Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«МИФИ»

ИНСТИТУТ ЛАЗЕРНЫХ И ПЛАЗМЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

КАФЕДРА №31 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Отчет

по проектной практике на тему:

СОЛИТОНЫ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

г. Москва 2022

Содержание

1 Принцип наименьшего действия **5**

2 Преобразования Лоренца для координаты и времени **7**

3 4-векторы (2-векторы) **8**

4 Кинки и антикинки в теории ϕ^4 **9**

5 Преобразование Бэклунда для уравнения синус-Гордона **11**

6 Масштабные преобразования и теоремы об отсутствии солитонов **13**

Аннотация

За этот семестр мы проходили материал постепенно ведущий нас к понятию солитонов в квантовой теории поля (КТП) для будущего использования данного материала в научной работе.

Изучение КТП невозможно без знаний основ механики, для которой с точки зрения теории наиважнейшим является понятие действия. Теории в КТП формулируются через их действия или, что эквивалентно, лагранжианы, которые являются Лоренц-инвариантными, то есть не меняются при преобразованиях Лоренца. Преобразования Лоренца можно рассматривать как повороты в псевдоевклидовом пространстве (пространстве Минковского), и их более естественно формулировать, используя понятие 4-векторов.

Затем мы изучили простейшие теории поля в $(1+1)$ измерениях, в которых существуют солитоны - классические решения с конечной энергией. На примере двух теорий ϕ^4 и синус-Гордона мы научились находить такие решения, считать их энергию. Также, в качестве упражнения, мы доказали теорему об отсутствии солитонов в скалярных теориях в размерности проcтванства $d > 1$.

Далее планируется продолжить изучение классических решений в других теориях, а также понять их связь с топологией.

1 Принцип наименьшего действия

Функционал действия $S[x]$ имеет следующий вид:

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt, \tag{1}$$

где L - функция Лагранжа механической системы, в общем случае зависящая от координаты, скорости (первой производной координаты по времени) и самого времени.

Принцип наименьшего действия состоит в том, что функционал действия принимает экстремальное значение на истинной траектории частицы. Как нам вывести уравнение движения для частицы?

Рассмотрим необходимое условие экстремума для функции $f(x)$, которое, как известно, имеет вид $f'(x) = 0$. Разложив в ряд

$$\delta f = f(x + \varepsilon) - f(x) \tag{2}$$

в окрестности точки, в которой достигается минимум или максимум функции, по малому отклонению ε, получим эквивалентное условие

$$\delta f = O(\varepsilon^2). \tag{3}$$

Определим величину δS похожим образом

$$\delta S = S[x + \varepsilon] - S[x], \tag{4}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(t)$ - произвольная малая функция времени. Доопределим нашу задачу фиксированными граничными условиями $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$, тогда видно, что приращение должно удовлетворять условиям

$$\varepsilon(t_1) = \varepsilon(t_2) = 0. \tag{5}$$

Пользуясь граничными условиями, находим условия экстремальности действия

$$S[x + \varepsilon] - S[x] = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon(t) \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x} \right) dt + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2), \tag{6}$$

откуда, ввиду произвольности функции $\varepsilon(t)$, получаем уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}. \tag{7}$$

Можно показать, что функция Лагранжа для одномерного движения консервативной системы имеет простой вид

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x), \tag{8}$$

где первое слагаемое является кинетической энергией частицы, а второе потенциальной. В таком случае уравнения Эйлера-Лагранжа принимают вид

$$m\ddot{x} = -V'(x), \tag{9}$$

мы получили всем известный II закон Ньютона!

2 Преобразования Лоренца для координаты и времени

Преобразования Лоренца имеют основолополагающее значение в релятивистской механике. Постулируем их, используя конвенцию $c = 1$, которая часто применяется в современной теоретической физике. Это означает, что все скорости изменяются в долях от c

$$\begin{cases} t = \gamma(t' + vx') \\ x = \gamma(x' + vt'), \end{cases} \tag{10}$$

где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ - величина, называющаяся Лоренц-фактором.

