Neurosciences Computationnelles
Devoir 1
Construction et analyse de modèles simples

Consignes

- Le travail est à faire seul ou en équipe de 2,
- Le travail est à faire en Python ou Matlab pour la partie programmation et en Latex ou Word pour la rédaction,
- Vous serez appelés à présenter vos résultats en classe,
- Travail à remettre le 8 mars.

Question 1 Modèle de FitzHugh Nagumo.

Considérez le modèle suivant:

$$\frac{dV}{dt} = V - \frac{V^3}{3} - w + I, \tag{1}$$
$$\frac{dw}{dt} = V + a - bw \tag{2}$$

avec $a = 0.8$, $b = 0.7$.

a) Pour quelques valeurs de I bien choisies, tracer les diagrammes de phase dans le plan (V, w) avec

- Les nullclines,
- Les points fixes,
- Quelques orbites (quelques solutions pour différentes valeurs initiales).

b)

- Faites varier le courant injecté I et tracez un graphe de la valeur du point fixe en fonction de I.
- Tracez un graphe de valeurs propres du Jacobien obtenu en linéarisant le système (1)-(2) au point fixe en fonction de I.
- Tracez un diagramme de bifurcation.

Question 2. Modèle de Hodgkin-Huxley.

Considérez le modèle suivant

$$\begin{aligned}
C\frac{dV}{dt} &= m^3 h g_{Na}(E_{Na}-V) + n^4 g_K(E_k - V) + g_L(E_L - V) + I,\\
\frac{dm}{dt} &= \frac{m_\infty(V) - m}{\tau_m(V)},\\
\frac{dn}{dt} &= \frac{n_\infty(V) - n}{\tau_n(V)},\\
\frac{dh}{dt} &= \frac{h_\infty(V) - h}{\tau_h(V)}
\end{aligned}$$

avec $C = 1\,\mu F/cm^2$, $g_{Na} = 120\,mS/cm^2$, $g_K = 36\,mS/cm^2$, $g_L = 0.3mS/cm^2$ et $E_{Na} = 50\,mV$, $E_K = -77\,mV$, $E_L = -54.4mV$. Et où les fonctions auxiliaires sont définies par

$$\begin{aligned}
\alpha_n(V) &= \frac{0.01(V+55)}{1-\exp(-(V+55)/10)},\\
\beta_n(V) &= 0.125\exp(-(V+65)/80),\\
\alpha_m(V) &= \frac{0.1(V+40)}{(1-\exp(-(V+40)/10))},\\
\beta_m(V) &= 4\exp(-(V+65)/18),\\
\alpha_h(V) &= 0.007\exp(-(V+65)/20),\\
\beta_h(V) &= \frac{1}{1+\exp(-(V+35)/10)}.
\end{aligned}$$

a) Pour différentes valeurs de I bien choisies, tracez le graphe du potentiel en fonction du temps.

b) Tracez le diagramme de bifurcation dans le plan (I, V). Pour les valeurs de I pour lesquelles vous obtenez des cycles limites (potentiels d'action) afficher seulement le minimum et le maximum du potentiel. Vous obtiendrez ainsi deux branches. Lorsque la solution vous donne des cycles limites, il est possible que le système possède aussi un point fixe instable. Vous n'observerez pas l'éventuel point fixe en laissant rouler un solveur du système d'EDOs. Vous pouvez rechercher les zéros du membre de droite directement pour obtenir l'éventuel point fixe instable.

c) Tracez un graphe des valeurs propres du Jacobien obtenues en linéarisant autour du point fixe pour différentes valeurs de I. Quelles est la meilleure manière d'afficher les valeurs propres complexes? Quelle stratégie utilisez-vous pour faire varier I?

Question 3. Système de deux neurones couplés.

Dans cet exercice, vous considérerez deux neurones, un excitateur et un inhibiteur et chacun sera décrit par un modèle de Hodgkin-Huxely.

Explicitement, vous considérerez le modèle suivant:

$$
\begin{aligned}
C\frac{dV_j}{dt} &= m_j^3 h_j g_{Na}(E_{Na} - V_j) + n_j^4 g_K(E_k - V_j) + g_L(E_L - V_j) \\
&\quad + g_{syn,j*}(E_{syn,j*} - V), \\
\frac{dm_j}{dt} &= \frac{m_\infty(V) - m_j}{\tau_m(V)}, \\
\frac{dn_j}{dt} &= \frac{n_\infty(V) - n_j}{\tau_n(V)}, \\
\frac{dh_j}{dt} &= \frac{h_\infty(V) - h_j}{\tau_h(V)}, \\
g_{syn,j}(t + \Delta t) &= g_{syn,j}(t)\left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_{syn,j}}\right) + w_j \delta_j(t)
\end{aligned}
$$

L'indice j prend les valeurs 1 ou 2 et désigne de quel neurone on parle, i.e. le neurone 1 est décrit par les variables V_1, m_1, n_1, h_1 et le neurone 2 est décrit par les variables V_2, m_2, n_2, h_2. Les termes $g_{syn,j*}(E_{syn,j*} - V)$ décrivent les courants synaptiques. Ici $j* = 1$ si $j = 2$ et vice versa. Comme le neurone 1 est exciteur, on aura $E_{syn,1} = 0\,mV$ et comme le neurone 2 est inhibiteur, on aura $E_{syn,2} = -80\,mV$ (ce sont les potentiels d'équilibre synaptique). Les paramètres w_j décrivent les poids synaptiques et sont dans les mêmes unités que les autres conductances. Les paramètres $\tau_{syn,1} = \tau_{syn,2} = 20\,ms$ décrivent les constantes de temps synaptiques. Les autres paramètres sont les mêmes qu'au numéro précédent.

Vous devez définir $\delta_j(t)$ ($j = 1, 2$) par $\delta_j(t) = 1$ si le neurone j emet un potentiel d'action au temps t. Il n'existe pas de critère sans ambiguïté pour définir le moment où le neurone émet un potentiel d'action. Vous devez choisir un tel critère par exemple comme le moment où le potentiel V dépasse un certain seuil. Expliquez comment vous traitez l'aspect numérique.

a) Faites varier les paramètres I, w_1, w_2, Quels comportements observez-vous? Il s'agit d'une question d'exploration. Essayez de trouver plusieurs comportements différents et d'en donner une explication intuitive.

b)

- Placez d'abord les poids synaptiques w_1, w_2 à 0 et choisissez une valeur de I pour laquelle le neurone 1 émet des potentiels d'action.
- Augmentez la valeur de w_1 et laissez $w_2 = 0$. Affichez la valeur de $g_{syn,1}$ pour vérifier que la synapse répond bien. Augmenter $w_!$ jusqu'à ce que le deuxième neurone émette des potentiels d'action.
- Augmentez la valeur de w_2, quel est l'impact du courant inhibiteur sur l'activité du neurone 1?