un résultat supérieur à la vitesse de la lumière, ce qui est impossible en relativité restreinte.

2°) Appliquons la loi de composition des vitesses en relativité restreinte.
Dans cet exercice, la Terre joue le rôle de repère absolu R, la fusée animée d'une vitesse uniforme $\vec{U} = (0.7c, 0,0)$ joue le rôle de repère mobile R'.
Les composantes du vecteur vitesse du projectile dans le repère mobile sont :

$$V'_x = 0 \qquad V'_y = 0{,}8c \qquad V'_z = 0$$

Pour obtenir les composantes du vecteur vitesse dans le repère de la Terre, on rappelle la loi de composition des vitesses en relativité restreinte soit :

$$V_x = \frac{V'_x + U}{1 + \frac{UV'_x}{c^2}} \qquad V_y = \frac{V'_y}{\gamma\left(1 + \frac{UV'_x}{c^2}\right)} \qquad V_z = \frac{V'_z}{\gamma\left(1 + \frac{UV'_x}{c^2}\right)} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} V_x = 0{,}7c \\ V_y = \dfrac{0{,}8c}{\gamma_{F/T}} = 0{,}8c\sqrt{1 - 0{,}7^2} = 0{,}57c \\ V_z = 0 \end{cases}$$

où le facteur de Lorentz $\gamma_{F/T}$ est :

$$\gamma_{F/T} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{avec } \beta = 0{,}7c$$

3°) Le module de la vitesse du projectile par rapport à la Terre est égal à :

$$\left|\vec{V}_{\text{projectile}}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{0{,}7^2 + 0{,}57^2}c = 0{,}90c$$

4°) Les composantes du vecteur vitesse du photon sont :

$$\text{Vitesse du photon} = \begin{cases} V'_x = +c \\ V'_y = 0 \\ V'_z = 0 \end{cases}$$

Appliquons les équations notées (1) :

$$V_x = \frac{V'_x + U}{1 + \frac{UV'_x}{c^2}} = \frac{c + 0{,}7c}{1 + \frac{0{,}7.c.c}{c^2}} = +c$$

$$V_y = V_z = 0$$

Examinons le cas où le photon est émis vers la Terre.

$$\text{Vitesse du photon} = \begin{cases} V'_x = -c \\ V'_y = 0 \\ V'_z = 0 \end{cases}$$

Appliquons les équations notées (1) :

$$V_x = \frac{V'_x + U}{1 + \frac{UV'_x}{c^2}} = \frac{-c + 0{,}7c}{1 - \frac{0{,}7.c.c}{c^2}} = -c$$

$$V_y = V_z = 0$$

5°) Les composantes du vecteur vitesse du photon dans le repère de la fusée sont :

$$\text{Vitesse du photon} = \begin{cases} V'_x = 0 \\ V'_y = +c \\ V'_z = 0 \end{cases}$$

Appliquons les équations notées (1). Les composantes du vecteur vitesse du photon dans le repère de la Terre sont :

$$V_x = \frac{V'_x + U}{1 + \frac{UV'_x}{c^2}} = \frac{0{,}7c}{1} = 0{,}7\ c$$

$$V_y = \frac{V'_y}{\gamma\left(1 + \frac{UV'_x}{c^2}\right)} = \frac{c}{\gamma} = c\sqrt{1-\beta^2} = c\sqrt{1-0{,}7^2}$$

$$V_z = 0$$

Le module du vecteur vitesse du photon est égal à :

$$\text{Module vitesse du photon} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(0{,}7\ c)^2 + c^2(1-0{,}7^2)} = c$$

On remarque que le module de la vitesse de la lumière est égal à c quelle que soit la direction du photon lumineux émis.

Par contre, pour l'observateur terrestre la direction du photon émis par le vaisseau spatial n'est plus perpendiculaire au vecteur vitesse de la fusée. Le photon fait un angle α avec la direction du vecteur vitesse de la fusée soit :

$$\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{c\sqrt{1-0{,}7^2}}{0{,}7\ c} \cong 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45°$$

Exercice 7

Ecrivons les différentes rapidités en fonction des différentes vitesses, soit :

$$\tanh(r_R) = \frac{V}{c} \qquad \tanh(r_{R'}) = \frac{v}{c} \qquad \tanh(r_U) = \frac{U}{c}$$

En utilisant la relation de composition des vitesses en relativité restreinte, on obtient :

$$\tanh(r_R) = \frac{\tanh(r_{R'}) + \tanh(r_U)}{1 + \tanh(r_{R'}).\tanh(r_U)} = \tanh(r_{R'} + r_U)$$

$$r_R = r_{R'} + r_U$$

En relativité restreinte, la rapidité de la particule par rapport au repère absolu R est égale à la somme de la rapidité de la particule par rapport au repère mobile R' avec la rapidité du repère mobile R' par rapport au repère fixe R. On retrouve une similitude avec la loi de composition des vitesses de Galilée.

4.2 Effet Doppler.

Exercice 1

$$f' = f\frac{c}{c-U}$$

$$f'' = f'\frac{c}{c-U} = f\frac{c}{c-U}\,\frac{c}{c-U} = f\left(\frac{c}{c-U}\right)^2$$

$$f'' = f\left(\frac{1}{1-\beta}\right)^2 \cong f(1+\beta)^2 \cong f(1+2\beta)$$

$$\Delta f = f'' - f = 2\,\beta\,f$$

$$\beta = \frac{\Delta f}{2f} \quad \Rightarrow \quad V = c\frac{\Delta f}{2f}$$

$f = 24{,}124$ GHz et $\Delta f = 2500$ Hz $\qquad V = 15{,}54$ m/s $= 55{,}96$ km/h

Le véhicule est en infraction.

Comment mesurer la fréquence f '' reçue par le radar ?

Comme la fréquence f'' reçue par le radar est très peu différente de la fréquence f émise par le radar ($f = 24124000$ Hz et $f'' = 24126500$ Hz), il est très difficile de mesurer la fréquence f ''. On préfère utiliser la méthode de battements entre ces deux fréquences.

Cette méthode a l'avantage de faire apparaître la différence de fréquence $\Delta f = f'' - f$.

Ainsi on mesure directement la différence de fréquence $\Delta f = f'' - f$ et on en déduit la vitesse du véhicule.

Exercice 2

Le sang constitue le milieu dans lequel l'onde se propage. On considère ce milieu comme le référentiel au repos, tandis que les deux cristaux piézoélectriques A et B se déplacent dans le sens contraire. Si on note ν_A la fréquence de l'onde émise par A, alors le globule reçoit cette onde, à la fréquence apparente (source A mobile, détecteur globule fixe) :

$$\nu_G = \nu_A \frac{1}{1 - \frac{V}{V_{Son}}}$$

avec V la vitesse absolue des globules.

Les globules réémettent une onde dans la direction du cristal piézoélectrique B à la fréquence ν_G. Le cristal B détecte alors une onde à la fréquence apparente (source globule fixe, détecteur B mobile) :

$$\nu_B = \nu_G \left(1 + \frac{V}{V_{Son}}\right)$$

Le résultat final est donc :

$$\nu_B = \nu_A \frac{1 + \frac{V}{V_{Son}}}{1 - \frac{V}{V_{Son}}}$$

Pour $V \ll V_{Son}$ on a :

$$\nu_B \cong \nu_A \left(1 + \frac{2\,V}{V_{Son}}\right)$$

A.N: $\nu_A = 5{,}4$ MHz et $\nu_B - \nu_A = 1{,}4$ kHz $\Rightarrow$ V = 0,18 m/s = 18 cm/s

Exercice 3

Dans le repère de l'automobiliste la source émettrice de la lumière rouge se rapproche de lui ; On a un décalage vers le vert.

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad \beta = \frac{U}{c}$$

$$\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2 = \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

Rouge : $\lambda = 6700$ Å $\quad \nu = 4{,}478.10^{14}$ Hz

Vert : $\lambda' = 5500$ Å $\quad \nu' = 5{,}455.10^{14}$ Hz

$$\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2 = \left(\frac{5{,}455}{4{,}478}\right)^2 = 1{,}4839$$

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = 1{,}4839 \qquad 2{,}4839\beta = 0{,}4839 \qquad \beta = 0{,}1948$$

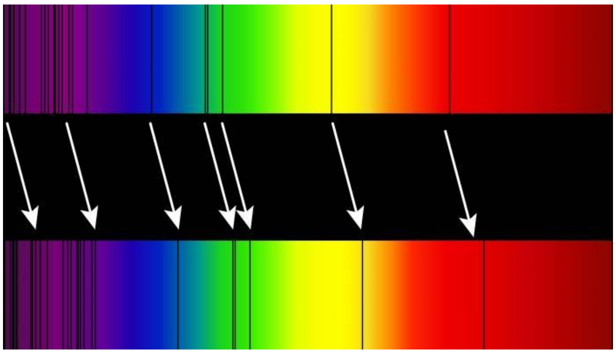
$$U = 0{,}5844.10^8 \text{ m/s} = 2{,}10.10^8 \text{ km/h}$$

Le policier ne le croit pas.

Exercice 4

La figure supérieure montre le spectre d'émission réel de l'étoile alors que la figure du bas montre le spectre observé.

Les deux spectres ont la même origine de longueur d'onde. Quand l'étoile s'éloigne, les raies émises sont décalées vers le rouge. Le décalage est d'autant plus important que la vitesse d'éloignement de l'étoile est grande.



Exercice 5

1°) Cas où le miroir s'éloigne de la source S.

La fréquence de l'onde lumineuse reçue par le miroir est :

$$\nu'_d = \nu_S \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad \beta = \frac{U}{c}$$

2°) La fréquence de l'onde lumineuse réfléchie et reçue par la source S est :

$$\nu'_S = \nu'_d \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)} = \nu_S \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)$$

$$\lambda'_S = \lambda_S \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = \frac{\lambda'_S}{\lambda_S} = 3 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{U}{c} \cong 0{,}5$$

3°) Cas où le miroir se rapproche de la source S.

La fréquence de l'onde lumineuse reçue par le miroir est :

$$\nu'_d = \nu_S \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad \beta \cong 0{,}5$$

La fréquence de l'onde lumineuse reçue par la source S est :

$$\nu'_S = \nu'_d \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \nu_S \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$$

$$\lambda'_S = \lambda_S \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) \qquad \lambda'_S = \lambda_S \left(\frac{1-0{,}5}{1+0{,}5}\right) = 2186{,}66\ \text{Å}$$

$$\lambda'_S = 2186{,}66\ \text{Å}$$

Exercice 6

En appliquant l'expression de l'effet Doppler longitudinal, on obtient **:**

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}}$$

$$\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)} = \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{6890}{6563}\right)^2 = 1{,}1021$$

$$(1+\beta) = 1{,}1021\,(1-\beta) \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{0{,}1021}{2{,}1021} = 0{,}0485$$

$$v = \beta\, c = 1{,}46.\,10^{7}\ \mathrm{m/s} = 1{,}46.\,10^{4}\ \mathrm{km/s}$$

En utilisant le graphe de Hubble de la loi de Hubble et l'équivalence 1 Mpc = $3{,}26.10^{6}$ année-lumière (a.l), on trouve une distance :

$$d \cong 240\ \mathrm{Mpc} = 768.\,10^{6}\ \mathrm{al}$$

En utilisant la loi de Hubble $v = H_0.d$, on trouve la distance d soit :

$$d = \frac{v}{H_0} = \frac{1{,}46.\,10^{4}}{67} = 218\ \mathrm{Mpc} = 710.\,10^{6}\ \mathrm{a.l}$$

Si on ne tient pas compte de la relativité restreinte, l'expression de la longueur d'onde mesurée en fonction de la longueur d'onde émise par la galaxie s'écrit comme suit :

$$\lambda' = \lambda\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} c = \frac{327}{6563} c = 0{,}04982c$$

$$v = 1{,}49.\,10^{7}\ \mathrm{m/s} = 1{,}49.\,10^{4}\ \mathrm{km/s}$$

En utilisant la loi de Hubble $v = H_0.d$, on trouve la distance d soit :

$$d = \frac{v}{H_0} = \frac{1{,}49.\,10^{4}}{67} = 222\ \mathrm{Mpc} = 725.\,10^{6}\ \mathrm{al}$$

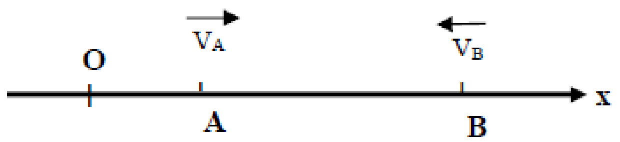
Les résultats en physique classique sont différents de 2% des résultats obtenus en relativité restreinte.

Exercice 7

1°) En appliquant les lois de la mécanique classique, la vitesse de A par rapport à B est égale à :

$$V_{A/B} = V_{A/O} + V_{O/B} = V_{A/O} - V_{B/O} = \ 1{,}2\ c$$

Ce résultat est impossible car il contredit le postulat n°2 de la relativité restreinte.



En appliquant les lois de la mécanique relativiste, la vitesse de A par rapport à B est égale à :

$$V_{A/B} = \frac{V_{A/O} + V_{O/B}}{1 + \frac{V_{A/O}.\,V_{O/B}}{c^2}} = \frac{V_{A/O} - V_{B/O}}{1 - \frac{V_{A/O}.\,V_{B/O}}{c^2}} = \frac{+0{,}7c + 0{,}5c}{1 + \frac{0{,}7c.\,0{,}5c}{c^2}} = 0{,}888\ c$$

2°) La période d'émission $T_0 = 1s$ des impulsions lumineuses constitue un temps propre car la mesure se fait dans le même lieu. Donc : $T_0 = 1$ seconde. L'intervalle de temps séparant la réception de deux flashs lumineux consécutifs pour un observateur terrestre en O constitue un temps impropre.
La dilatation du temps permet de calculer le temps impropre soit :

$$T = \gamma_A T_0 \quad \text{où} \quad \gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_A^2}} = 1{,}40$$
$$T = 1{,}4 \text{ s}$$

3°) Comme la fusée s'éloigne de la Terre, la longueur d'onde mesurée par un observateur terrestre O est égale à :

$$\lambda'_O = \lambda_S \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \text{avec} \quad \beta = 0{,}7$$

$$\lambda'_O = 1{,}652 \text{ µm} > \lambda_S = 6940 \text{ Å}$$

Comme la fusée se rapproche de la fusée B, la longueur d'onde mesurée par un observateur B est égale à :

$$\lambda'_B = \lambda_S \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{avec} \quad \beta = 0{,}888$$

$$\lambda'_B = 1690{,}3 \text{ Å} < \lambda_S = 6940 \text{ Å}$$

5 Diagramme de Minkowski

5.1 Intervalle espace-temps.

Exercice 1

On rappelle les formules de Lorentz de changement de repère :

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - \beta c t_1) \\ ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_2 = \gamma(x_2 - \beta c t_2) \\ ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2) \end{cases}$$

1°)

$$x'_2 - x'_1 = \gamma[(x_2 - x_1) - \beta(ct_2 - ct_1)]$$

Si $x'_1 = x'_2$ on obtient :

$$(x_2 - x_1) = \beta(ct_2 - ct_1) \qquad \beta = \frac{(x_2 - x_1)}{c(t_2 - t_1)} \quad \rightarrow \quad U = \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)}$$

$$(\Delta s_{12})^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 > 0 \quad \rightarrow \quad c > \frac{\Delta x}{\Delta t} = c\frac{(x_2 - x_1)}{(ct_2 - ct_1)} = U$$

Le référentiel R' dans lequel les deux événements se produisent au même endroit doit avoir une vitesse U inférieure à la vitesse de la lumière :

$$U = c\frac{(x_2 - x_1)}{(ct_2 - ct_1)}$$

A.N : E_1 (2, 1) et E_2 (6, 2).

$$(\Delta s_{12})^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 4^2 - 1^2 = 15 > 0$$

On est en présence d'un intervalle du genre temps.

$$U = c\frac{(x_2 - x_1)}{(ct_2 - ct_1)} = c\frac{2-1}{(6-2)} \quad \rightarrow \quad U = \frac{c}{4} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1{,}032$$

Il y a une possibilité de causalité entre les événements E_1 et E_2 car la vitesse de propagation de l'information soit $U = \frac{c}{4}$ est inférieure à la vitesse de la lumière.

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) = 1{,}032(1 - 0{,}25.2) = 0{,}516 \text{ m} \\ ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) = 1{,}032(2 - 02{,}5.1) = 1{,}806 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2) = 1{,}032(2 - 0{,}25.6) = 0{,}516 \text{ m} \\ ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2) = 1{,}032(6 - 0{,}25.2) = 5{,}676 \text{ m} \end{cases}$$

Dans le repère mobile R' les coordonnées des deux événements sont :

E_1 (1.806, 0.516) et E_2 (5.676, 0.516)

On constate que les deux événements se produisent au même endroit $x'_1 = x'_2 = 0{,}516$ m et que leur ordre est respecté car $ct'_1 < ct'_2$.

Comme $\left|\frac{(2-1)}{(6-2)}\right| = 0{,}25 < 1$, la situation est causale quelle que soit la vitesse du repère mobile R'. Le carré de l'intervalle espace-temps dans le repère mobile R' est égal à :

$$(\Delta s'_{12})^2 = [c(\Delta t')]^2 - (\Delta x')^2 = (5{,}676 - 1{,}806)^2 = 14{,}977 \ \text{m}^2$$

On remarque le carré de l'intervalle espace-temps est un invariant.

2°)

$$ct'_2 - ct'_1 = \gamma[c(t_2 - t_1) - \beta(x_2 - x_1)]$$

Si $t'_1 = t'_2$ on obtient :

$$\beta = c\frac{(t_2 - t_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{U}{c} \quad \rightarrow \quad U = c^2\frac{(t_2 - t_1)}{(x_2 - x_1)}$$

$$(\Delta s_{12})^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0 \quad \rightarrow \quad c < \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)}$$

$$c < \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} = \frac{c^2}{U} \quad \rightarrow \quad U < c$$

A.N : E_1 (2, 1) et E_2 (4, 6)

$$(\Delta s_{12})^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 2^2 - 5^2 = -21\ \mathrm{m}^2 < 0$$

On est en présence d'un intervalle du genre espace.

$$\beta = \frac{(ct_2 - ct_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{4-2}{6-1} = 0{,}4 \qquad \rightarrow \qquad U = 0{,}4.c \qquad \rightarrow \qquad \gamma = 1{,}09$$

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) = 1{,}09(1 - 0{,}4.2) = 0{,}21 \\ ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) = 1{,}09(2 - 0{,}4.1) = 1{,}74\ \mathrm{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2) = 1{,}09(6 - 0{,}4.4) = 4{,}79\ \mathrm{m} \\ ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2) = 1{,}09(4 - 0{,}4.6) = 1{,}74\ \mathrm{m} \end{cases}$$

Dans le repère mobile R' les coordonnées des deux événements sont :

E_1 (1.74, 0.21) et E_2 (1.74, 4.79)

On constate que les deux événements se produisent au même instant $ct'_1 = ct'_2 = 1{,}74$ m.

Exercice 2

1°) L'expression de l'intervalle espace-temps est :

$$\Delta_{12}^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = 1{,}2^2 - 1^2 = 0{,}44\ \mathrm{m}^2$$

L'intervalle est du genre temps. Il peut donc y avoir un lien de causalité entre les deux événements. L'événement E_1 est donc une cause potentielle de l'événement E_2. Dans le repère mobile, on obtient les coordonnées spatiales des deux événements soit :

$$x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) \quad \text{et} \quad x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2)$$

$$x'_2 - x'_1 = \gamma[(x_2 - x_1) - \beta(ct_2 - ct_1)]$$

$$\text{Pour } x'_1 = x'_2 \qquad \beta = \frac{(x_2 - x_1)}{(ct_2 - ct_1)} = 0{,}83 \quad \Rightarrow \quad U = 0{,}83\ c$$

2°) L'expression de l'intervalle espace-temps est :

$$\Delta_{12}^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = 0{,}2^2 - 1{,}6^2 = -\ 0{,}84\ \mathrm{m}^2$$

L'intervalle est du genre espace. Il n'y a aucune relation de causalité entre les événements E_1 et E_2. Dans le repère mobile, on obtient les coordonnées temporelles des deux événements soit :

$$ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) \quad \text{et} \quad ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2)$$

$$ct'_2 - ct'_1 = \gamma[(ct_2 - ct_1) - \beta(x_2 - x_1)]$$

$$\text{Pour } t'_1 = t'_2 \qquad \beta = \frac{(ct_2 - ct_1)}{(x_2 - x_1)} = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad U = 0{,}4\ c$$

Exercice 3

1°) Le carré de l'intervalle d'espace-temps est égal à :

$$\Delta_{12}^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\frac{T^2}{4} - a^2$$

Pour que ces événements soient reliés causalement, il faut que le carré de l'intervalle d'espace-temps soit positif :

$$\Delta_{12}^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{T} > \frac{2\mathrm{a}}{c}$$

La vitesse U du référentiel R' dans lequel ces deux événements sont simultanés doit être égale à :

$$\mathrm{ct}'_2 - \mathrm{ct}'_1 = \gamma[(\mathrm{ct}_2 - \mathrm{ct}_1) - \beta(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)]$$

$$\mathrm{ct}'_2 - \mathrm{ct}'_1 = 0 \quad \Rightarrow \beta = \frac{(\mathrm{ct}_2 - \mathrm{ct}_1)}{(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)} = -\frac{\mathrm{cT}}{2\mathrm{a}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{U} = -\mathrm{c}\frac{\mathrm{cT}}{2\mathrm{a}}$$

2°) Ecrivons l'expression du temps t' dans le repère animé d'une vitesse $\mathrm{U} = -\mathrm{c}\frac{\mathrm{cT}}{2\mathrm{a}}$, puis calculons les valeurs des temps t'_1 *et* t'_2 :

$$\mathrm{ct}' = \gamma(\mathrm{ct} - \beta\,\mathrm{x})$$

$$\mathrm{ct}'_1 = \gamma(\mathrm{c}t_1 - \beta\,x_1) = \gamma(\mathrm{cT} - \beta\,\mathrm{a}) = \gamma\left(\mathrm{cT} + \frac{\mathrm{cT}}{2}\right) = \gamma\frac{3\mathrm{cT}}{2}$$

$$\mathrm{t}'_1 = \gamma\frac{3\mathrm{T}}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{cT}}{2\mathrm{a}}\right)^2}}\frac{\mathrm{T}}{2} = \frac{3\mathrm{aT}}{\sqrt{4\mathrm{a}^2 - \mathrm{c}^2\mathrm{T}^2}}$$

$$\mathrm{ct}'_2 = \gamma(\mathrm{ct}_2 - \beta\,\mathrm{x}_2) = \gamma\left(\mathrm{c}\frac{\mathrm{T}}{2} + \frac{\mathrm{cT}}{2\mathrm{a}}\,2\mathrm{a}\right) = \gamma\left(\frac{\mathrm{cT}}{2} + \mathrm{cT}\right) = \gamma\frac{3\mathrm{cT}}{2}$$

$$\mathrm{t}'_2 = \gamma\frac{3\mathrm{T}}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{cT}}{2\mathrm{a}}\right)^2}}\frac{\mathrm{T}}{2} = \frac{3\mathrm{aT}}{\sqrt{4\mathrm{a}^2 - \mathrm{c}^2\mathrm{T}^2}}$$

$$\mathrm{t}'_1 = \mathrm{t}'_2 = \frac{3\mathrm{aT}}{\sqrt{4\mathrm{a}^2 - \mathrm{c}^2\mathrm{T}^2}}$$

Exercice 4

1°) La vitesse de R' par rapport à R pour laquelle les deux événements A et B ont lieu au même point dans le repère R' se calcule comme suit :

$$\mathrm{x}' = \gamma(\mathrm{x} - \beta\mathrm{ct})$$

$$\mathrm{x}'_A = \gamma(\mathrm{x}_A - \beta\mathrm{ct}_A) \quad \text{et} \quad \mathrm{x}'_B = \gamma(\mathrm{x}_B - \beta\mathrm{ct}_B)$$

$$\mathrm{x}'_A = \mathrm{x}'_B \qquad \gamma(\mathrm{x}_A - \beta\mathrm{ct}_A) = \gamma(\mathrm{x}_B - \beta\mathrm{ct}_B)$$

$$\mathrm{x}_B - \mathrm{x}_A = \beta(\mathrm{ct}_B - \mathrm{ct}_A) \qquad \beta = \frac{\mathrm{x}_B - \mathrm{x}_A}{(\mathrm{ct}_B - \mathrm{ct}_A)} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{c}}$$

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{x}_B - \mathrm{x}_A}{(\mathrm{t}_B - \mathrm{t}_A)} = \frac{2{,}5.\,10^9}{10} = 2{,}5.\,10^8\ \mathrm{m/s}$$

2°) Quelle est la vitesse du pour laquelle repère R' pour laquelle les événements A et B se produisent au même endroit

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$ct'_A = \gamma(ct_A - \beta x_A) \qquad ct'_B = \gamma(ct_B - \beta x_B)$$

$$ct'_A = ct'_B \qquad \gamma(ct_A - \beta x_A) = \gamma(ct_B - \beta x_B)$$

$$ct_B - ct_A = \beta(x_B - x_A) \quad \beta = \frac{ct_B - ct_A}{(x_B - x_A)} = \frac{U}{c}$$

$$\frac{U}{c} = c\frac{t_B - t_A}{(x_B - x_A)} = 3.10^8 \frac{10}{2{,}5.10^9} = \frac{3}{2{,}5} > 1 \quad \text{Impossible}$$

Il est impossible de trouver un repère R' pour lequel les événements A et B se produisent au même endroit.

3°) Le délai Δt'entre A et B est égal à :

$$U = 2{,}5.10^8\ m/s \qquad \beta = \frac{2{,}5}{3} \qquad \gamma = 1{,}8$$

$$ct'_A = \gamma(ct_A - \beta x_A) \qquad ct'_B = \gamma(ct_B - \beta x_B)$$

$$ct'_B - ct'_A = \gamma[(ct_B - \beta x_B) - (ct_A - \beta x_A)]$$

$$ct'_B - ct'_A = \gamma[(ct_B - ct_A) - \beta(x_B - x_A)]$$

$$\text{Comme } ct_A = x_A \quad \Rightarrow \quad ct'_B - ct'_A = \gamma(ct_B - \beta x_B)$$

$$t'_B - t'_A = \gamma\left(t_B - \frac{\beta}{c}x_B\right) = 1{,}8\left(10 - \frac{2{,}5}{3}\frac{1}{3.10^8}2{,}5.10^9\right)$$

$$t'_B - t'_A = 18\left[1 - \left(\frac{2{,}5}{3}\right)^2\right] = 5{,}5\ s$$

Exercice 5

1°) L'intervalle espace-temps entre les deux événements E_0 et E_1 est égal à :

$$\Delta_{12}^2 = c^2(t_1 - t_0)^2 - (x_2 - x_1)^2 = 1{,}2^2 - 2^2 = -2{,}56\ m^2$$

L'intervalle espace-temps entre les deux événements E_0 et E_1 est du genre espace. Il ne peut pas avoir de causalité entre les deux événements.