Преобразования Лоренца можно представить в виде поворота в псевдоевклидовом пространстве

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $\cosh\alpha = \gamma, \sinh\alpha = \gamma v$. Легко видеть, что между этими величинами выполняется основное гиперболическое тождество

$$\cosh\alpha^2 - \sinh\alpha^2 = \gamma^2(1 - v^2) = 1. \tag{12}$$

Лоренц-инвариантность теории (физика теории не зависит от системы отсчета, в которой мы рассматриваем наше явление) требует, чтобы уравнения не менялись при преобразованиях Лоренца. Далее мы будем работать со скалярным полем, которое имеет следующее определение

$$\phi(x, t) = \phi'(x', t'), \tag{13}$$

то есть удовлетворяет условию Лоренц-инвариантности.

Запишем еще одну Лоренц-инвариантную величину, которую можно составить из скалярного поля и его вторых производных по координате и времени

$$\Box\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \tag{14}$$

можно показать, что полученная величина не меняется при преобразованиях Лоренца. Оператор $\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2$ называется оператором Даламбера. Он играет важнейшую роль в теории поля и математической физике.

3 4-векторы (2-векторы)

Так как мы работаем в $(1+1)$ измерениях (1 координата и 1 время), то будем говорить о 2-векторах. Существует величина s называемая интервалом и задаваемая формулой:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2. \tag{15}$$

Используя (12), легко показать, что она является Лоренц-инвариантом ($ds^2 = ds'^2$). Введем определение контрвариантного 2-вектора

$$x^\mu = (x^0, x^1), \tag{16}$$

где индекс 0 означает время, а индекс 1 означает координату x, которые соответствуют вектору x^μ. Введя скалярное произведение в этом пространстве следующим образом

$$(x \cdot y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 = \sum_{\mu,\nu=0}^{1} \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu, \tag{17}$$

где $\eta_{\mu\nu}$ называется метрикой Минковского, по сути являющейся матрицей Грама псевдоевклидового пространства имеет вид

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Определим ковариантный вектор как

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu, \tag{19}$$

тогда он имеет координаты $x_\mu = (x^0, -x^1)$. Можно показать, что скалярное произведение (17) может быть переписано как

$$(x \cdot y) = x_\mu y^\mu, \tag{20}$$

а интервал, который является аналогом длины в пространстве Минковского, может быть записан в явной Лоренц-инвариантной форме как

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu. \tag{21}$$

Используя преобразования Лоренца, можно показать, что вектор $\partial_\mu \phi = (\phi_t, \phi_x)$ является ковариантным, так как контрвариантные величины имеют знак $+$ в преобразованиях Лоренца, а ковариантные содержат знак $-$.

4 Кинки и антикинки в теории ϕ^4

Рассмотрим теорию с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \tag{22}$$

где максимальная степень потенциала

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - v^2\right)^2 \tag{23}$$

в разложении по ϕ - четыре, поэтому теория и имеет название ϕ^4.

Запишем энергию классического решения уравнения

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = -V'(\phi), \tag{24}$$

которая имеет вид

$$E[\phi] = \int_{\mathbb{R}} dx\left(\frac{1}{2}\phi_t^2 + \frac{1}{2}\phi_x^2 + V(\phi)\right). \tag{25}$$

Солитонами будем называть классические решения с конечной энергией. Энергия (25) будет конечной, если выполняются условия

$$\phi_t(x \to \pm\infty) \to 0, \quad \phi_x(x \to \pm\infty) \to 0, \quad V(\phi(x \to \pm\infty)) \to 0. \tag{26}$$

