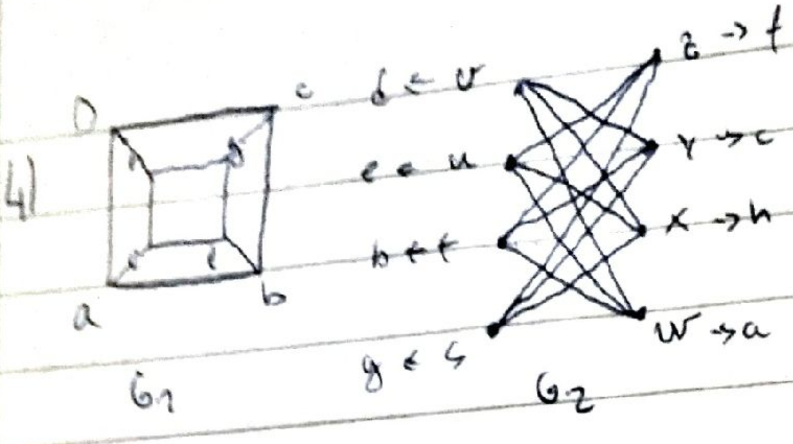
4)



Izomorfno: enako št. točk in enako stopnje

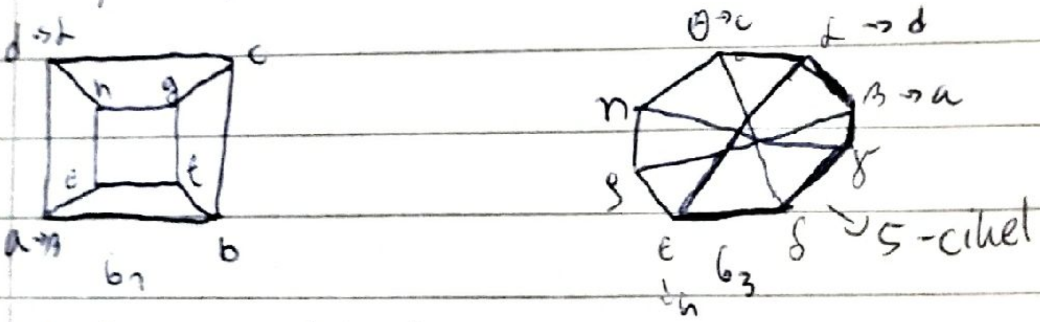
vse točke stopnje 3

Opazimo, da imajo vsi 3-je grafi 8 točk in so 3-regularni

Oglejmo si najprej grafa G_1 in G_2:

$\Phi(d) = v$, $\Phi(c) = y$, $\Phi(h) = x$, $\Phi(a) = w$, $\Phi(g) = s$, $\Phi(e) = u$,
$\Phi(b) = t$, $\Phi(f) = z$

Φ je izoformizem med G_1 in $G_2 \Rightarrow G_1$ in G_2 sta izoforma



$\Phi(d) = \alpha$, $\Phi(a) = \beta$

ker ima a v G_1 skupnega soseda tako z c in h, β v G_3 pa nima skupnega soseda z obema ε in θ, G_1 in G_2 nista izoformna.

Da izomorfizem med G_1 in G_3 ne obstaja, lahko utemeljimo tudi z dejstvom, da G_3 vsebuje induciran cikel na 5 točkah, medtem ko ga G_1 ne vsebuje.

5) Naj bo p št. točk stopnje k v drevesu T.
Po lemi o rokovanju:

