Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МИФИ»

ИНСТИТУТ ЛАЗЕРНЫХ И ПЛАЗМЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №31 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Отчет

по проектной практике на тему:

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

г. Москва 2022

Содержание

Аннотация

В этом семестре изучалась классическая теорию поля.

Был рассмотрен переход уравнений Максвелла от классической формулировки к ковариантной. Также было получено уравнение Лагранжа для полей и рассмотрен спектр частиц в теориях с глобальной калибровочной симметрией.

1 Электродинамика в теории поля

Рассмотрим основные уравнения Максвелла в классической теории электродинамики:

$$\begin{cases} \nabla\vec{H} = 0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \nabla\vec{E} = 4\pi\rho \\ \nabla\times\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{1}$$

Для решения первых двух уравнений не содержащих источники введем потенциалы:

$\nabla\overrightarrow{H} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{H} = \nabla\times\overrightarrow{A}$

$\nabla\times\left(\overrightarrow{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$

$\overrightarrow{A}$ – векторный потенциал электромагнитного поля

φ – скалярный потенциал электромагнитного поля

Потенциалы определены неоднозначно: при калибровочных преобразованиях электрическое и магнитное поля инварианты.

Калибровочные преобразования:

$$\begin{cases} \overrightarrow{A} \to \overrightarrow{A} + \nabla\alpha \\ \varphi \to \varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\alpha}{\partial t} \end{cases} \tag{2}$$

α – параметр преобразования Введем четырехмерное пространство-время с координатами $x^\mu = (ct, \overrightarrow{r})$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Обозначим:

$$\begin{gathered} \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \\ A_\mu \equiv \left(\varphi, -\overrightarrow{A}\right) \end{gathered} \tag{3}$$

Электрическое и магнитное поля являются компонентами тензорного поля.

Тензор поля:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_z & H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Дуальный тензор поля:

$$\widehat{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & O & E_z & -E_y \\ H_y & -E_z & 0 & E_x \\ H_z & E_y & -E_x & o \end{pmatrix} \tag{5}$$

С помощью полученных обозначений запишем уравнения Максвелла в 4-мерной формулировке:

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \dfrac{4\pi}{c} j^\nu \\ \partial_\mu \widehat{F}^{\mu\nu} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

2 Уравнения Лагранжа в теории поля

Если есть система, состоящая из большого числа материальных точек, то при построении функции Лагранжа суммируется кинетическая энергия по всем материальным точкам. В теории поля аналогично ведется сумма по всем обобщенным координатам (значениям полей в точках пространства):

$$L = c \int d^3x \widehat{L}\left(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i\right) \tag{7}$$

$\widehat{L}$ - плотность функции Лагранжа

Отсюда получим действие:

$$S = c \int dt \int d^3x L\left(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i\right) = \int d^4x L\left(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i\right) \tag{8}$$

На траектории системы действие должно быть экстремальным, т.е. вариация действия должна равняться 0 в точке экстремума. Из этого условия получим уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial \widehat{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \widehat{L}}{\partial \left(\partial_\mu \varphi_i\right)} \right) = 0 \tag{9}$$

3 Спектр частиц в теориях с глобальной калибровочной симметрией

Запишем самую простую функцию Лагранжа, описывающую комплексное скалярное поле. При этом функция Лагранжа
1) должна быть вещественной
2) должна содержать вторые производные

$$\widehat{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - V\left(\varphi^* \varphi\right) \tag{10}$$