В нашем случае легко видеть, что это выполняется при условии

$$\phi(x \to \pm\infty) = \pm v. \tag{27}$$

Причем $\phi \equiv \pm v$ - называются вакуумными решениями,

$$\phi(x \to -\infty) = -v,\ \phi(x \to +\infty) = v \text{ - называется кинком,} \tag{28}$$

а

$$\phi(x \to -\infty) = v,\ \phi(x \to +\infty) = -v \text{ - называется антикинком.} \tag{29}$$

Рассмотрим стационарное решение уравнения (24), то есть $\partial_t\phi = 0$. Отсюда получим уравнение

$$\phi''(x) = V'(\phi). \tag{30}$$

Легко найти его интеграл, то есть сохраняющуюся величину

$$\frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi) = \text{Const}. \tag{31}$$

Константа из условия конечности энергии равна нулю - мы получаем теорему вириала

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dx\phi'^2 = \int_{\mathbb{R}} dxV(\phi), \tag{32}$$

а уравнение сводится к уравнению первого порядка

$$\phi' = \pm\sqrt{2V(\phi)}, \tag{33}$$

откуда, интегрируя, легко получаем кинковое и антикинковое решения уравнения

$$\phi(x) = \pm v \tanh\left(v\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(x - x_0)\right). \tag{34}$$

При этом можно посчитать энергию стационарного решения, называемую массой кинка (антикинка)

$$M = \frac{2\sqrt{2}}{3}v^3\sqrt{\lambda}. \tag{35}$$

5 Преобразование Бэклунда для уравнения синус-Гордона

Уравнение синус-Гордона имеет вид

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin\phi = 0 \tag{36}$$

и может быть получено из следующего лагранжиана

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - (1 - \cos\phi). \tag{37}$$

Перейдём к координатам светового конуса

$$\rho = \frac{x-t}{2}, \sigma = \frac{x+t}{2}, \tag{38}$$

и, используя равенство

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = -\frac{\partial^2}{\partial\sigma\partial\rho}, \tag{39}$$

перепишем уравнение (36) в виде

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\sigma\partial\rho} - \sin\phi = 0. \tag{40}$$

Рассмотрим преобразования Бэклунда для уравнения синус-Гордона

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\sigma}(\phi_1 - \phi_0) = a\sin\left(\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_0)\right) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\phi_1 + \phi_0) = \frac{1}{a}\sin\left(\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_0)\right), \end{cases} \tag{41}$$

которые связывают одно решение уравнения (36) с другим.

Утверждение. Пусть ϕ_0 - некоторое решение уравнения (36), тогда ϕ_1, связанное с ним формулами (41), также является решением (36).

Доказательство: Продифференцировав первое уравнение (41) по ρ, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\sigma}(\phi_1 - \phi_0) = a\cos\left(\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_0)\right)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\phi_1 + \phi_0) =$$

$$= \cos\left(\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_0)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_0)\right), \tag{42}$$

где в последнем равенстве мы пользовались вторым уравнением (41). Используя тождество

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\sin(a+b) + \frac{1}{2}\sin(a-b), \tag{43}$$

получим

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\rho\partial\sigma} - \sin\phi_1 = \frac{\partial^2\phi_0}{\partial\rho\partial\sigma} - \sin\phi_0 = 0, \tag{44}$$

так как ϕ_0 - решение (36). Таким образом, ϕ_1 тоже является решением уравнение синус-Гордона.

Будем искать кинковое решение ϕ_1 уравнения (36), используя преобразования Бэклунда (41) для тривиального решения $\phi_0 = 0$. Для этого решим систему уравнений (41) и получим решение в коорднатах светового конуса:

$$\phi_1 = 4 \arctan \left(\exp(a\sigma + a^{-1}\rho) \right). \tag{45}$$

В обычных координатах:

$$\phi_1 = 4 \arctan \left(\exp \left(\frac{t(a^2 - 1) + x(a^2 + 1)}{2a} \right) \right). \tag{46}$$