$$\sum_{v \in V(T)} d_v(v) = \underbrace{p\cdot k + (|V(T)| - p)}, = 2|E(T)|$$

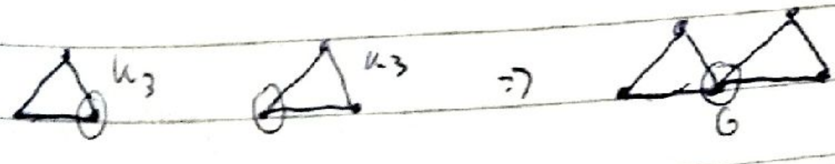
$$* = 2(|V(T)| - 1)$$

ker ima drevo $|V(T)|-1$ povezav

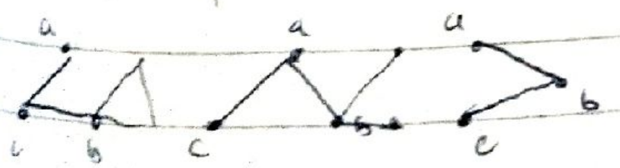
$$= \underbrace{2|V(T)| - 2}$$

$pk + |V(T)| - p = 2|V(T)| - 2$
$pk - p + 2 = |V(T)|$
$p(k-1) + 2 = |V(T)|$ ✓

6) Imamo vsaj 2 točki in ker je drevo povezan graf nimamo točk stopnje 0.
Da bi prišli do protislovja, predpostavimo da ima n-točkovno drevo $n-1$ točk stopnje vsaj 2. Potem je vsota stopenj točk vsaj $2(n-1)+1 = 2n-1$, kar implicira, da je število povezav vsaj $n - \frac{1}{2} = \frac{2n-1}{2}$.
To nas privede do protislovja, saj je $n-1 < n - \frac{1}{2}$ in ima drevo natanko $n-1$ povezav.

7) 

Po Caley-vi formuli je št. vpetih dreves v polnem grafu enako n^{n-}



Za graf G velja: $n^{n-2} \cdot m^{n-2}$ vpetih dreves, saj lahko vsa vpeta d
grafa K_n "združimo" z vsemi vpetimi drevesi grafa K_m

8) n točk

m povezav

Da bo graf drevo mora imeti $n-1$ povezav.

Naj bo število odstranjenih povezav enako x

$$m - x = n - 1$$

$$x = m - n + 1$$

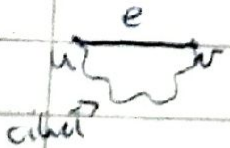
Naloga 3|

30.04.19 DM-Vaje (10. Vaje)

A $\Leftrightarrow$ B

1) G drevo $\Leftrightarrow$ vsaka povezava prerezna povezava.

A$\Rightarrow$B $\Rightarrow$ Predpostavimo, da je G drevo. Obravnavamo poljubno povezavo $e = uv$. Povezava e je edina pot med točkama u in v.

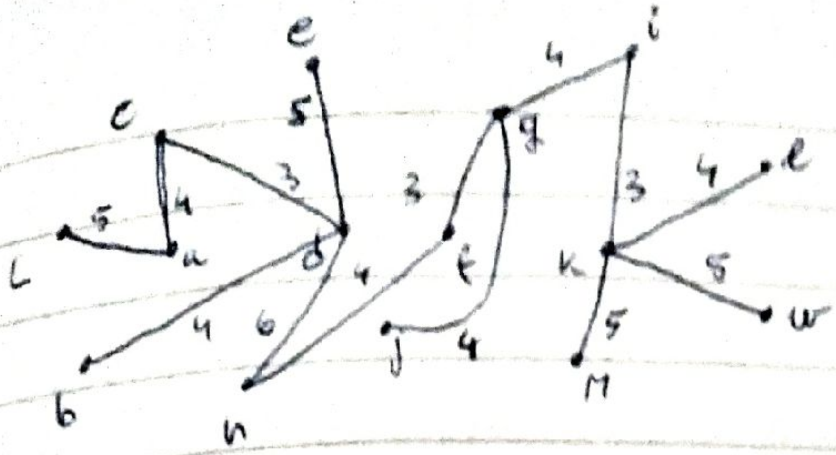


Če bi obstajala pot med točkama u in v, bi v grafu G imeli cikel, kar ni možno ker drevo nima ciklov. Če torej odstranimo e ne obstaja pot med u in v in postane graf nepovezan. Torej je e prerezna povezava. Ker je e bila poljubna povezava, velja trditev za vsako povezavo v G