Система стремится занять положение с минимальной энергией. Пусть $V\left(\varphi^* \varphi\right) \geq 0$. V должен иметь не более, чем четвертую степень по полям. Если это условие выполняется, то в квантовой теории поля получается перенормируемая теория. Существуют 2 фактические возможности:

$$\text{а)} V = m^2 \varphi^* \varphi + \lambda \left(\varphi^* \varphi\right)^2, \quad m \in Re, \quad \lambda \geq 0 \tag{11}$$

$$\text{б)} V = \lambda \left(\varphi^* \varphi - v^2\right)^2, \quad \lambda > 0 \tag{12}$$

v – вакуумное среднее
Основное различие между а) и б) – в знаке. Исследуем устройство спектра частиц в этих двух теориях. В первую очередь нужно определить, что будет являться состоянием с наименьшей энергией (вакуумом). Вакуум φ:
1) $\varphi_0 \neq \varphi_0(t, \vec{r})$ - вакуумное значение поля не зависит от координат и времени
2) $V \to min$
Найдем вакуумное состояние в случае а) и б). Для этого представим поле в виде суммы его вещественной и мнимой части:

$$\varphi \equiv P + iS \tag{13}$$

При калибровочных преобразованиях: $\varphi \rightarrow \exp\left(-ie\alpha\right)\varphi \Rightarrow (P + iS) \rightarrow (\cos\left(e\alpha\right) P + \sin\left(e\alpha\right) S) + i\left(-\sin\left(ea\right) P + \cos\left(ea\right) S\right)$
Следовательно, получаем поворот в плоскости PS:

$$\begin{cases} P \rightarrow \cos\left(ea\right) P + sin\left(ea\right) S \\ S \rightarrow -\sin\left(ea\right) P + \cos\left(ea\right) S \end{cases} \tag{14}$$

То есть калибровочные преобразования в координатах PS будут соответствовать повороту, теория калибровочно-инвариантна, то есть потенциал будет поверхностью вращения:

$$V\left(\varphi^{*}\varphi\right)=V\left(P^{2}+S^{2}\right) \tag{15}$$

В случае а) вакуум калибровочно-инвариантен (ненарушенная симметрия):

$\varphi_0 \to \exp\left(-iea\right)\varphi_0 \Rightarrow 0 \to \exp\left(-iea\right)\cdot 0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 \to \varphi_0$

В случае б) вакуум не калибровочно-инвариантен (спонтанное нарушение симметрии):

$P^2+S^2=v^2, \quad \varphi_0 = v, \quad v \to \exp\left(-iea\right)v \neq v \Rightarrow \varphi_0 \nrightarrow \varphi_0$

Спонтанное нарушение симметрии – это, когда теория инвариантна относительно калибровочных преобразований, но вакуум не инвариантен относительно калибровочных преобразований.

Предполагаем, что теория движется вблизи вакуумного состояния, причем все поля несильно отличаются от вакуумных значений, то есть отклонения полей от вакуума малы. Рассмотрим спектр частиц в случае а). Разложим функцию Лагранжа в квадратичном приближении:

$$\widehat{L}=\partial_\mu\varphi^{*}\partial^\mu\varphi-m^2\varphi^{*}\varphi+\lambda\left(\varphi^{*}\varphi\right)^2\approx\left(\partial_\mu P\right)^2+\left(\partial_\mu S\right)^2-m^2\left(P^2+S^2\right) \tag{16}$$

Спектром является одно комплексное массивное скалярное поле массы m.

Рассмотрим случай б):

$$\begin{cases} P = v + P_1 \\ S = S_1 \end{cases}$$

$\varphi_0 = v, \quad \varphi = v + P_1 + iS_1$

$$\widehat{L}\approx\left(\partial_\mu P_1\right)^2+\left(\partial_\mu S_1\right)^2-4\lambda V^2P_1^2 \tag{17}$$

Спектром является:

1) вещественное скалярное поле $P_1, \quad m_p = 2v\sqrt{\lambda}$ – хиггсовский бозон

2) вещественное скалярное поле $S_1, \quad m_s = 0$ – голдстоуновский бозон

Список литературы

[1] Л. Д. Ландау, Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учебное пособие в 10 томах - Т. 2 Теория поля, 7-е издание, 1988, Москва, "НАУКА"

[2] Рубаков В.А. Классические калибровочные поля. – М.: Эдиториал УРСС, 1999.

[3] Степаньянц К.В. Классическая теория поля. – М.: Физматлит, 2009.