DS 4 : Transferts thermiques & Électrostatique
Éléments de correction

N°	Elts de rép.	Pts	Note
00-00	**Titre de l'exo**	0	0
0	éléments de réponse	0	0

01-18	**Récupération d'énergie thermique dans la chaussée**	18	
01-09	**Dimensionnement des aquifères**	9	
1	$\vec{j}_Q = -\lambda\overrightarrow{grad}(T)$, $\vec{j}_Q = j_Q(r)\vec{e}_r = -\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\vec{e}_r$	1	
2	$\Phi(r) = \iint \vec{j}_Q.\vec{e}_r dS = -\lambda\frac{dT}{dr}4\pi r^2$	1	
3	On applique le 1er principe à la coquille sphérique pendant dt : $CdT = [\Phi(r) - \Phi(r+dr)]dt$ en régime permanent $\frac{dT}{dt} = 0$ donc $\Phi(r) = \Phi(r+dr) = \Phi$	1	
4	On a donc $dT = -\frac{\Phi}{4\pi\lambda_{terre}}\frac{dr}{r^2}$ donc $\int_{T_E}^{T_S} dT = -\frac{\Phi}{4\pi\lambda_{terre}}\int_{R_a}^{+\infty}\frac{dr}{r^2}$ donc $T_S - T_E = \frac{\Phi}{4\pi\lambda_{terre}}(-\frac{1}{R_a})$ soit $\Phi = 4\pi\lambda_{terre}R_a(T_E - T_S)$	1	
5	On applique maintenant le 1er principe à l'aquifère pendant un temps dt : $\rho_{eau}\frac{4}{3}\pi R_a^3 c_{eau}dT_E = -\Phi dt = -4\pi\lambda_{terre}R_a(T_E - T_S)dt$ soit $\frac{dT_E}{dt} + \frac{T_E}{\tau} = \frac{T_S}{\tau}$ avec $\tau = \frac{\rho_{eau}c_{eau}R_a^2}{3\lambda_{terre}}$	1	
6	$T_E = T_S + \alpha e^{-\frac{t}{\tau}}$ or $T_E(0) = T_S + \alpha = T_{E0}$ donc $T_E(t) = T_S + (T_{E0} - T_S)e^{-\frac{t}{\tau}}$	1	
7	$T_{E0} - T_E(t) < \Delta T$ si $T_{E0} - T_S - (T_{E0} - T_S)e^{-\frac{t_H}{\tau}} < \Delta T$ soit $\tau > -\frac{t_H}{ln\left(1-\frac{\Delta T}{T_{E0}-T_S}\right)}$	1	
8	$\tau \geq 11,8.10^7$ s, donc $R_{a,limite} = \sqrt{\frac{3\lambda_{terre}\tau}{\rho_{eau}c_{eau}}} = 9,2$ m	1	
9	il faut remplacer $\rho_{eau}c_{eau}$ par $\rho_{eau}c_{eau} + \rho_{terre}c_{terre}$ soit $R'_{a,limite} = 8,2$ m	1	
10-18	**Étude thermique de la chaussée durant l'été**	9	
10	schéma	1	
11	$R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$ et $T_R - T_S = R_{th}\phi_C S = \frac{p}{\lambda S}\phi_C S$ soit $\phi_C = \frac{\lambda}{p}(T_R - T_S)$	1	
12	En régime permanent : $\phi_a^R + \phi_S = \phi_b^R + \phi_{CC} + \phi_C$ soit $\sigma T_A^4 + \phi_S = \sigma T_R^4 + h(T_R - T_A) + \frac{\lambda}{p}(T_R - T_S)$	1	
13	si $T_R \simeq T_A$ alors $T_R = T_A + dT$ avec $dT \ll T_A$, donc $\phi_b^R - \phi_a^R = \sigma(T_R^4 - T_A^4) = \sigma d(T^4) = 4\sigma T^3 dT = A\sigma T_A^3(T_R - T_A)$	1	

14	Dans ces conditions $\phi_S = 4\sigma T_A^3(T_R - T_A) + h(T_R - T_A) + \frac{\lambda}{p}(T_R - T_S)$ d'où $T_R = \frac{\phi_S + 4\sigma T_A^4 + hT_A + \frac{\lambda}{p}T_S}{4\sigma T_A^3 + h + \frac{\lambda}{p}}$	1	
15	faire les applications numériques remarquer que l'on peut négliger la conduction vers la Terre et donc $T_R = \frac{\phi_S + T_A(4\sigma T_A^3 + h)}{4\sigma T_A^3 + h} = T_A + \frac{\phi_S}{4\sigma T_A^3 + h}$	1	
16	$T_R = 324$ K	1	
17	Le bilan devient $\phi_a^R + \phi_S = \phi_b^R + \phi_{CC} + \phi_C + \phi_E$ avec les hypothèses précédentes on néglige ϕ_C et $\phi_b^R - \phi_a^R = 4\sigma T_A^3(T_R - T_A)$ alors $\phi_E = \phi_S - 4\sigma T_A^3(T_R - T_A) - h(T_R - T_A) = 449$ W.m^{-2}	1	
18	à partir de l'équation de diffusion thermique on déduit que D s'exprime en m^2.s^{-1}. En ordre de grandeur $\tau \simeq \frac{e^2}{D} = 2$ h $\ll 6$ mois, donc l'hypothèse est valable, le régime permanent a le temps de s'établir.	1	
19-27	**Dissipation thermique dans les systèmes électroniques**	11	