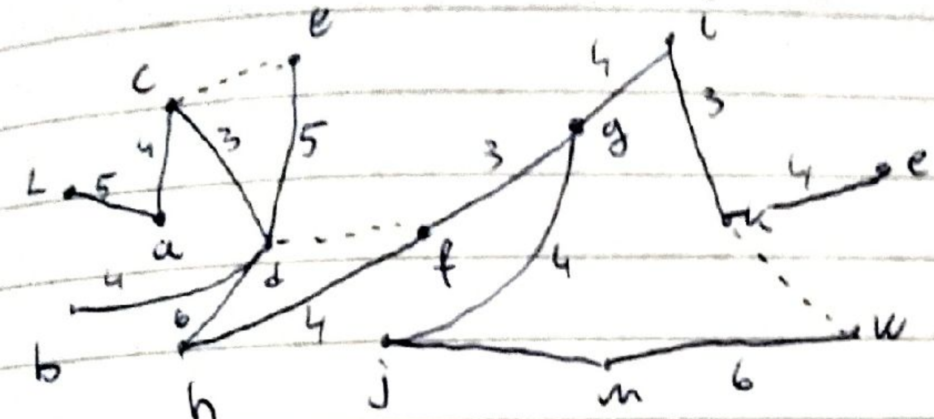
B$\Rightarrow$A $\Leftarrow$ (kontrapozicija $\neg A \Rightarrow B$)
Predpostavimo, da je G povezan, ki ni drevo.
Potem G vsebuje cikel C. Nobena povezava cikla C ne more biti prerezna. Pokazali smo, da ni res, da je vsaka povezava prerezna p.

2) Kruskov algoritem (požrešna metoda):
1) Naj bo $S \neq O$
2. DOKLER (V,S) ni povezan, izberi povezavo e najmanjše teže pod pogojem da povezuje dve točki v različnih komponentah in dodaj e v S.
3. Vrni (V,S)

a)



b)



(teže)
c) L, h v drevesu je pot dolžine: 18

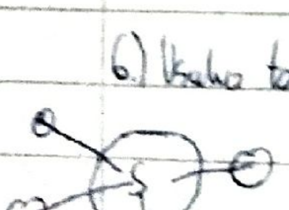
v grafu je pot dolžine: 15 (L-b-h)

3) Naj bo T najlažje vpeto drevo v grafu G in naj bo e povezava največje teže na ciklu C v grafu G.
Če e $\notin$ E(T) je T vpeto drevo, ki ga iščemo.
Če e $\in$ E(T), potem T-e ima dve komponenti, označimo njuni množici točk z U in U'.
Podgraf C-e predstavlja pot s krajiščima v U in U'. Torej vsebuje C-e neko povezavo e', ki povezuje točko iz U s točko iz U'.
Ker je po predpostavki $w(e') \leq w(e)$, je $T' = T-e+e'$ vpeto drevo največ enake teže kot T, ki se izogne povezavi e. Torej je T' najlažje vpeto drevo, ki ne vsebuje pov. e.

4) Predpostavimo, da obstajata dve najlažji vpeti drevesi, označimo ju s T in T', in naj bo e najlažja povezava, ki je vsebovana samo v enemu izmed dreves T ali T'.
Predpostavimo, da je e vsebovana v T in ne v T'. Naj bo e=xy. Potem mora T' vsebovati pot med točkama x in y, ki je različna od povezave e.
Če drevesu T' dodamo povezavo e dobimo cikel C. Če bi bile vse povezave cikla C vsebovane v drevesu T, potem bi T vseboval cikel, kar ni možno. Torej mora cikel vsebovati neko povezavo f, ki ni vsebovana v T.
Po definiciji povezave e (in dejstva, da so vse povezave različne teže) mora biti $w(f) > w(e)$. Če torej v T' zamenjamo povezavo f s povezavo e dobimo lažje vpeto drevo kar nas privede do protislovja

5) Graf je Eulerjev, ker je povezan in so vse točke sode stopnje. (Na listu)

6) Vsako točko obiščemo samo 1x. (Hamilton)



Ko zapustimo neko komponento grafa G-S, se ~~naš~~ hamiltonski cikel lahko nadaljuje samo v S in vsakič ko pridemo v S moramo uporabiti različne točke množice S.
Torej mora množica S vsebovati vsaj toliko točk kot ima G-S komponent.

