Transformation de Lorentz

Le principe de relativité restreinte postule l'invariance de la célérité de la lumière dans tous les référentiels galiléens. En particulier la forme de l'équation de propagation du champ électromagnétique demeure la même dans tous les référentiels galiléens.

Soit R et R' deux référentiels galiléens, le référentiel R' étant en mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse v lelong de l'axe Ox, les axes des deux référentiels étant deux à deux parallèles.

Soit $\vec{E}$ et $\vec{E}'$ le même champ électrique exprimé dans chacun des deux référentiels :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial t'^2} = 0$$

1. Montrez que la transformation de Galilée :

$$x' = x - vt\,;\; y' = y\,;\; z' = z\,;\; t' = t$$

ne parvient pas à faire conserver la même forme à l'opérateur d'Alembertion.

2. Einstein et Poincaré ont cherché à savoir si la transformation suivante pouvait le faire :

$$x' = a_{11}x + a_{12}t\,;\; y' = y\,;\; z' = z\,;\; t' = a_{21}x + a_{22}t$$

Montrez que c'est le cas pour $a_{11} = \gamma$, $a_{12} = -\gamma c\beta$, $a_{21} = \gamma\frac{\beta}{c}$, $a_{22} = \gamma$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ et $\beta = \frac{v}{c}$.

3. Montrez au premier ordre en $\frac{v}{c} \ll 1$ que les transformations de Lorentz et Galilée sont compatibles.

A l'intérieur du condensateur

On considère un condensateur plan formé de deux plaques planes parallèles infinies et distantes de d. L'ensemble est placé dans le vide. Les plaques sont maintenues respectivement aux potentiels V_1 et V_2.

1. Expliquer avec quelle hypothèse de l'énoncé on néglige les effets de bords du condensateur.
2. Rappeler les équations de Poisson et de Laplace pour l'électrostatique.
3. Déterminer le potentiel à l'intérieur du condensateur.
4. Le condensateur est placé dans un milieu où règne une densité volumique de charge ρ uniforme. Déterminer le potentiel électrostatique dans le condensateur.

Courants de Foucault dans un cylindre

On place un cylindre d'axe (Oz), de section $S_0 = \pi R^2$ de longueur L et de conductivité σ dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\vec{e}_z$. On suppose que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué. On se place en régime lentement variable et on néglige les effets de bords en considérant $L \gg R$. On donne en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial}\left(ra_\theta\right) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

1. On admet que $\vec{E} = E(r,t)\vec{e}_\theta$. Montrer que cela est cohérent vis à vis des symétries et invariances. On pourra s'appuyer sur l'équation de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Faraday.
2. Montrer que $\vec{E} = \frac{r\omega B_0 \sin(\omega t)}{2}\vec{e}_\theta$ en utilisant une méthode locale et en utilisant une relation intégrée.
3. Déterminer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.
4. Que devient la puissance moyenne dissipée par effet Joule si, au lieu d'un seul conducteur cylindrique, on utilise N conducteurs cylindriques identiques, de même longueur L, de section $S_0' = \frac{S_0}{N}$, sachant que le volume total occupé par les N cylindres est le même que précédemment ?
5. Expliquer l'intérêt du feuilletage (découper les conducteurs en sous conducteurs multi-brins de plus petit diamètre) pour la réalisation des transformateurs.

Rayonnement du condensateur

Un condensateur plan est constitué par deux disques conducteurs de rayon a, distants de e, d'axe Oz. Le condensateur est un dipôle électrique parcouru par un courant $i(t) = I_0\cos(\omega t)$.

1. Exprimer la charge $q(t)$ et $-q(t)$ portées par les armatures du condensateur.
2. En reprenant l'exercice du TD précédent, calculer le champ électromagnétique à l'intérieur du condensateur.
3. En déduire le vecteur de Poynting. On appelle S la surface délimitant la partie latérale du condensateur. S est un cylindre de rayon a, de hauteur e, et d'axe (Oz). Calculer le flux sortant du vecteur de Poynting à travers S.
4. Relier la puissance électrique du dipôle électrique formée par le condensateur, au flux du vecteur de Poynting et à la variation d'énergie électromagnétique à l'intérieur du condensateur. Conclure.

Moteur asynchrone

Une bobine plate fermée sur elle-même, de surface totale S, de résistance R et d'inductance L est mobile autour d'un axe Δ. Elle est placé dans un champ magnétique uniforme, de module constant B, tournant autour du même axe à la vitesse angulaire ω. On suppose qu'un régime permanent est atteint pour lequel la bobine tourne à une vitesse angulaire constante avec un retard de phase initial ϕ sur le champ tournant. On pose $\Omega = \omega_0 - \omega$. On note $\vec{n}$ le vecteur normal de la bobine. On admet que la loi de Faraday est valable.

1. Déterminer le courant $i(t)$ dans la bobine en régime sinusoïdal forcé en précisant sa valeur efficace et son retard de phase ψ sur la force électromatrice d'induction.
2. Donner les expressions du couple instantané Γ et du couple moyen C agissant sur la bobine. Étudier les variations de C en fonction de ω. Calculer sa valeur C_0 pour $\omega = 0$ sa valeur maximale C_m et la valeur ω_m correspondante. Dans quelles conditions a-t-on un fonctionnement moteur ?
3. Dans quelle conditions le fonctionnement moteur est-il stable ? Le moteur peut-il démarrer seul ?