2°) On écrit les équations de passage du repère R vers le repère R' soit :

$$\begin{cases} ct'_0 = \gamma(ct_0 - \beta x_0) \\ ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) \end{cases}$$

$$ct'_1 - ct'_0 = \gamma[(ct_1 - ct_0) - \beta(x_1 - x_0)]$$

Pour que les deux événements soient simultanés dans le repère mobile R', il faut que :

$$ct'_1 - ct'_0 = \gamma[(ct_1 - ct_0) - \beta(x_1 - x_0)] = 0$$

$$\beta = \frac{(ct_1 - ct_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{U}{c} \quad \Rightarrow \quad U = c\frac{(ct_1 - ct_0)}{(x_1 - x_0)} = 0{,}6\ c$$

3°) La durée qui sépare ces deux événements pour un observateur se déplaçant à une vitesse U = 0,8 c par rapport à R est égal à :

$$ct'_1 - ct'_0 = \gamma[(ct_1 - ct_0) - \beta(x_1 - x_0)]$$

$$\beta = 0{,}8 \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{0{,}6} = \frac{5}{3} \qquad c\Delta t' = \gamma[c\Delta t - \beta\Delta x]$$

$$c\Delta t' = \frac{5}{3}(1{,}2 - 0{,}8.2) = -\frac{2}{3}\text{m} \qquad \Delta t' = -\frac{2}{9}.10^{-8}\ \text{s}$$

$$\Delta t = \frac{1{,}2}{3.10^8} = 4\ \text{ns} \quad \text{et} \quad \Delta t' = -2{,}2\ \text{ns}$$

Dans le repère fixe R, l'événement E_1 est postérieur à l'événement E_0, mais dans le repère fixe R' animé d'une vitesse U = 0,8c l'événement E_1 se produit avant l'événement E_0.

$$c\Delta t' = \frac{5}{3}(1{,}2 - 0{,}8.1) = \frac{2}{3}\text{m} \qquad \Delta t' = t'_1 - t'_0 = \frac{2}{9}.10^{-8}\ \text{s}$$

Exercice 6

L'expression de l'intervalle espace-temps est :

$$\Delta_{12}^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = 1^2 - 2^2 = -3\ \text{m}^2 < 0$$

L'intervalle est du genre espace. Il n'y a aucune relation de causalité entre les événements E_1 et E_2.

Dans le repère mobile, on obtient les coordonnées spatiales des deux événements soit :

$$x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) \quad \text{et} \quad x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2)$$

$$x'_2 - x'_1 = \gamma[(x_2 - x_1) - \beta(ct_2 - ct_1)]$$

Pour que les deux événements se produisent au même endroit soit $x'_1 = x'_2$, on aura :

$$\beta = \frac{(x_2 - x_1)}{(ct_2 - ct_1)} = 2 \quad \Rightarrow \quad U = 2c$$

Il est impossible de trouver un référentiel mobile pour lequel les deux événements se produisent au même endroit car la vitesse de ce référentiel doit être égale à 2c, ce qui est en contradiction avec les postulats de la relativité restreinte.
Dans le repère mobile, on obtient les coordonnées temporelles des deux événements soit :

$$ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) \qquad \text{et} \qquad ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2)$$

$$ct'_2 - ct'_1 = \gamma[(ct_2 - ct_1) - \beta(x_2 - x_1)]$$

$$\text{Pour } t'_1 = t'_2 \qquad \beta = \frac{(ct_2 - ct_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad U_S = 0{,}5\ c$$

Examinons l'ordre d'apparition des événements E_1 et E_2 dans des référentiels dont la vitesse est différente de $U_S = 0{,}5$ c. Dans le référentiel fixe, on remarque que l'événement E_1 se produit avant l'événement E_2 car $ct_1 = 3$ m est inférieur à $ct_2 = 4$ m.

$$ct'_2 - ct'_1 = \Delta(ct') = \gamma[(ct_2 - ct_1) - \beta(x_2 - x_1)]$$

$$\Delta(ct') = \gamma\left[1 - 2\frac{U_S}{c}\right]$$

$$\begin{cases} U_S = 0{,}5c \Rightarrow ct'_1 = ct'_2 \\ U_S < 0{,}5c \Rightarrow ct'_1 < ct'_2 \\ U_S > 0{,}5c \Rightarrow ct'_1 > ct'_2 \end{cases}$$

Pour des vitesses inférieures à $U_S = 0.5c$, l'ordre d'apparition des événements est conservé. Par contre pour des vitesses supérieures à $U_S = 0.5$ c, l'ordre d'apparition des événements est inversé.

Examinons quelques situations :

1er Cas : $\qquad U = 0{,}5\ c \quad \beta = 0{,}5 \quad \gamma = 1{,}15$

$$ct'_1 = 2{,}875\ \text{m} \quad = \quad ct'_2 = 2{,}875\ \text{m}$$

2eme Cas **:** $\qquad U = 0{,}4\ c \quad \beta = 0{,}4 \quad \gamma = 1{,}09$

$$ct'_1 = 2{,}83\ \text{m} \quad < \quad ct'_2 = 3{,}05\ \text{m}$$

3eme Cas **:** $\qquad U = 0{,}6\ c \quad \beta = 0{,}6 \quad \gamma = 1{,}25.$

$$ct'_1 = 3\ \text{m} \quad > \quad ct'_2 = 2{,}75\ \text{m}$$

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{1{,}2}{3.10^8} = 4\ \text{ns} \qquad \Delta t' = t'_1 - t'_0 = \frac{2}{9}.10^{-8}\ \text{s} = 2{,}2\ \text{ns}$$

Exercice 7

L'expression de l'intervalle espace-temps est :

$$\Delta_{12}^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = 1^2 - 2^2 = -3\ \text{m}^2 < 0$$

L'intervalle est du genre espace. Il n'y a aucune relation de causalité entre les événements E_1 et E_2.

Dans le repère mobile, on obtient les coordonnées spatiales des deux événements soit :

$$x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) \quad \text{et} \quad x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2)$$

$$x'_2 - x'_1 = \gamma[(x_2 - x_1) - \beta(ct_2 - ct_1)]$$

Pour que les deux événements se produisent au même endroit soit $x'_1 = x'_2$, on aura :

$$\beta = \frac{(x_2 - x_1)}{(ct_2 - ct_1)} = 2 \quad \Rightarrow \quad U = 2\,c$$

Il est impossible de trouver un référentiel mobile pour lequel les deux événements se produisent au même endroit car la vitesse de ce référentiel doit être égale à 2c, ce qui est en contradiction avec les postulats de la relativité restreinte.
Dans le repère mobile, on obtient les coordonnées temporelles des deux événements soit :

$$ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) \quad \text{et} \quad ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2)$$

$$ct'_2 - ct'_1 = \gamma[(ct_2 - ct_1) - \beta(x_2 - x_1)]$$

$$\text{Pour } t'_1 = t'_2 \qquad \beta = \frac{(ct_2 - ct_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad U_S = 0{,}5\,c$$

Examinons l'ordre d'apparition des événements E_1 et E_2 dans des référentiels dont la vitesse est différente de $U_S = 0{,}5$ c. Dans le référentiel fixe, on remarque que l'événement E_1 se produit avant l'événement E_2 car $ct_1 = 3$ m est inférieur à $ct_2 = 4$ m.

$$ct'_2 - ct'_1 = \Delta(ct') = \gamma[(ct_2 - ct_1) - \beta(x_2 - x_1)]$$

$$\Delta(ct') = \gamma\left[1 - 2\frac{U_S}{c}\right]$$

$$\begin{cases} U_S = 0{,}5c \Rightarrow ct'_1 = ct'_2 \\ U_S < 0{,}5c \Rightarrow ct'_1 < ct'_2 \\ U_S > 0{,}5c \Rightarrow ct'_1 > ct'_2 \end{cases}$$

Pour des vitesses inférieures à $U_S = 0.5c$, l'ordre d'apparition des événements est conservé. Par contre pour des vitesses supérieures à $U_S = 0.5c$, l'ordre d'apparition des événements est inversé.

Examinons quelques situations :

1er Cas : $U = 0{,}5\,c \quad \beta = 0{,}5 \quad \gamma = 1{,}15$

$$ct'_1 = 2{,}875 \text{ m} \quad = \quad ct'_2 = 2{,}875 \text{ m}$$

2eme Cas : $U = 0{,}4\,c \quad \beta = 0{,}4 \quad \gamma = 1{,}09$

$$ct'_1 = 2{,}83 \text{ m} \quad < \quad ct'_2 = 3{,}05 \text{ m}$$

3eme Cas : $U = 0{,}6\,c \quad \beta = 0{,}6 \quad \gamma = 1{,}25.$

$$ct'_1 = 3 \text{ m} \quad > \quad ct'_2 = 2{,}75 \text{ m}$$

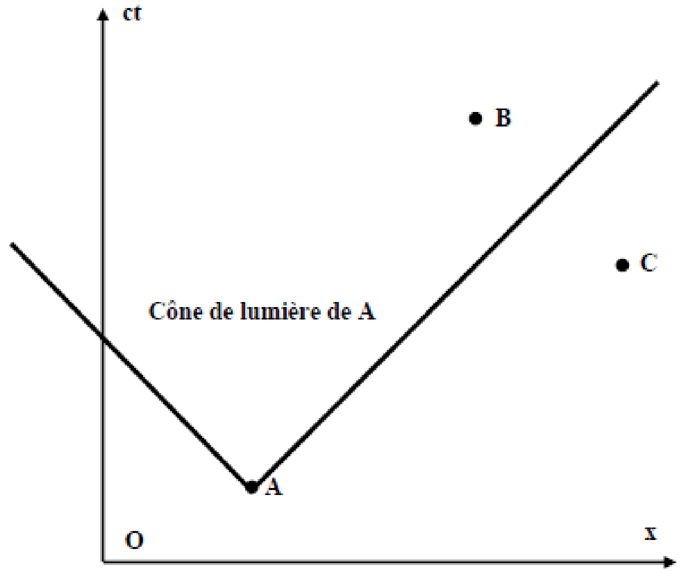
Exercice 8

1°) L'intervalle espace-temps entre les deux événements A et B est égal à :

$$(\Delta_{12})^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2 > 0$$

On a un intervalle genre temps.

En dessinant le cône de lumière associé à l'événement A, on remarque que l'événement B se trouve à l'intérieur du cône de lumière associé à l'événement A. On peut dire qu'il peut y avoir une causalité entre les deux événements.



Dans cet exemple on a :

$$\frac{\Delta x}{c\Delta t} = \frac{(x_2 - x_1)}{(ct_2 - ct_1)} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$ct'_2 - ct'_1 = \gamma[(ct_2 - ct_1) - \beta(x_2 - x_1)]$$

$$ct'_2 - ct'_1 = \gamma(ct_2 - ct_1)\left[1 - \beta\frac{(x_2 - x_1)}{(ct_2 - ct_1)}\right]$$

La quantité $\beta\frac{(x_2 - x_1)}{(ct_2 - ct_1)}$ est inférieure à l'unité car β < 1 et $\frac{(x_2 - x_1)}{(ct_2 - ct_1)} = 0{,}6$. En conséquence, la quantité $\left[1 - \beta\frac{(x_2 - x_1)}{(ct_2 - ct_1)}\right]$ est toujours positive. En conséquence la quantité $(ct'_2 - ct'_1)$ a le même signe que la quantité $(ct_2 - ct_1)$. On voit que l'ordre des événements est le même dans les deux repères quelle que soit la valeur de la vitesse U = β c.

On aura toujours l'événement B après l'événement A quelle que soit la vitesse U du repère mobile.

Peut-il y avoir une inversion d'apparition des événements dans le référentiel R' ? En utilisant la formule ci-dessous :

$$ct'_2 - ct'_1 = \gamma(ct_2 - ct_1)\left[1 - \frac{U}{c}\frac{(x_2 - x_1)}{(ct_2 - ct_1)}\right]$$

Pour avoir une inversion de l'apparition des événements dans le référentiel R', il faudrait que la quantité $\left[1 - \frac{U}{c}\frac{(x_2 - x_1)}{(ct_2 - ct_1)}\right]$ devienne négative soit :

$$\left[1 - \frac{U}{c}\frac{(x_2 - x_1)}{(ct_2 - ct_1)}\right] < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U}{c}\frac{(x_2 - x_1)}{(ct_2 - ct_1)} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{U}{c} > \frac{(ct_2 - ct_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{5}{3}$$

Comme $(ct_2 - ct_1) > (x_2 - x_1)$, on trouve que U doit être plus grand que la vitesse de la lumière, ce qui est impossible. Dans notre exemple on doit avoir une vitesse U > 1,66 c.
En résumé, dans un intervalle du genre temps, l'ordre d'apparition des événements dans R' est le même que dans R. Il est indépendant de la vitesse U du repère mobile R'.
La vitesse U du repère R' pour que les deux événements se produisent au même endroit dans le repère R' est donnée ci-dessous :

$$x'_2 - x'_1 = \gamma[(x_2 - x_1) - U(t_2 - t_1)]$$

$$x'_2 = x'_1 \quad \text{si} \quad \beta = \frac{U}{c} = \frac{(x_2 - x_1)}{c(t_2 - t_1)} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Comme l'intervalle espace-temps entre les deux événements A et B est le même dans les deux repères, on obtient :

$$(\Delta_{AB})^2 = (\Delta'_{AB})^2 \quad \Rightarrow \quad c^2(\Delta t_{AB})^2 - (\Delta x_{AB})^2 = c^2(\Delta t'_{AB})^2 - (\Delta x'_{AB})^2 = 4^2$$

$$(\Delta x'_{AB}) = 0 \quad \Rightarrow \quad c^2(\Delta t'_{AB})^2 = c^2(\Delta t_{AB})^2 - (\Delta x_{AB})^2 = 4^2$$

$$c\Delta t'_{AB} = 4 \text{ m} \quad < \quad c\Delta t_{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ m}$$

2°) L'intervalle espace-temps entre les deux événements A et C est égal à :

$$(\Delta_{13})^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 3^2 - 5^2 = -4^2 < 0$$

On a un intervalle genre espace. La causalité entre les deux événements A et C est impossible. On remarque que l'événement C se trouve à l'extérieur du cône de lumière associé à l'événement A. On peut dire qu'il peut y avoir une causalité entre les deux événements.

La distance spatiale $\Delta x = 5$ qui sépare les deux événements est plus grande que la distance temporelle $c\Delta t = 3$. Pour que les deux événements puissent s'influencer, le signal doit se propager à une vitesse $\frac{(x_3 - x_1)}{(t_3 - t_1)} = \frac{5}{S}c$ supérieure à la vitesse de la lumière, ce qui est impossible car aucune interaction ne peut se propager plus vite que la lumière. Dans ce cas, les événements A et C sont totalement indépendants. Il n'y a aucun lien entre ces deux événements.

En utilisant la transformation de Lorentz, on obtient :

$$(ct'_C - ct'_A) = \gamma(ct_C - ct_A)\left[1 - \frac{U}{c}\frac{(x_C - x_A)}{(ct_C - ct_A)}\right]$$

Quelle est la vitesse U pour laquelle la quantité $\left[1 - \frac{U}{c}\frac{(x_C - x_A)}{(ct_C - ct_A)}\right] = 0$? On trouve :

$$U_0 = c\,\frac{(ct_C - ct_A)}{(x_C - x_A)} \quad \text{ou} \quad \beta_0 = \frac{(ct_C - ct_A)}{(x_C - x_A)} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

L'écart spatial entre les deux événements A et C dans le repère mobile est égal à :

$$x_A = \gamma(x'_A - \beta c t'_A) \quad \text{et} \quad x_C = \gamma(x'_C - \beta c t'_C)$$

$$x_C - x_A = \gamma(x'_C - \beta ct'_C) - \gamma(x'_A - \beta ct'_A) = \gamma(x'_C - x'_A) - \gamma(\beta ct'_C - \beta ct'_A)$$

$$ct'_C = ct'_A \quad \Rightarrow \quad x_C - x_A = \gamma(x'_C - x'_A) \text{ ou } x'_C - x'_A = \frac{x_C - x_A}{\gamma}$$

$$\beta = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad x'_C - x'_A = \frac{x_C - x_A}{\gamma} = (x_C - x_A)\sqrt{1-\beta^2} = 5.0{,}8 = 4 \text{ m}$$

Comme l'intervalle espace-temps entre les deux événements A et C est le même dans les deux repères, on obtient :

$$(\Delta_{AC})^2 = (\Delta'_{AC})^2 \;\Rightarrow\; c^2(\Delta t_{AC})^2 - (\Delta x_{AC})^2 = c^2(\Delta t'_{AC})^2 - (\Delta x'_{AC})^2 = 3^2 - 5^2 = -4^2 < 0$$

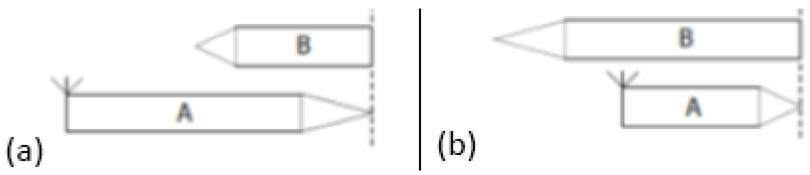
$$\Delta t'_{AC} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Delta x'_{AC})^2 = (\Delta x_{AC})^2 - c^2(\Delta t_{AC})^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2$$

$$\Delta x'_{AC} = 4 \text{ m} < \Delta x_{AC} = 5\text{m}$$

Exercice 9

1°) Pour le pilote de la fusée A, la longueur de la fusée B est égale à $\frac{L_0}{\gamma}$. Quand la queue de la fusée B coïncide avec la tête de la fusée A soit à l'instant $t_A = \frac{L_0}{\gamma u}$, la fusée A lance le missile qui ne touche pas la fusée B. (voir figure a)

2°) Pour le pilote de la fusée B, la longueur de la fusée A est égale à $\frac{L_0}{\gamma}$. Quand la tête de la fusée A coïncide avec la queue de la fusée B, la fusée A lance le missile qui touche la fusée B. (voir figure b)



3°) Selon l'observateur A, les coordonnées spatio-temporels (x_A, t_A) des événements suivants sont :

(1) : La tête de la fusée B coïncide avec la tête de la fusée A : $(x_A = 0, t_A = 0)$

(2) : La queue de la fusée B coïncide avec la tête de la fusée A : $\left(x_A = 0, t_A = \frac{L_0}{\gamma u}\right)$

(3) : Le missile est envoyé par la queue de A : $\left(x_A = -L_0, t_A = \frac{L_0}{\gamma u}\right)$

(4) : La tête de la fusée B coïncide avec la queue de la fusée A : $\left(x_A = -L_0, t_A = \frac{L_0}{u}\right)$

(5) : La queue de la fusée B coïncide avec la queue de la fusée A : $\left(x_A = -L_0, t_A = \frac{L_0}{u} + \frac{L_0}{\gamma u}\right)$.

L'ordre temporel des événements est : 1, 2, 3, 4 et 5. Les événements 2 et 3 sont simultanés. Ils se produisent en deux endroits différents mais au même instant $t = \frac{L_0}{\gamma u}$

Comme le facteur de Lorentz γ est supérieur à 1, le missile est envoyé sur la fusée B à l'instant $t_M = \frac{L_0}{\gamma u}$ avant l'instant $t = \frac{L_0}{u}$ où la tête de la fusée de B coïncide avec la queue de la fusée de A ($t_M = \frac{L_0}{\gamma u} < t = \frac{L_0}{u}$). Les deux événements « le missile est envoyé par la queue de A et la tête de la fusée B coïncide avec la queue de la fusée A » ne se produisent pas au même instant.

Dans le calcul des temps des événements, pour l'observateur de la fusée A la longueur de la fusée B est égale à $\frac{L_0}{\gamma}$ et non L_0. En conséquence le missile ne touche pas la fusée B.

Selon l'observateur B, les coordonnées spatio-temporels (x_B, t_B) des événements ci-dessous sont obtenues à partir de la transformation de Lorentz soit :

$$x_B = \gamma(x_A + ut_A) \quad \text{et} \quad t_B = \gamma\left(t_A + \frac{u}{c^2}x_A\right)$$

(1) : La tête de la fusée A coïncide avec la tête de la fusée B : $(x_B = 0, t_B = 0)$

(2) : La tête de la fusée A coïncide avec la queue de la fusée B : $\left(x_B = L_0, t_B = \frac{L_0}{u}\right)$

(3) : Le missile est envoyé par la queue de A : $\left(x_B = L_0 - \gamma L_0, t_B = \frac{L_0}{u} - \frac{u\gamma}{c^2}L_0\right)$

(4) : La queue de la fusée A coïncide avec la tête de la fusée B : $\left(x_B = 0, t_B = \frac{L_0}{u\gamma}\right)$

(5) : La queue de la fusée A coïncide avec la queue de la fusée B : $\left(x_B = L_0, t_B = \frac{L_0}{u} + \frac{L_0}{u\gamma}\right)$.

L'ordre temporel des événements est : 1, 4, 3, 2 et 5. Les événements 3 et 4 ne sont plus simultanés. Ils se produisent en deux endroits différents mais à des instants différents.

Comparons l'instant où le missile est envoyé par la queue de la fusée A soit $t_M = \frac{L_0}{u} - \frac{u\gamma}{c^2}L_0$ à l'instant où la queue de la fusée A coïncide avec la tête de la fusée B soit $t = \frac{L_0}{u\gamma}$. La différence temporelle entre ces deux événements est :

$$\Delta t = t - t_M = \frac{L_0}{u\gamma} - \left(\frac{L_0}{u} - \frac{u\gamma}{c^2}L_0\right)$$

$$t_M = \frac{L_0}{u} - \frac{u\gamma}{c^2}L_0 = \frac{L_0}{u}\left(\frac{c^2}{c^2} - \frac{u^2\gamma}{c^2}\right) = \frac{L_0}{u}\frac{c^2 - u^2\gamma}{c^2} = \frac{L_0}{u}(1 - \gamma\beta^2) \ \text{ où } \ \beta = \frac{u}{c}$$

$$t_M = \frac{L_0}{u\gamma}(\gamma - \gamma^2\beta^2) = \frac{L_0}{u\gamma}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right) = t\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)$$

Es-ce-que la valeur de la quantité $\Delta = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)$ est plus grande ou petite par rapport à l'unité ?

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{1-\beta^2} - \beta^2}{1-\beta^2} = \frac{N}{D}$$

Comme $\sqrt{1-\beta^2}$ est inférieur à 1, on en déduit que le numérateur N est plus petit que le dénominateur D. La quantité Δ est inférieure à l'unité. On en déduit que : $t_M < t$.

Comme $t_M < t$. le missile est envoyé avant que la queue de la fusée A coïncide avec la tête de la fusée B. En conclusion on peut dire :

Dans le repère de la fusée A, les événements « la queue de la fusée B coïncide avec la tête de la fusée A et le missile est envoyé par la queue de A » sont simultanés.
Dans le repère de la fusée B, les événements « la queue de la fusée B coïncide avec la tête de la fusée A et le missile est envoyé par la queue de A » ne sont pas simultanés.

$$\Delta t = \frac{u\gamma}{c^2} L_0 = \beta \frac{\gamma}{c} L_0$$

$$\beta = 0{,}866 \qquad \gamma = 2 \qquad L_0 = 1 \text{ m}$$

$$\Delta t = 5{,}77 \text{ ns}$$

Nous avons donc montré que t_M est toujours inférieur à t, ce qui montre que selon B, le missile tire (M) avant que la queue de A ne dépasse la pointe de B (T). Le missile manque donc aussi selon B. Le fait est que dans le référentiel de B, la pointe de A dépassant la queue de B n'est pas simultanée au tir du missile, et se produit en fait après le tir du missile.

Puisque les deux observateurs sont d'accord pour dire que le missile manque la fusée, en fait les deux ont raison : ils sont d'accord pour dire que le missile manque la fusée.

$$t_{AB} = \frac{L_0}{u\gamma} \qquad t_M = \frac{L_0}{u} - \frac{u\gamma}{c^2} L_0 = \frac{L_0}{u}\left(\frac{c^2}{c^2} - \frac{u^2\gamma}{c^2}\right) = \frac{L_0}{u}\frac{c^2 - u^2\gamma}{c^2}$$

$$t_M = \frac{L_0}{u\gamma}\left(\gamma - \frac{u^2\gamma^2}{c^2}\right) = \frac{L_0}{u\gamma}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right) = \frac{L_0}{u\gamma}\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2} - \beta^2}{1-\beta^2}\right)$$

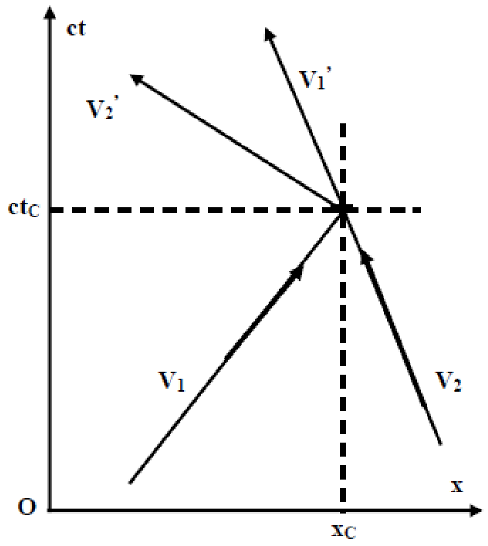
$$\sqrt{1-\beta^2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-\beta^2} - \beta^2 < 1 - \beta^2$$

$$t_M < t_{AB}$$

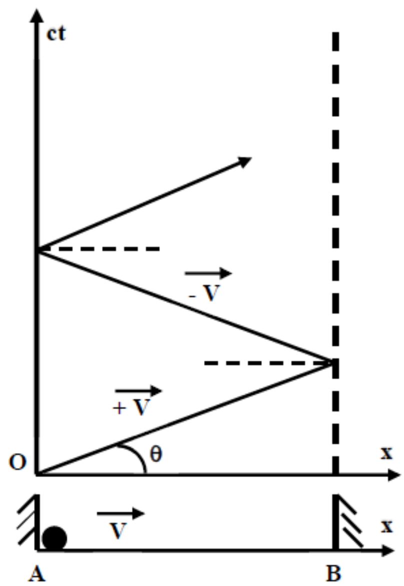
5.2 Diagramme de Minkowski.

Exercice 1

1°) Le diagramme ci-dessous montre les coordonnées (ct_c, x_c) du point de collision. Avant la collision, on voit la trajectoire de la masse m_1 avec une vitesse V_1 positive et la trajectoire de la masse m_2 avec une vitesse V_2 négative.



Après la collision, on voit les trajectoires des masses m_1 et m_2 avec des vitesses respectives V_1' et V_2', toutes les deux négatives (dirigées vers les x négatifs).



2°) La ligne en zig-zag dans le diagramme (ct, x) ne représente pas la trajectoire de la particule car la trajectoire de la particule est une ligne droite représentée par le segment AB. Le diagramme représente, grâce à l'orientation du vecteur vitesse $\vec{V}$, le sens de déplacement de la particule au cours du temps.