7) na listu.

15.12 - DM - Vaje (11. Vaje)

1)
a) Da, ker je temeljni graf povezan
b) Da, enostavno lahko preverimo, da za vsak par točk a, b obstaja pot od a do b in pot od b do a
c) Da npr. x, u, z, y, x, u, z, v, x, z, y, x
d) Da, ker je šibko povezan in ima vsaka točka vhodno stopnjo enako izhodni stopnji
Eulerjev obhod: x, u, z, y, x, z, v, x (vsako povezavo samo 1x)
e) Ne, Hamiltonski cikel mora vsebovati vse povezave, ki imajo za eno od krajišč točke v, y, u (ker imajo te točke vhodno stopnjo = izhodni stopnji = 1), vendar je sedaj vhodna stopnja točke x = 2, kar v ciklu ni možno!
(Opazimo lahko tudi, da je temeljni graf enostaven graf in da z odstranitvijo točk x, z ostanejo 3 komponente => temeljni graf ni hamiltonski => diagraf D ni hamiltonski).

2) Diagraf D v katerem imajo vse točke vh. st. = izh. st. D krepko pov. <=> D šibko povezan.
(=>) Vsak krepko povezan graf je tudi šibko povezan.
(<=) Naj bo D šibko povezan diagraf v katerem imajo vse točke vhodno stopnjo enako izhodni stopnji. Potem je D Eulerjev, kar pomeni, da v grafu D obstaja obhod, ki vključuje vse povezave in posledično tudi vse točke.

To implicira, da poljubnem paru točk x, y leži na ciklu, kar pa pomeni, da imamo v D pot od x do y in pot od y do x. Torej je D krepko povezan.

3) Ker so vse točke sode stopnje vemo, da vsebuje vsaka ~~povezana~~ povezana komponenta grafa G Eulerjev obhod. Vzemimo poljuben Eulerjev obhod v vsaki komponenti in usmerimo povezave skladno s smerjo obhoda. Vsako točko moramo zapustiti enako mnogo krat, kot smo jo obiskali, torej morajo biti za vsako točko usmerjenega grafa vhodne stopnje enake izhodnim.

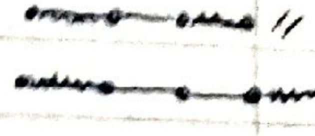
4.) Trditev bomo dokazali z indukcijo po številu točk v drevesu T.
Osnovni korak: Drevo z eno točko nima povezav, torej v tem primeru trditev drži (ker je $0 \neq 1$)
Ind. predp: Naj bo T drevo z $|V(T)| \geq 2$ vsaj 2 točki in predpostavimo, da trditev velja za vsako drevo na manj kot $|V(T)|$ točkah.
$(n-1 \to n)$
Ind. korak: Naj bo v točka stopnje 1 v T in naj bo $T' = T - v$ damo stran točko.
Po I.P. lahko v drevesu T' usmerimo povezave skladno s trditvijo.
Naj bo u (edini) sosed točke v v T. Konstruirali bomo usmeritev drevesa T tako, da bomo upoštevali ustrezne usmeritev drevesa T' in usmerili povezavo uv.
Ker je točka v stopnje 1 bo ne glede na izbrano usmeritev, zadoščala pogoju iz trditve. Torej je usmeritev odvisna od točke u.
Če ima točka u (glede na usmeritev drevesa T') vhodno st. = izhodno st. lahko povezavo uv usmerimo poljubno (saj bo razlika največ 1).
Če pa vh. st. ≠ izh. st. povezavo usmerimo glede na manjšo od

njijo (in posledično bo razlika v T enaka 0). S tem je trditev dokazana.

Dvodelen graf - če lahko mn. točk razdelimo v dve podmn. in so povezave iz ene mn. v drugo, ter ni povezav znotraj množice.

