

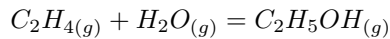
Devoir Surveillé 6

La calculatrice est autorisée

9 Janvier 2021 8h30-12h30

Étude thermodynamique de la synthèse industrielle de l'éthanol

On s'intéresse ici à la thermodynamique de la synthèse de l'éthanol par hydratation de l'éthène. L'équation-bilan de la réaction est :



La réaction s'effectue à 600 K sous une pression de 70 bars.

Les données thermodynamiques sont les enthalpies standard de formation $\Delta_f H^0(298\text{ K})$ à 298 K et les entropies molaires standard $S^0(298\text{ K})$ à 298 K :

| | $C_2H_{4(g)}$ | $H_2O_{(g)}$ | $C_2H_5OH_{(g)}$ |
|-------------------------------------------------------------|---------------|--------------|------------------|
| $\Delta_f H^0(298\text{ K})$ (kJ.mol ⁻¹) | 52,5 | -241,8 | -235,1 |
| $S^0(298\text{ K})$ (J.mol ⁻¹ .K ⁻¹) | 219,6 | 188,8 | 282,7 |

1. Calculer l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^0$ et commenter son signe.
2. Calculer l'entropie standard de réaction $\Delta_r S^0$ à 298 K et commenter son signe.

On supposera dans la suite que ces grandeurs sont constantes sur l'intervalle de températures considéré.

3. Déterminer la constante d'équilibre K^0 de cette réaction à 298 K.
4. Calculer la valeur de K^0 à 600 K.
5. On introduit l'éthène et l'eau dans les proportions stœchiométriques. Déterminer l'équation dont la résolution donne la composition du système à l'équilibre.
6. On introduit une mole d'éthène. Déterminer la composition du système à l'équilibre par une résolution numérique.
7. Comment évolue le système si on diminue la température à pression constante lorsque le système est fermé ?
8. Même question si on diminue la pression à température constante.
9. Conclure sur le choix des conditions de pression et de température retenues.

Géophysique de la planète Terre

Champ gravitationnel créé par la Terre

10. Énoncer le théorème de Gauss appliqué à la gravitation en précisant les analogies entre forces électrostatiques et gravitationnelles. On notera \vec{g} le champ gravitationnel.

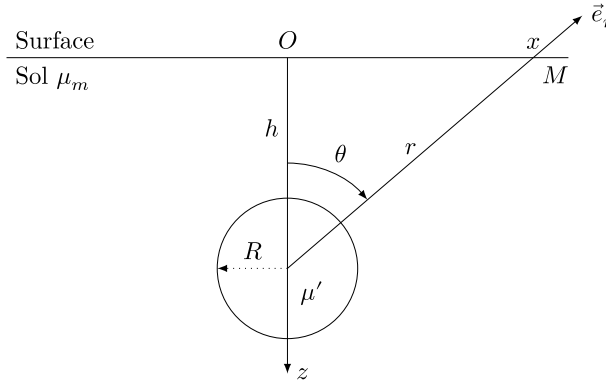
La Terre est assimilée à une boule homogène de rayon R_T , de centre C et de masse M_T uniformément répartie en volume. On repère un point M de l'espace dans le système de coordonnées sphériques d'origine C , associé à la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$. On appelle $z = r - R_T > 0$ l'altitude d'un point M situé à l'extérieur de la Terre et on associe à ce point un axe (Oz) (verticale du lieu) dont l'origine O est en $r = R_T$ et tel que $\vec{e}_z = \vec{e}_r$.

11. Déterminer la direction, le sens et les variables dont dépend le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}_T$ créé par la Terre en exploitant les symétries et invariances.
12. Déterminer l'expression du champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}_T$ à une altitude $z > 0$ en exploitant le théorème de Gauss.

Applications de la gravimétrie

La gravimétrie est l'étude des variations du champ de pesanteur dans l'espace et dans le temps. Elle permet de déterminer la répartition des masses au sein de la Terre et d'avoir ainsi accès à sa structure. Par exemple, la gravimétrie est utilisée pour déterminer la forme de la Terre (géodésie), pour détecter des cavités (génie civil ou archéologie), pour suivre les stockages d'eau (hydrologie continentale).

Dans cette partie, nous allons déterminer, par une analyse gravimétrique, les dimensions d'un corps sphérique enterré dans un sol de masse volumique moyenne μ_m (figure ci-dessous)



13. En travaillant par analogie avec la question précédente, déterminer l'expression du champ de pesanteur en un point M situé à l'extérieur d'une sphère homogène de rayon R et de masse volumique $\mu' = \mu_m + \Delta\mu$ en fonction de μ_m , $\Delta\mu$, G , R , r , distance de M au centre de la sphère, et du vecteur unitaire \vec{e}_r (figure ci-dessus).