Сравним аргумент экспоненты последнего с преобразованиями Лоренца, откуда найдём связь коэффициента a со скоростью v:

$$a = \frac{\sqrt{1 - v}}{\sqrt{1 + v}}. \tag{47}$$

6 Масштабные преобразования и теоремы об отсутствии солитонов

Рассмотрим n скалярных полей в $(d+1)$ измерениях с лагранжианом L:

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - V(\vec{\phi}) = \frac{1}{2}\sum_a \partial_\mu \phi^a \cdot \partial^\mu \phi^a - V(\vec{\phi}). \tag{48}$$

Энергия статического решения имеет вид

$$E[\vec{\phi}] = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2}\partial_i \vec{\phi} \cdot \partial_i \vec{\phi} + V(\vec{\phi}) \right) d^d x, \tag{49}$$

где $\partial_i \vec{\phi}$ - вектор, составленный из производных поля ϕ по d координатам. К примеру, для $d = 2$ имеем

$$\partial_i \vec{\phi} = (\partial_x \phi, \partial_y \phi). \tag{50}$$

Заметим, что выполняются следующие свойства:

$$\partial_i \vec{\phi} \cdot \partial_i \vec{\phi} \geq 0; \tag{51}$$

$$V(\vec{\phi}) \geq 0. \tag{52}$$

Рассмотрим решение с конечной энергией $(\phi_k^a(\vec{x}))$, на котором функционал энергии принимает конечное значение и его вариацию $\delta\vec{\phi} = \vec{\phi_k}(\lambda \vec{x}) - \vec{\phi_k}(\vec{x})$. При малых $\lambda > 0$ энергия не меняется, а $\delta\vec{\phi} \to 0$, т.к. $\vec{\phi}(|\vec{x}| \to \infty) \to \vec{\phi}_0$, где $\vec{\phi}_0$ - вакуумное решение. Тогда $E[\vec{\phi_k}(\lambda\vec{x})]$ принимает значение экстремума при $\lambda = 1$. В выражении для $E[\vec{\phi_k}(\lambda\vec{x})]$ сделаем замену $\lambda\vec{x} = \vec{y}$ и получим

$$E[\vec{\phi_k}(\vec{y})] = \lambda^{-d} \int \left(\lambda^2 \frac{1}{2}\partial_i \vec{\phi_k}(\vec{y}) \cdot \partial_i \vec{\phi_k}(\vec{y}) + V(\vec{\phi_k}) \right) d^d y. \tag{53}$$

Пусть

$$T = \frac{1}{2}\int \partial_i \vec{\phi}(\vec{x}) \cdot \partial_i \vec{\phi}(\vec{x}) d^d x - \text{аналог кинетической энергии;} \tag{54}$$

$$U = \int V(\vec{\phi_k}) d^d x - \text{аналог потенциальной энергии.} \tag{55}$$

Тогда

$$E(\lambda) = \lambda^{2-d} T + \lambda^{-d} U. \tag{56}$$

Из условия на экстремум следует:

$$(2-d)T - dU = 0. \tag{57}$$

Рассмотрим разные размерности:

1. $d > 2$

$$(d-2)T + dU = 0 \implies T = 0 \text{ и } U = 0, \text{ т.е. } \vec{\phi} = \vec{\phi}_0. \tag{58}$$

2. $d = 2$

$$(d-2)T + dU = 0 \implies U = 0 \implies \vec{\phi} = \vec{\phi}_0 \text{ или } V \equiv 0. \tag{59}$$

3. $d = 1$

$$T = U \implies \text{ получаем теорему вириала.} \tag{60}$$

Список литературы

[1] Л. Д. Ландау, Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учебное пособие в 10 томах - Т. I Механика, 4-е издание, 1988, Москва, "НАУКА"

[2] В. А. Рубаков, Классическая теория поля: бозонные теории, 2005, Москва, URSS

[3] Р. Раджараман, Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля, 1985, Москва, "МИР"