

Rapport sur la déconvolution

Rémi Bisognin

June 6, 2018

1 Le contexte expérimental

1.1 Contexte général du domaine de recherche

Notre équipe travaille sur des effets quantiques de système électronique. L'utilisation des effets quantiques dans des dispositifs électroniques peut se classer en trois génération de dispositifs.

La première génération est constitué de dispositif comme les jonctions p-n ou les transistors bipolaires. Ces dispositifs permettent de faire de la logique avec le courant électrique grâce aux semi-conducteurs. En effet dans un semi-conducteur certaines énergies (bandes) sont accessibles aux charges électrique et d'autres inaccessibles (gap), le décalage en énergie des charges permet de choisir si les charges passent ou pas à travers le semi-conducteur. La physique quantique intervient ici dans la compréhension de la structure de bandes et du gap des matériaux semi-conducteurs.

La deuxième génération utilise parmi les effets quantique: l'effet tunnel et le confinement des électrons. Classiquement un électron ne peut pas franchir une barrière s'il n'a pas assez d'énergie alors que si la barrière est suffisamment fine il a une probabilité non nulle de traverser la barrière, comme s'il creusait un tunnel d'où le nom d'effet tunnel. Lorsque l'on confine un électron dans un espace la physique quantique prédit qu'il doit avoir une énergie minimale d'autant plus grande que l'espace est petit. Elle prédit aussi que les énergies accessibles à l'électron sont quantifiés. L'exploitation de ces deux effets ont permis de concevoir des structures de bandes artificielles(que l'on ne trouverait pas dans un semi-conducteur tel quel). Les transistors à haute mobilité (HEMT) est un dispositif mettent à profit ces deux effets quantiques.

Aujourd'hui la recherche se concentre sur la troisième génération où les électrons sont des objets quantiques décrit par des fonctions d'onde et possédant des propriétés de superposition d'états cohérentes comme l'exemple du chat de Schrödinger. L'accès aux très basses température et aux hautes mobilités électronique dans les système 2D ont permis d'étudier cette troisième génération pour des électrons dans un conducteur. L'équipe dans laquelle je travaille explore les excitations élémentaire électronique dans un régime de transport balistique cohérent. Cette étude apporte une compréhension fine du courant à un électron en le décrivant à l'aide de fonction d'onde.

1.2 Dispositif expérimental

1.2.1 Descriptif de l'échantillon et des conditions expérimentales

Comme précisé dans le précédent paragraphe pour observer le phénomène physique attendu on a besoin de travailler à très basses températures. Pour cela notre système d'étude est refroidi à l'aide d'un réfrigérateur à dilution

pouvant atteindre 20 mK. Travailler à une aussi basse température a le double avantage que les électrons lors de leur déplacement ne sont pas affecté par l'agitation thermique du conducteur et que les excitations thermiques électroniques sont faibles: elles correspondent à une énergie de quelques μeV .

Le deuxième point nécessaire au bon fonctionnement évoqué dans le paragraphe précédent est la haute mobilité. Il s'agit pour les électrons de ne pas rencontrer d'impureté lors de leurs parcours. Les électrons qui conduisent le courant, appelé porteurs, sont apportés par des impuretés, appelées donneurs, des atomes de Si. Pour contourner ce problème la technique utilisé est de piéger les électrons à l'interface entre deux semiconducteurs ici AlGaAs et GaAs. Cette interface est appelé gaz 2D et elle est suffisamment éloignées de la couche où sont implanté les donneurs pour qu'ils n'affectent pas le mouvement des porteurs.

Enfin pour obtenir un conducteur parfait on applique un fort champs magnétique au gaz 2D de plusieurs Tesla. Ce champs à pour effet de placer le gaz 2D en régime d'effet Hall quantique. Dans ce régime les électrons se propage dans des canaux de bords et dans un seul sens, pour revenir en arrière ils doivent passer sur le bords opposé. Si l'échantillon est suffisamment large les électrons ne peuvent pas changer de côtés de l'échantillon et ne reviennent jamais sur leur pas: c'est un conducteur parfait, si on contrôle la largeur d'une constriction on peut choisir la probabilité pour un électron de rester sur son côté ou de changer de bords: c'est une lame semi-réfléchissante pour électron, appelé quantum point contact ou qpc.