Le corps sphérique se trouve à une profondeur h dans le sol. Loin de la sphère (pour $r \gg R$), le champ de pesanteur est vertical selon Oz de valeur g_0 .

14. Déterminer g_{Bz} , la composante verticale du champ de pesanteur créé par la boule au point M situé à une distance x de la verticale.
15. Montrer que l'anomalie gravimétrique $\Delta g = g_z - g_0$, qui fait varier le champ de pesanteur apparent en un lieu, est identique au champ de pesanteur g'_z créé par une sphère de masse volumique $\Delta\mu$.
16. Montrer que l'anomalie gravimétrique s'écrit

$$\Delta g = \frac{4\pi G \Delta\mu R^3 h}{3(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

17. Tracer l'allure de la courbe Δg en fonction de x pour des sphères identiques enterrées à deux profondeurs différentes h_1 et $h_2 > h_1$.
18. Quel est le lien entre la profondeur h et la largeur à mi-hauteur de la courbe ? Que vaut l'anomalie gravimétrique maximale ?
19. Déterminer, à l'aide la courbe de la figure ci-dessous, la profondeur h et le rayon R de la sphère enterrée. Les géophysiciens utilisent comme unité de mesure du champ de pesanteur le gal avec $1 \text{ gal} = 1,00 \text{ cm.s}^{-2}$, l'axe des ordonnées est gradué en mgal tel que $1 \text{ mgal} = 10^{-3} \text{ gal}$.

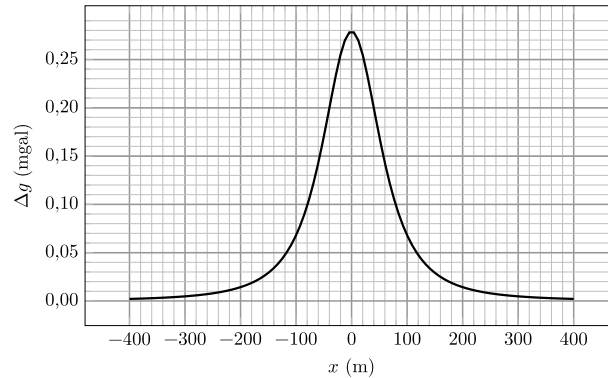
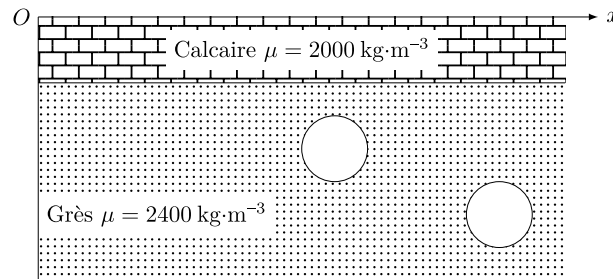


Figure Anomalie gravimétrique Δg pour une sphère enterrée avec $\Delta\mu = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$

20. Comment rendre indétectable par analyse gravimétrique de l'or stocké dans une grotte sphérique ?
21. La grotte de 1 mètre de rayon est à 4 mètre de profondeur. Quelle masse d'or est-il possible de cacher par cette méthode ? Pour information, la masse volumique de l'or est $\rho_{\text{or}} = 19.300 \text{ kg.m}^{-3}$.



Figure

22. Une étude archéologique préalable prévoit la disposition de deux grottes sphériques de même dimension (figure ci-dessus). Tracer l'allure de la courbe de l'anomalie gravimétrique attendue $\Delta g = f(x)$ en vous aidant de la figure ci-dessous.

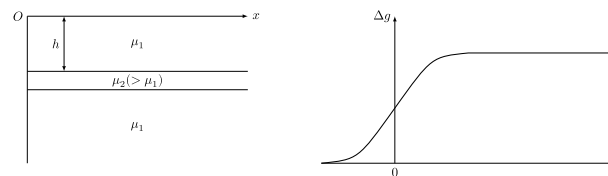


Figure Anomalie gravimétrique pour une plaque horizontale semi-infinie

Boussole, champ géomagnétique et dipôle central

Une boussole est formée d'un aimant permanent, solide en forme d'aiguille équivalente à un petit dipôle magnétique \vec{m} de norme constante m , la direction du vecteur \vec{m} étant supposée indiquer le nord. Cette aiguille aimantée peut librement tourner autour d'un axe vertical (Δ) dirigé par le vecteur \vec{e}_r local et formant un pivot à faible frottement (figure ci-dessous).

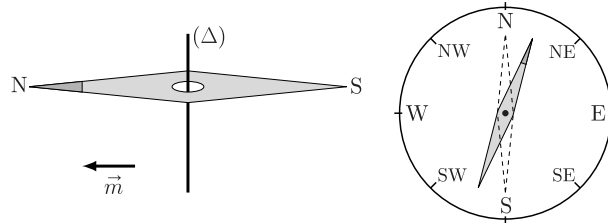


FIGURE – Boussole de navigation

23. Tracer un schéma de la Terre et du champ magnétique terrestre.
24. Pourquoi la boussole à l'équilibre indique-t-elle le nord ? Cet équilibre est-il stable ?