L'angle θ est d'autant plus petit que la vitesse de la particule est élevée.

Exercice 2

1°) Le carré de l'intervalle espace-temps est égal à :

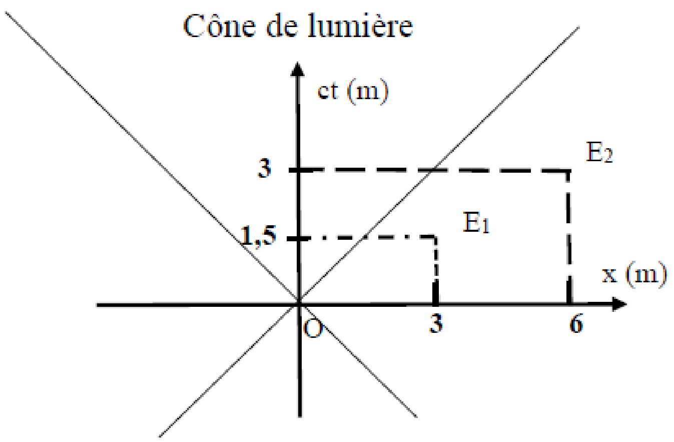
$$\Delta_{12}^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = 9.10^{16}.25.10^{-18} - 9 = -6{,}75 \text{ m}^2$$

L'intervalle est du genre espace car $\Delta_{12}^2 < 0$. La distance spatiale Δx qui sépare les deux événements est plus grande que la distance temporelle $c\Delta t$.

$$(x_2 - x_1)^2 > (ct_2 - ct_1)^2 \quad \Rightarrow \quad (x_2 - x_1) > c(t_2 - t_1)$$

$$\text{Vitesse de l'information} = \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} > c$$

Pour que les deux événements puissent s'influencer, le signal doit se propager à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière, ce qui est impossible. Dans le cas d'un intervalle genre espace il n'y a aucune relation de causalité entre les événements E_1 et E_2.



2°) Utilisons la transformation de Lorentz soit :

$$ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) \quad \text{et} \quad ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2)$$

$$ct'_2 - ct'_1 = \gamma[c(t_2 - t_1) - \beta(x_2 - x_1)]$$

Si on veut que les deux événements soient simultanés dans le référentiel R', la vitesse de R' par rapport à R doit être égale à :

$$ct'_2 = ct'_1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{c(t_2 - t_1)}{(x_2 - x_1)}$$

$$\beta = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad U = 150000 \text{ km/s}$$

3°) Si on veut que les deux événements se produisent au même endroit dans le référentiel R'', la vitesse de R'' par rapport à R doit être égale à :

$$x'_1 = \gamma(x_1 - \beta c\, t_1) \quad \text{et} \quad x'_2 = \gamma(x_2 - \beta c\, t_2)$$

$$x'_1 = x'_2 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{(x_2 - x_1)}{c(t_2 - t_1)}$$

$$\beta = \frac{3}{1{,}5} = 2 \quad \Rightarrow \quad U = 2c \quad \text{Impossible}$$

Il est impossible que les deux événements E_1 et E_2 se produisent au même endroit dans le référentiel R'' et ce quelle que soit la vitesse de R'' par rapport à R.

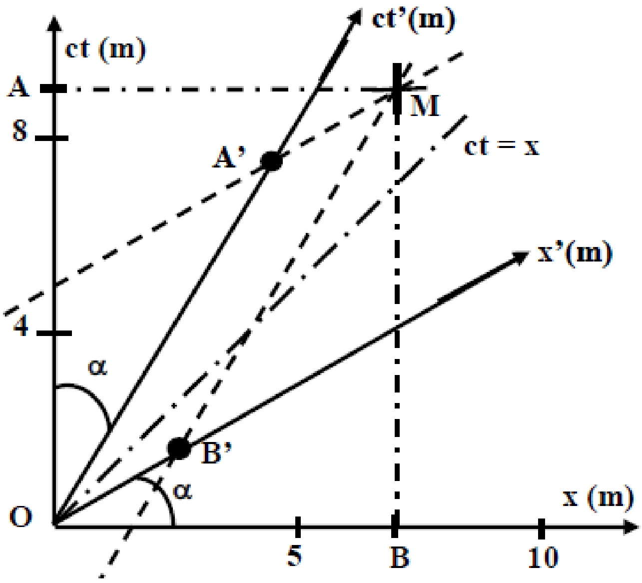
Exercice 3

On sait que l'axe Oct' du repère mobile doit faire un angle α avec l'axe Oct du repère fixe. La valeur de l'angle α est égale à :

$$\tan\alpha = \frac{V}{c} = \beta = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30{,}96°$$

Pour construire l'axe Ox', on dessine le symétrique de l'axe Oct' par rapport à l'axe ct = x (première bissectrice du premier quadrant).

$$(\mathrm{Ox}, \mathrm{Ox}') = (\mathrm{Oct}, \mathrm{Oct}') = \alpha = 30{,}96^{\circ}$$



Les coordonnées du point M dans le repère fixe (Oct, Ox) sont :

$$ct = OA = +9\ \mathrm{m} \quad \text{et} \quad x = OB = +7\ \mathrm{m}$$

Pour obtenir graphiquement les coordonnées du point M dans le repère mobile, il suffit de tracer les parallèles aux axes fixes Oct et Ox passant par le point M.

On obtient les coordonnées suivantes :

$$ct' = OA' \quad \text{et} \quad x' = OB'$$

Il est difficile d'estimer graphiquement les coordonnées du point M dans le repère mobile car les unités de longueur dans le repère mobile sont différentes des unités de longueur dans le repère fixe.

La transformation de Lorentz permet de calculer les coordonnées du point M dans le repère mobile soit :

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad \text{et} \quad ct' = \gamma(ct - \beta\, x)$$

$$\beta = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}6^2}} = 1{,}25$$

$$x' = 2\ \mathrm{m} \quad \text{et} \quad ct' = 6\ \mathrm{m}$$

Exercice 4

En utilisant les relations directes de la transformation de Lorentz, on obtient :

$$\beta = 0{,}5 \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1{,}15$$

$$x' = \gamma(x - \beta c\, t) \quad \text{et} \quad ct' = \gamma(ct - \beta\, x)$$

$$\mathrm{A}: x_1 = 5\ \mathrm{m} \quad ct_1 = 8\ \mathrm{m} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}: x_2 = 10\ \mathrm{m} \quad ct_2 = 8\ \mathrm{m}$$

$$\begin{cases} x'_1 = 1{,}15 & ct'_1 = 6{,}32\ \mathrm{m} \\ x'_2 = 6{,}9\ \mathrm{m} & ct'_2 = 3{,}45\ \mathrm{m} \end{cases}$$

On peut vérifier qu'il y a conservation de l'intervalle espace-temps. Dans le repère fixe R on a :

$$\Delta_{12}^2(\mathrm{R}) = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = -25\ \mathrm{m}^2$$

Dans le repère mobile R' on a :

$$\Delta_{12}^2(\mathrm{R}') = (ct'_2 - ct'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 \cong -25\ \mathrm{m}^2$$

Par la méthode graphique, on trace les axes Ox' et Oct' du repère mobile qui se déplace à une vitesse V = 0,5 c.

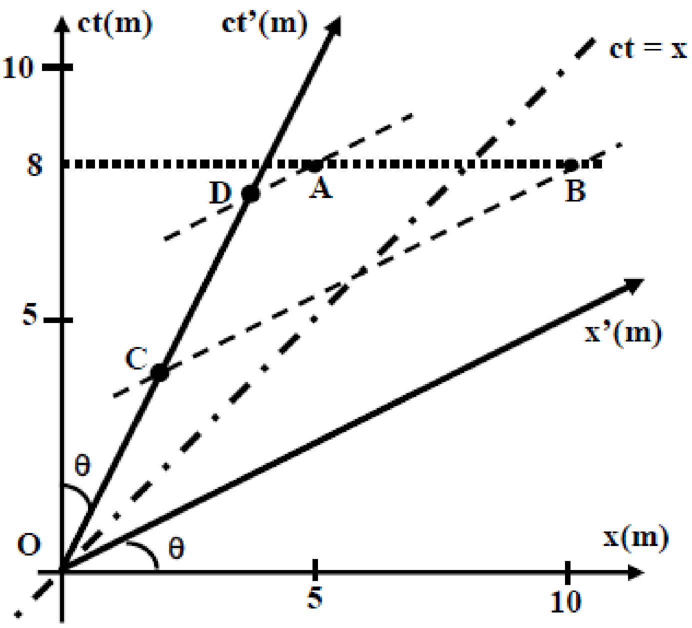
L'axe Oct' fait un angle θ avec l'axe Oct dont la valeur est égale à :

$$\tan\theta = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \theta = 26{,}56°$$

L'axe Ox' est le symétrique de l'axe Oct' par rapport à la bissectrice de premier quadrant.
A partir des points A et B, on dessine les parallèles à l'axe Ox'. On obtient les points D et C dont les coordonnées temporelles sont :

$$\mathrm{OD} = ct'_1 \quad \text{et}\ \mathrm{OC} = ct'_2$$

Comme $ct'_1 \neq ct'_2$ on constate que les événements A et B ne sont plus simultanés dans le repère mobile.



Pour avoir les valeurs numériques de ct'_1 et ct'_2 il faut calculer le calibrage des axes Ox' et Oct' du repère mobile qui est différent du calibrage des axes Ox et Oct du repère fixe.

Exercice 5

a) L'axe Oct' fait un angle θ avec l'axe Oct dont la valeur est égale à :

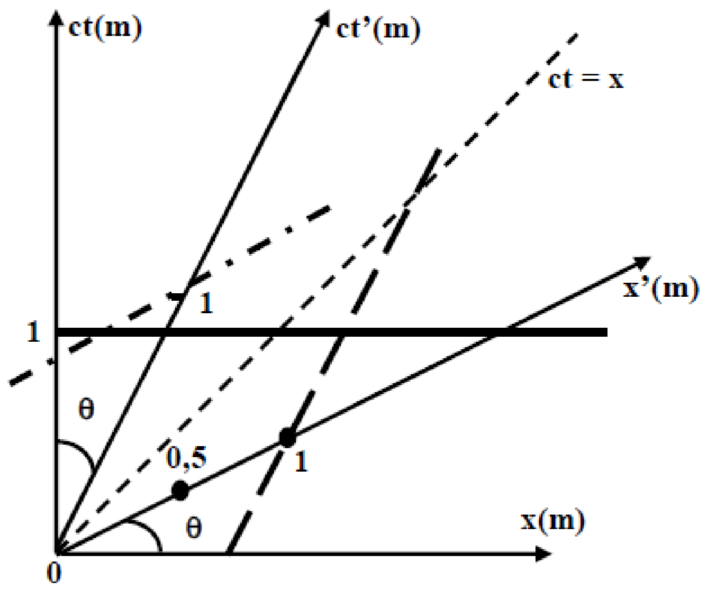
$$\tan\theta = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \theta = 26{,}56°$$

L'axe Ox' est le symétrique de l'axe Oct' par rapport à la bissectrice de premier quadrant.

b) Il faut appliquer entre les mesures géométriques faites sur les deux axes un facteur d'échelle dont la valeur est donnée par l'expression :

$$\frac{\text{Unité axe Oct}'}{\text{Unité axe Oct}} = \frac{\text{Unité axe Ox}'}{\text{Unité axe Ox}} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1+0{,}5^2}{1-0{,}5^2}} = 1{,}29$$

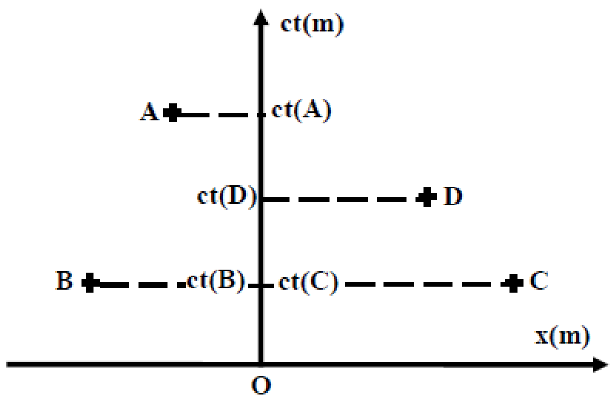
Les unités sur les axes Ox' et Oct' sont plus grandes de 29 % que celles sur les axes Ox et Oct.
c) Le lieu des événements qui se produisent simultanément à l'instant ct = 1 m est une droite parallèle à l'axe Ox et d'ordonnée +1 m.
d) Le lieu des événements qui se produisent simultanément à l'instant ct'= 1 m est une droite parallèle à l'axe Ox' et d'ordonnée +1 m.
e) Le lieu de l'événement qui se produit à ct'= 0 et x'= 0,5 m est représenté par un point d'abscisse x' = + 0,5 m et d'ordonnée ct'= 0
f) Le lieu des événements qui se produisent à x'= 1 m est une droite parallèle à l'axe Oct' et passant par le point (ct' = 0, x' = + 1 m).

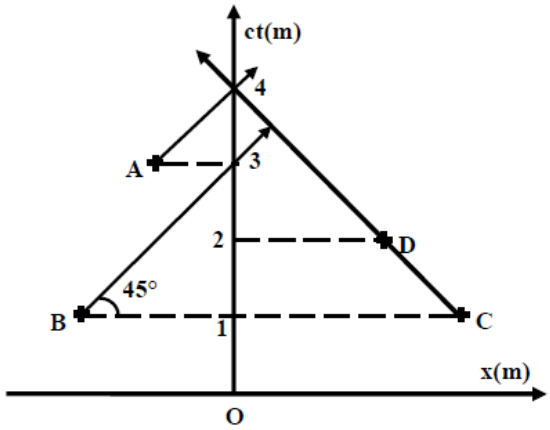


Exercice 6

Les lignes horizontales donnent les événements qui se produisent au même instant. Les lampes B et C émettent les flashs au même instant ct(B) = ct(C) alors que la lampe C est plus éloignée que la lampe B. Ensuite c'est au tour de la lampe D et enfin c'est la lampe A qui flash en dernier. On aura ainsi :

$$ct(B) = ct(C) < ct(D) < ct(A)$$





La ligne d'univers d'un photon est représentée dans le diagramme (ct, x) par la bissectrice du premier ou second quadrant selon sa direction de propagation soit ct = + x ou ct = - x.

Pour connaitre l'ordre de détection des photons par un observateur placé au point x = 0, on trace, à partir des sources d'émission de lumière, des droites parallèles aux bissectrices du premier et du deuxième quadrant. On constate que les photons émis par la source B arrivent en premier tandis que les photons émis par les sources A, C et D arrivent simultanément en seconde position.

Exercice 7

Utilisons la relation de Lorentz soit :

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

et examinons les cas suivants en supposant que l'événement A se produit avant l'événement B dans le repère fixe.

1°) A (ct = 0, x = 0) et B (ct = 2, x = 4) et β = 0,2 :

$$ct'_A = \gamma(ct_A - \beta x_A) = 0 \quad \text{et} \;\; ct'_B = \gamma(ct_B - \beta x_B) = \gamma(2 - 0{,}2.4) = 1{,}2.\gamma$$

$$t'_A < t'_B$$

L'ordre temporel d'apparition des événements A et B dans le repère mobile est le même que dans le repère fixe

2°) A (ct = 0, x = 0) et B (ct = 2, x = 4) et β = 0,5 :

$$ct'_A = \gamma(ct_A - \beta x_A) = 0 \quad \text{et} \;\; ct'_B = \gamma(ct_B - \beta x_B) = \gamma(2 - 0{,}5.4) = 0$$

$$t'_A = t'_B$$

Les événements A et B dans le repère mobile sont simultanés dans le repère mobile alors que l'événement A apparait avant l'événement B dans le repère fixe.

3°) A (ct = 0, x = 0) et B (ct = 2, x = 4) et β = 0,2 :

$$ct'_A = \gamma(ct_A - \beta x_A) = 0 \text{ et } \; ct'_B = \gamma(ct_B - \beta x_B) = \gamma(2 - 0{,}8.4) = -1{,}2.\gamma$$

$$t'_A > t'_B$$

L'ordre temporel d'apparition des événements A et B dans le repère mobile est l'opposé de l'ordre temporel d'apparition dans le repère fixe.

En conclusion, on peut dire que l'ordre temporel d'apparition des événements dans le repère mobile dépend de la vitesse du repère mobile par rapport au repère fixe.

Remarque : On aurait pu trouver ces résultats en utilisant les équations de Lorentz soit :

$$t'_A = \gamma\left(t_A - \frac{V}{c^2}\,x_A\right) \qquad t'_B = \gamma\left(t_B - \frac{V}{c^2}\,x_B\right)$$

$$t'_B - t'_A = \gamma\left[(t_B - t_A) - \frac{V}{c^2}(x_B - x_A)\right]$$

$$c(t'_B - t'_A) = \gamma[c(t_B - t_A) - \beta(x_B - x_A)]$$

$$t'_B > t'_A \quad \Rightarrow \quad \beta < \frac{c(t_B - t_A)}{(x_B - x_A)} = 0{,}5 \quad \text{Ordre respecté}$$

$$t'_B = t'_A \quad \Rightarrow \quad \beta < \frac{c(t_B - t_A)}{(x_B - x_A)} = 0{,}5 \quad \text{Simultanéité}$$

$$t'_B < t'_A \quad \Rightarrow \quad \beta > \frac{c(t_B - t_A)}{(x_B - x_A)} = 0{,}5 \quad \text{Ordre inversé}$$

Exercice 8

1°) Pour un observateur lié à la grange, la longueur de la perche L'_P doit être égale à la dimension de la grange, soit :

$$L'_P = \frac{L_P}{\gamma} = L_G \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \frac{L_P}{L_G} = \frac{15}{10} = 1{,}5$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad 1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = \frac{\sqrt{1{,}25}}{1{,}5} \cong 0{,}75$$

$$V = 0{,}75\ c$$

2°) Pour le coureur, tout se passe comme si la grange se déplaçait vers lui à la vitesse (-V). En conséquence la grange sera contractée de sorte que sa dimension sera égale à :

$$L'_G = \frac{L_G}{\gamma} = \frac{10}{1{,}5} = 6{,}66\ \text{m}$$

La grange ne peut pas contenir la perche.

3°) Dans le référentiel de la grange, la longueur de la perche est égale à 10 m et la distance entre les deux portes (entrée et sortie) de la grange est égale à 10 m.

L'avant de la perche entre dans la grange à l'instant t = 0.

L'arrière de la perche entre dans la grange à l'instant :

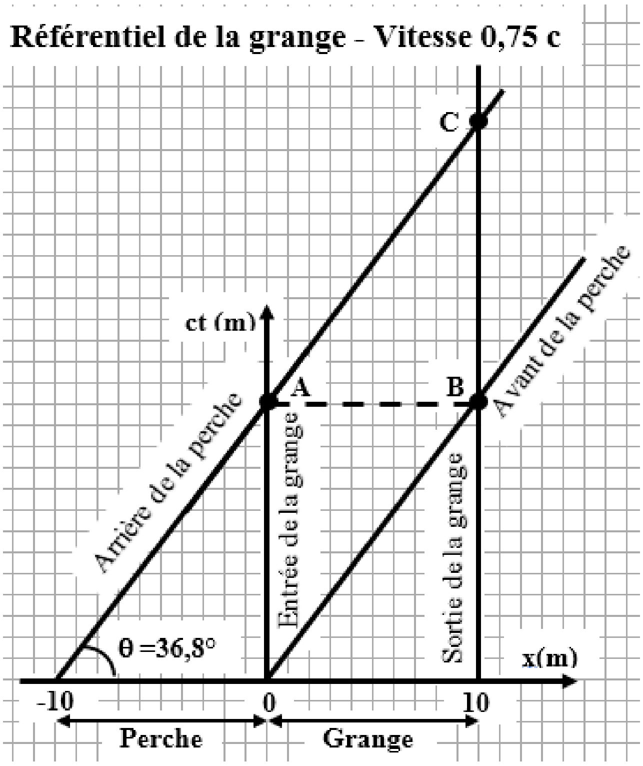
$$t = \frac{L'_P}{V} = \frac{10}{0{,}75c} = 44{,}44 \text{ ns} \quad \text{et} \quad ct = 13{,}33 \text{ m}$$

L'avant de la perche sort de la grange à l'instant :

$$t = \frac{L_G}{V} = \frac{10}{0{,}75c} = 44{,}44 \text{ ns} \quad \text{et} \quad ct = 13{,}33 \text{ m}$$

L'arrière de la perche sort de la grange à l'instant

$$t = \frac{L'_P}{V} + \frac{L_G}{V} = \frac{10}{0{,}75c} + \frac{10}{0{,}75c} = 88{,}88 \text{ ns} \quad \text{et} \quad ct = 26{,}66 \text{ m}$$



On remarque que lorsque l'arrière de la perche entre dans la grange, l'avant de la perche sort dans la grange. Ces deux événements sont simultanés pour l'observateur lié à la grange. Pendant une durée d'un dixième de nanoseconde, la perche peut être enfermée dans la grange.

4°) et **5°)** En utilisant l'échelle de graduation 1 carreau = 1 mètre, on obtient les coordonnées spatio-temporelles en mètres des points A, B et C, soit :

A (13, 0), B (13, 10), C (26, 10).

Dans le référentiel de la perche (ou coureur), la longueur de la perche est égale à 15 m et la distance entre les deux portes d'entrée et de sortie de la grange est égale à 6,66 m.

L'avant de la grange touche l'avant de la perche à l'instant t = 0.

L'arrière de la grange touche l'avant de la perche à l'instant :

$$t = \frac{L'_G}{V} = \frac{6{,}66}{0{,}75c} = 29{,}6\text{ ns} \quad \text{et} \quad ct = 8{,}88\text{ m}$$

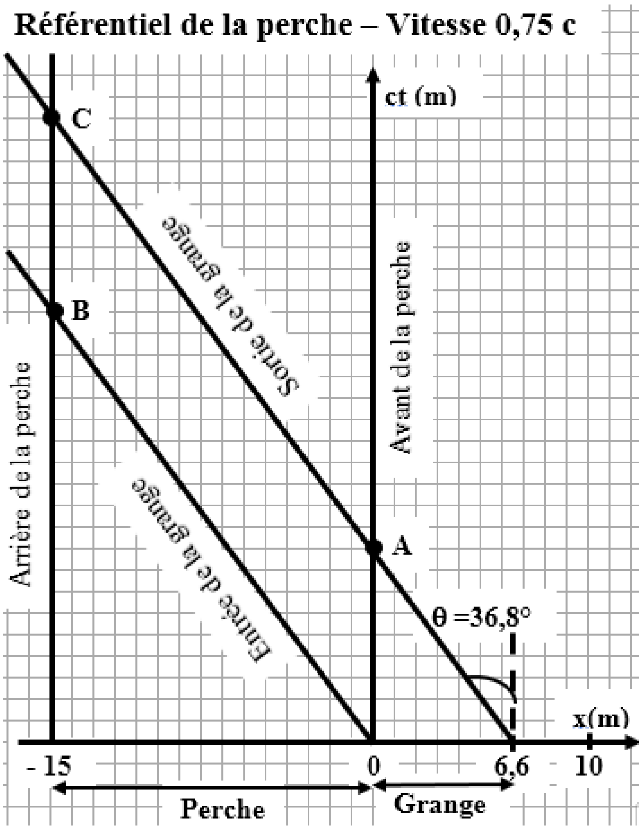
L'avant de la grange touche l'arrière de la perche à l'instant :

$$t = \frac{L_P}{V} = \frac{15}{0{,}75c} = 66{,}66\text{ ns} \quad \text{et} \quad ct = 20\text{ m}$$

L'arrière de la grange touche l'arrière de la perche à l'instant :

$$t = \frac{L'_G}{V} + \frac{L_P}{V} = \frac{6{,}66}{0{,}75c} + \frac{15}{0{,}75c} = 96{,}26\text{ ns} \quad \text{et} \quad ct = 28{,}88\text{ m}$$

On remarque que lorsque l'avant de la perche sort de la grange, l'arrière de la perche n'est pas encore entré dans la grange. Ces deux événements ne sont pas simultanés pour le coureur. En conséquence, la perche ne peut pas être enfermée dans la grange.



L'échelle de graduation 1 carreau = 1 mètre permet de déterminer les coordonnées spatio-temporelles en mètres des points A, B et C, soit :

A (9, 0), B (20, -15), C (29, -15)

Exercice 9

1°) L'axe Oct' fait un angle θ avec l'axe Oct dont la valeur est :

$$\tan\theta = \frac{V}{c} = \beta = 0{,}6 \qquad \theta = 30{,}9°$$

L'équation de l'axe Oct' est :

$$ct = \frac{1}{\beta}x = \frac{5}{3}x$$

Les coordonnées du point d'intersection noté 1 entre l'hyperbole $(ct)^2 - x^2 = 1$ et l'axe Oct' sont : $(ct)^2 - x^2 = 1$ et $ct = \frac{5}{3}x \Rightarrow ct = 1{,}25$ et $x = 0{,}75$

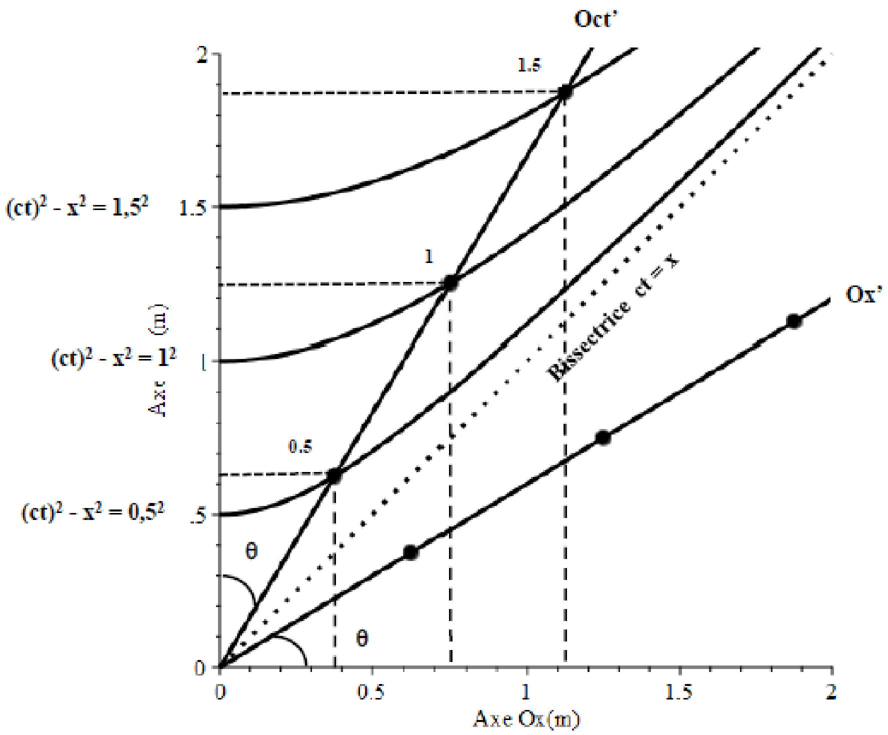
Les coordonnées du point d'intersection noté 0,5 entre l'hyperbole $(ct)^2 - x^2 = 0.5^2$ et l'axe Oct' sont :

$$(ct)^2 - x^2 = 0.5^2 \quad \text{et} \quad ct = \frac{5}{3}x \quad \Rightarrow \quad ct = 0{,}625 \quad \text{et} \quad x = 0{,}375$$

Les coordonnées du point d'intersection noté 1,5 entre l'hyperbole $(ct)^2 - x^2 = 1.5^2$ et l'axe Oct' sont :

$$(ct)^2 - x^2 = 1.5^2 \quad \text{et} \quad ct = \frac{5}{3}x \quad \Rightarrow \quad ct = 1{,}875 \quad \text{et} \quad x = 1{,}125$$

Pour conserver l'invariance de l'intervalle espace-temps dans les deux repères, on remarque que chaque hyperbole relie la même graduation sur deux axes ct et ct'.