1.2.2 Mesures effectuées

Dans un canal de bords on injecte le courant provenant de notre source. Arrivée au niveau du qpc les charges envoyées par la source sont aléatoirement distribuées entre les deux canaux de sortie. Lorsque l'on répète périodiquement l'injection de la source, on mesure entre chaque injection de la source une fluctuation aléatoire du nombre de charge dans un canal de sortie. On fait donc une mesure de bruit de courant noté S_{II} .

Si maintenant dans le canal de bords opposé à la source, une sonde injecte au même instant une excitation identique à la source, au moment de leur rencontre au niveau du qpc ils prendront des canaux de sortie systématiquement différent. Cet effet est du à la statistique fermionique des électrons et s'appellent l'effet Hong-Ou-Mandel. Pour chaque répétition de l'injection simultanée du couple source et sonde, il y a une charge qui va dans le premier canal de sortie et l'autre dans le second. Il n'y a donc pas de fluctuation du nombre de charge dans un canal de sortie. Donc le bruit de courant, S_{II} , s'annule. La variation du bruit de courant, ΔS_{II} est donc une mesure de la similarité entre source et sonde. En mesurant cette variation pour toute une base de sonde on peut reconstituer entièrement une source inconnue.

2 Le problème inverse à résoudre

2.1 Définition des objets et description du modèle

La source et les différentes sondes peuvent être décrites par des fonctions de Wigner qui représentent la quasi-distribution de probabilité de trouver un électron à une énergie et un instant donné. C'est donc une fonction de deux variables énergie et temps que l'on note $W_S(\epsilon, t)$ pour la source et $W_P(\epsilon, t)$ pour la sonde. Même en l'absence d'excitation électronique un conducteur est remplis jusqu'au niveau de fermi, que l'on choisira comme $\epsilon_F = 0$ eV, selon une distribution donnée par la fonction de fermi-dirac $f(\epsilon) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\epsilon - \epsilon_F}{k_B T}\right)}$. La fonction de Wigner du conducteur au repos est donc $W_F(\epsilon, t) = f(\epsilon)$. Dans la suite on considèrera toujours la fonction de Wigner en excès par rapport à celle au repos donc $\Delta W_S = W_S - W_F$ et $\Delta W_P = W_P - W_F$.

La famille de sonde utilisée est celle la plus facile à réalisée expérimentalement: des sinus à toutes les harmoniques de la période de la source aux quels on ajoute un offset ϵ_0 et dont on fait varier la phase ϕ_0 de 0° , 90° , 180° , et 270° . L'expression de la fonction de Wigner de la sonde à la n-ième harmonique est: $\Delta W_{P_n}(\epsilon, t) = f(\epsilon - \epsilon_0) - f(\epsilon) + \frac{eV}{n\hbar\Omega} \cos(n\Omega t + \phi_0) (f(\epsilon - \epsilon_0 - \frac{n\Omega}{2}) - f(\epsilon - \epsilon_0 + \frac{n\Omega}{2}))$.

Le bruit ΔS_{II} mesuré s'écrit en fonction de la source et des sonde comme:

$$\frac{d}{d\epsilon_0} (\Delta S_{II,n=0}(\epsilon_0)) = \frac{2e^2}{h} \frac{\Omega}{2\pi} \int_{\epsilon=-\infty}^{\epsilon=+\infty} d\epsilon \int_{t=0}^{t=\frac{2\pi}{\Omega}} dt \Delta W_S(\epsilon, t) \frac{d}{d\epsilon} (f(\epsilon - \epsilon_0)) \text{ pour la sonde d'harmonique 0}$$