→ Neodvisne množice

5) Prirejanje - Mn. povezav, ki so med seboj neodvisne



$S = \{a, b\}$, $N(S) = \{f\}$

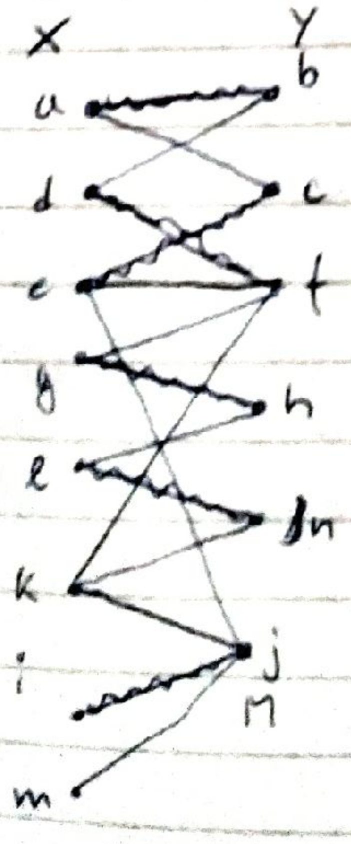
$|S| > |N(S)|$ ⇒ Ne obstaja prirejanje, ki zasiči X *

$S' = \{g, h, i\}$, $N(S') = \{c, d\}$

— || — *

Drug graf: M je prirejanje, ki zasiči oba dela biparticije

Tretji graf: (nasem drugače)



Zagotovo ne bomo mogli zasičiti obeh delov. Saj je $|X| > |N(X)|$ (X ne bomo mogli zasičiti z nobenim prirejanjem)

M prirejanje, ki zasiči Y

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ → Pogledamo samo kaj manjka

14.5.19 DM-Vaje 12.

Spoj:
l.k.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a,1) & (b,2) \\ (c,3) & (d,4) \end{bmatrix}$$

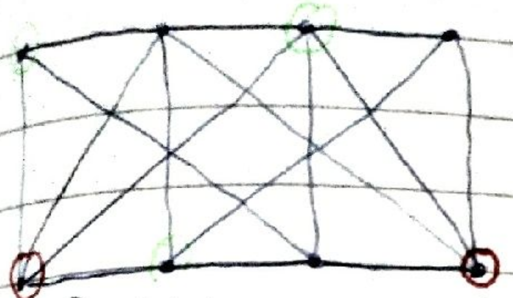
Ortogonalna ko vse različni elementi

1) Predpostavimo, da imamo r paroma ortogonalnih l.k. reda n. S preimenovanjem elementov v vsakem od njih (kar ne vpliva na ortogonalnost) lahko predpostavimo, da je v vsakem kvadratu prva vrstica enaka $1, 2, \dots, n$.

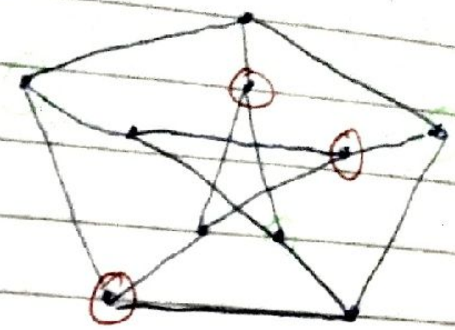
Oglejmo si element na poziciji $(2,1)$.
Ker ima vsak kvadrat element 1 v prvem stolpcu, se na poziciji $(2,1)$ v nobenem ne bo pojavila "1". Dalje, v nobenem od kvadratov se na tej poziciji ne pojavi isti element, saj dobimo s spojem poljubnih dveh kvadratov v prvi vrstici vse pare z enakima elementoma. Torej imamo za pozicijo $(2,1)$ na voljo največ $n-1$ elementov in iz tega sledi, da je $r \leq n-1$

G_1

2)



G_2



$\omega(G_1)=3$ (koliko gre vn iz točk) min

$\Downarrow$

$\chi(G_1)\geq 3$

$\chi(G_1)\leq \Delta(G_1)=5$ (max povezav iz točke)