Graduation de l'axe Oct' – Vitesse 0.6 c

On voit que l'unité de longueur sur l'axe Oct' est plus grande que l'unité de longueur sur l'axe Oct. Une mesure des unités de longueur sur les deux axes donne un facteur d'échelle de 1,47.

On retrouve ce résultat en utilisant la formule ci-dessous :

$$\frac{\text{Unité de longueur sur l'axe Oct'(ou l'axe Ox')}}{\text{Unité de longueur sur l'axe Oct (ou l'axe Ox)}} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1+0{,}36}{1-0{,}36}} = 1{,}457$$

2°) Pour tracer la graduation de l'axe Ox', il suffit de construire le symétrique de l'axe Oct' par rapport à la bissectrice du premier quadrant.

Exercice 10

1°) Pour le jumeau F resté sur Terre, la distance Terre-Etoile est une longueur propre. La durée du voyage selon F est égale à :

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{V}} = \frac{3 \text{ années} \,.\, \mathrm{c}}{0{,}6 \,.\, \mathrm{c}} = \frac{30}{6} = 5 \text{ années}$$

Le temps du voyage aller mesuré par F est de 5 années.

Pour le jumeau M la durée du voyage est un temps propre T_0 qui peut être déterminé en utilisant la relation de dilatation des temps soit :

$$\mathrm{T}_0 = \frac{\mathrm{T}}{\gamma} \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}} = 0{,}6$$

$$\gamma = 1{,}25 \quad \Rightarrow \mathrm{T}_0 = 4 \text{ années}$$

Le temps du voyage aller mesuré par l'astronaute M est de 4 années.

Au retour de M sur la Terre la différence d'âge entre les deux jumeaux est égale à :

$$\text{Différence d'age} = \Delta = 2.(5-4) = 2 \text{ années}$$

Quand ils se retrouveront sur Terre, F et M auront respectivement 30 ans et 28 ans.

2°) L'expression de la différence d'âge en fonction de la vitesse est :

$$\Delta = \frac{2\mathrm{D}}{\mathrm{V}} - \frac{2\mathrm{D}}{\mathrm{V}} . \frac{1}{\gamma} = \frac{2\mathrm{D}}{\mathrm{c}\,\beta}\left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right)$$

$$\sqrt{1-\beta^2} = 1 - \frac{\Delta\,\mathrm{c}\,\beta}{2\mathrm{D}} \qquad \Rightarrow \qquad 1-\beta^2 = 1 - \frac{\Delta\,\mathrm{c}\,\beta}{\mathrm{D}} + \left(\frac{\Delta\,\mathrm{c}}{2\mathrm{D}}\right)^2 \beta^2$$

$$\beta^2\left[1 + \left(\frac{\Delta\,\mathrm{c}}{2\mathrm{D}}\right)^2\right] = \frac{\Delta\,\mathrm{c}\,\beta}{\mathrm{D}} \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \frac{\Delta\,\mathrm{c}}{\mathrm{D}} . \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\Delta\,\mathrm{c}}{2\mathrm{D}}\right)^2\right]}$$

$$\beta = \frac{5 \text{ années.c}}{3 \text{ années.c}} . \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{5 \text{ années.c}}{2.3 \text{ années.c}}\right)^2\right]} = \frac{5}{3} . \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{5}{2.3}\right)^2\right]}$$

$$\beta = 0{,}9836 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{V} = 0{,}9836 \text{ c}$$

Selon le jumeau F, le temps mesuré T pour effectuer un aller-retour est :

$$\mathrm{T} = \frac{2\ \mathrm{D}}{\mathrm{V}} = \frac{2.3 \text{ années.c}}{0{,}9836.\,\mathrm{c}} = 6{,}10 \text{ années}$$

Selon le jumeau M, le temps mesuré T_0 pour effectuer un aller-retour est :

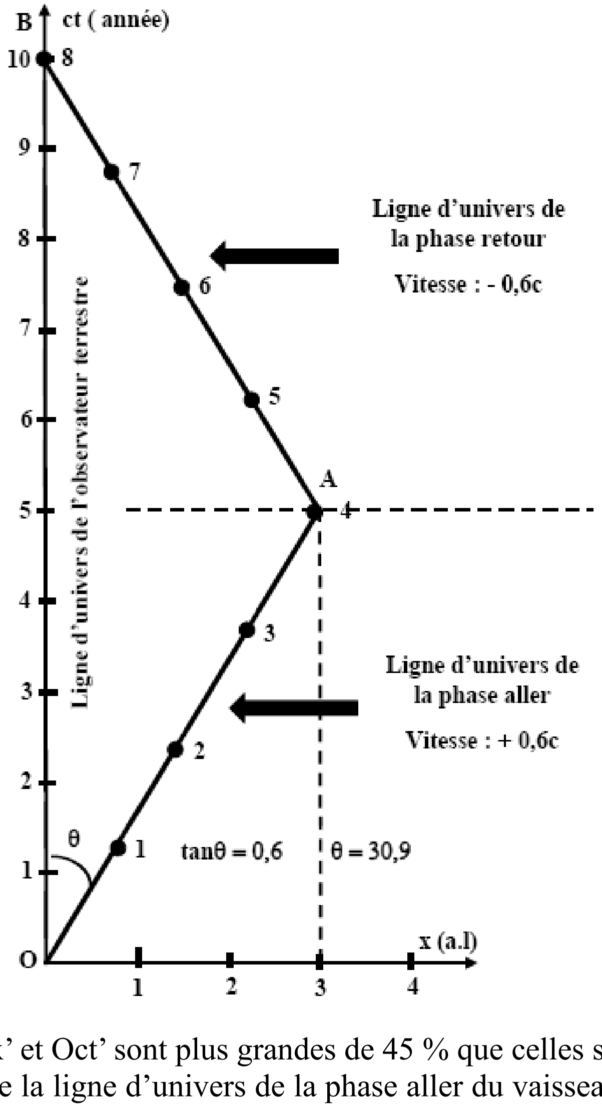
$$\beta = 0{,}9836 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 5{,}5443$$

$$T_0 = \frac{T}{\gamma} = \frac{6{,}10 \text{ années}}{5{,}5443} = 1{,}1 \text{ année}$$

$$T = 6{,}1 \text{ années et } T_0 = 1{,}1 \text{ année}$$

3°) Les axes Ox' et Oct' font respectivement un angle θ = 30°,96 tel que tanθ = β = 0,6 avec les axes Ox et Oct. De plus, il faut appliquer, entre les mesures géométriques faites sur les deux axes, un facteur d'échelle dont la valeur est donnée par l'expression :

$$\frac{\text{Unité axe Oct}'}{\text{Unité axe Oct}} = \frac{\text{Unité axe Ox}'}{\text{Unité axe Ox}} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1+0{,}6^2}{1-0{,}6^2}} = 1{,}45$$



Les unités sur les axes Ox' et Oct' sont plus grandes de 45 % que celles sur les axes Ox et Oct. Le segment OA représente la ligne d'univers de la phase aller du vaisseau spatial animé d'une vitesse V = + 0,6c. Cette ligne d'univers est inclinée d'un angle θ = 30°,9 par rapport à l'axe Oct. Le segment AB représente la ligne d'univers de la phase retour du vaisseau spatial animé d'une vitesse V = - 0,6c. Le point, A de coordonnées x = 3 années et ct = 5 années – lumière, est le point où le vaisseau fait demi-tour. L'axe Oct représente la ligne d'univers de l'observateur immobile du référentiel terrestre.

4°) Le trait épais rouge représente la ligne d'univers de l'observateur terrestre. Les deux traits épais de couleur noire représentent les lignes d'univers à l'aller et au retour du vaisseau spatial. Tous les signaux lumineux émis par l'observateur terrestre sont représentés par des traits rouges inclinés de 45° par rapport à l'axe horizontal Ox et orientés vers le direction positive de l'axe Ox.
Quand le vaisseau atteint la distance de 3 années-lumière, il s'est écoulé 4 années dans le référentiel du vaisseau et 5 années dans le repère de l'observateur terrestre.
Dans la phase aller, le cosmonaute reçoit uniquement les deux premiers pulses lumineux (1 et 2 vers respectivement 2 et 4) émis par l'observateur terrestre. Ces deux signaux sont espacés d'une durée de 2 années dans le référentiel du vaisseau. Lors de la phase retour, le cosmonaute reçoit 8 signaux lumineux qui sont espacés d'une durée de 6 mois dans son référentiel soit une période de réception des signaux lumineux

Combien de temps Δt_V s'est – il écoulé selon l'horloge du vaisseau quand l'horloge de l'observateur terrestre indique $\Delta t_O = 1$ heure ?

$$\Delta T_V = \gamma \Delta T_O = \frac{\Delta T_O}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Combien de temps Δt_S a mis le signal lumineux pour parcourir la distance D ?

$$\Delta T_S = \frac{D}{c} = \frac{V}{c}\Delta T_V = \beta \frac{\Delta T_O}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Le temps mis par le signal pour arriver vaisseau est égal à :

$$\Delta t = \Delta T_V + \Delta T_S = \frac{\Delta T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} + \beta \frac{\Delta T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}(1+\beta)$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}}\Delta T_0$$

$$\text{Phase aller (le vaisseau s'éloigne de la Terre)}$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}}\Delta T_0 \quad \text{où } \Delta T_0 = 1 \text{ an et } \beta = 0{,}6$$

$$\Delta t = 1\sqrt{\frac{(1+0{,}6)}{(1-0{,}6)}} = 2 \text{ ans}$$

$$\text{Phase retour (le vaisseau se rapproche de la Terre)}$$

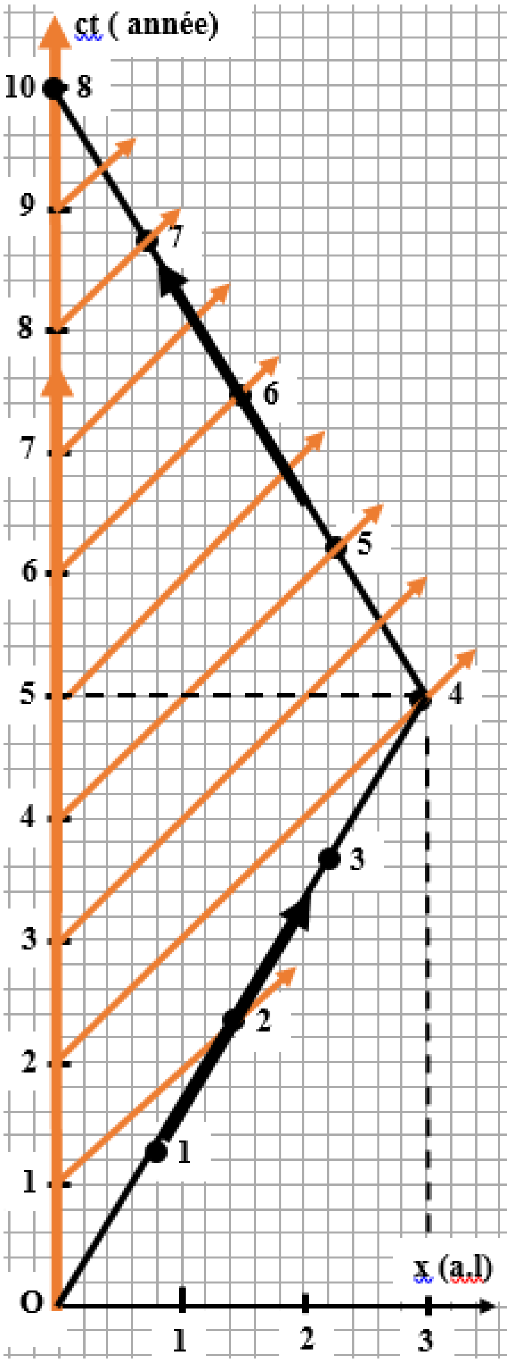
$$\Delta t = \sqrt{\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}}\Delta T_0 \quad \text{où } \Delta T_0 = 1 \text{ an et } \beta = 0{,}6$$

$$\Delta t = 1\sqrt{\frac{(1-0{,}6)}{(1+0{,}6)}} = 0{,}5 \text{ an} = 6 \text{ mois}$$

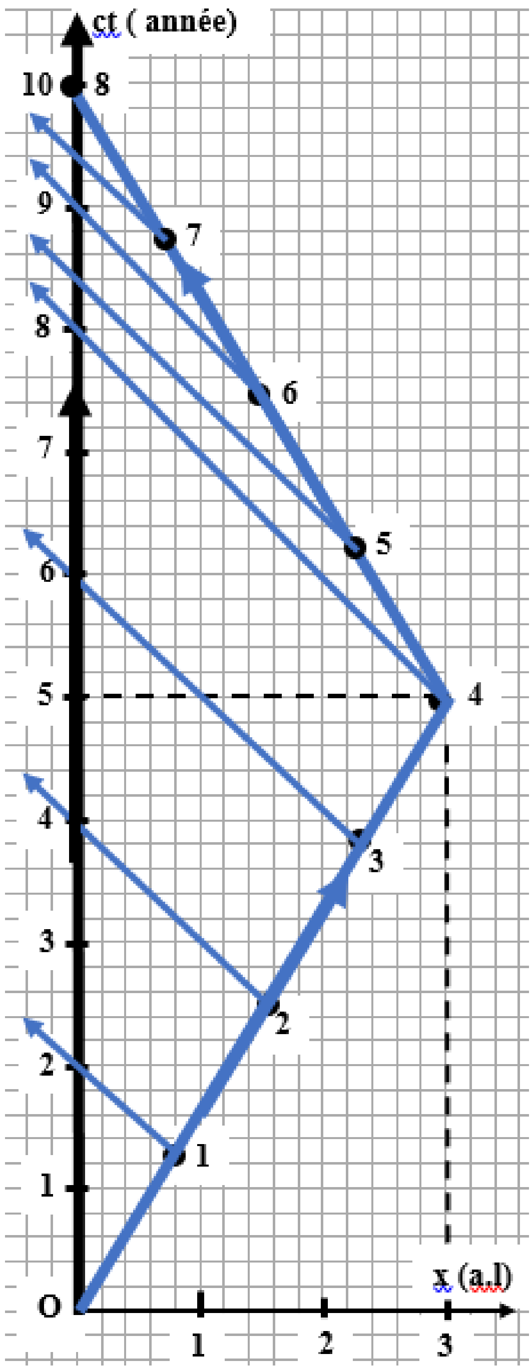
5°) Le trait épais noir représente la ligne d'univers de l'observateur terrestre. Les deux traits épais de couleur bleue représentent les lignes d'univers à l'aller et au retour du vaisseau spatial. Tous les signaux lumineux émis par le vaisseau spatial sont représentés par des traits bleues inclinés de 45° par rapport à l'axe horizontal Ox et orientés vers la direction négative de l'axe Ox.

Quand le vaisseau atteint la distance de 3 années-lumière, il s'est écoulé 4 années dans le référentiel du vaisseau et 5 années dans le repère de l'observateur terrestre.

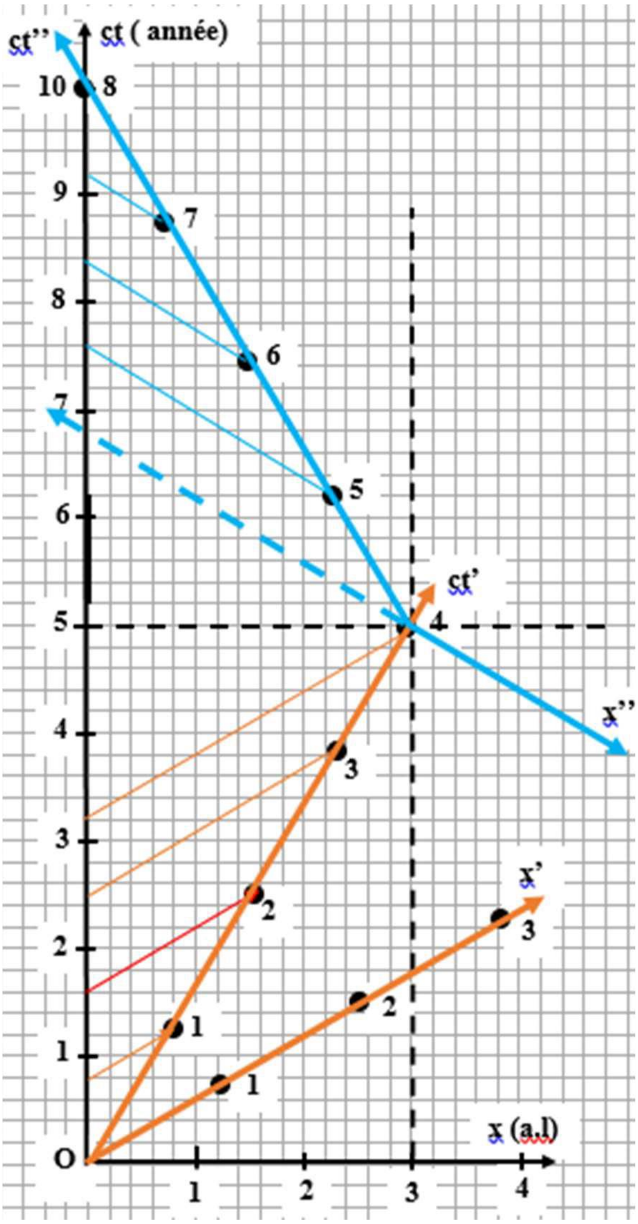
Dans la phase aller, l'observateur terrestre reçoit les quatre premiers pulses lumineux (1, 2, 3 et 4 vers respectivement 1, 2, 3 et 4) émis par le vaisseau spatial. Ces quatre signaux sont espacés d'une durée de 2 années dans le référentiel de l'observateur terrestre. Lors de la phase retour, l'observateur terrestre reçoit quatre signaux lumineux espacés d'une durée de 6 mois dans son référentiel.

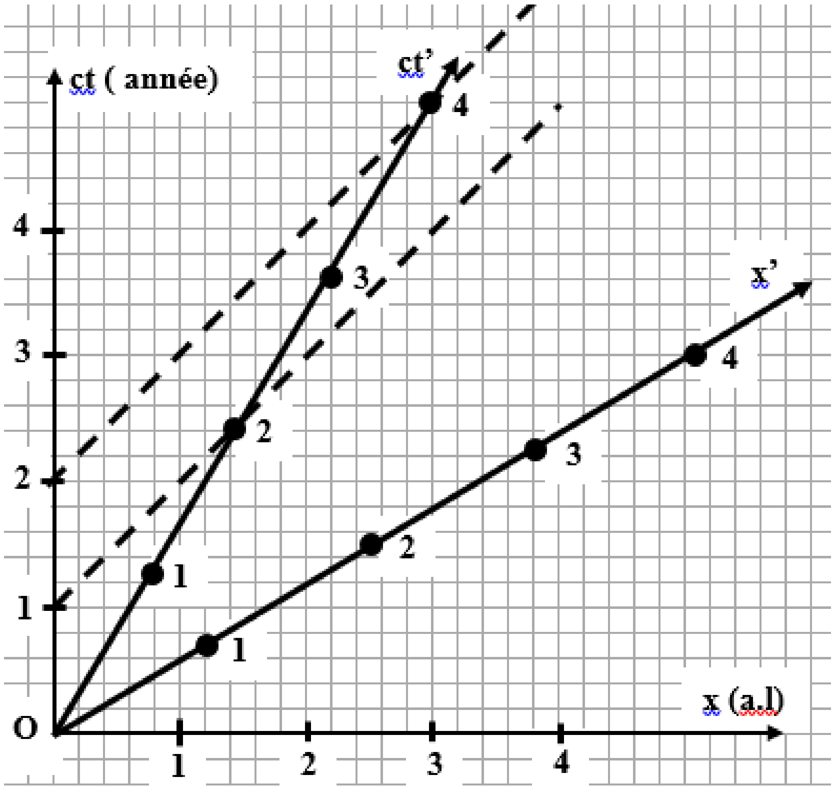


Emission de pulses lumineux
par l'observateur terrestre.

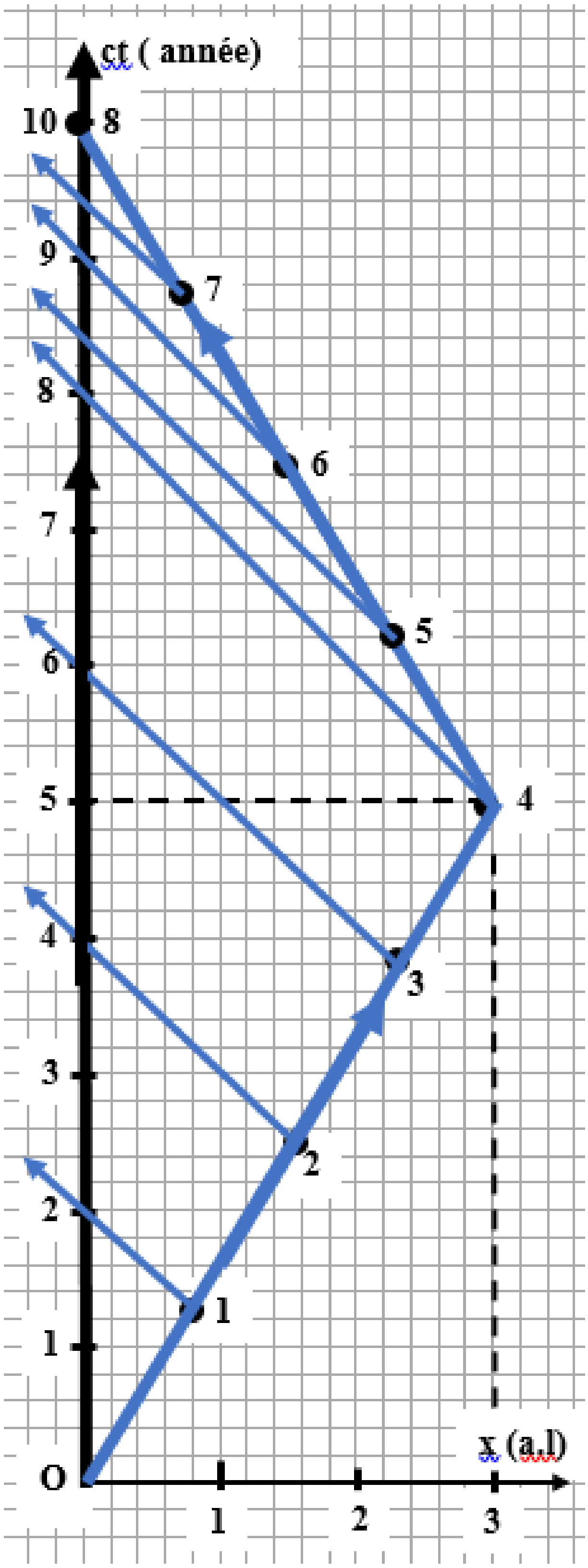


Emission de pulses lumineux
par le vaisseau spatial.