19	Comme a et b sont très supérieurs à l, la plaque est très fine et les bords de largeur typique l occupent une très petite petite surface, donc correspondent à un très petit flux thermique qu'on néglige. Comme sur les faces extrêmes on considère dans tous le solide T ne dépend pas y et z et le flux thermique dans ces directions est négligé. T dépend seulement des variables restantes x et t.	1	
20	On fait un bilan d'énergie (1er principe) sur une tranche d'épaisseur dx de solide et de section S, entre les instants t et t+dt. $H(t+dt) = H(t) + \delta Q$ ou $dH = \delta Q$, avec $dH = \mu cSdxT(x,t)$ et $\delta Q = (\Phi_{entrant} - \Phi_{sortant})dt = (\Phi(x) - \Phi(x+dx))dt$ avec Φ orienté vers les x croissant d'où $\mu cSdxT(x,t) = (\Phi(x) - \Phi(x+dx))dt$ donc $S\mu c\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$. Or en géométrie 1D cartésienne $\Phi = j_Q S$ et d'après la loi de Fourier $j_Q = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}$. Donc $S\mu c\frac{\partial T}{\partial t} = -S\frac{\partial j_Q}{\partial x} = -S(-\lambda)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, donc $\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ avec $D = \frac{\lambda}{\mu c}$	1	
21	En régime stationnaire $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ donc $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$, donc $T(x) = Ax + B$ avec $T(0) = B = T_1$ et $T(l) = Al + T_1 = T_0$ donc $T(x) = \frac{T_0 - T_1}{l}x + T_1$. Et $\Phi = j_Q S = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}ab = \lambda\frac{ab}{l}(T_1 - T_0)$	1	
22	Φ, le flux thermique analogue du courant électrique I, est proportionnel à $(T_1 - T_0)$, la différence de température analogue à la différence de potentiel électrique, donc ici $\Phi = \frac{T_1 - T_0}{R_{th}}$ avec $R_{th} = \frac{l}{\lambda ab}$	1	
23	$\frac{\delta Q}{dt} = h(T_0 - T_a)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ donc h s'exprime en W.K^{-1}.m^{-2}. D'autre part $\delta Q_{cc} = hS(T_0 - T_a)\mathrm{d}t = \Phi_{cc}\mathrm{d}t$ donc $R_h = \frac{T_0 - T_a}{\Phi_{cc}} = \frac{1}{hS}$	1	
24	$R_{th} = \frac{l}{\lambda ab} = 0,011$ K.W^{-1} et $R_h = \frac{1}{hab} = 35$ K.W^{-1}, ces deux résitances étant en série $R_{tot} \simeq R_h$, c'est l'interface solide/air qui limite le transfert thermique, ça ne sert à rien de remplacer le solide, par contre remplacer l'air par un liquide peut-être utile.	1	

25	Le microprocesseur est composé de fils de cuivre et de puces en silicium majoritairement, sur un support en silicium. On va considéré que le processeur produit une puissance de $P_c = 15$ W et qu'il est détruit quand il atteint $T_{junction} = 100$ °C On suppose que la plaque est à température uniforme et qu'elle n'échange de transfert thermique qu'avec l'air. Sa surface de contact avec l'air vaut $\sim 2ab$ on néglige les autres faces. A l'aide d'un bilan d'énergie thermique on a $\rho_{Si}ablc_{Si}\frac{dT}{dt} = P_c - hTS + hT_aS$ avec T la température du microprocesseur, donc avec $T(0) = T_a$ on a $T = T_a + \frac{P_c}{2hab}(1 - e^{-t/\tau})$ avec $\tau = \frac{\rho_{Si}c_{Si}l}{2h}$. $T(t_{lim}) = T_{junction} \Rightarrow t_{lim} = -\tau\ln(1 - (T_{junction} - T_a)\frac{2hab}{P_c}) = 15$ s	3	