$$\text{et } \frac{\Delta S_{II,n}(\epsilon_0, \phi_0=270^\circ) - \Delta S_{II,n}(\epsilon_0, \phi_0=90^\circ)}{eV_n} = \frac{2e^2}{h} \frac{\Omega}{2\pi} \int_{\epsilon=-\infty}^{\epsilon=+\infty} d\epsilon \int_{t=0}^{t=\frac{2\pi}{\Omega}} dt \Delta W_S(\epsilon, t) \cos(n\Omega t) \left(\frac{f(\epsilon - \frac{n\hbar\Omega}{2} - \epsilon_0) - f(\epsilon + \frac{n\hbar\Omega}{2} - \epsilon_0)}{n\Omega} \right)$$

$$\text{et } \frac{\Delta S_{II,n}(\epsilon_0, \phi_0=270^\circ) - \Delta S_{II,n}(\epsilon_0, \phi_0=90^\circ)}{eV_n} = \frac{2e^2}{h} \frac{\Omega}{2\pi} \int_{\epsilon=-\infty}^{\epsilon=+\infty} d\epsilon \int_{t=0}^{t=\frac{2\pi}{\Omega}} dt \Delta W_S(\epsilon, t) \sin(n\Omega t) \left(\frac{f(\epsilon - \frac{n\hbar\Omega}{2} - \epsilon_0) - f(\epsilon + \frac{n\hbar\Omega}{2} - \epsilon_0)}{n\Omega} \right)$$

Puis nous pouvons définir la fonction de Glauber $G(\epsilon, n)$ telle que

$$G(\epsilon, n) = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{t=0}^{t=\frac{2\pi}{\Omega}} dt \Delta W_S(\epsilon, t) \exp(ni\Omega t)$$

Et en calculant les différentes équations si dessus on a:

$$\frac{d}{d\epsilon_0} (\Delta S_{II,n=0}(\epsilon_0)) = \frac{2e^2}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon G(\epsilon, 0) \frac{\beta}{2(1+\cosh(\beta(\epsilon_0 - \epsilon)))}$$

et

$$\frac{\Delta S_{II,n}(\epsilon_0, \phi_0=270^\circ) - \Delta S_{II,n}(\epsilon_0, \phi_0=90^\circ)}{eV_n} = \frac{2e^2}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \Re(G(\epsilon, n)) \frac{\tanh(\beta n\hbar\Omega/2)}{n\hbar\Omega(1+\cosh(\beta(\epsilon_0 - \epsilon)) / \cosh(\beta n\hbar\Omega/2))}$$

Dans tous les exemples suivant l'origine des phases est choisie telle que $\Im(G(\epsilon, n)) = 0$

2.2 Formulation comme un problème inverse linéaire

Ils s'agit donc de problèmes de dé-convolution avec une dérivation supplémentaire pour le cas $n = 0$ dont on connaît le noyau de convolution analytiquement. En discrétisant à chaque énergie ϵ_0 mesurée on peut écrire le modèle comme:

$$\Delta \tilde{S}_{II,n=0} = Int \times Diff \times \Delta S_{II,n=0} = Int \times Conv_{n=0} \times G_0 + N_0$$

et

$$\Delta \tilde{S}_{II,n} = \frac{\Delta S_{II,n}(\epsilon_0, \phi_0=270^\circ) - \Delta S_{II,n}(\epsilon_0, \phi_0=90^\circ)}{eV_n} = Conv_n \times G_n + N_n$$

avec $Diff$, $Conv_0$, $Conv_n$ les matrices représentant les opérations de dérivation et de convolution et N_0 , N_n les vecteurs représentant le bruit expérimental sur les mesures.

Pour la première équation est multipliée par une matrice Int telle que $Int \times Diff = Id$ dans notre cas, c'est-à-dire pour les vecteurs $\Delta S_{II,n=0}$ telle que la première et dernière valeur valent 0 A²/Hz. On alors n problème linéaire inverse:

$$\Delta \tilde{S}_{II,n} = H_n G_n + N_n$$

Dans notre cas le nombre de problème indépendant est petit $n = 0, 1, \dots, 5$ et la dimension des matrices est aussi petite 81×81 , on pourra donc inverser les matrices dans les algorithmes. Par contre le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur propre des H_n est très grand $H_n^{-1} \Delta \tilde{S}_{II,n}$ donne un résultat très éloigné de G_n .