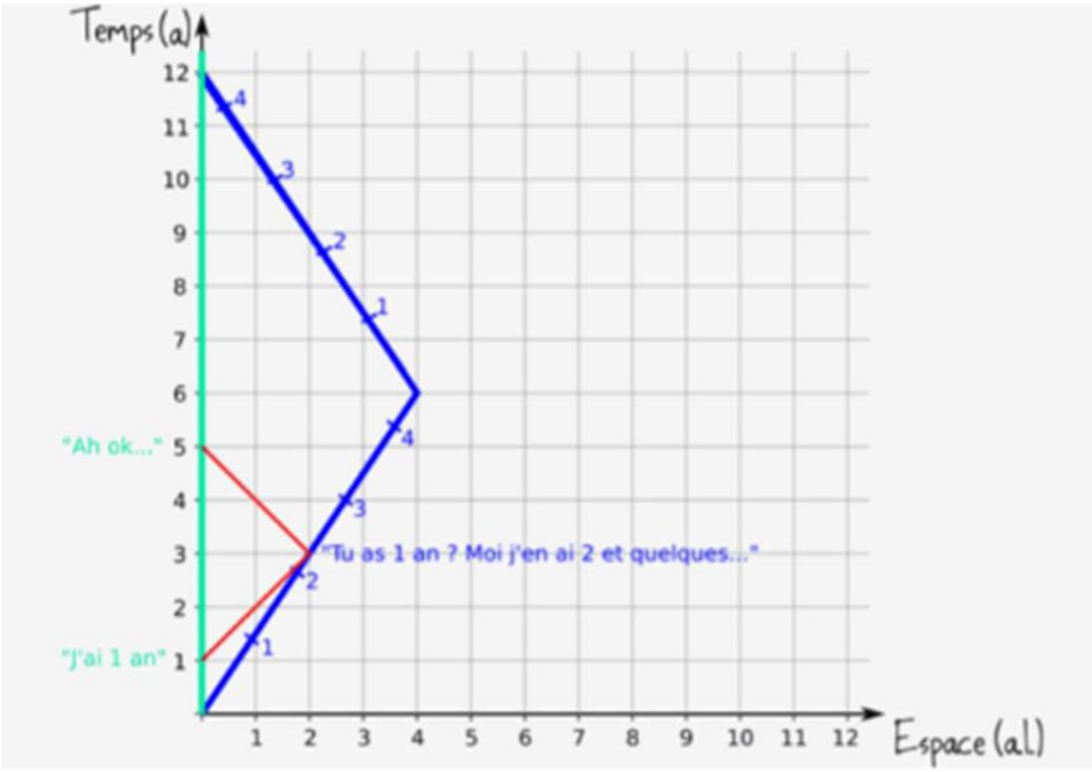

ct''
ct (année)
10
8
9
7
8
6
7
5
6
5
4
ct'
x''
4
3
3
x'
2
2
3
1
2
1
1
O
1
2
3
4
x (a.l)



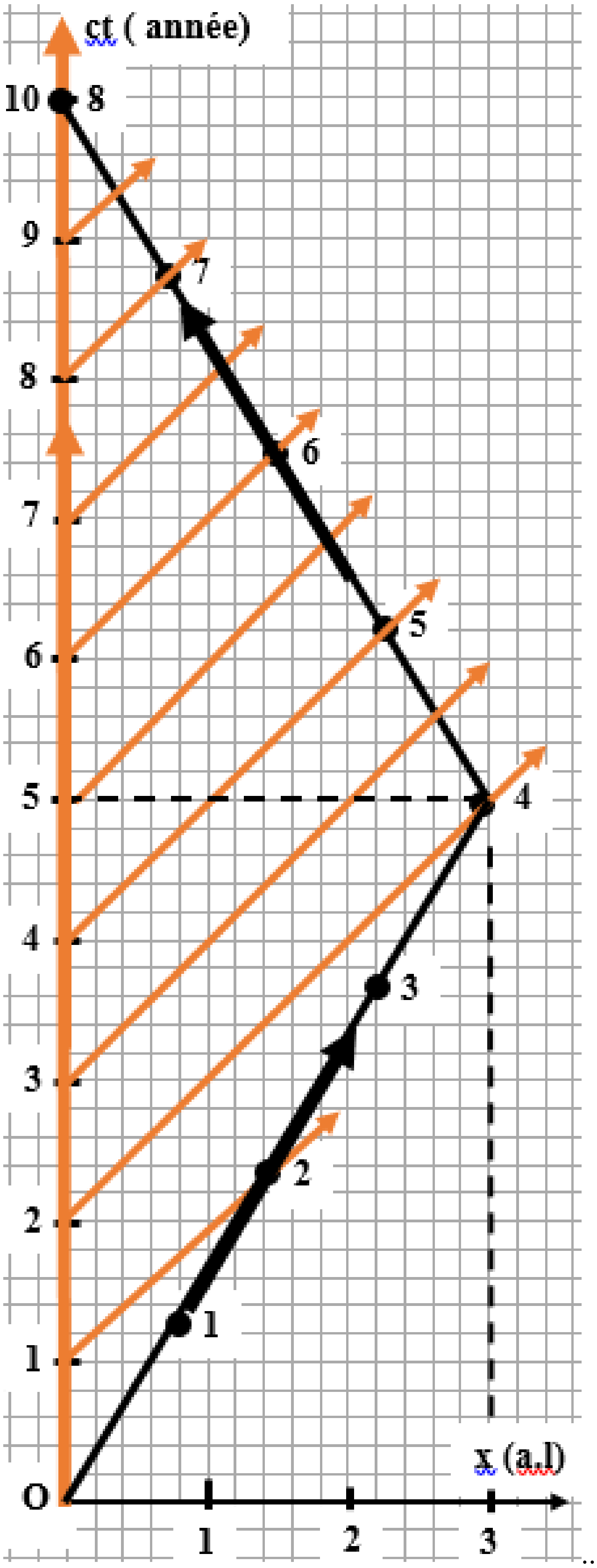
ct (année)
ct'
x'
x (a.l)
O
1
2
3
4
1
2
3
4
1
2
3
4
1
2
3
4



Rappelons que la communication ne peut pas aller plus vite que la lumière ! Voici un schéma qui montre à quoi pourrait ressembler la conversation. Au bout d'un an dans son référentiel, le jumeau terrestre envoie un message pour donner son âge (1 an donc). L'autre le reçoit au bout de 2 ans et quelques (dans son référentiel), et décide de répondre. Le jumeau n'aura la réponse qu'à 5ans (dans son référentiel).



Temps (a)
Espace (al)
"Ah ok..."
"J'ai 1 an"
"Tu as 1 an ? Moi j'en ai 2 et quelques..."


ct (année)
10
8
9
7
8
6
7
5
6
5
4
4
3
3
2
2
1
1
O
x (a.l)
1
2
3

6 Dynamique relativiste

Exercice 1

1°) Impulsion minimale et vitesse du proton incident :

La réaction considérée est :

$$p^+ + p^+ \to p^+ + p^+ + (p^+ + p^-)$$

Pour que cette réaction soit possible, il faut que l'énergie disponible dans le référentiel du centre de masse (CM) soit suffisante pour créer la paire p^+p^-, c'est-à-dire que l'énergie cinétique incidente permette de produire deux nouvelles particules de masse m_p.

Énergie seuil :

Dans le référentiel du CM, l'énergie seuil est atteinte lorsque les quatre particules finales sont immobiles. L'énergie totale dans le CM doit donc être égale à l'énergie de masse des quatre particules :

$$E_{\text{seuil, CM}} = 4m_pc^2$$

Dans le référentiel du laboratoire (L) :

Le proton incident a une énergie $E_1 = \gamma m_pc^2$, où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}$, et le proton cible est au repos $(E_2 = m_pc^2)$.

L'énergie totale dans le référentiel $\mathcal{L}$ est :

$$\mathcal{E}_{\text{tot, L}} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \gamma m_pc^2 + m_pc^2$$

L'impulsion totale dans le référentiel $\mathcal{L}$ est :

$$p_{\text{tot, L}} = p_1 + p_2 = \gamma m_pv_1 + 0$$

Invariance de $\mathcal{E}_{\text{tot}}^2 - (p_{\text{tot}}c)^2$:

Cette quantité est invariante et égale dans le référentiel du CM à $\left(4m_pc^2\right)^2$.

Donc :

$$\left(\gamma m_pc^2 + m_pc^2\right)^2 - \left(\gamma m_pv_1c\right)^2 = \left(4m_pc^2\right)^2$$

Simplifions :

$$m_p^2c^4(\gamma+1)^2 - m_p^2c^4\gamma^2\beta^2 = 16m_p^2c^4$$

où $\beta = \frac{v_1}{c}$.

En développant et simplifiant :

$$(\gamma + 1)^2 - \gamma^2\beta^2 = 16$$

$$\gamma^2 + 2\gamma + 1 - \gamma^2\beta^2 = 16$$

Or $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$, donc :

$$1 + 2\gamma + 1 = 16 \quad \Rightarrow \quad 2\gamma + 2 = 16 \Rightarrow \gamma = 7$$

Calcul de la vitesse v_1 *:*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 7 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{7} \Rightarrow \quad \beta^2 = \frac{48}{49}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{48}{49}} \approx 0{,}9897 \quad \Rightarrow \quad v_1 \approx 0{,}9897\,c$$

Impulsion minimale p_{min} *:*

$$p_{min} = \gamma m_p v_1 = 7m_p(0{,}9897c) \approx 6{,}928 m_p c$$

2°) Énergie cinétique seuil, tension d'accélération et vitesse du proton incident :

Énergie cinétique dans le référentiel $\mathcal{L}$ *:*

L'énergie totale du proton incident est $\mathcal{E}_1 = \gamma m_p c^2 = 7m_p c^2$.

Son énergie cinétique est :

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_1 - m_p c^2 = 6m_p c^2$$

Calcul en joules et en électron-volts :

La masse du proton est $m_p \approx 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg et $c \approx 3 \times 10^8$ m/s .

$$\mathcal{E}_c = 6m_p c^2 = 6 \times 1{,}67 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 \approx 9 \times 10^{-10}\ \text{J}$$

En électron-volts ($1\text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}$J) :

$$E_c \approx \frac{9 \times 10^{-10}}{1{,}6 \times 10^{-19}} \approx 5{,}625 \times 10^9\ \text{eV} = 5{,}625\ \text{GeV}$$

Tension d'accélération :

Pour qu'un proton acquière une énergie cinétique de 6 GeV, il faut une tension d'accélération de 6×10^9 V.

Vitesse du proton incident :

On a déjà trouvé $v_1 \approx 0{,}9897$ c .

Exercice 2

1°) Conservation de l'énergie et expression de la vitesse

L'énergie totale $\mathcal{E}$ de la particule est la somme de son énergie relativiste (incluant l'énergie au repos) et de son énergie potentielle élastique :

$$\mathcal{E} = \gamma mc^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ est le facteur de Lorentz.

Principe de conservation de l'énergie :

Aux positions $x = a$ (amplitude maximale, où $v = 0$) et $x = x$ (position quelconque), l'énergie totale est conservée :

$$\gamma mc^2 + \frac{1}{2}kx^2 = mc^2 + \frac{1}{2}ka^2$$

(à $x = a$, $\gamma = 1$ car $v = 0$).

En réarrangeant, on obtient :

$$\gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}k(a^2 - x^2)$$

$$\gamma = 1 + \frac{k(a^2 - x^2)}{2mc^2} = 1 + \alpha(x)$$

où

$$\alpha(x) = \frac{1}{2}\frac{k(a^2 - x^2)}{mc^2}$$

Expression de la vitesse :

On sait que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, donc :

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\left(1+\alpha(x)\right)^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\left(1+\alpha(x)\right)^2} = \frac{\left(1+\alpha(x)\right)^2 - 1}{\left(1+\alpha(x)\right)^2} = \frac{2\alpha(x) + \alpha(x)^2}{\left(1+\alpha(x)\right)^2}$$

Si $\alpha(x) \ll 1$ (énergie potentielle faible devant mc^2), on peut approximer :

$$\frac{v^2}{c^2} \approx 2\alpha(x) = \frac{k(a^2 - x^2)}{mc^2}$$

$$v \approx c\sqrt{\frac{k(a^2 - x^2)}{mc^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)}$$

(Ceci correspond à l'expression classique de la vitesse pour un oscillateur harmonique.)

2°) Calcul de la période T

La période T est donnée par :

$$T = 4\int_0^a \frac{dx}{v}$$

En utilisant l'expression relativiste de v (sans approximation) :

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \alpha(x)\right)^2}} = c\sqrt{\frac{2\alpha(x) + \alpha(x)^2}{\left(1 + \alpha(x)\right)^2}}$$

Pour $\alpha(x) \ll 1$, on développe au premier ordre :

$$v \approx c\sqrt{2\alpha(x)} = \sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)}\left(1 - \frac{3}{4}\alpha(x) + \cdots\right)$$

(Le terme correctif vient du développement de $\sqrt{1 - \frac{1}{(1+\alpha)^2}}$ à l'ordre supérieur.)

En substituant $\alpha(x) = \frac{k(a^2 - x^2)}{2mc^2}$, on obtient :

$$v \approx \sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)}\left(1 - \frac{3k(a^2 - x^2)}{8mc^2}\right)$$

L'intégrale pour T devient :

$$T \approx 4\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)}}\left(1 + \frac{3k(a^2 - x^2)}{8mc^2}\right)$$

On reconnaît l'intégrale classique de l'oscillateur harmonique :

$$T_0 = 4\sqrt{\frac{m}{k}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

et le terme correctif :

$$\Delta T = 4\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{3k}{8mc^2}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

L'intégrale vaut $\frac{\pi a^2}{4}$ (aire d'un quart de cercle de rayon a), donc :

$$\Delta T = 4\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{3k}{8mc^2} \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \frac{3\pi a^2 k}{8mc^2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{3\pi a^2\sqrt{mk}}{8mc^2}$$

En combinant avec T_0 , on obtient :

$$T \approx T_0 + \Delta T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1 + \frac{3ka^2}{16mc^2}\right)$$

Exercice 3

1°) Vitesse des mésons π :

L'énergie totale $\mathcal{E}$ du méson π est la somme de son énergie au repos et de son énergie cinétique :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_c = 140\,\text{MeV} + 1260\,\text{MeV} = 1400\,\text{MeV}$$

On sait que :

$$\mathcal{E} = \gamma\mathcal{E}_0 \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Donc :

$$\gamma = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \frac{1400}{140} = 10$$

En isolant v :

$$10 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{10}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{100}$$

$$v = \sqrt{\frac{99}{100}}\,c \approx 0{,}995\,c$$

2°) Distance maximale du détecteur pour détecter au moins 1% des mésons :

On veut détecter au moins 1% des mésons, donc :

$$\frac{N(t)}{N_0} = e^{-t/\tau} \geq 0{,}01$$

En prenant le logarithme naturel :

$$-\frac{t}{\tau} \geq \ln(0{,}01)$$

$$t \leq -\tau\ln(0{,}01) \approx 2{,}6 \times 10^{-8} \times 4{,}605 \approx 1{,}2 \times 10^{-7}\,\text{s}$$

Distance maximale parcourue :

$$d = v \times t \approx 0{,}995\,c \times 1{,}2 \times 10^{-7}\,\text{s} \approx 35{,}8\,\text{m}$$

Le détecteur doit être placé à une distance maximale de 35,8 m de la cible pour détecter au moins 1% des mésons émis.

Exercice 4

1°) Expression de p'_1 et $\mathcal{E}'_1$ après le choc

Conservation de l'énergie et de l'impulsion :

$$\mathcal{E}_1 + mc^2 = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2$$

$$\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2}$$

Relation énergie-impulsion :

$$\mathcal{E}_1^2 = p_1^2c^2 + m^2c^4, \quad \mathcal{E}_1'^2 = p_1'^2c^2 + m^2c^4$$

Calcul de p'_1 :

En projetant l'impulsion selon la direction initiale et perpendiculairement :

$$p_1 \cos\theta + p_2 \cos\varphi = p_1$$

$$p_1 \sin\theta = p_2 \sin\varphi$$

En utilisant les invariants relativistes et la conservation de l'énergie, on obtient après calculs :

$$p'_1 = \frac{2p_1mc^2\cos\theta\,(\mathcal{E}_1 + mc^2)}{(\mathcal{E}_1 + mc^2) - (p_1c\cos\theta)^2}$$

Expression de $\mathcal{E}'_1$:

En utilisant $\mathcal{E}_1'^2 = p_1'^2c^2 + m^2c^4$, on trouve :

$$\mathcal{E}'_1 = mc^2\frac{(\mathcal{E}_1 + mc^2) + (p_1c\cos\theta)^2}{(\mathcal{E}_1 + mc^2) - (p_1c\cos\theta)^2}$$

2°) Impulsion p'_2 et énergie $\mathcal{E}'_2$ de M_2 après le choc

Par conservation de l'énergie :

$$\mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}_1 + mc^2 - \mathcal{E}'_1$$

En utilisant la relation énergie-impulsion :

$$p'_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_2'^2 - m^2c^4}{c^2}}$$

3°) Expression de $\tan\theta \cdot \tan\varphi$ et angle de diffusion $\alpha = \theta - \varphi$

Calcul de $\tan\theta \cdot \tan\varphi$:

En utilisant les relations de conservation de l'impulsion :

$$\tan\theta \cdot \tan\varphi = \frac{\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta\cos\varphi}$$

Après simplification, on obtient :

$$\tan\theta \cdot \tan\varphi = \frac{2mc^2}{\mathcal{E}_1 + mc^2}$$

Comparaison entre mécanique classique et relativiste :

- En mécanique classique ($\mathcal{E}_1 \approx \frac{1}{2}mv^2, c \to \infty$) :

$$\tan\theta \cdot \tan\varphi \to 1 \implies \theta + \varphi = \frac{\pi}{2} \implies \alpha = \frac{\pi}{2}$$

- En mécanique relativiste :

$$\tan\theta \cdot \tan\varphi < 1 \implies \theta + \varphi < \frac{\pi}{2} \implies \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Exercice 5

1. Dans le référentiel du centre de masse (CM)

Calcul de la vitesse du centre de masse :

Dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{L}$:

- Particule 1 : $p_1 = \gamma m v$, $\mathcal{E}_1 = \gamma m c^2$
- Particule 2 : $p_2 = 0$, $\mathcal{E}_2 = mc^2$

où :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (4/5)^2}} = \frac{5}{3}$$

$$p_{tot} = p_1 + p_2 = \gamma m v = \frac{5}{3} m \times \frac{4}{5} c = \frac{4}{3} mc$$

$$\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \gamma mc^2 + mc^2 = \frac{5}{3} mc^2 + mc^2 = \frac{8}{3} mc^2$$

La vitesse du centre de masse V_{CM} est donnée par :

$$p_{tot} = \frac{\mathcal{E}_{tot}}{c^2} V_{CM} \Longrightarrow V_{CM} = \frac{c^2 p_{tot}}{\mathcal{E}_{tot}} = \frac{c^2 \times \frac{4}{3} mc}{\frac{8}{3} mc^2} = \frac{1}{2} c$$

Dans le référentiel CM, les deux particules ont des vitesses opposées et égales en norme. On calcule la quantité de mouvement et l'énergie totale dans ce référentiel.

Transformation de la vitesse vers le référentiel CM :

Soit v' la vitesse de la particule de droite (celle initialement au repos dans $\mathcal{L}$), dans le référentiel CM :

Utilisons la transformation de Lorentz :

$$v' = \frac{v - V_{CM}}{1 - \frac{v V_{CM}}{c^2}} = \frac{0 - \frac{1}{2} c}{1 - 0} = -\frac{1}{2} c$$

La particule initialement au repos dans $\mathcal{L}$ se déplace donc à $-\frac{1}{2}c$ dans le CM.

L'autre (se déplaçant avec une vitesse égale à $\frac{4}{5}c$ dans $\mathcal{L}$) aura une vitesse dans CM donnée par :

$$v'' = \frac{\frac{4}{5} c - \frac{1}{2} c}{1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{10} c}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{3}{10} c}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} c$$

Donc dans le référentiel CM : les deux particules de masse m vont l'une vers l'autre avec une vitesse égale à $\frac{1}{2}c$.

Énergie dans le référentiel CM (avant collision) :

$$\mathcal{E}_{avant}^{CM} = 2 \times \gamma' mc^2, \quad \text{avec } \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - (1/2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\mathcal{E}_{\text{avant}}^{\text{CM}} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}}\text{mc}^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}\text{mc}^2$$

Après la collision : toute cette énergie est convertie en masse au repos M

$$\mathcal{E}_{\text{avant}}^{\text{CM}} = \text{Mc}^2 \Longrightarrow \text{Mc}^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}\text{mc}^2 \Rightarrow \text{M} = \frac{4}{\sqrt{3}}\text{m}$$

2. Vérification dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{L}$.

Dans le référentiel $\mathcal{L}$:

- Particule 1 : $\mathcal{E}_1 = \gamma \text{mc}^2 = \frac{5}{3}\text{mc}^2$
- Particule 2 : $\mathcal{E}_2 = \text{mc}^2$
- $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{8}{3}\text{mc}^2$
- $\text{p}_{\text{tot}} = \frac{4}{3}\text{mc}$

Après la collision, on a une seule particule de masse M se déplaçant à une vitesse V_f, avec :

$$\mathcal{E}_\text{f} = \gamma_\text{f}\text{Mc}^2, \quad \text{p}_\text{f} = \gamma_\text{f}\text{MV}_\text{f}$$

Donc :

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_\text{f} \Longrightarrow \gamma_\text{f}\text{Mc}^2 = \frac{8}{3}\text{mc}^2, \quad \text{p}_{\text{tot}} = \text{p}_\text{f} \Longrightarrow \gamma_\text{f}\text{MV}_\text{f} = \frac{4}{3}\text{mc}$$

Divisons les deux équations :

$$\frac{\gamma_\text{f}\text{MV}_\text{f}}{\gamma_\text{f}\text{Mc}} = \frac{\frac{4}{3}\text{mc}}{\frac{8}{3}\text{mc}^2} \Rightarrow \frac{\text{V}_\text{f}}{\text{c}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{V}_\text{f} = \frac{1}{2}\text{c}$$

Et maintenant,

$$\gamma_\text{f} = \frac{1}{\sqrt{1-(1/2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Donc :

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\text{Mc}^2 = \frac{8}{3}\text{mc}^2 \Rightarrow \text{M} = \frac{4}{\sqrt{3}}\text{m}$$

Ce résultat est cohérent avec le résultat obtenu avec le référentiel CM.

Exercice 6

Conservation de l'énergie :

L'énergie totale avant la désintégration est égale à l'énergie au repos du pion (puisqu'il est au repos). Après la désintégration, cette énergie est répartie entre le muon et le neutrino :

$$\text{m}_\pi \text{c}^2 = \mathcal{E}_\mu + \mathcal{E}_\nu$$

où $\mathcal{E}_\mu$ et $\mathcal{E}_\nu$ sont les énergies totales du muon et du neutrino, respectivement.

Conservation de la quantité de mouvement :

Le pion étant initialement au repos, la quantité de mouvement totale après la désintégration doit être nulle. Ainsi :

$$\overrightarrow{\text{p}_\mu} + \overrightarrow{\text{p}_\nu} = \vec{0}$$

Les impulsions du muon et du neutrino sont donc égales en amplitude et opposées en direction :

$$p_\mu = p_\nu = p$$

Relation entre énergie et impulsion :

Pour le muon et le neutrino (supposé sans masse), nous avons :

- Muon : $\mathcal{E}_\mu^2 = (pc)^2 + \left(m_\mu c^2\right)^2$
- Neutrino : $\mathcal{E}_\nu = pc$

Substitution dans la conservation de l'énergie :

En remplaçant $\mathcal{E}_\nu = pc$ dans l'équation de conservation de l'énergie :

$$m_\pi c^2 = \mathcal{E}_\mu + pc$$

De plus, à partir de la relation énergie-impulsion du muon :

$$pc = \sqrt{\mathcal{E}_\mu^2 - \left(m_\mu c^2\right)^2}$$

En substituant pc dans l'équation précédente :

$$m_\pi c^2 = \mathcal{E}_\mu + \sqrt{\mathcal{E}_\mu^2 - \left(m_\mu c^2\right)^2}$$

Résolution pour $\mathcal{E}_\mu$:

Isolons la racine carrée et élevons au carré :

$$m_\pi c^2 - \mathcal{E}_\mu = \sqrt{\mathcal{E}_\mu^2 - \left(m_\mu c^2\right)^2}$$

$$\left(m_\pi c^2 - \mathcal{E}_\mu\right)^2 = \mathcal{E}_\mu^2 - \left(m_\mu c^2\right)^2$$

$$m_\pi^2 c^4 - 2m_\pi c^2 \mathcal{E}_\mu + \mathcal{E}_\mu^2 = \mathcal{E}_\mu^2 - m_\mu^2 c^4$$

Les termes E_μ^2 s'annulent :

$$m_\pi^2 c^4 - 2m_\pi c^2 \mathcal{E}_\mu = -m_\mu^2 c^4$$

$$2m_\pi c^2 \mathcal{E}_\mu = m_\pi^2 c^4 - m_\mu^2 c^4$$

$$\mathcal{E}_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2 \approx 109.8\,\text{MeV}$$

Énergie cinétique du muon :

L'énergie cinétique $\mathcal{E}_{C_\mu}$ est l'énergie totale moins l'énergie au repos :

$$\mathcal{E}_{C_\mu} = \mathcal{E}_\mu - m_\mu c^2 \approx 4.1\,\text{MeV}$$

Vitesse du muon :

Pour trouver la vitesse v du muon, utilisons la relation entre l'énergie totale et l'énergie au repos :

$$\mathcal{E}_\mu = \gamma m_\mu c^2 \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ainsi :

$$\gamma = \frac{E_\mu}{m_\mu c^2} = \frac{109.8}{105.7} \approx 1.039$$

En résolvant pour v :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Longrightarrow v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 0.272 \ \ c$$

Exercice 7

1. Référentiel du centre de masse (CM)

Dans le référentiel du centre de masse, l'énergie minimale pour que la réaction soit possible correspond à la situation où toutes les particules finales sont au repos (énergie cinétique nulle). L'énergie totale dans ce référentiel doit donc être égale à la somme des masses au repos des particules finales.

- Masse au repos de l'électron (ou du positron) : $m_e c^2 \approx 0{,}511$ MeV.

- Les particules finales sont : deux électrons (e^-) et un positron (e^+).

L'énergie totale dans le référentiel du CM est donc :

$$\mathcal{E}_{CM} = 3 m_e c^2$$

2. Référentiel du laboratoire

Dans le référentiel du laboratoire, l'électron initial est au repos, et le photon a une énergie $\mathcal{E}_\gamma$. L'énergie totale et la quantité de mouvement doivent être conservées.

- Énergie totale initiale (laboratoire) :

$$\mathcal{E}_{init} = \mathcal{E}_\gamma + m_e c^2$$

- Quantité de mouvement initiale :

$$p_{init} = \frac{\mathcal{E}_\gamma}{c} \quad \text{(car le photon a une impulsion } p = \frac{\mathcal{E}}{c}\text{)}$$

Dans le référentiel du CM, la quantité de mouvement totale est nulle. On peut relier les deux référentiels en utilisant l'invariance du carré de la quadri-impulsion :

$$(\mathcal{E}_{init})^2 - (p_{init} c)^2 = (\mathcal{E}_{CM})^2$$

En substituant :

$$\left(\mathcal{E}_\gamma + m_e c^2\right)^2 - \left(\frac{\mathcal{E}_\gamma}{c} \cdot c\right)^2 = (3 m_e c^2)^2$$

Simplifions :

$$\left(\mathcal{E}_\gamma + m_e c^2\right)^2 - \mathcal{E}_\gamma^2 = 9m_e^2c^4$$

Développons :

$$\mathcal{E}_\gamma^2 + 2\mathcal{E}_\gamma m_e c^2 + m_e^2c^4 - \mathcal{E}_\gamma^2 = 9m_e^2c^4$$

Les $\mathcal{E}_\gamma^2$ s'annulent :

$$2\mathcal{E}_\gamma m_e c^2 = 8m_e^2c^4$$

On en déduit l'énergie seuil du photon :

$$\mathcal{E}_\gamma = 4m_e c^2$$

Numériquement :

$$\mathcal{E}_\gamma = 4 \times 0{,}511\,\text{MeV} = 2{,}044\,\text{MeV}$$

3. Fréquence associée au photon

L'énergie d'un photon est reliée à sa fréquence ν par la relation :

$$\mathcal{E}_\gamma = h\nu$$

où h est la constante de Planck ($h \approx 4{,}136 \times 10^{-15}$ eV · s).

Convertissons $\mathcal{E}_\gamma$ en joules pour utiliser les unités SI :

$$\mathcal{E}_\gamma = 2{,}044\,\text{MeV} = 2{,}044 \times 10^6 \times 1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{J} \approx 3{,}274 \times 10^{-13}\,\text{J}$$

La fréquence est alors :

$$\nu = \frac{\mathcal{E}_\gamma}{h} = \frac{3{,}274 \times 10^{-13}}{6{,}626 \times 10^{-34}} \approx 4{,}94 \times 10^{20}\,\text{Hz}$$

Remarque

Dans la pratique, la création d'une paire e^-e^+ à partir d'un seul photon est impossible dans le vide car la conservation de la quantité de mouvement ne peut être satisfaite. La réaction nécessite généralement la présence d'un noyau ou d'un électron (comme dans cet exercice) pour absorber l'impulsion. Ici, l'électron initial joue ce rôle, permettant ainsi la réaction.