Ker smo našli ustrezno barvanje s 3 barvami je $\chi(G_1)=3$

$\omega(G_2)=2 \Rightarrow \chi(G_2)\geq 2$

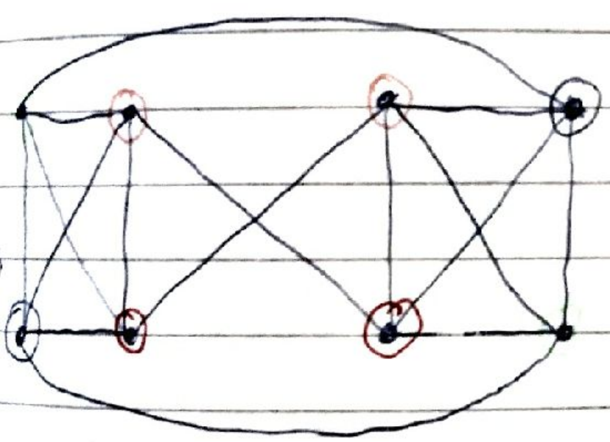
$\Delta(G_2)=3 \Rightarrow \chi(G_2)\leq 3$

G_2 vsebuje cikel dolžine 5.

Zato $\chi(G_2)\geq \chi(C_5)=3$

Sledi, da je $\chi(G_2)=3$

G_3



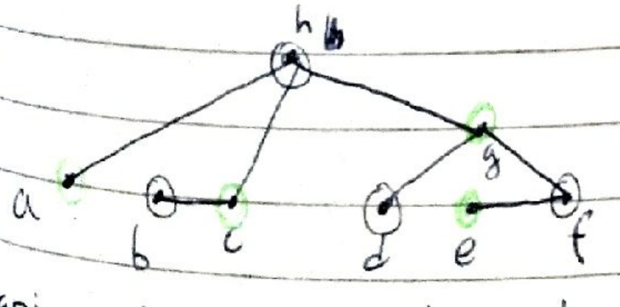
$\omega(G_3)=4 \Rightarrow \chi(G_3)\geq 3$

$\Delta(G_3)=4 \Rightarrow \chi(G_3)\leq 4$

$\Rightarrow \chi(G_3)=4$

3)

a)



Zap:	a	b	c	d	e	f	g	h
barve:	1	1	2	1	1	2	3	4

Zap:	g	h	a	b	c	d	e	f
barva:	1	2	1	1	3	2	1	2

b) Opt. zap.:

h, b, d, f, g, a, c, e

utemeljitev na drugi strani.

b) Obravnavajmo poljubno barvanje točk grafa G, ki uporabi $\chi(G)$ barv. Zaporedje sestavimo tako, da najprej naštejemo točke, ki uporabijo barvo 1, nato točke, ki uporabijo barvo 2, itd., dokler, na koncu, ne naštejemo točk, ki uporabijo barvo $\chi(G)$.

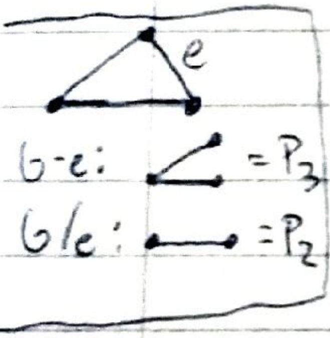
4)

a) $\chi(C_n, t) = (t-1)^n + (-1)^n (t-1)$

Indukcija po n.

O.k. $n=3$ (cikel min)

$$\chi(C_3, t) = \chi(P_3, t) - \chi(P_2, t)$$
$$= t(t-1)^2 - t(t-1)$$
$$= \ldots$$
$$= t^3 - 3t^2 + 2t$$



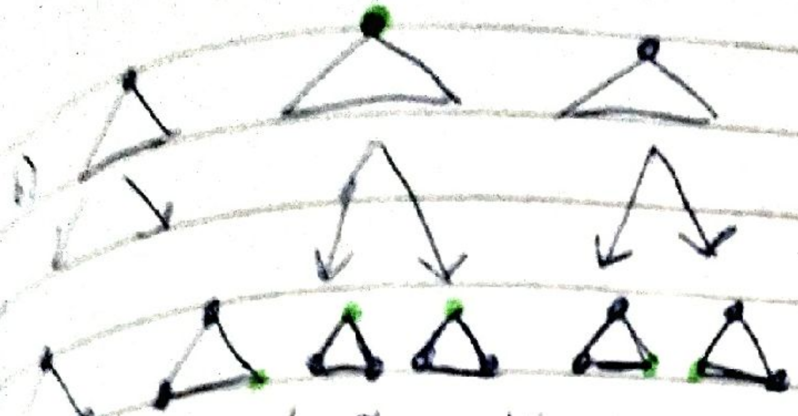
$$\chi(C_3, t) = (t-1)^3 - (t-1)$$
$$= \ldots = t^3 - 3t^2 + 2t$$