3 Les algorithmes implémentés

3.1 algorithme filtrage de Wiener

3.1.1 justification de l'algorithme

La première méthode utilisée pour résoudre ce problème a été d'utiliser un filtre de type filtre de Wiener. Pour un problème de convolution, en supposant des conditions aux limites périodiques, la base de Fourier diagonalise la matrice H_n . Avec \bar{t} la variable dans l'espace de fourier correspondant à l'énergie ϵ , on a

$$\Delta\tilde{S}_{II,n}(\bar{t}) = H_n(\bar{t})G_n(\bar{t}) + N_n(\bar{t})$$

La fonction $F(\bar{t})$ qui minimise $|G_n(\bar{t}) - F(\bar{t})\Delta\tilde{S}_{II,n}(\bar{t})|^2$ pour les réalisation aléatoire de $N_n(\bar{t})$ est le filtre de Wiener. On peut montrer que

$$F(\bar{t}) = \frac{H_n^*(\bar{t})}{|H_n(\bar{t})|^2 + \left|\frac{N_n(\bar{t})}{G_n(\bar{t})}\right|^2}$$

Ce filtre pose deux problèmes:

- il suppose des conditions aux limites périodiques sur la variable ϵ ce qui n'a pas lieu d'être dans notre cas expérimental. Mais on peut supposer que si le domaine de ϵ mesuré est assez grand par rapport au domaine où il y a du signal, alors il n'y a pas d'influence d'une période à l'autre.

- Et surtout il nécessite de connaître $|G_n(\bar{t})|^2$. Ce filtre est utilisé dans de nombreux cas car on peut souvent supposer une loi de puissance pour $|G_n(\bar{t})|^2 \propto \frac{1}{\bar{t}^\alpha}$, mais dans notre protocole de tomographie cela ne correspond pas à une information a priori que l'on aurait sur le signal.

Néanmoins en première approche un filtre de ce type a été implémenté. Pour cela je me suis placé dans la base qui diagonalise la matrice H_n en classant les valeurs propres de la plus grande à la plus petite. En traçant $|\Delta\tilde{S}_{II,n}(\bar{t})|^2$ dans cette base on voit qu'au delà d'un certain \bar{t}_c , $|\Delta\tilde{S}_{II,n}(\bar{t})|^2$ atteint un plancher de bruit. On suppose donc que pour $\bar{t} \leq \bar{t}_c$ on a $|\Delta\tilde{S}_{II,n}(\bar{t})|^2 = |H_n(\bar{t})G_n(\bar{t})|^2$. Et pour $\bar{t} \geq \bar{t}_c$ on suppose que le plancher n'est que du au bruit et que $G_n(\bar{t})$ est inférieure à la plage où l'on a du signal donc $|G_n(\bar{t})|^2 \leq |G_n(\bar{t}_c)|^2 \leq \left|\frac{N_n(\bar{t}_c)}{H_n(\bar{t}_c)}\right|^2$. Enfin le niveau de bruit $|N_n(\bar{t})|^2$ est supposé comme blanc (indépendant de \bar{t}) et estimé à partir de la moyenne quadratique des barres d'erreur. Le filtre devient donc:

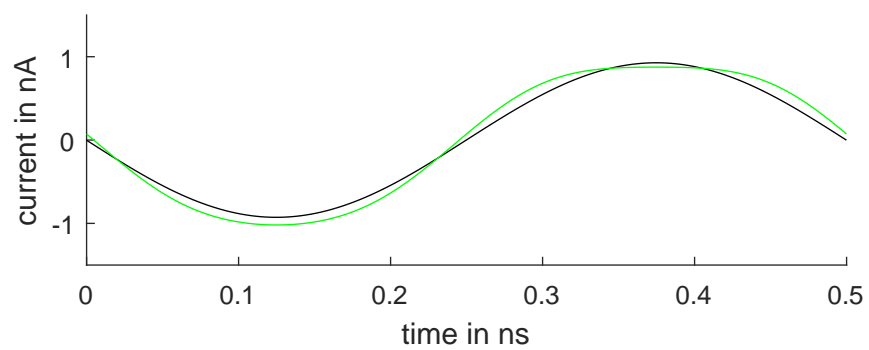
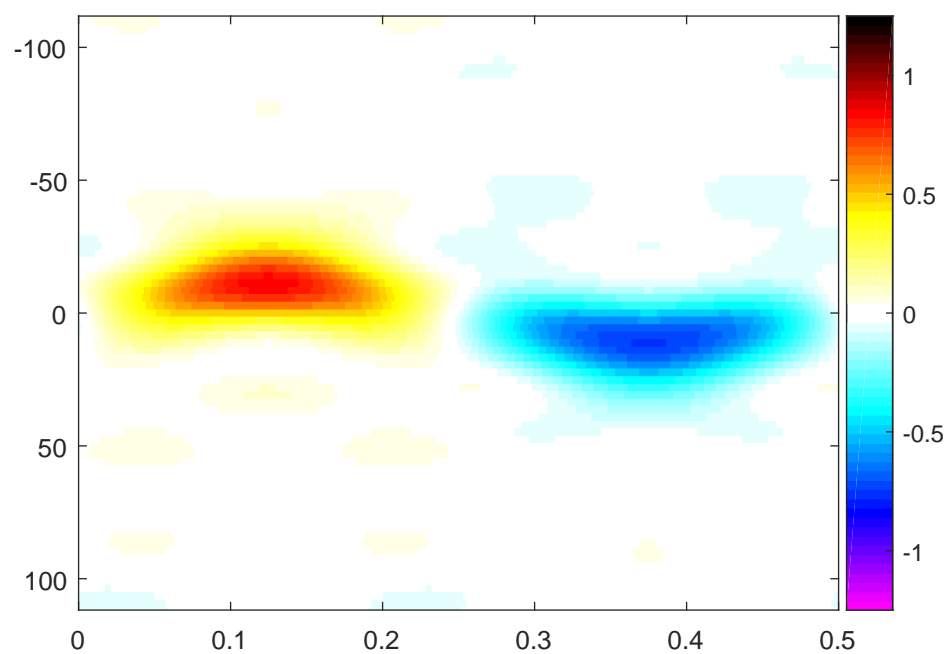
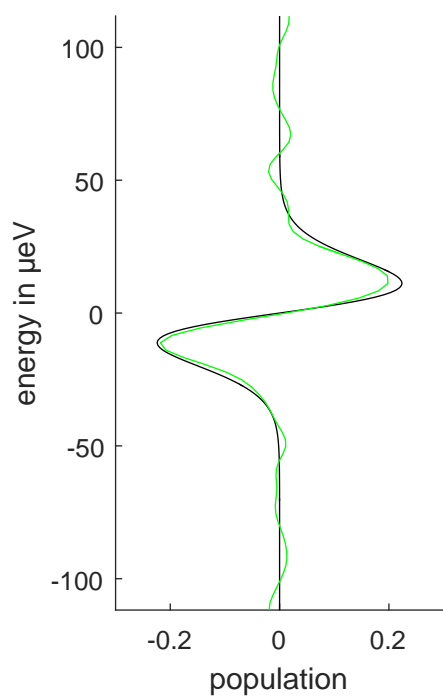
$$F(\bar{t}) = \frac{H_n^*(\bar{t})}{|H_n(\bar{t})|^2 \left(1 + \left|\frac{N_n}{\Delta\tilde{S}_{II,n}(\bar{t})}\right|^2\right)} \text{ pour } \bar{t} \leq \bar{t}_c$$

$$\text{et } F(\bar{t}) = \frac{H_n^*(\bar{t})}{|H_n(\bar{t})|^2 + |H_n(\bar{t}_c)|^2} \text{ pour } \bar{t} \geq \bar{t}_c$$

Il ne reste donc plus qu'à choisir à la main le paramètre de coupure \bar{t}_c en repérant la saturation de $|\Delta\tilde{S}_{II,n}(\bar{t})|^2$.