Exercice 8

1. Calcul des énergies $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ des photons.
Dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{L}$:
Avant la désintégration :

- $\vec{p} = \frac{\mathcal{E}_0}{c^2}\,\vec{v}$
- $\mathcal{E}_0 = \gamma mc^2$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et $\beta = \frac{v}{c}$

Après la désintégration :

- $\vec{p}' = \frac{\mathcal{E}_1}{c}\vec{u}_1 + \frac{\mathcal{E}_2}{c}\vec{u}_2$, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont les vecteurs unitaires donnant les directions de propagation respectives des photons.
- $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$

On considère un système de coordonnées xOy tel que Ox est parallèle à $\vec{v}$.
Ecrivons la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement lors la désintégration :

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \qquad (1)$$
$$\frac{\mathcal{E}_0}{c^2}v = \frac{\mathcal{E}_1}{c}\cos\alpha_1 + \frac{\mathcal{E}_2}{c}\cos\alpha_2 \qquad (2)$$
$$0 = \frac{\mathcal{E}_1}{c}\sin\alpha_1 - \frac{\mathcal{E}_2}{c}\sin\alpha_1 \qquad (3)$$

De (1) on tire : $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1$
En remplaçant dans (2) on obtient :

$$\cos\alpha_2 = \frac{\beta\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1\cos\alpha_1}{\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1}$$

En remplaçant dans (3), on obtient :

$$\sin\alpha_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1}\sin\alpha_1$$

Ecrivons que $\sin^2\alpha_2 = 1 - \cos^2\alpha_2$:

$$\mathcal{E}_1^2\sin^2\alpha_1 = (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1)^2 - (\beta\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1\cos\alpha_1)^2$$
$$\mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}_1^2\cos^2\alpha_1 = \mathcal{E}_0^2 + \mathcal{E}_1^2 - 2\mathcal{E}_0\mathcal{E}_1 - \beta^2\mathcal{E}_0^2 - \mathcal{E}_1^2\cos^2\alpha_1 + 2\beta\mathcal{E}_0\mathcal{E}_1\cos\alpha_1$$
$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{2}\frac{1-\beta^2}{1-\beta\cos\alpha_1}$$

Comme $\mathcal{E}_0 = \gamma mc^2$ et que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, on obtient

$$\mathcal{E}_1 = \frac{mc^2}{2} \times \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1\ -\beta\cos\alpha_1}$$

De même pour $\mathcal{E}_2$:

$$\mathcal{E}_2 = \frac{mc^2}{2} \times \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1\ -\beta\cos\alpha_2}$$

2. Vérification par l'effet Doppler
L'effet Doppler relativiste pour un photon émis à un angle α' dans le RCM est perçu dans le référentiel du laboratoire sous un angle α tel que :

$$\mathcal{E}\ =\ \mathcal{E}' \times \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1\ -\beta\cos\alpha}$$

Ce qui correspond exactement à nos expressions pour $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, avec $\mathcal{E}' = \frac{mc^2}{2}$.
Les énergies des photons dans le référentiel du laboratoire sont :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{mc^2}{2} \times \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1\ -\left(\frac{v}{c}\right)\cos\alpha_1}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{mc^2}{2} \times \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)\cos\alpha_2}$$

Exercice 9

L'énergie $\mathcal{E}$ du photon diffusé dans la direction θ en fonction de l'énergie $\mathcal{E}_0$ du photon incident est donnée par l'expression :

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \qquad \alpha = \frac{\mathcal{E}_0}{m_0c^2}$$

1°) Diffusion simple à un angle de 180° :

$$\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\left[\frac{\alpha(1 - \cos\pi)}{1 + \alpha(1 - \cos\pi)}\right] = \mathcal{E}_0\left[\frac{2\alpha}{1 + 2\alpha}\right]$$

2°) Deux diffusions successives chacune avec un angle de 90° :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + \alpha\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + \alpha} \qquad \alpha = \frac{\mathcal{E}_0}{m_0c^2}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{1 + \alpha'\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\mathcal{E}_1}{1 + \alpha'} \qquad \alpha' = \frac{\mathcal{E}_1}{m_0c^2} = \frac{1}{m_0c^2}\frac{\mathcal{E}_0}{1 + \alpha} = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{1 + \alpha'} = \frac{\mathcal{E}_1}{1 + \frac{\alpha}{1 + \alpha}} = \mathcal{E}_1\frac{1 + \alpha}{1 + 2\alpha} = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + 2\alpha}$$

$$\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 - \frac{\mathcal{E}_0}{1 + 2\alpha} = \mathcal{E}_0\frac{2\alpha}{1 + 2\alpha}$$

3°) Trois diffusions successives chacune avec un angle de 60° :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + \alpha\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right)} = \mathcal{E}_0\frac{2}{2 + \alpha} \qquad \alpha = \frac{\mathcal{E}_0}{m_0c^2}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{1 + \alpha'\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right)} = \mathcal{E}_1\frac{2}{2 + \alpha'} \qquad \alpha' = \frac{\mathcal{E}_1}{m_0c^2} = \frac{2\alpha}{2 + \alpha}$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0\frac{2}{2 + \alpha}\frac{2}{2 + \frac{2\alpha}{2 + \alpha}} = \mathcal{E}_0\frac{1}{1 + \alpha}$$

$$\mathcal{E}_3 = \frac{\mathcal{E}_2}{1 + \alpha''\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right)} = \mathcal{E}_2\frac{2}{2 + \alpha''}$$

$$\alpha'' = \frac{\mathcal{E}_2}{m_0c^2} = \frac{\mathcal{E}_1}{m_0c^2}\frac{2}{2+\alpha'} = \frac{2\alpha'}{2+\alpha'} = \frac{4\alpha}{2+\alpha}\frac{1}{2+\dfrac{2\alpha}{2+\alpha}}$$

$$\alpha'' = \frac{4\alpha}{2+\alpha}\frac{1}{2+\dfrac{2\alpha}{2+\alpha}} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

$$\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2\frac{2}{2+\dfrac{\alpha}{1+\alpha}} = \mathcal{E}_0 - 2\mathcal{E}_2\frac{(1+\alpha)}{2+3\alpha}$$

$$\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_0\frac{2}{2+3\alpha} = \mathcal{E}_0\frac{3\alpha}{2+3\alpha}$$

Les pertes d'énergie sont égales dans les cas 1°) et 2°). La perte d'énergie dans le cas 3°) est plus petite que celle dans les cas 1°) et 2°).

$$\alpha = \frac{\mathcal{E}_0}{m_0c^2} = 0{,}1 \qquad \begin{cases} \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0\dfrac{2\alpha}{1+2\alpha} = 8{,}51 \text{ keV} \\ \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0\dfrac{2\alpha}{1+2\alpha} = 8{,}51 \text{ keV} \\ \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_0\dfrac{3\alpha}{2+3\alpha} = 6{,}66 \text{ keV} \end{cases}$$

Exercice 10

1°) La valeur du décalage en longueur d'onde entre le photon incident λ_0 et le photon de diffusion λ dans la direction θ est égale à :

$$\Delta\lambda = (\lambda - \lambda_0) = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) \qquad \text{où} \qquad \lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 2{,}425 \text{ pm}$$

est la longueur d'onde Compton de l'électron.

L'énergie du photon de diffusion dans la direction θ est égale à :

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{1+\alpha(1-\cos\theta)}$$

$\alpha = \frac{\mathcal{E}_0}{m_0c^2}$ où $m_0 c^2 = 511$ keV est l'énergie de masse l'électron au repos.

L'énergie cinétique de l'électron $\mathcal{E}_c$ est égale à :

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E} = \mathcal{E}_0\frac{\alpha(1-\cos\theta)}{1+\alpha(1-\cos\theta)} \qquad \tan\varphi = \frac{1}{(1+\alpha)\tan\dfrac{\theta}{2}}$$

2°) L'énergie $\mathcal{E}_0$ et la quantité de mouvement P_0 du photon incident s'obtiennent comme suit :

$$\lambda_0 = k\,\lambda_c = k\frac{h}{m_0c} \qquad \mathcal{E}_0 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{k\,\lambda_c} = \frac{hc}{kh}m_0c$$

$$\mathcal{E}_0 = \frac{m_0c^2}{k} \qquad \text{et} \qquad P_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{c} = \frac{m_0c}{k}$$

La longueur d'onde du photon de diffusion est égal à :

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta) \qquad \lambda = \lambda_0 + \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

$$\lambda = \lambda_c(1 + k - \cos\theta)$$

$$\mathcal{E} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_c(1 + k - \cos\theta)} = \frac{hc.\,m_0c}{h(1 + k - \cos\theta)}$$

$$\mathcal{E} = \frac{m_0c^2}{(1 + k - \cos\theta)}$$

La quantité de mouvement P_λ s'écrit comme suit :

$$P_\lambda = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{m_0c}{(1 + k - \cos\theta)}$$

L'énergie cinétique de l'électron de recul est :

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E} = m_0c^2\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{(1 + k - \cos\theta)}\right]$$

$$\mathcal{E}_c = m_0c^2\left[\frac{(1 - \cos\theta)}{k(1 + k - \cos\theta)}\right]$$

La quantité de mouvement de l'électron se calcule à partir des relations :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_e = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E} + m_0c^2 \\ \mathcal{E}_e^2 - m_0^2c^4 = P_e^2c^2 \end{cases}$$

où $\mathcal{E}_e$ et P_e sont respectivement l'énergie totale et le module de la quantité de mouvement de l'électron.

$$P_e^2c^2 = (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E} + m_0c^2)^2 - m_0^2c^4$$

$$P_e = \frac{1}{c}\sqrt{(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E} + m_0c^2)^2 - m_0^2c^4}$$

Pour calculer la relation entre l'angle d'émission φ de l'électron après la collision et l'angle d'émission θ du photon de diffusion, on utilise la condition de conservation de la quantité de mouvement soit :

$$\begin{cases} P_\lambda \sin\theta - P_e \sin\varphi = 0 \\ P_\lambda \cos\theta + P_e \cos\varphi = P_0 \end{cases}$$

$$\frac{P_e\sin\varphi}{P_e\cos\varphi} = \tan\varphi = \frac{P_\lambda \sin\theta}{P_0 - P_\lambda\cos\theta} = \frac{\dfrac{m_0c}{(1 + k - \cos\theta)}\sin\theta}{\dfrac{m_0c}{k} - \dfrac{m_0c}{(1 + k - \cos\theta)}\cos\theta}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\theta}{(1+k-\cos\theta)}\frac{k(1+k-\cos\theta)}{(1+k-\cos\theta)-k\cos\theta}$$

$$\tan\varphi = \frac{k}{(1+k)}\frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)}$$

Utilisons la relation de trigonométrie : $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)} = \frac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$

On obtient :

$$\tan\varphi = \frac{k}{(1+k)}\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

3°) Examinons les cas suivants avec $\lambda_c = 2{,}426$ pm :

$k = \dfrac{1}{2}\ et\ \theta = \dfrac{\pi}{3}$:

$\lambda_0 = 1{,}213\ \text{pm}$ $\mathcal{E}_0 = 1022\ \text{keV}$ $P_0 = 5{,}45.10^{-22}\ \text{kg.m.s}^{-1}$

$\lambda = 2{,}426\ \text{pm}$ $\mathcal{E} = 511\ \text{keV}$ $P_\lambda = 2{,}73.10^{-22}\ \text{kg.m.s}^{-1}$

$\mathcal{E}_c = 511\ \text{keV}$ $P_e = 4{,}72.10^{-22}\ \text{kg.m.s}^{-1}$ $\varphi = 30°$

$k = 1\ et\ \theta = \dfrac{\pi}{2}$:

$\lambda_0 = 2{,}426\ \text{pm}$ $\mathcal{E}_0 = 511\ \text{keV}$ $P_0 = 2{,}73.10^{-22}\ \text{kg.m.s}^{-1}$

$\lambda = 4{,}852\text{pm}$ $\mathcal{E} = 255{,}5\ \text{keV}$ $P_\lambda = 1{,}36.10^{-22}\ \text{kg.m.s}^{-1}$

$\mathcal{E}_c = 255{,}5\ \text{keV}$ $P_e = 3{,}04.10^{-22}\ \text{kg.m.s}^{-1}$ $\varphi = 26°,56$

$k = 2\ et\ \theta = \dfrac{2\pi}{3}$:

$\lambda_0 = 4{,}852\ \text{pm}$ $\mathcal{E}_0 = 255{,}5\ \text{keV}$ $P_0 = 1{,}36.10^{-22}\ \text{kg.m.s}^{-1}$

$\lambda = 8{,}491\text{pm}$ $\mathcal{E} = 146\ \text{keV}$ $P_\lambda = 7{,}78.10^{-23}\ \text{kg.m.s}^{-1}$

$\mathcal{E}_c = 109{,}5\ \text{keV}$ $P_e = 1{,}87.10^{-22}\ \text{kg.m.s}^{-1}$ $\varphi = 21°$

Exercice 11

1°) $\lambda = \lambda_0 + \lambda_c(1-\cos\theta)$ $\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 0{,}0242\ \text{Å}$

2°) Ecrivons la loi de conservation d'énergie lors de l'absorption du photon par l'électron au repos (énergie avant la collision égale à l'énergie après la collision) soit :

$$pc + m_0c^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$$

où pc et $\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$ représente respectivement l'énergie du photon et l'énergie totale de l'électron qui est différente de l'énergie cinétique de l'électron.

Après élévation au carré des deux membres, on obtient :

$$2pc.\, m_0c^2 = 0$$

On arrive au résultat suivant : la quantité E = pc doit être nulle car m_0 et c sont non nulles. En conclusion, il n'est pas possible que le photon soit absorbé par l'électron libre.

3°) Ecrivons la loi de conservation de la quantité de mouvement soit :

$$\frac{h\nu_0}{c} - \frac{h\nu}{c}\cos\theta = p\cos\varphi \qquad\qquad \frac{h\nu}{c}\sin\theta = p\sin\varphi$$

$$\begin{cases} p\sin\varphi = \dfrac{h\nu}{c}\sin\theta \\ p\cos\varphi = \dfrac{h\nu_0}{c} - \dfrac{h\nu}{c}\cos\theta \end{cases}$$

$$\tan\varphi = \frac{h\nu\sin\theta}{h\nu_0 - h\nu\cos\theta} = \frac{E\sin\theta}{E_0 - E\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\frac{E_0}{E} - \cos\theta}$$

Exprimons l'énergie $\mathcal{E}$ du photon diffusé en fonction de l'énergie du photon incident $\mathcal{E}_0$.

$$(\lambda - \lambda_0) = \lambda_c(1 - \cos\theta) \qquad\qquad \frac{c}{h\nu} - \frac{c}{h\nu_0} = \frac{\lambda_c(1 - \cos\theta)}{h}$$

$$\frac{1}{\mathcal{E}} - \frac{1}{\mathcal{E}_0} = \frac{\lambda_c(1 - \cos\theta)}{h} \qquad\qquad \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}} = 1 + \mathcal{E}_0\frac{\lambda_c(1 - \cos\theta)}{h}$$

On pose : $\alpha = \frac{\mathcal{E}_0}{m_0c^2}$ où $m_0\,c^2 = 511$ keV est l'énergie de masse l'électron au repos.

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \frac{1}{1 + \mathcal{E}_0\frac{\lambda_c(1 - \cos\theta)}{h\,c}} = \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{E}_0}{m_0c^2}(1 - \cos\theta)} = \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)}$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \qquad\qquad \tan\varphi = \frac{\mathcal{E}\sin\theta}{\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}\cos\theta}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\theta}{\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}} - \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{1 + \alpha(1 - \cos\theta) - \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{(1 + \alpha)(1 - \cos\theta)}$$

Utilisons la relation de trigonométrie :

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{(1 + \cos\theta)} = \frac{(1 - \cos\theta)}{\sin\theta}$$

On obtient :

$$\tan\varphi = \frac{1}{(1+\alpha)\tan\frac{\theta}{2}}$$

4°) Dans l'expérience Compton les photons peuvent être diffusés vers l'avant et vers l'arrière :

$$0 \leq \theta \leq \pi \qquad 0 \leq \tan\frac{\theta}{2} \leq \infty \quad \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Les électrons sont éjectés vers l'avant.

5°) Comme les photons incidents se dirigent vers la droite (sens positif de l'axe y), on peut dire que l'électron sera également émis dans la même direction que les rayons incidents.

Comme l'épaisseur de l'échantillon est très petite (de l'ordre de quelques dixièmes de microns, le photon de diffusion émis au point D sera émis de façon quasiment perpendiculaire à l'axe y ($\theta = 90°$).

L'électron issu du point C, crée par le photon de diffusion issu du point D, se dirige vers le sens négatif de l'axe y.

Les électrons émis aux points D et C ne sont pas parallèles à l'axe y comme cela est indiqué sur la figure car dans chaque cas le coefficient α n'est pas nul.

6°)

a. L'énergie du premier photon diffusé, pour la valeur $\theta_1 = 90°$, est égale à :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{1+\alpha_1} \quad \text{où} \quad \alpha_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{m_0c^2} = \frac{10}{511} = 0{,}01957$$

$$\mathcal{E}_1 = 9{,}808 \ \text{keV}$$

b. L'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c1}$ du premier électron Compton est égale à :

$$\mathcal{E}_{c1} = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 = 0{,}192 \ \text{keV}$$

Son angle d'émission vaut :

$$\tan\varphi_1 = \frac{1}{(1+\alpha_1)\tan\frac{\theta_1}{2}} = \frac{1}{(1+\alpha_1)} = 0{,}9808 \qquad \varphi_1 = 44{,}44°$$

7°) a. Les électrons Compton vont décrire, dans le champ magnétique uniforme B, un mouvement circulaire uniforme de rayon R avec une vitesse v telle que :

$$|e|vB = m_0\frac{v^2}{R} \qquad\qquad v = \frac{|e|B\,R}{m_0}$$

Connaissant les rayons R_1 et R_2 des trajectoires circulaires décrites par les deux électrons, on peut déduire l'énergie cinétique du deuxième électron à partir de l'énergie cinétique du premier électron.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{\mathcal{E}_{c1}}{\mathcal{E}_{c2}} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \qquad \mathcal{E}_{c2} = \mathcal{E}_{c1}\frac{R_2^2}{R_1^2} = 0{,}192.\,1{,}3^2 = 0{,}324 \ \text{keV}$$

L'énergie $\mathcal{E}_2$ du second photon de diffusion est égale à :

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{c2} \qquad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_{c2} = 9{,}808 - 0{,}324 = 9{,}484 \text{ keV}$$

L'angle de diffusion θ_2 du second photon s'obtient à partir de l'énergie $\mathcal{E}_2$.

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{1 + \alpha_2(1 - \cos\theta_2)} \quad \text{où} \quad \alpha_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{m_0c^2} = \frac{9{,}808}{511} = 0{,}01919$$

$$\alpha_2(1 - \cos\theta_2) = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} - 1 = 0{,}03416$$

$$(1 - \cos\theta_2) = 1{,}7802 \qquad \cos\theta_2 = -0{,}7802 \qquad \theta_2 = 141{,}28°$$

b.

$$\tan\varphi_2 = \frac{1}{(1 + \alpha_2)\tan\frac{\theta_2}{2}} = 0{,}7958 \qquad \varphi_2 = 38{,}5°$$

Exercice 12

1. Calcul de l'énergie totale $\mathcal{E}$ et de la quantité de mouvement $\vec{P}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$

Données :

- Vitesse de $A_1 : v_1 = \frac{3c}{4}$
- Vitesse de $A_2 : v_2 = -\frac{c}{4}$
- Masse au repos d'un électron : $m_e = 0{,}511 \text{ MeV}/c^2$

a) Énergie totale $\mathcal{E}$:

L'énergie totale du système est la somme des énergies des deux électrons. L'énergie d'une particule en relativité est donnée par :

$$\mathcal{E} = \gamma m_e c^2$$

où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

- Pour A_1 :

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{9}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$\mathcal{E}_1 = \gamma_1 m_e c^2 = \frac{4}{\sqrt{7}} \times 0{,}511 \text{ MeV}$$

- Pour A_2 :

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$\mathcal{E}_2 = \gamma_2 m_e c^2 = \frac{4}{\sqrt{15}} \times 0{,}511 \text{ MeV}$$

- Énergie totale :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 0{,}511\left(\frac{4}{\sqrt{7}} + \frac{4}{\sqrt{15}}\right) \text{ MeV}$$

$$\mathcal{E} \approx 0{,}511\left(\frac{4}{2{,}6458} + \frac{4}{3{,}87298}\right) \approx 0{,}511(1{,}5119 + 1{,}0328) \approx 1{,}30 \text{ MeV}$$

b) Quantité de mouvement $\vec{P}$:

La quantité de mouvement d'une particule est :

$$\vec{p} = \gamma m_e \vec{v}$$

- Pour A_1 :

$$p_1 = \gamma_1 m_e v_1 = \frac{4}{\sqrt{7}} \times 0{,}511 \times \frac{3c}{4} = \frac{3 \times 0{,}511}{\sqrt{7}} \approx 0{,}579 \text{ MeV/c}$$

- Pour A_2 :

$$p_2 = \gamma_2 m_e v_2 = \frac{4}{\sqrt{15}} \times 0{,}511 \times \left(-\frac{c}{4}\right) = -\frac{0{,}511}{\sqrt{15}} \approx -0{,}132 \text{ MeV/c}$$

- Quantité de mouvement totale :

$$\vec{P} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = (0{,}579 \text{ MeV/c} - 0{,}132 \text{ MeV/c})\overrightarrow{e_x} = 0{,}447\overrightarrow{e_x} \text{ MeV/c}$$

2. Vitesse d'une particule dans le référentiel $\mathcal{R}'$ où l'autre est immobile

On cherche la vitesse V du référentiel $\mathcal{R}'$ où A_2 est immobile. Cela revient à trouver la vitesse de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ telle que $v_2' = 0$.

La transformation de Lorentz donne :

$$v_2' = \frac{v_2 - V}{1 - \frac{v_2 V}{c^2}} = 0 \implies v_2 = V$$

Donc $V = v_2 = -\frac{c}{4}$.

Maintenant, calculons la vitesse de A_1 dans $\mathcal{R}'$:

$$v'_1 = \frac{v_1 - V}{1 - \frac{v_1 V}{c^2}} = \frac{\frac{3c}{4} - \left(-\frac{c}{4}\right)}{1 - \frac{\frac{3c}{4}\left(-\frac{c}{4}\right)}{c^2}} = \frac{c}{1 + \frac{3}{16}} = \frac{c}{\frac{19}{16}} = \frac{16c}{19}$$

3. Énergie et quantité de mouvement dans $\mathcal{R}'$

a) Énergie totale $\mathcal{E}'$:

Dans $\mathcal{R}'$, A_2 est immobile, donc son énergie est simplement $m_e c^2 = 0{,}511$ MeV.

Pour A_1 , sa vitesse est $v'_1 = \frac{16c}{19}$, donc :

$$\gamma'_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{16}{19}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{256}{361}}} = \frac{19}{\sqrt{105}}$$

$$\mathcal{E}'_1 = \gamma'_1 m_e c^2 = \frac{19}{\sqrt{105}} \times 0{,}511 \approx \frac{19}{10{,}247} \times 0{,}511 \approx 1{,}854 \times 0{,}511 \approx 0{,}947 \text{ MeV}$$

- Énergie totale dans $\mathcal{R}'$:

$$\mathcal{E}' = E'_1 + E'_2 = 0{,}947 + 0{,}511 = 1{,}458 \text{ MeV}$$

b) Quantité de mouvement $\overrightarrow{P'}$:

Dans $\mathcal{R}'$, A_2 est immobile, donc $p'_2 = 0$.

Pour A_1 :

$$p'_1 = \gamma'_1 m_e v'_1 = \frac{19}{\sqrt{105}} \times 0{,}511 \times \frac{16c}{19} = \frac{16 \times 0{,}511}{\sqrt{105}} \approx \frac{8{,}176}{10{,}247} \approx 0{,}798 \text{ MeV/c}$$

- Quantité de mouvement totale dans $\mathcal{R}'$:

$$\overrightarrow{P'} = \overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2} = (0{,}798 \text{ MeV/c} + 0)\, \overrightarrow{e_x} = 0{,}798\, \overrightarrow{e_x} \text{ MeV/c}$$

4. Masse du système et comparaison avec $2m_e c^2$

La masse invariante M du système est donnée par :

$$M^2 c^4 = \mathcal{E}^2 - P^2 c^2$$

Dans $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{E} \approx 1{,}30 \text{ MeV}, \quad P \approx 0{,}447 \text{ MeV/c}$$

$$M^2 c^4 = (1{,}30)^2 - (0{,}447)^2 c^2 \times c^2 = 1{,}69 - 0{,}1998 \approx 1{,}49 \text{ MeV}^2$$

$$M \approx \sqrt{1{,}49} \approx 1{,}22 \text{ MeV/c}^2$$

Comparaison avec $2m_e c^2 = 1{,}022\ \mathrm{MeV}$:

$$M \approx 1{,}22\ \mathrm{MeV}/c^2 > 2m_e c^2$$

Commentaire :
La masse invariante du système est supérieure à la somme des masses au repos des deux électrons. Cela est dû à l'énergie cinétique des électrons, qui contribue à l'énergie totale (et donc à la masse) du système. En relativité, la masse d'un système de particules n'est pas simplement la somme des masses au repos, mais inclut aussi l'énergie cinétique et potentielle. Ici, comme on néglige l'interaction électromagnétique, l'excès de masse provient uniquement de l'énergie cinétique.