On note I le moment d'inertie de l'aiguille aimantée relativement à son axe de rotation (Δ) ; légèrement écartée de sa position d'équilibre (figure ci-dessus), l'aiguille aimantée oscille avec une pseudo-période τ_{osc} .

25. A l'aide du théorème du moment cinétique établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle α que fait l'aiguille aimantée avec sa position d'équilibre.
26. Montrer que la connaissance de m , τ_{osc} et I permet de déterminer une des composantes du champ géomagnétique. Laquelle ?

On étudie un modèle de champ géomagnétique créé par un dipôle magnétique $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ disposé au centre O de la Terre (assimilée à une sphère de rayon R_T), l'axe (Oz) étant l'axe polaire géographique dirigé du pôle sud de cet axe vers son pôle nord (voir paragraphe coordonnées sphériques et géographiques en fin d'énoncé). On rappelle d'une part qu'un point de la surface est caractérisé par ses coordonnées géographiques ϕ (longitude) et $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ (latitude) et d'autre part qu'à l'équateur le champ magnétique terrestre est horizontal, dirigé vers le pôle nord géographique et y a pour intensité B_E .

27. Exprimer, en un point de la surface de la Terre et en coordonnées sphériques, le champ géomagnétique en fonction de μ_0 (perméabilité du vide), M_0 et R_T .
28. Préciser le signe de M_0 puis estimer sa valeur numérique. Quelles sont la direction et l'intensité du champ géomagnétique aux pôles magnétiques nord et sud ?

En un point P de la surface terrestre, on appelle nord magnétique local la direction \vec{e}_N du champ géomagnétique \vec{B} , projeté dans le plan horizontal, et déclinaison magnétique l'angle D formé par \vec{B} avec le nord magnétique local ; la déclinaison magnétique est positive si \vec{B} est dirigé vers le haut (vers le ciel) et négative s'il est dirigé vers le bas (vers le sol).

29. Dans l'hémisphère nord, quel est le signe de D ? Calculer $\tan(D)$ en fonction de la latitude λ puis tracer l'allure de la courbe donnant D en fonction de λ pour toutes les valeurs de λ du pôle sud au pôle nord.
30. Pourquoi lisait-on parfois que les boussoles "s'affolent à proximité des pôles" ? Peut-on déterminer, au moyen d'une boussole, si on se trouve dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud ?

Données numériques et constantes fondamentales

- Champ magnétique terrestre à l'équateur $B_E = 3,0 \times 10^{-5}$ T
- Charge élémentaire $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C
- Durée du jour solaire moyen $T_0 = 24$ h $= 8,6 \times 10^4$ s
- Intensité du champ de pesanteur $g_0 = 9,8$ m.s⁻²
- Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H.m⁻¹
- Rayon terrestre $R_T = 6,4 \times 10^3$ km

Coordonnées sphériques et géographiques

On notera (Oxyz) les axes cartésiens associés à la base orthonormée et directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Les coordonnées sphériques d'un point P sont notées (r, θ, ϕ) avec la base locale associée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$, cf. figure ci-dessous à gauche. On note aussi ϕ (longitude) et λ la latitude d'un point P de la surface terrestre ; le point A est situé sur l'équateur dans le méridien origine ($\phi = 0$) ; celui-ci passe par l'observatoire de Greenwich G, cf. figure ci-dessous à droite.

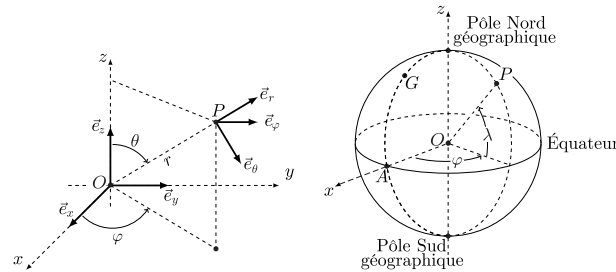


FIGURE – Coordonnées sphériques et géographiques

Données et formules relatives aux dipôles magnétiques

Le champ magnétique créé par un dipôle de moment dipolaire \vec{M} placé à l'origine O des coordonnées est donné au point P par :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R^2 \vec{M}}{R^5} \text{ où } \vec{R} = \overrightarrow{OP} \text{ et } R = \|\vec{R}\|$$

Les interactions d'un dipôle magnétique rigide de moment dipolaire \vec{m} soumis à un champ magnétique extérieur \vec{B} sont décrites par l'énergie potentielle $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ et par le couple des actions électromagnétiques $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.