26	Schéma, bilan d'énergie en régime stationnaire $0 = \Phi(x)dt - \Phi(x+dx)dt - \delta\Phi_{cc}dt$ donc $0 = -\frac{d\Phi}{dx} - h(T(x) - T_a)(2e + 2l_z)$, de plus $\Phi = j_Q el_z = -\lambda el_z\frac{dT}{dx}$ on en déduit l'équation demandée avec $\delta = \sqrt{\frac{\lambda el_z}{h(2e+2l_z)}}$, on résout $T(x) = T_a + Ae^{-x/\delta} + Be^{x/\delta}$. $H \to +\infty$ implique que $B = 0$ sinon il y a divergence de la température et $T(x_1) = T_R$ permet de déduire $T(x) = T_a + (T_R - T_a)e^{-(x-x_1)/\delta}$	1	
27	On est en régime stationnaire donc pour l'ailette Φ entrant et Φ sortant sont égaux. Donc la puissance évacuée par une ailette est $P_1 = \Phi(x_1) = j_Q(x_1)el_z = -\lambda el_z\frac{dT}{dx} = \frac{\lambda el_z}{\delta}(T_R - T_a)$. Et $P_{radiateur} = 6P_1 = 6\frac{\lambda el_z}{\delta}(T_R - T_a) = 44$ W et $R_{radiateur} = \frac{\delta}{6\lambda el_z} = 1,1$ K.W^{-1}.	1	
28-48	**Forces d'intéraction et formule de Derjaquin**	21	
28-30	**Approche qualitative**	3	
28	Une force est conservative si son travail est indépendant du chemin suivi, $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p)$	1	
29	Pour $r < r_m$ l'énergie potentielle est décroissante, l'intéraction est donc répulsive. Pour $r > r_m$ l'énergie potentielle est croissante, l'intéraction est donc attractive.	1	
30	Pour éloigner la pointe d'une distance macroscopique il faut lui fournir une énergie $-E_p(r_m)$	1	
31-37	**Interaction entre deux dipôles**	7	
31	L'approximation dipolaire est vérifiée lorsque la distance d'observation est très grande devant la taille du dipôle.	1	
32	Schéma dipôle + système de coordonnée	1	
33	Un dipôle peut être modélisé par 2 charges ponctuelles q et $-q$ placées respectivement en deux points P et N tel que $\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$ et $OP = ON = \frac{a}{2}$. Le principe de superposition donne $V(M) = V_P(M) + V_N(M)$ soit $V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right)$.	1	

34	Dans l'approximation dipolaire $r \gg a$ donc $PM = \sqrt{r^2 - ar\cos(\theta) + \frac{a^2}{4}} \simeq r\left(1 - \frac{a}{2r}\cos(\theta)\right)$ et donc $\frac{1}{PM} \simeq \frac{1}{r}(1 + \frac{a}{2r}\cos(\theta))$ de même $\frac{1}{NM} \simeq \frac{1}{r}(1 - \frac{a}{2r}\cos(\theta))$ donc $V \simeq \frac{qa\cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	1	
35	$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$ donc $\vec{E} = \frac{qa\cos(\theta)}{2\pi\epsilon_0 r^3}\vec{e}_r + \frac{qa\sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{e}_\theta$	1	
36	L'énergie d'un dipôle $\vec{p'}$ placé en M est donné par $U_{d-d} = \vec{p'}.\vec{E} = \alpha E^2$ car $\vec{p'} = \alpha\vec{E}$ or E est en $\frac{1}{r^3}$ donc $U_{d-d} = -\frac{C}{r^6}$	1	
37	Oui car on effectue un produit scalaire entre un dipôle et le champ de l'autre dipôle.	1	
38-40	**Interaction dipôle-plan**	3	
38	Faire un schéma d'un volume élémentaire en coordonnée sphérique	1	
39	Pour que le point M soit dans le demi-espace contenant les dipôles il faut que $z > d$ soit $r\cos(\theta) > d$ d'où la borne supérieure.	1	
40	$U_{d-e} = -\rho_0 \int_d^{+\infty} \frac{C}{r^6} r^2 \left(\int_0^{\theta_{max}} \sin(\theta)d\theta \left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)\right) dr = -\rho_0 \int_d^{+\infty} \frac{C}{r^6} r^2 \left(\int_0^{\theta_{max}} \sin(\theta)d\theta \times 2\pi\right) dr = -\rho_0 \int_d^{+\infty} \frac{C}{r^6} r^2 \left(1 - \cos(\theta_{max})\right) \times 2\pi dr = -2\pi\rho_0 \int_d^{+\infty} \frac{C}{r^4}\left(1 - \frac{d}{r}\right) dr = -2\pi\rho_0 C\left(\frac{1}{3d^3} - \frac{d}{4d^4}\right) = -\frac{\pi\rho_0 C}{6d^3}$	1	