7 Quadrivecteurs

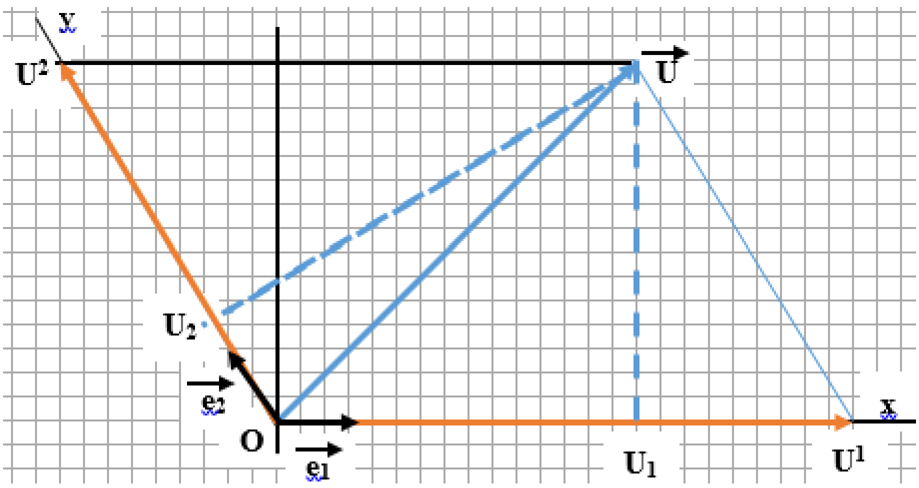
Exercice 1

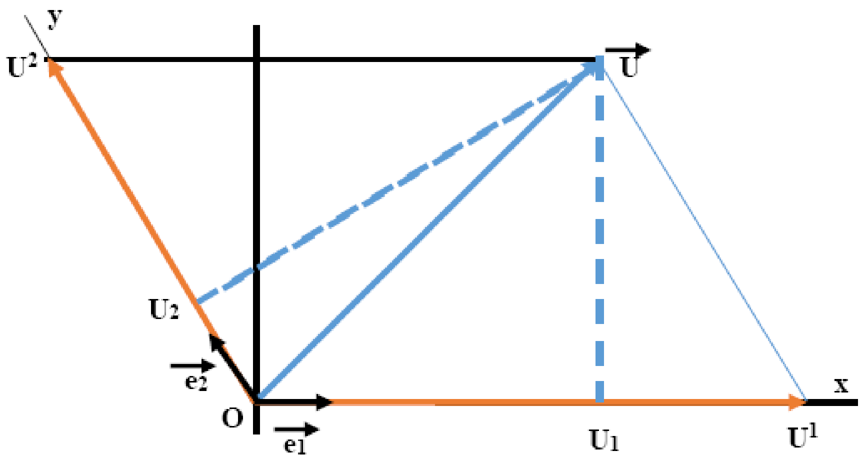
1°) Pour obtenir la composante contra variante U^1 il suffit de tracer à partir de l'extrémité du vecteur $\vec{U}$ la parallèle à l'axe Oy. Cette parallèle coupe l'axe Ox au point U^1. De la même manière pour obtenir la composante contra variante U^2 il suffit de tracer à partir de l'extrémité du vecteur $\vec{U}$ la parallèle à l'axe Ox. Cette parallèle coupe l'axe Oy au point U^2. Compte-tenu de l'échelle choisie pour notre schéma, on trouve :

$$U^1 = 8 \quad \text{et} \quad U^2 = 5{,}8$$

2°) Pour obtenir la composante covariante U_1 il suffit de tracer à partir de l'extrémité du vecteur $\vec{U}$ la perpendiculaire à l'axe Ox. Cette perpendiculaire coupe l'axe Ox au point U_1. De la même manière pour obtenir la composante covariante U_2 il suffit de tracer à partir de l'extrémité du vecteur $\vec{U}$ la perpendiculaire à l'axe Oy. Cette perpendiculaire coupe l'axe Oy au point U_2. Compte-tenu de l'échelle choisie pour notre schéma, on trouve :

$$U_1 = 5 \quad \text{et} \quad U_2 = 1{,}8$$





Dans le cas où l'angle (Ox, Oy) est égal à 90°, la composante contra variante U^1 est égale à la composante covariante U_1. Même remarque pour composante contra variante U^2. On aura :

$$\begin{cases} U^1 = U_1 = 7.\sqrt{2} \\ U^2 = U_2 = 7.\sqrt{2} \end{cases}$$

Dans ce cas on parle plus de composante contra variante et de composante covariante d'un vecteur. On parle simplement de composantes du vecteur.

3°) Le vecteur $\vec{U}$ s'écrit en fonction des composantes contra variantes comme suit :

$$\vec{U} = U^1\vec{e_1} + U^2\vec{e_2} = \sum_{i=1}^{2} U^i\vec{e_i}$$

Ecrivons les composantes covariantes du vecteur $\vec{U}$ soit :

$$\begin{cases} U_1 = \vec{U} \cdot \vec{e_1} = (U^1\vec{e_1} + U^2\vec{e_2}) \cdot \vec{e_1} \\ U_2 = \vec{U} \cdot \vec{e_2} = (U^1\vec{e_1} + U^2\vec{e_2}) \cdot \vec{e_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1 = (U^1\vec{e_1} \cdot \vec{e_1} + U^2\vec{e_2} \cdot \vec{e_1}) = U^1.e_{11} + U^2.e_{21} \\ U_2 = (U^1\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + U^2\vec{e_2} \cdot \vec{e_2}) = U^1.e_{12} + U^2.e_{22} \end{cases}$$

$$e_{11} = 1.1 = 1 \quad e_{12} = 1.1.\cos(120°) = -\sin(30°) = -0{,}5$$

$$e_{21} = 1.1.\cos(120°) = -\sin(30°) = -0{,}5 \qquad e_{22} = 1.1 = 1$$

$$\begin{cases} U_1 = U^1 - 0{,}5U^2 \\ U_2 = -0{,}5U^1 + U^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$$

Connaissant les valeurs des composantes contra variantes du vecteur $\vec{U}$, on en déduit les composantes covariantes du vecteur $\vec{U}$ soit :

$$\begin{cases} U_1 = 1.8 - 0{,}5.5{,}8 = 5{,}1 \\ U_2 = -0{,}5.8 + 1.5{,}8 = 1{,}8 \end{cases}$$

Pour trouver les composantes contra variantes du vecteur $\vec{U}$ à partir des composantes covariantes du vecteur $\vec{U}$, on utilise la matrice inverse M^{-1}.

$$M = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} e_{22} & -e_{12} \\ -e_{21} & e_{11} \end{pmatrix} \text{ où } \Delta \text{ est le déterminant}$$

$$\Delta = e_{11}.e_{22} - e_{12}.e_{21} \neq 0$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \Delta(M) = 0{,}75$$

$$M^{-1} = \frac{1}{0{,}75}\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} U^1 = \frac{2}{3}.2.U_1 + \frac{2}{3}.U_2 = \frac{4}{3}.5 + \frac{2}{3}.1{,}8 \cong 8 \\ U^2 = \frac{2}{3}.1.U_1 + \frac{2}{3}.2.U_2 = \frac{2}{3}.5 + \frac{4}{3}.1{,}8 \cong 6 \end{cases}$$

Exercice 2

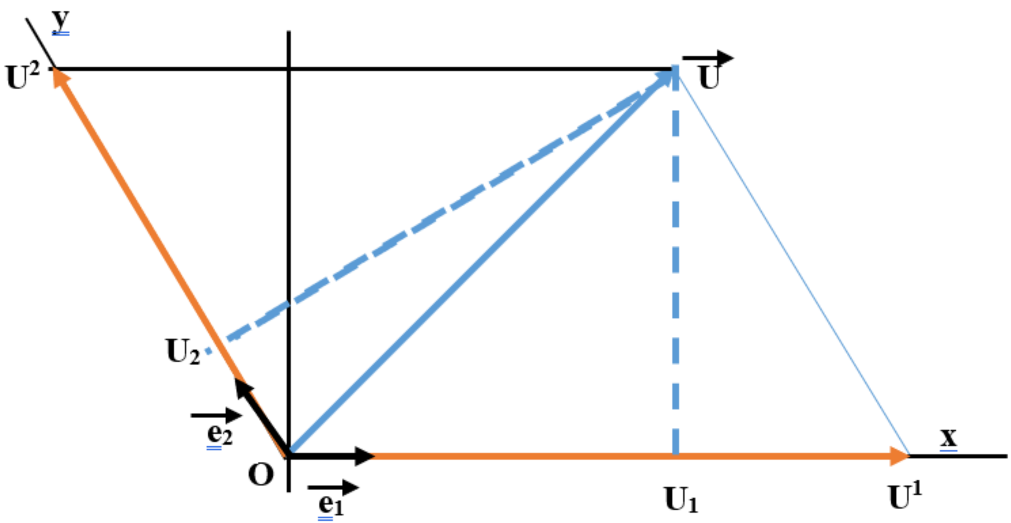
1°) Exprimons le vecteur $\vec{U}$ sous la forme contra covariante soit :

$$\vec{U} = U^1\vec{e_1} + U^2\vec{e_2} + U^3\vec{e_3} = \sum_{i=1}^{3} U^i\vec{e_i}$$

$$\vec{U}.\vec{V} = (U^1\vec{e_1} + U^2\vec{e_2} + U^3\vec{e_3})\vec{V} = U^1(\vec{e_1}\,\vec{V}) + U^2(\vec{e_2}\,\vec{V}) + U^3(\vec{e_3}\,\vec{V})$$

Le produit scalaire du vecteur $\vec{V}$ avec les vecteurs unitaires de la base $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ permet d'introduire les composantes covariantes de $\vec{V}$ soit :

$$\vec{U}.\vec{V} = U^1V_1 + U^2V_2 + U^3V_3$$



Cette fois-ci on exprime le vecteur $\vec{V}$ sous la forme contra covariante soit :

$$\vec{V} = V^1\overrightarrow{e_1} + V^2\overrightarrow{e_2} + V^3\overrightarrow{e_3} = \sum_{i=1}^{3} V^i\overrightarrow{e_i}$$

$$\vec{U}.\vec{V} = (V^1\overrightarrow{e_1} + V^2\overrightarrow{e_2} + V^3\overrightarrow{e_3})\vec{U} = V^1\left(\overrightarrow{e_1}\,\vec{U}\right) + V^2\left(\overrightarrow{e_2}\,\vec{U}\right) + V^3\left(\overrightarrow{e_3}\,\vec{U}\right)$$

Le produit scalaire du vecteur $\vec{U}$ avec les vecteurs unitaires de la base $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ permet d'introduire les composantes covariantes de $\vec{U}$ soit :

$$\vec{U}.\vec{V} = U_1V^1 + U_2V^2 + U_3V^3$$

La norme du vecteur $\vec{U}$ est :

$$\left|\vec{U}\right|^2 = U_1U^1 + U_2U^2 + U_3U^3$$

2°) Dans une base orthonormée les composantes contra variantes et covariantes se confondent et deviennent égales aux composantes vectorielles habituelles soit :

$$U^1 = U_1 = U_x \qquad U^2 = U_2 = U_y \qquad U^3 = U_3 = U_z$$

$$V^1 = V_1 = V_x \qquad V^2 = V_2 = V_y \qquad V^3 = V_3 = V_z$$

Le produit scalaire entre $\vec{U}$ et $\vec{V}$ s'écrit comme suit :

$$\vec{U}.\vec{V} = U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z$$

La norme du vecteur $\vec{U}$ est :

$$\left|\vec{U}\right|^2 = U_x^2 + U_y^2 + U_z^2$$

Exercice 3

1°)

a) Quadrivecteur énergie-impulsion initial dans $\mathcal{R}$:

Le quadrivecteur énergie-impulsion d'une particule est donné par :

$$p^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\right)$$

où $\mathcal{E}$ est l'énergie totale et $\vec{p}$ la quantité de mouvement.

- Pour le proton P_1 initialement au repos :
  - Énergie totale : $\mathcal{E}_1 = m_0c^2$ (où m_0 est la masse au repos du proton).
  - Quantité de mouvement : $\overrightarrow{p_1} = \vec{0}$.
  - Quadrivecteur :

$$p_1^\mu = \left(\frac{m_0c^2}{c}, \vec{0}\right) = (m_0c, 0,0,0)$$

- Pour le proton P_2 avec quantité de mouvement $\overrightarrow{p_2} = p_2\,\overrightarrow{e_x}$:
  - Énergie totale : $\mathcal{E}_2 = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (p_2c)^2}$.
  - Quadrivecteur :

$$p_2^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}_2}{c}, p_2, 0,0\right)$$

b) Vitesse initiale v_2 de P_2 dans $\mathcal{R}$:

La relation entre la quantité de mouvement et la vitesse est :

$$\overrightarrow{p_2} = \gamma_2 m_0 \overrightarrow{v_2}$$

où $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}$.

On peut aussi exprimer γ_2 en fonction de $\mathcal{E}_2$:

$$\mathcal{E}_2 = \gamma_2 m_0c^2 \Longrightarrow \gamma_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{m_0c^2}$$

La vitesse v_2 est donc :

$$v_2 = c\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E_2}\right)^2}$$

2)

a) Référentiel du centre de masse $\mathcal{R}_c$:

Le référentiel du centre de masse (ou référentiel barycentrique) est le référentiel où la quantité de mouvement totale du système est nulle. Pour un système isolé de deux particules, $\mathcal{R}_c$ est le référentiel où $\overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2} = \vec{0}$.

b) Vitesse de translation de $\mathcal{R}_c$ par rapport à $\mathcal{R}$:

La vitesse $\overrightarrow{V_c}$ de $\mathcal{R}_c$ par rapport à $\mathcal{R}$ est donnée par la vitesse du centre d'inertie du système :

$$\overrightarrow{V_c} = \frac{c^2\overrightarrow{P_{tot}}}{\mathcal{E}_{tot}}$$

où $\overrightarrow{P_{tot}} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_2}$ (car $\overrightarrow{p_1} = \vec{0}$) et $\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = m_0c^2 + \mathcal{E}_2$.

Ainsi :

$$V_c = \frac{c^2 p_2}{m_0 c^2 + E_2}$$

On peut exprimer p_2 en fonction de $\mathcal{E}_2$:

$$p_2 = \frac{1}{c}\sqrt{\mathcal{E}_2^2 - (m_0 c^2)^2}$$

Donc :

$$V_c = \frac{c\sqrt{\mathcal{E}_2^2 - (m_0 c^2)^2}}{m_0 c^2 + \mathcal{E}_2} = c\sqrt{\frac{\mathcal{E}_2 - m_0 c^2}{\mathcal{E}_2 + m_0 c^2}}$$

Les paramètres de la transformation de Lorentz β et γ sont :

$$\beta = \frac{V_c}{c} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_2 - m_0 c^2}{\mathcal{E}_2 + m_0 c^2}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathcal{E}_2 + m_0 c^2}{2 m_0 c^2} \quad \text{(après simplification)}$$

3)

a) Quadrivecteur énergie-impulsion total dans $\mathcal{R}$:

Le quadrivecteur énergie-impulsion total du système est la somme des quadrivecteurs des deux protons :

$$P_{tot}^{\mu} = p_1^{\mu} + p_2^{\mu} = \left(m_0 c + \frac{\mathcal{E}_2}{c}, p_2, 0,0\right)$$

b) Masse invariante du système :

La masse invariante M est donnée par :

$$M^2 c^2 = P_{tot}^{\mu} P_{tot\mu} = \left(\frac{\mathcal{E}_{tot}}{c}\right)^2 - \overrightarrow{P_{tot}^2}$$

$$M^2 c^2 = \left(m_0 c + \frac{\mathcal{E}_2}{c}\right)^2 - p_2^2$$

En développant et simplifiant :

$$M^2 c^2 = m_0^2 c^2 + 2 m_0 E_2 + \frac{\mathcal{E}_2^2}{c^2} - \left(\frac{\mathcal{E}_2^2}{c^2} - m_0^2 c^2\right) = 2 m_0^2 c^2 + 2 m_0 \mathcal{E}_2$$

$$M = \sqrt{2m_0^2 + \frac{2m_0\mathcal{E}_2}{c^2}} = \sqrt{2m_0\left(m_0 + \frac{\mathcal{E}_2}{c^2}\right)}$$

c) Application numérique :

Données :

- $m_0c^2 = 1$ GeV
- $\mathcal{E}_2 = 50$ GeV

L'énergie du système dans $\mathcal{R}_c$ est égale à la masse invariante multipliée par c^2 :

$$\mathcal{E}_{cm} = Mc^2 = \sqrt{2m_0^2c^4 + 2m_0c^2E_2} = \sqrt{2\cdot(1\ \text{GeV})^2 + 2\cdot 1\ \text{GeV}\cdot 50\ \text{GeV}}$$

$$E_{cm} = \sqrt{2+100}\ \text{GeV} = \sqrt{102}\ \text{GeV} \approx 10.1\ \text{GeV}$$

Exercice 4

Nous avons un quadrivecteur énergie-impulsion dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$P^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, p_x, p_y, p_z\right) = (5{,}3{,}2{,}0)$$

et un référentiel $\mathcal{R}'$ se déplaçant à la vitesse $v = 0{,}6c$ le long de l'axe x.

Posons $\beta = \frac{v}{c} = 0{,}6$.

1. Facteur de Lorentz γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}36}} = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$$

2. Transformations de Lorentz pour P'^μ

Les composantes du quadrivecteur dans $\mathcal{R}'$ s'écrivent :

$$\frac{\mathcal{E}'}{c} = \gamma\left(\frac{\mathcal{E}}{c} - \beta\, p_x\right), \qquad p'_x = \gamma\left(p_x - \beta\,\frac{\mathcal{E}}{c}\right), \qquad p'_y = p_y, \qquad p'_z = p_z$$

3. Calcul des nouvelles composantes

(a) Énergie $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{R}'$

$$\frac{\mathcal{E}'}{c} = \gamma\left(\frac{\mathcal{E}}{c} - \beta\, p_x\right) = 1{,}25 \times (5 - 0{,}6 \times 3) = 1{,}25 \times (5 - 1{,}8) = 1{,}25 \times 3{,}2 = 4.$$

Donc $\mathcal{E}' = 4c$ (ou simplement $\mathcal{E}' = 4$ si on pose $c = 1$).

(b) Impulsion longitudinale p'_x

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \beta\,\frac{\mathcal{E}}{c}\right) = 1{,}25 \times (3 - 0{,}6 \times 5) = 1{,}25 \times (3 - 3) = 0.$$

(c) Impulsions transverses p'_y et p'_z

$$p'_y = p_y = 2, \quad p'_z = p_z = 0.$$

4. Résultat final

Le quadrivecteur énergie-impulsion dans $\mathcal{R}'$ est :

$$P'^{\mu} = \left(\frac{\mathcal{E}'}{c}, p'_x, p'_y, p'_z\right) = (4,0,2,0)$$

Discussion et vérification

- *Invariant relativiste :*

On vérifie que $\left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$ est conservé :

$$\text{Dans } \mathcal{R}: 5^2 - 3^2 - 2^2 = 25 - 9 - 4 = 12,$$

$$\text{Dans } \mathcal{R}': 4^2 - 0^2 - 2^2 = 16 - 0 - 4 = 12.$$

L'invariant est bien conservé, confirmant la cohérence du calcul.

- *Interprétation physique :*

- L'énergie $\mathcal{E}'$ diminue (de 5c à 4c) car une partie de l'énergie est convertie en impulsion transverse.

- $p'_x = 0$ signifie que la particule n'a plus de mouvement longitudinal dans $\mathcal{R}'$.

- Les composantes transverses p_y et p_z restent inchangées, comme attendu pour une transformation de Lorentz le long de x.

Exercice 5

La norme d'un quadrivecteur x^{μ} est donnée par :

$$x^{\mu}x_{\mu} = \eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}$$

où la métrique $\eta_{\mu\nu}$ est définie par : $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Explicitons le calcul en utilisant la convention de sommation d'Einstein :

$$x^{\mu}x_{\mu} = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

Substituons les composantes $x^{\mu} = (3,1,2,0)$:

$$x^{\mu}x_{\mu} = (3)^2 - (1)^2 - (2)^2 - (0)^2 = 9 - 1 - 4 - 0 = 4$$

La norme du quadrivecteur permet de déterminer si l'intervalle est de genre temps, espace ou lumière :

- Si $x^{\mu}x_{\mu} > 0$: genre temps.

- Si $x^\mu x_\mu < 0$: genre espace.

- Si $x^\mu x_\mu = 0$: genre lumière.

Ici, $x^\mu x_\mu = 4 > 0$, donc l'intervalle est de genre temps.

Exercice 6

Pour trouver la masse invariante m de la particule, nous allons utiliser la relation relativiste entre l'énergie $\mathcal{E}$, l'impulsion $\vec{p}$ et la masse m. Cette relation provient de la norme du quadrivecteur énergie-impulsion $p^\mu = (\mathcal{E}/c, \vec{p})$.

Étape 1 : Écrire la relation relativiste

Dans un espace-temps de Minkowski (avec c = 1 dans les unités naturelles), la norme du quadrivecteur énergie-impulsion est donnée par :

$$p^\mu p_\mu = \mathcal{E}^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$$

Comme c = 1, cela se simplifie en :

$$m^2 = \mathcal{E}^2 - |\vec{p}|^2$$

Étape 2 : Calculer $|\vec{p}|^2$

L'impulsion est donnée par $\vec{p} = (8{,}6{,}0)\mathrm{GeV/c}$. Sa norme au carré est :

$$|\vec{p}|^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 8^2 + 6^2 + 0^2 = 64 + 36 = 100\,\mathrm{GeV}^2/c^2$$

Étape 3 : Appliquer la relation masse-énergie

L'énergie est $\mathcal{E} = 10\mathrm{GeV}$. En substituant dans l'équation de la masse invariante :

$$m^2 = \mathcal{E}^2 - |\vec{p}|^2 = 10^2 - 100 = 100 - 100 = 0$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{0} = 0\,\mathrm{GeV}/c^2$$

Conclusion

La particule a une masse invariante nulle :

$$m = 0\,\mathrm{GeV}/c^2$$

Cela signifie qu'il s'agit d'une particule se déplaçant à la vitesse de la lumière, comme un photon.

Exercice 7

1. Rappel sur les quadrivecteurs

Le quadrivecteur onde (ou quadrivecteur d'onde) est défini comme :

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$$

où :

- $\omega = 2\pi\nu$ est la pulsation,

- $\vec{k}$ est le vecteur d'onde ($|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$ pour un photon).

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, si le photon se propage selon $\pm x$, on a :

- Cas 1 : Propagation vers $+x$

$$k^{\mu} = \left(\frac{\omega}{c}, \frac{\omega}{c}, 0{,}0\right)$$

- Cas 2 : Propagation vers $-x$

$$k^{\mu} = \left(\frac{\omega}{c}, -\frac{\omega}{c}, 0{,}0\right)$$

2. Transformation de Lorentz du quadrivecteur onde

Le référentiel $\mathcal{R}'$ se déplace à $v = 0{,}8c$ par rapport à $\mathcal{R}$ selon $+x$. La transformation de Lorentz pour k^{μ} s'écrit :

$$k'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} k^{\nu}$$

où Λ^{ν}_{μ} est la matrice de transformation de Lorentz :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\,\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \beta = \frac{v}{c} = 0{,}8 \text{ et } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{5}{3}$$

3. Cas 1 : Photon se propageant vers $+x$

Dans $\mathcal{R}$, le quadrivecteur est :

$$k^{\mu} = \left(\frac{\omega}{c}, \frac{\omega}{c}, 0{,}0\right)$$

Dans $\mathcal{R}'$, on applique la transformation :

$$k'^{0} = \gamma k^{0} - \gamma\beta k^{1} = \gamma\left(\frac{\omega}{c}\right) - \gamma\beta\left(\frac{\omega}{c}\right) = \gamma\frac{\omega}{c}(1-\beta)$$

$$k'^{1} = -\gamma\beta k^{0} + \gamma k^{1} = -\gamma\beta\left(\frac{\omega}{c}\right) + \gamma\left(\frac{\omega}{c}\right) = \gamma\frac{\omega}{c}(1-\beta)$$

Ainsi :

$$k'^{\mu} = \left(\gamma\frac{\omega}{c}(1-\beta), \gamma\frac{\omega}{c}(1-\beta), 0{,}0\right)$$

La pulsation dans $\mathcal{R}'$ est donnée par $\omega' = ck'^{0}$, donc :

$$\omega' = \gamma\omega(1-\beta) = \frac{5}{3}\omega(1-0{,}8) = \frac{5}{3}\omega \times 0{,}2 = \frac{\omega}{3}$$

Comme $\omega = 2\pi\nu$, on a :

$$\nu' = \frac{\nu}{3}$$

Résultat :

$$\nu' = \frac{\nu}{3} \quad \text{(décalage vers le rouge)}$$

4. Cas 2 : Photon se propageant vers $-x$

Dans $\mathcal{R}$, le quadrivecteur est :

$$k^{\mu} = \left(\frac{\omega}{c}, -\frac{\omega}{c}, 0{,}0\right)$$

Dans $\mathcal{R}'$, on applique la transformation :

$$k'^{0} = \gamma k^{0} - \gamma\beta k^{1} = \gamma\left(\frac{\omega}{c}\right) - \gamma\beta\left(-\frac{\omega}{c}\right) = \gamma\frac{\omega}{c}(1+\beta)$$

$$k'^{1} = -\gamma\beta k^{0} + \gamma k^{1} = -\gamma\beta\left(\frac{\omega}{c}\right) + \gamma\left(-\frac{\omega}{c}\right) = -\gamma\frac{\omega}{c}(1+\beta)$$

Ainsi :

$$k'^{\mu} = \left(\gamma\frac{\omega}{c}(1+\beta), -\gamma\frac{\omega}{c}(1+\beta), 0{,}0\right)$$

La pulsation dans $\mathcal{R}'$ est :

$$\omega' = ck'^{0} = \gamma\omega(1+\beta) = \frac{5}{3}\omega(1+0{,}8) = \frac{5}{3}\omega \times 1{,}8 = 3$$

D'où :

$$\nu' = 3 \quad \text{(décalage vers le bleu)}$$

Exercice 8

1. Quadri-impulsions des particules

Dans le référentiel du laboratoire, les quadri-impulsions des deux particules (de masse m) sont

$$P_1^{\mu} = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\right), \quad P_2^{\mu} = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, -\vec{p}\right),$$

où :

- $\mathcal{E} = \sqrt{|\vec{p}|^2c^2 + m^2c^4}$ (énergie relativiste d'une particule),
- $\vec{p}$ est l'impulsion de la première particule (et $-\vec{p}$ pour la seconde).

2. Quadri-impulsion totale

La quadri-impulsion totale est :

$$P^{\mu}_{tot} = P^{\mu}_{1} + P^{\mu}_{2} = \left(\frac{2\mathcal{E}}{c}, \vec{0}\right).$$

- Interprétation physique : L'impulsion totale est nulle ($\vec{p} - \vec{p} = \vec{0}$), donc le référentiel du laboratoire est déjà le référentiel du CM.

3. Énergie dans le référentiel du CM

L'énergie totale dans le CM est simplement la somme des énergies des deux particules, puisque leur impulsion totale est nulle :

$$\mathcal{E}_{CM} = 2\mathcal{E}$$

4. Vérification via l'invariant relativiste

Pour confirmer, calculons l'invariant $(P_{tot})^2$:

$$(P_{tot})^2 = \left(\frac{2\mathcal{E}}{c}\right)^2 - \left(\vec{0}\right)^2 = \frac{4\mathcal{E}^2}{c^2}.$$

Dans le référentiel du CM, la quadri-impulsion totale est purement temporelle :

$$P^{\mu}_{CM} = \left(\frac{\mathcal{E}_{CM}}{c}, \vec{0}\right),$$

d'où :

$$(P_{CM})^2 = \left(\frac{\mathcal{E}_{CM}}{c}\right)^2.$$

En égalisant les invariants :

$$\frac{\mathcal{E}^2_{CM}}{c^2} = \frac{4\mathcal{E}^2}{c^2} \Longrightarrow \mathcal{E}_{CM} = 2\mathcal{E}$$

Exercice 9

1. Quadrivecteur vitesse dans $\mathcal{R}$

Le quadrivecteur vitesse V^{μ} dans $\mathcal{R}$ est défini par :

$$V^{\mu} = \gamma_u(c, \vec{u}) = \gamma_u\left(c, u_x, u_y, u_z\right),$$

où $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ est le facteur de Lorentz associé à la vitesse $\vec{u}$.