3.1.2 implementation

3.1.3 résultats



3.2 algorithme de Maximum A Posteriori

3.2.1 justification de l'algorithme

La deuxième a maximiser la probabilité $p(G_n|\Delta S_{II,n})$. Cette formulation permet de traiter le problème dans l'espace direct des ϵ où il est plus facile de formuler une information a priori sur le signal. La formulation de Bayes donne

$$p(G_n|\Delta S_{II,n}) = \frac{p(\Delta S_{II,n}|G_n)*p(G_n)}{p(\Delta S_{II,n})}$$

$p(\Delta S_{II,n}|G_n)$ est un terme de vraisemblance si on suppose les points de mesures se distribuent selon une loi normale autour d'une valeur moyenne. Les barres d'erreur donne la variance cette la loi normale et on a:

$$p(\Delta S_{II,n}|G_n) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\|\Delta S_{II,n} - H_n G_n\|_{V_e}^2\right) \text{ avec } V_e \text{ les variances associées aux barres d'erreur.}$$

$p(\Delta S_{II,n})$ est juste une constante de normalisation

$p(G_n)$ est la loi a priori sur la solution que l'on cherche. Ce que l'on sait a priori est que les $G_n(\epsilon)$ ne prennent pas de grande valeur et que $G_n(\epsilon) \rightarrow 0$ quand $|\epsilon|$ est grand. En effet la statistique fermionique impose que $|G_n(\epsilon)| \leq 1$, de plus on émet des excitations jusqu'à une énergie limite. On peut exprimer cette information comme une loi normale avec des variances V_f qui définissent une enveloppe de forme gaussienne en fonction ϵ , d'amplitude v_f et de largeur w . Les deux paramètres a régler sont donc v_f le nombre maximal d'excitation par niveau et w l'énergie maximale émise par la source.

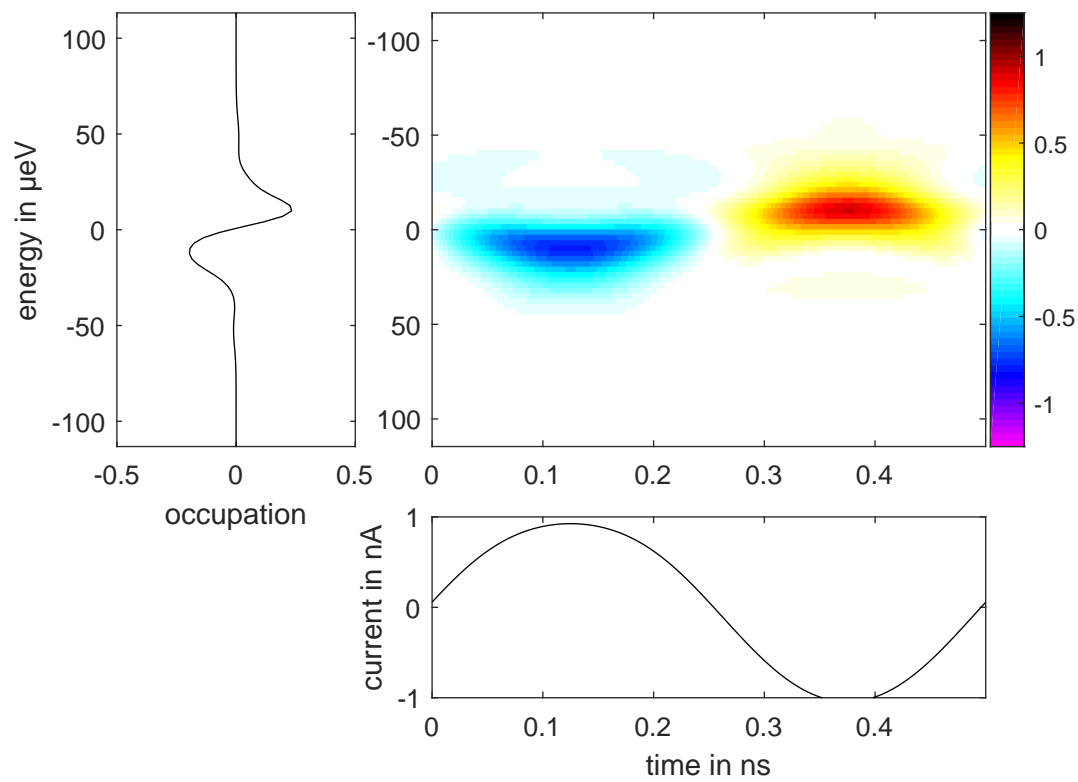
$$p(G_n) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\|G_n\|_{V_f}^2\right) \text{ avec } V_f(\epsilon) = v_f \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{w^2}\right)$$