41-48	**Interaction paraboloïde-plan**	8	
41	$[u_{e-e}] = [\rho_1][U_{d-e}][h] = L^{-3}EL = EL^{-2}$	1	
42	Si la surface est plane alors $R_2 \to +\infty$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{1}{2R_1} = \frac{1}{2R}$	1	
43	$E = \iint u_{e-e}(h)dS$	1	
44	$h = d + \lambda r^2$ ne dépend pas de θ donc $E = \iint u_{e-e}(h)dS = \iint u_{e-e}(h)rdrd\theta = 2\pi\int_0^{+\infty} u_{e-e}(h)rdr$ et $dh = 2\lambda rdr$ donc $E = \frac{2\pi}{2\lambda}\int_d^{+\infty} u_{e-e}(h)dh = 2\pi R\int_d^{+\infty} u_{e-e}(h)dh$	1	
45	$F_{int} = -\frac{\partial E}{\partial d} = 2\pi R\frac{\partial}{\partial d}\left(\int_{+\infty}^d u_{e-e}(h)dh\right) = 2\pi R u_{e-e}(d)$	1	
46	d'après la question précédente $F_{int} = -\frac{\pi^2\rho_0\rho_1 CR}{6d^2}$	1	
47	$H = (\pi\rho)^2 C = 1,4.10^{-20}$ J	1	
48	avec $R = 10$ nm et $d \sim R = 10$ nm on a $F_{int} \sim 2.10^{-13}$ N	1	
49-56	**Mécanisme de déclenchement de l'étincelle**	8	
49-50	**Effet d'avalanche lors du déplacement d'un électron dans un gaz soumis à un champ électrique**	2	
49	Un électron est accéléré entre deux chocs par le champ électrique d'après $m_e\vec{a} = -e\vec{E}$ donc sa vitesse avant collision est $\vec{v}_e = -\frac{e\tau_c}{m_e}\vec{E}$ soit une énergie cinétique de $E_c = \frac{1}{2}m_e v_e^2 = \frac{e^2\tau_c^2}{2m_e}E^2$. On atteint le champ disruptif pour $E_c = W$ donc $\frac{e^2\tau_c^2}{2m_e}E_d^2 = W$ donc $E_d = \frac{\sqrt{2m_e W}}{e\tau_c} = 12$ MV.m^{-1}	1	

50	entre deux chocs $v_e = \frac{eE_d}{m_e}t$ donc $l = \int_0^{\tau_c} v_e dt = \frac{eE_d}{2m_e}\tau_c^2 = 1,32$ µm. Sur la figure le potentiel varie sur des distances de 0,1 mm, or $l \ll 0,1$ mm donc le champ peut-être considéré comme uniforme entre deux chocs.	1	
51-56	**Estimation de la tension inter électrodes nécessaire pour déclencher l'étincelle**	6	
51	En coordonnées cylindriques le plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie donc $\vec{E}$ appartient au plan, notamment pour $r = 0$, $\vec{E} \;//\; \vec{e}_z$. Le plan entre les deux électrodes $z = 0$ est un plan d'anti-symétrie de $\vec{E}$ et notamment pour $z = 0$, $\vec{E} \;//\; \vec{e}_z$.	1	
52	Les lignes de champ électrique sont perpendiculaire aux équipotentielles, et dirigées des potentiels élevés vers les potentiels faibles, soit ici en suivant les z croissant. L'électrode portée au potentiel positif porte des charges positives, et l'électrode de potentiel négatif des charges négatives. le saut de potentiel entre les équipotentiels est de 0,1 V et celle du milieu est à 0V donc valeurs encadrées de bas en haut sont 0,2 V puis 0 V puis -0,1 V puis -0,2 V.	1	
53	$C = \frac{q}{U} = 0,31$ pF	1	
54	D'après les graphes le chemin comportant les plus fortes valeurs de champ sont pour $r = 0$. Sur ce chemin le point de plus faible champ est pour $z = 0$ car la pente du potentiel est la moins forte. Donc il suffit que $E(r = 0, z = 0) = E_d$ pour amorcer une étincelle. Or on a $E \sim \frac{U}{d}$ donc $U > E_d d \sim 14$ kV	1	
55	$E = \frac{1}{2}CU^2 = 32$ µJ, cette énergie est disspé sous forme d'effet Joule, de rayonnement lumineux et d'émission sonore.	1	
56	D'après le dernier graphe $E(r) > 0,9E(r = 0)$ pour $r < 0,45$ mm, donc la zone parcourue à une largeur radiale de diamètre $0,90$ mm	1	