2. Transformation de Lorentz vers $\mathcal{R}'$

Le référentiel $\mathcal{R}'$ se déplace à vitesse v selon x par rapport à $\mathcal{R}$. La transformation de Lorentz pour les quadrivecteurs s'écrit :

$$V'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} V^{\nu},$$

avec la matrice de transformation Λ :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v\beta & 0 & 0 \\ -\gamma_v\beta & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \beta = \frac{v}{c}, \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

En appliquant cette transformation à $V^\mu = (\gamma_u c, \gamma_u u_x, \gamma_u u_y, \gamma_u u_z)$, on obtient :

$$V'^0 = \gamma_v\gamma_u c - \gamma_v\beta\gamma_u u_x = \gamma_v\gamma_u\left(c - \frac{vu_x}{c}\right),$$

$$V'^1 = -\gamma_v\beta\gamma_u c + \gamma_v\gamma_u u_x = \gamma_v\gamma_u(u_x - v),$$

$$V'^2 = \gamma_u u_y, \quad V'^3 = \gamma_u u_z.$$

3. Composantes de la vitesse dans $\mathcal{R}'$

Le quadrivecteur vitesse dans $\mathcal{R}'$ est :

$$V'^\mu = \gamma_{u'}(c, u'_x, u'_y, u'_z),$$

où $\gamma_{u'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}$.

En identifiant avec les expressions ci-dessus :

- Composante temporelle :

$$\gamma_{u'} c = \gamma_v\gamma_u\left(c - \frac{vu_x}{c}\right) \Longrightarrow \gamma_{u'} = \gamma_v\gamma_u\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right).$$

- Composantes spatiales :

$$\gamma_{u'} u'_x = \gamma_v\gamma_u(u_x - v), \quad \gamma_{u'} u'_y = \gamma_u u_y, \quad \gamma_{u'} u'_z = \gamma_u u_z.$$

En divisant les composantes spatiales par la composante temporelle, on obtient les vitesses dans $\mathcal{R}'$:

$$u'_x = \frac{V'^1}{V'^0}c = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{V'^2}{V'^0}c = \frac{u_y}{\gamma_v\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}, \quad u'_z = \frac{V'^3}{V'^0}c = \frac{u_z}{\gamma_v\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}.$$

4. Vérification des formules d'addition des vitesses

On retrouve bien les formules d'addition relativiste des vitesses :

- Pour u'_x : c'est la loi d'addition classique modifiée par le dénominateur relativiste.

- Pour u'_y et u'_z : les vitesses transverses sont réduites par le facteur $\gamma_v\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)$.

Conclusion :

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma_v\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}, \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma_v\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

Ces expressions sont identiques aux formules standard de transformation des vitesses en relativité restreinte, confirmant la cohérence de l'approche quadrivectorielle.

Exercice 10

1. Loi de conservation du quadrivecteur impulsion-énergie

La conservation du quadrivecteur impulsion-énergie s'écrit :

$$P_1^\mu + P_2^\mu = P_f^\mu$$

où :

- $P_1^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{c}, \overrightarrow{p_1}\right)$ (quadrivecteur de la particule 1 avant collision),
- $P_2^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}_2}{c}, \overrightarrow{p_2}\right)$ (quadrivecteur de la particule 2 avant collision),
- $P_f^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}_f}{c}, \overrightarrow{p_f}\right)$ (quadrivecteur de la particule finale).

2. Expression de P_f^μ

En utilisant la conservation :

$$P_f^\mu = P_1^\mu + P_2^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{c}, \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}\right)$$

3. Carré de P_f^μ et masse M

Le carré du quadrivecteur P_f^μ donne la masse invariante M de la particule finale :

$$P_{f\mu}P_f^\mu = -M^2c^2$$

En développant :

$$P_{f\mu}P_f^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{c}\right)^2 - (\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2})^2 = -M^2c^2.$$

On utilise les invariants des quadrivecteurs initiaux :

$$P_{1\mu}P_1^\mu = -m_1^2c^2, \quad P_{2\mu}P_2^\mu = -m_2^2c^2, \quad P_{1\mu}P_2^\mu = \frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{c^2} - \overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{p_2}.$$

En combinant :

$$-M^2c^2 = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 = -m_1^2c^2 - m_2^2c^2 + 2\left(\frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{c^2} - \overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{p_2}\right)$$

D'où :

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2}{c^4}(\overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{p_2} - \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2)$$

4. Cas où la particule 2 est au repos ($\overrightarrow{p_2} = 0$)

Si $\overrightarrow{p_2} = 0$ et $\mathcal{E}_2 = m_2c^2$, alors :

$$P_{1\mu}P_2^{\mu} = \frac{\mathcal{E}_1 m_2 c^2}{c^2} = \mathcal{E}_1 m_2$$

La masse M devient :

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2}{c^4}(0 - \mathcal{E}_1 m_2 c^2) = m_1^2 + m_2^2 - \frac{2\mathcal{E}_1 m_2}{c^2}$$

Avec $\mathcal{E}_1 = m_1c^2 + \mathcal{E}_{c1}$ (où $\mathcal{E}_{c1}$ est l'énergie cinétique) :

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2m_2\left(m_1 + \frac{\mathcal{E}_{c1}}{c^2}\right)$$

Simplification :

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2m_1m_2 - \frac{2m_2\mathcal{E}_{c1}}{c^2} = (m_1 - m_2)^2 - \frac{2m_2\mathcal{E}_{c1}}{c^2}$$

5. Cas limite $\mathcal{E}_{c1} \ll m_1c^2$

Si $\mathcal{E}_{c1}$ est négligeable devant m_1c^2 , alors :

$$M \approx \sqrt{(m_1 - m_2)^2} = |m_1 - m_2|$$

- Si $m_1 > m_2$, $M \approx m_1 - m_2$

- Si $m_2 > m_1$, $M \approx m_2 - m_1$

Interprétation :

À faible énergie cinétique, la masse finale est simplement la différence des masses initiales, car l'énergie apportée par $\mathcal{E}_{c1}$ est insuffisante pour créer une masse significative supplémentaire.

Discussion physique

- Énergie élevée : Si $\mathcal{E}_{c1}$ est grande, M peut dépasser $m_1 + m_2$ (création de masse via l'énergie cinétique).

- Collisions inélastiques : La masse M de la particule composite dépend des énergies et impulsions initiales, illustrant la conversion énergie-masse.

Exercice 11

1. Quadrivecteur d'onde dans $\mathcal{R}'$

Dans le référentiel propre $\mathcal{R}'$ de la source, le quadrivecteur d'onde est :

$$K'^{\mu} = \left(\frac{\omega'}{c}, k', 0{,}0\right), \quad \text{où } \omega' = 2\pi\nu_0 \text{ et } k' = \frac{\omega'}{c}.$$

2. Transformation de Lorentz vers $\mathcal{R}$

La transformation donne :

$$K^{\mu} = \left(\gamma\left(\frac{\omega'}{c} + \beta k'\right), \gamma\left(k' + \beta\frac{\omega'}{c}\right), 0{,}0\right)$$

Avec $k' = \frac{\omega'}{c}$, cela se simplifie en :

$$K^{\mu} = \left(\gamma\frac{\omega'}{c}(1+\beta), \gamma\frac{\omega'}{c}(1+\beta), 0{,}0\right)$$

3. Fréquence mesurée ν

La composante temporelle $K^0 = \frac{\omega}{c}$ donne :

$$\omega = \gamma\omega'(1+\beta) \Longrightarrow \nu = \nu_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \text{(source s'approchant).}$$

- Source s'éloignant : Remplacer v par $-v$:

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

4. Effet Doppler transverse

Si la source se déplace perpendiculairement ($\overrightarrow{k'} \perp \vec{v}$), le quadrivecteur dans $\mathcal{R}$ est :

$$K^{\mu} = \left(\gamma\frac{\omega'}{c}, k'_x, k'_y, 0\right)$$

La fréquence mesurée est :

$$\nu = \gamma\nu_0 \quad \text{(décalage vers le rouge purement relativiste).}$$

Résultats clés

1. Source s'approchant :

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

2. Source s'éloignant :

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

3. Effet transverse :

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Ces expressions correspondent aux formules standard de l'effet Doppler relativiste.

Exercice 12

Dans le référentiel R, le produit scalaire s'écrit comme suit :

$$A_\mu B^\mu = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3$$

Sous l'action de la transformation de Lorentz, les composantes du quadrivecteur A dans le repère mobile R' sont :

$$\begin{pmatrix} A'^0 = ct'_1 \\ A'^1 = x'_1 \\ A'^2 = y'_1 \\ A'^3 = z'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^0 = ct_1 \\ A^1 = x_1 \\ A^2 = y_1 \\ A^3 = z_1 \end{pmatrix}$$

$$A'^0 = \gamma A^0 - \beta\gamma A^1 = \gamma(A^0 - \beta A^1) \quad \text{et} \quad A'^1 = -\beta\gamma A^0 + \gamma A^1 = \gamma(-\beta A^0 + A^1)$$

$$A'^2 = A^2 \qquad A'^3 = A^3$$

Sous l'action de la transformation de Lorentz, les composantes du quadrivecteur B dans le repère mobile R' sont :

$$\begin{pmatrix} B'^0 = ct'_2 \\ B'^1 = x'_2 \\ B'^2 = y'_2 \\ B'^3 = z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^0 = ct_2 \\ B^1 = x_2 \\ B^2 = y_2 \\ B^3 = z_2 \end{pmatrix}$$

$$B'^0 = \gamma B^0 - \beta\gamma B^1 = \gamma(B^0 - \beta B^1) \quad \text{et} \quad B'^1 = -\beta\gamma B^0 + \gamma B^1 = \gamma(-\beta B^0 + B^1)$$

$$B'^2 = B^2 \qquad B'^3 = B^3$$

Dans le référentiel R', le produit scalaire s'écrit comme suit :

$$A'_\mu B'^\mu = A'^0B'^0 - A'^1B'^1 - A'^2B'^2 - A'^3B'^3$$

Remplaçons les composantes des deux quadrivecteurs dans le repère mobile R' par les composantes des deux quadrivecteurs dans le repère fixe R soit :

$$A'_\mu B'^\mu = \gamma(A^0 - \beta A^1)\gamma(B^0 - \beta B^1) - \gamma(-\beta A^0 + A^1)\gamma(-\beta B^0 + B^1) - A^2B^2 - A^3B^3$$

$$A'_\mu B'^\mu = \gamma^2(A^0B^0 - \beta A^1B^0 - \beta A^0B^1 + \beta^2A^1B^1) - \gamma^2(\beta^2A^0B^0 - \beta A^1B^0 - \beta A^0B^1 + A^1B^1) - A^2B^2 - A^3B^3.$$

Après un calcul simple on obtient :

$$A'_\mu B'^\mu = \gamma^2[A^0B^0(1-\beta^2) - A^1B^1(1-\beta^2)] - A^2B^2 - A^3B^3$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \quad \Rightarrow \quad \gamma^2(1-\beta^2) = 1$$

$$A'_\mu B'^\mu = \gamma^2(1-\beta^2)(A^0B^0 - A^1B^1) - A^2B^2 - A^3B^3 = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3$$

$$A'_\mu B'^\mu = A_\mu B^\mu$$

8 Electromagnétisme

Exercice 1

Nous avons un référentiel $\mathcal{R}$ où un observateur au repos mesure un champ électrique $\vec{E}$ et aucun champ magnétique ($\vec{B} = 0$).

Un second référentiel R' se déplace à une vitesse $\vec{v} = v\vec{e_x}$ par rapport à $\mathcal{R}$. Nous cherchons le champ magnétique $\vec{B'}$ observé dans $\mathcal{R}'$ à l'ordre linéaire en v , et nous vérifierons qu'il est bien perpendiculaire à $\vec{E'}$ et $\vec{v}$.

1. Transformation des champs (approximation non-relativiste)

Les transformations de Lorentz pour les champs électrique et magnétique, à l'ordre linéaire en v (en négligeant v^2/c^2), donnent :

$$\vec{E'} \approx \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{E} \quad (\text{car } \vec{B} = 0),$$

$$\vec{B'} \approx \vec{B} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} = -\frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}.$$

Remarque :

- À cet ordre, le champ électrique ne change pas ($\vec{E'} \approx \vec{E}$).

- Le champ magnétique induit $\vec{B'}$ est proportionnel à $\vec{v} \times \vec{E}$.

2. Calcul de $\vec{B'}$

Puisque $\vec{v} = v\vec{e}_x$ et $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$, le produit vectoriel donne :

$$\vec{v} \times \vec{E} = v\vec{e}_x \times (E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z) = vE_y\vec{e}_z - vE_z\vec{e}_y.$$

Ainsi, le champ magnétique dans $\mathcal{R}'$ est :

$$\vec{B'} = -\frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} = -\frac{v}{c^2}\left(E_y\vec{e}_z - E_z\vec{e}_y\right) = \frac{v}{c^2}\left(E_z\vec{e}_y - E_y\vec{e}_z\right).$$

3. Vérification de la perpendicularité

Nous devons montrer que $\vec{B'}$ est perpendiculaire à $\vec{E'}$ et $\vec{v}$.

(a) $\vec{B'} \perp \vec{v}$

$$\vec{B'} \cdot \vec{v} = \left(\frac{v}{c^2}\left(E_z\vec{e}_y - E_y\vec{e}_z\right)\right) \cdot (v\vec{e}_x) = 0 \quad \left(\text{car } \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0\right).$$

(b) $\vec{B'} \perp \vec{E'} \approx \vec{E}$

$$\vec{B'} \cdot \vec{E} = \left(\frac{v}{c^2}\left(E_z\vec{e_y} - E_y\vec{e_z}\right)\right) \cdot \left(E_x\vec{e_x} + E_y\vec{e_y} + E_z\vec{e_z}\right) = \frac{v}{c^2}\left(E_zE_y - E_yE_z\right) = 0.$$

Conclusion

- Le champ magnétique induit dans $\mathcal{R}'$ est :

$$\vec{B'} = \frac{v}{c^2}\left(E_z\vec{e}_y - E_y\vec{e}_z\right).$$

- Il est bien perpendiculaire à $\vec{v} = v\vec{e_x}$ et à $\vec{E'} \approx \vec{E}$, comme attendu pour un champ magnétique généré par un mouvement relatif dans un champ électrique.

Remarque finale :

Ce résultat est cohérent avec l'effet relativiste de la transformation des champs, où un champ électrique dans un référentiel peut apparaître comme un champ magnétique dans un autre référentiel en mouvement. À l'ordre linéaire en v, seul le terme $\vec{v} \times \vec{E}$ contribue au champ magnétique observé.

Exercice 2

1. Approche relativiste (transformations de Lorentz)

Une charge q en mouvement uniforme peut être traitée en utilisant les transformations de Lorentz des champs.

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ où la charge est au repos, les champs sont purement électrostatiques :

$$\vec{E'} = \frac{q\vec{r'}}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, \quad \vec{B'} = 0.$$

où $\overrightarrow{r'} = (x', y', z')$ est la position dans $\mathcal{R}'$.

Pour revenir au référentiel $\mathcal{R}$ où la charge se déplace à $\vec{v} = v\overrightarrow{e_x}$, on applique les transformations inverses des champs.

2. Transformation des coordonnées et des champs

Les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ (lié à la charge) sont reliées à celles de $\mathcal{R}$ par :

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z,$$

où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

Les champs dans $\mathcal{R}$ s'obtiennent via :

$$\overrightarrow{E_\parallel} = \overrightarrow{E'_\parallel}, \quad \overrightarrow{E_\perp} = \gamma \overrightarrow{E'_\perp}$$

$$\overrightarrow{B_\parallel} = 0, \quad \overrightarrow{B_\perp} = \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \times \overrightarrow{E'_\perp}$$

3. Calcul explicite des champs dans $\mathcal{R}$

En substituant $\overrightarrow{E'} = \frac{q\overrightarrow{r'}}{4\pi\epsilon_0 r'^3}$, on obtient :

$$\vec{E} = \frac{q\gamma\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 (\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

où $\vec{R} = (x - vt, y, z)$.

Le champ magnétique est donné par :

$$\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} = \frac{\mu_0 q\gamma v}{4\pi} \frac{(0, -z, y)}{(\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

4. Résultat final (composantes explicites)

- Champ électrique :

$$E_x = \frac{q\gamma(x - vt)}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}},$$

$$E_y = \frac{q\gamma y}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}},$$

$$E_z = \frac{q\gamma z}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}.$$

- Champ magnétique :

$$B_x = 0, \quad B_y = -\frac{\mu_0 q\gamma v z}{4\pi[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}},$$

$$B_z = \frac{\mu_0 q\gamma v y}{4\pi[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}.$$

5. Cas non-relativiste ($v \ll c$)

Si $\gamma \approx 1$, les champs se simplifient en :

- Électrique : Champ de Coulomb habituel, décalé par le mouvement :

$$\vec{E} \approx \frac{q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad \vec{R} = (x - vt, y, z).$$

- Magnétique : Loi de Biot-Savart pour une charge ponctuelle :

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 q\vec{v} \times \vec{R}}{4\pi R^3}.$$

Conclusion
- Le champ électrique est contracté dans la direction du mouvement (facteur γ).
- Le champ magnétique est perpendiculaire à $\vec{v}$ et $\vec{E}$, comme attendu.
- Ces résultats sont cohérents avec les équations de Maxwell et la relativité restreinte.

Exercice 3

1. Hypothèses et configuration

- Champ électrique : $\vec{E} = E\vec{e_x}$ (constant, direction x)
- Conditions initiales :
    - Position initiale : x (0) = 0
    - Vitesse initiale : v (0) = 0
- Force de Lorentz (en l'absence de champ magnétique) :

$$\vec{F} = q\vec{E} = qE\vec{e_x}$$

2. Équation du mouvement

D'après la deuxième loi de Newton :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = qE$$

En intégrant une première fois par rapport au temps, on obtient la vitesse :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{qE}{m}t + C_1$$

Avec la condition initiale v(0) = 0, on trouve $C_1 = 0$, donc :

$$v(t) = \frac{qE}{m}t$$

3. Position en fonction du temps

En intégrant à nouveau :

$$x(t) = \frac{qE}{2m}t^2 + C_2$$

Avec x (0) = 0, on a $C_2 = 0$, d'où :

$$x(t) = \frac{qE}{2m}t^2$$

4. Vitesse en fonction de la position r

On élimine le temps t entre les équations de v(t) et x(t) :

$$t = \sqrt{\frac{2mx}{qE}}$$

En substituant dans v(t) :

$$v(x) = \frac{qE}{m}\sqrt{\frac{2mx}{qE}} = \sqrt{\frac{2qEx}{m}}$$

On note r = x (déplacement le long de $\overrightarrow{e_x}$), donc :

$$v(r) = \sqrt{\frac{2qEr}{m}}$$

5. Discussion physique
- Énergie cinétique : $\frac{1}{2}mv^2 = qEr$ (conservation de l'énergie)
- Accélération constante : $a = \frac{qE}{m}$

- Temps caractéristique : Pour atteindre une distance r , $t = \sqrt{\frac{2mr}{qE}}$

6. Généralisation relativiste (si $v \approx c$)

Pour des vitesses relativistes, on utilise :

$$\frac{d}{dt}(\gamma mv) = qE, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

La solution devient :

$$v(t) = \frac{qEt}{\sqrt{m^2 + (qEt/c)^2}}$$

et la position :

$$x(t) = \frac{c^2 m}{qE}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc}\right)^2} - 1\right)$$

Conclusion

- Cas non-relativiste : $v(r) = \sqrt{\frac{2qEr}{m}}$
- Cas relativiste : Solution plus complexe avec facteur γ
- Application : Accélération de particules dans un champ électrostatique (ex : tube accélérateur).

Exercice 4

1. Hypothèses et configuration

- Champ magnétique : $\vec{B} = B\vec{e_z}$ (constant, direction z)

- Vitesse initiale : $\vec{u} = u\vec{e_x}$ (direction x)

- Force de Lorentz (sans champ électrique) :

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$

où e est la charge élémentaire (q = -e pour un électron).

2. Équations du mouvement

En appliquant la deuxième loi de Newton :

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$

En composantes :

$$m_0 \frac{dv_x}{dt} = -eBv_y,$$

$$m_0 \frac{dv_y}{dt} = eBv_x,$$

$$m_0 \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

3. Résolution des équations différentielles

- Mouvement selon z :

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \implies v_z = \text{constante}.$$

Comme $v_z(0) = 0$, alors $v_z(t) = 0$. Le mouvement est donc confiné au plan xy .

- Mouvement dans le plan xy :

On combine les équations pour v_x et v_y :

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\omega_c^2 v_x, \quad \omega_c = \frac{eB}{m_0} \quad \text{(fréquence cyclotron)}$$

Les solutions sont :

$$v_x(t) = u\cos(\omega_c t), \quad v_y(t) = -u\sin(\omega_c t).$$

4. Position en fonction du temps

En intégrant les vitesses :

$$x(t) = \frac{u}{\omega_c}\sin(\omega_c t) + x_0, \quad y(t) = \frac{u}{\omega_c}\cos(\omega_c t) + y_0.$$

Avec les conditions initiales x (0) = 0 et y (0) = 0 :

$$x(t) = \frac{u}{\omega_c}\sin(\omega_c t), \quad y(t) = \frac{u}{\omega_c}(1 - \cos(\omega_c t)).$$

5. Trajectoire finale

La trajectoire est un cercle dans le plan xy :

- Rayon : $r_c = \frac{u}{\omega_c} = \frac{m_0 u}{eB}$ (rayon de Larmor)

- Centre : $\left(0,\frac{u}{\omega_c}\right)$

- Équation paramétrique :

$$x^2+\left(y-\frac{u}{\omega_c}\right)^2=\left(\frac{u}{\omega_c}\right)^2.$$

6. Propriétés physiques

- Période : $T=\frac{2\pi}{\omega_c}=\frac{2\pi m_0}{eB}$

- Énergie cinétique : Constante ($\vec{B}$ ne travaille pas)

- Cas relativiste : Si $u \approx c$, remplacer $m_0 parm = \gamma m_0$.

Conclusion

L'électron décrit une trajectoire circulaire dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$, avec :

- Vitesse angulaire : $\omega_c=\frac{eB}{m_0}$

- Rayon : $r_c=\frac{m_0 u}{eB}$

Application : Ce mouvement est à la base du fonctionnement des cyclotrons et autres accélérateurs de particules.

Exercice 5

Les invariants sont :

$$I_1=\vec{E}\cdot\vec{B},\quad I_2=E^2-c^2B^2$$

- Pour O_1 :

$$I_1=\alpha\cdot 0+(-\alpha)\cdot 0+0\cdot\frac{2\alpha}{c}=0$$

$$I_2=\alpha^2+(-\alpha)^2+0^2-c^2\left(0^2+0^2+\left(\frac{2\alpha}{c}\right)^2\right)=2\alpha^2-4\alpha^2=-2\alpha^2$$

- Pour O_2 :

$$I_1'=0\cdot B_x'+0\cdot\frac{\alpha}{c}+2\alpha\cdot B_z'=2\alpha B_z'$$

$$I_2' = 0^2 + 0^2 + (2\alpha)^2 - c^2\left(B_x'^2 + \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 + B_z'^2\right)$$

Égalité des invariants :

$$I_1 = I_1' \Rightarrow 0 = 2\alpha B_z' \Rightarrow B_z' = 0$$

$$I_2 = I_2' \Rightarrow -2\alpha^2 = 4\alpha^2 - c^2\left(B_x'^2 + \frac{\alpha^2}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow -6\alpha^2 = -c^2 B_x'^2 - \alpha^2$$

$$\Rightarrow c^2 B_x'^2 = 5\alpha^2 \Rightarrow B_x' = \pm\frac{\alpha\sqrt{5}}{c}$$

Conclusion
Les composantes manquantes du champ magnétique pour O_2 sont :

$$B_x' = \pm\frac{\alpha\sqrt{5}}{c}, \quad B_z' = 0$$

Exercice 6

1. Expression des composantes de la force de Minkowski $\mathcal{F}^\mu$ en fonction de $\vec{F}$ et $\vec{v}$

Le quadrivecteur impulsion est donné par :

$$P^\mu = (\mathcal{E}/c, \vec{p}) = (\gamma mc, \gamma m\vec{v})$$

où :

- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ est le facteur de Lorentz,
- $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ est l'énergie relativiste,
- $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ est l'impulsion relativiste.

La force de Minkowski est définie comme :

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau}$$

où τ est le temps propre, relié au temps coordonnée t par $d\tau = dt / \gamma$. Ainsi :

$$\mathcal{F}^\mu = \gamma\frac{dP^\mu}{dt}$$

Calcul des composantes :

- Composante temporelle ($\mu = 0$) :

$$\mathcal{F}^0 = \gamma \frac{dP^0}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right) = \frac{\gamma}{c}\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}$$

- Composantes spatiales ($\mu = i$) :

$$\mathcal{F}^i = \frac{dp^i}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dp^i}{dt} = \gamma F^i$$

2. Preuve que $\mathcal{F}^\mu V_\mu = 0$

Le quadrivecteur vitesse est :

$$V^\mu = (\gamma c, \gamma\vec{v}) \quad \text{et donc} \quad V_\mu = (\gamma c, -\gamma\vec{v})$$

Le produit scalaire donne :

$$\mathcal{F}^\mu V_\mu = \mathcal{F}^0 V_0 + \mathcal{F}^i V_i = \left(\gamma \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c}\right)(\gamma c) + \gamma\vec{F} \cdot (-\gamma\vec{v})$$

$$\mathcal{F}^\mu V_\mu = \gamma^2\left(\vec{v} \cdot \vec{F}\right) - \gamma^2\left(\vec{F} \cdot \vec{v}\right) = 0$$

Interprétation :
Ce résultat montre que la force de Minkowski est orthogonale à la quadri-vitesse, ce qui est cohérent avec le fait que $V^\mu V_\mu = c^2$ (la norme de la quadri-vitesse est constante). En dérivant cette relation par rapport à τ, on obtient :

$$\frac{d}{d\tau}\left(V^\mu V_\mu\right) = 2\mathcal{F}^\mu V_\mu = 0$$

3. Composantes spatiales de la force de Lorentz $f^\mu = qV_\nu F^{\mu\nu}$

Le tenseur électromagnétique est :

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

La force de Lorentz s'écrit :

$$f^{\mu} = qV_{\nu}F^{\mu\nu}$$

Calcul des composantes spatiales (i = 1, 2, 3) :

$$f^{i} = qV_{\nu}F^{i\nu} = q\left(V_0F^{i0} + V_jF^{ij}\right)$$

où :

- $V_0 = \gamma c$,
- $V_j = -\gamma v_j$,
- $F^{i0} = E_i/c$,
- $F^{ij} = \varepsilon_{ijk}B_k$

où ε_{ijk} est le symbole de Levi-Civita défini par

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \text{ si } (i,j,k) \text{ est } (1,2,3), (2,3,1) \text{ ou } (3,1,2) \\ -1 \text{ si } (i,j,k) \text{ est } (3,2,1), (1,3,2) \text{ ou } (2,1,3) \\ \ \ 0 \ \text{ si } i = j \ \text{ ou } \ j = k \ \text{ ou } \ k = i \end{cases}$$

Ainsi :

$$f^{i} = q\left(\gamma c \cdot \frac{E_i}{c} + \left(-\gamma v_j\right) \cdot \varepsilon_{ijk}B_k\right) = q\gamma\left(E_i - \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)_i\right)$$

En notation vectorielle :

$$\vec{f} = q\gamma\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Conclusion :
Les composantes spatiales de la force de Lorentz relativiste sont :

$$\vec{f} = q\gamma\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$