Ind. predp.: Naj bo C_n cikel z $n \geq 3$ in predpostavimo, da trditev velja za vsak cikel na manj kot n točkah.

Ind. korak:

$$C_n - e \cong P_n$$
$$C_n / e \cong C_{n-1}$$
$$\chi(C_n, t) = \chi(P_n, t) - \chi(C_{n-1}, t)$$
$$= t(t-1)^{n-1} - (t-1)^{n-1} - (-1)^{n-1}(t-1)$$
$$= \ldots$$
$$= (t-1)^n + (-1)^n (t-1)$$

b)



6 Možnosti

$\chi(C_3,3) = (3-1)^3 + (-1)^3(3-1)$

$= 2^3 - 2 = 6$

barva

c) $\chi(C_5,3) = (3-1)^5 + (-1)^5(3-1) = 2^5 - 2$

d) $\chi(C_6,2) = (2-1)^6 + (-1)^6(2-1) = 1+1 = 2$

e) $\chi(C_n,1) = (1-1)^n + (-1)^n(1-1) = 0$

ne glede na parnost n-ja cikla ne moremo pobarvati z 1 barvo

če je n sod, je

$\chi(C_n,2) = (2-1)^n + (-1)^n(2-1) = 1+1 = 2 \Rightarrow \chi(C_n) = 2$

$\rightarrow C_n$ je dvodelen, ko je n sodo št.

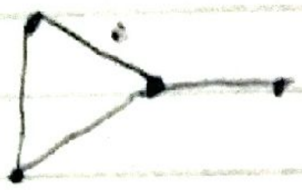
če je n lih:

$\chi(C_n,2) = (2-1)^n + (-1)^n(2-1) = 1-1 = 0 \Rightarrow \chi(C_n) > 2$

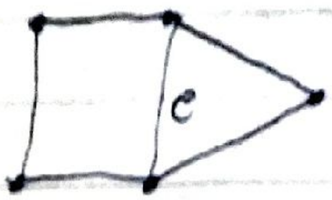
$\rightarrow C_n$ ni dvodelen, če je n lih.

f)

5)



G_1



G_2

$G_1 - e = P_4$

$G_1 / e = P_3$

$\chi(G_1, t) = \chi(P_4, t) - \chi(P_3, t)$

$= t(t-1)^3 - t(t-1)^2$

$= \dots$

$= t(t-1)^2(t-2)$

$G_2 - e \cong C_5$

$G_2 / e \cong G_1$

$\chi(G_2, t) = \chi(C_5, t) - \chi(G_1, t)$

$= (t-1)^5 - (t-1) - t(t-1)^2(t-2)$

$= \dots = t(t-1)(t-2)(t^2 - 3t + 3)$

6) $t^4 - 4t^3 + 3t^2 = t^2(t - 4t + 3)$

$\Downarrow$ $\qquad t^2(t-1)(t-\underline{3})$

graf na 4-ih točkah

I.) $t = 3$ je ničla polinoma

$\rightarrow \chi(G, 3) = 0$ grafa ne moremo pobarvati s 3 barvami

$\Rightarrow G \cong K_4$ (klika)

Dan. polinom ni krom. polinom grafa K_4!

II.) $t^4 - \underbrace{4t^3}_{\text{št. povezav}} + 3t^2$

G ima 4 točke in 4 povezave, torej je $G \cong$  ali 

Povezana grafa

V povezanem grafu je koeficient pri členu, ki vsebuje t različen od 0.

$\Rightarrow$ Dani polinom ni kromatični polinom nobenega izmed C_4,