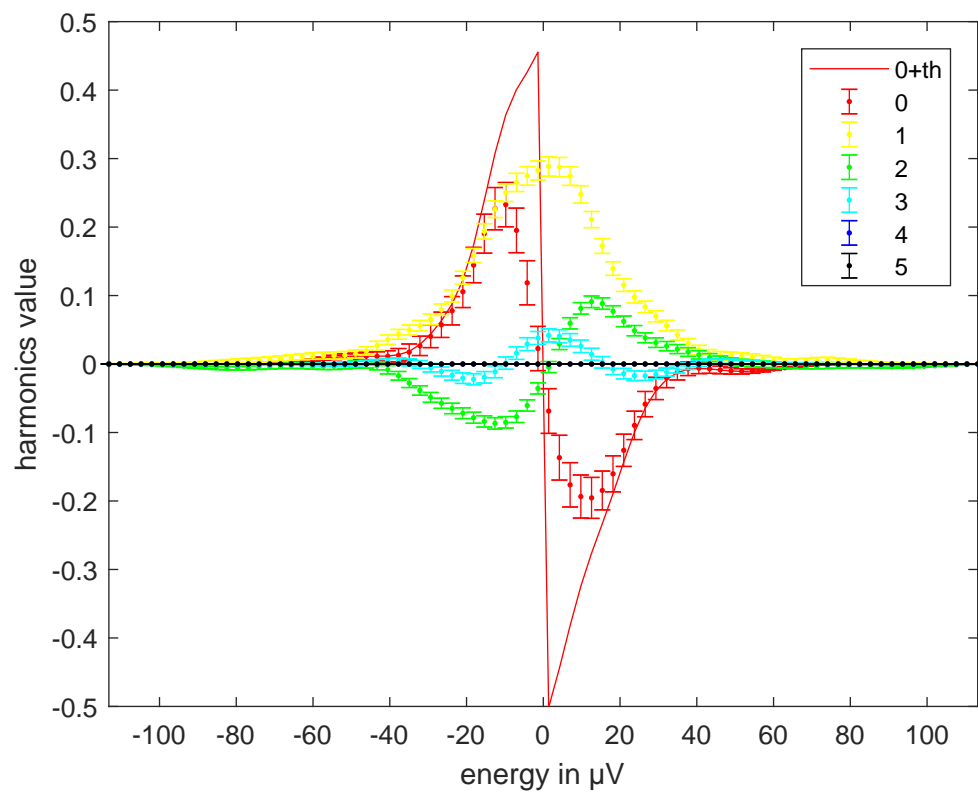
La probabilité a maximiser est donc

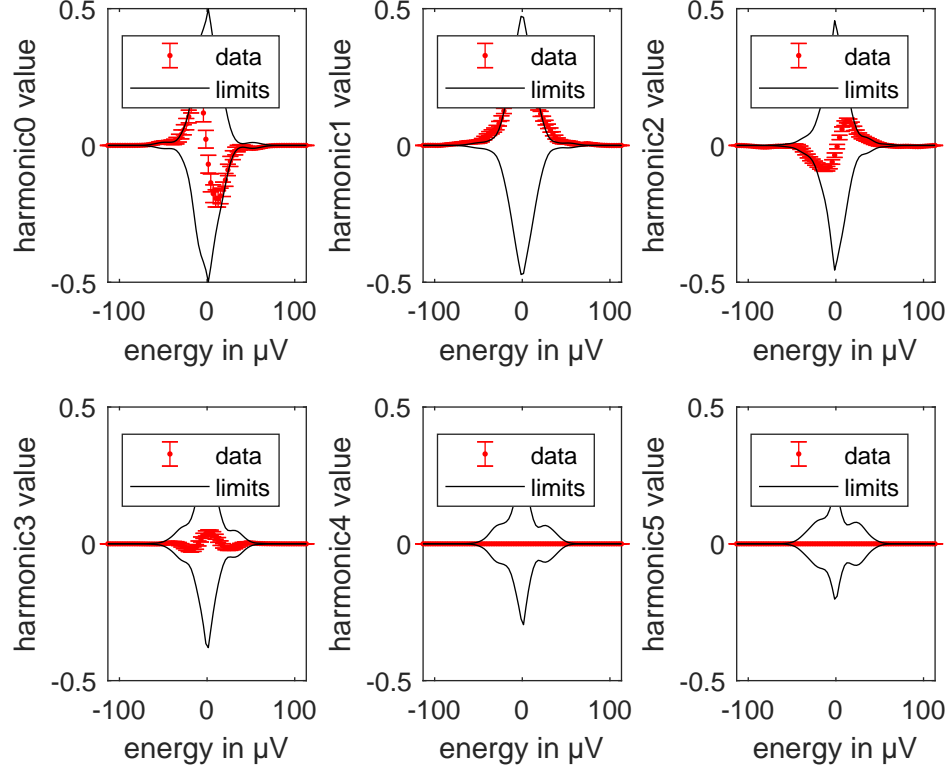
$$p(G_n|\Delta S_{II,n}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\|\Delta S_{II,n} - H_n G_n\|_{V_e}^2 - \frac{1}{2}\|G_n\|_{V_f}^2\right)$$

3.2.2 implementation

3.2.3 résultats







3.3 algorithme de Gradient Projeté

3.3.1 justification de l'algorithme

La troisième a inclure en plus la contrainte entre les différents problème donnée par l'inégalité de Cauchy-Schwartz vérifiée par la fonction de Glauber

$$|G_n(\epsilon)|^2 \leq |G_0(\epsilon - n\hbar\Omega/2)G_0(\epsilon + n\hbar\Omega/2)|$$

En vérifiant cette contrainte, la fonction de Wigner obtenue peut représenter un état quantique et on peut calculer plus de grandeurs physique à partir d'elle comme l'entropie de l'état par exemple. Cette contrainte n'apporte pas

d'information supplémentaire sur G_0 donc on garde le même programme qu'à la section précédente. Par contre pour les $n > 0$ il faut maximiser la même probabilité $p(G_n|\Delta S_{II,n})$ avec la contrainte en plus. Comme maximiser la probabilité revient à minimiser un critère quadratique et que la contrainte définit un domaine convexe on peut utiliser un algorithme de gradient projeté pour trouver le minimum du critère quadratique dans le domaine convexe.

Cet algorithme consiste d'abord à initialiser la solution G_n dans le domaine convexe. Puis il faut effectuer une descente de gradient c'est-à-dire à déplacer la solution dans la direction du plus faible gradient. Mais dès que le déplacement nous fait atteindre le bords du domaine on projette le gradient pour rester dans le domaine convexe. Et réitérer la descente de gradient. Comme la dimension du système est petite typiquement 81 point pour G_n et que l'on a pas de contrainte de type temps réel sur le fonctionnement de l'algorithme, on peut mettre en place cet algorithme.

3.3.2 implementation

3.3.3 résultats

