Devoir Surveillé 1
Éléments de correction

Accordeur de guitare

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La problématique est la suivante.

- La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu.
- Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le tableau ci-dessous.

Corde	Fréquence (f_{ac})
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

- On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

Principe de l'accordeur

- Sélection de la corde à accorder (donc f_{ac} est fixée).
- Création d'un signal créneau de référence de fréquence f_{ac} avec un oscillateur.
- Enregistrement du signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence f_{co}.
- Amplification et filtrage de ce signal.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence f_{co}.
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives f_{ac} et f_{co}. Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{co} = f_{ac}$.

Ce principe général est schématisé sur la figure ci-dessous :

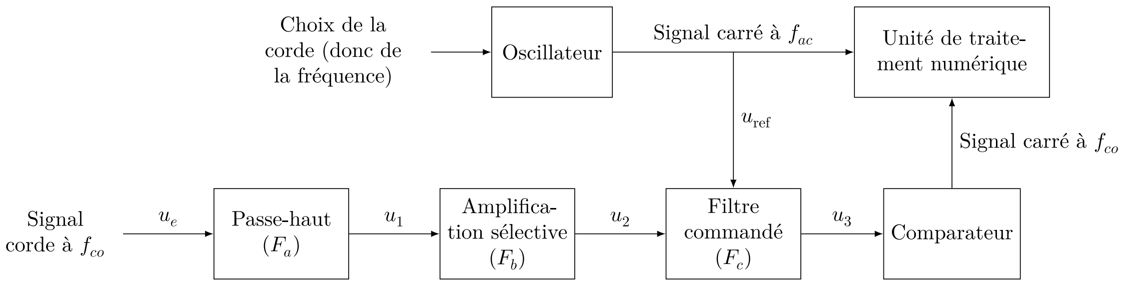
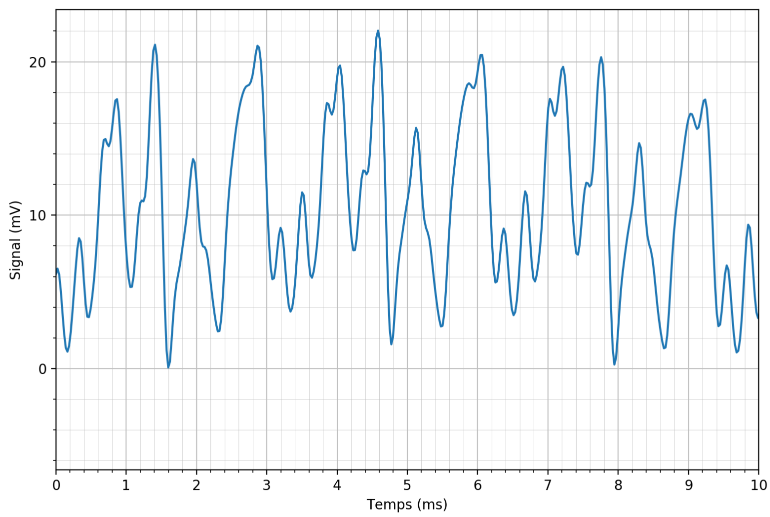


Figure Principe de fonctionnement de l'accordeur de guitare

Ce problème s'intéresse au traitement du signal venant de la corde.

Le signal

La figure ci-dessous montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.



1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.

La valeur moyenne du signal est d'environ 10 mV.

2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).

On relève la période sur le graphe, et on trouve environ 3,2 ms. La fréquence correspondante est f = 315 Hz.

3. De quelle corde de guitare s'agit-il ?

La fréquence donnée la plus proche de la fréquence mesurée correspond à la corde de Mi aigu (désaccordée).

4. La décomposition en série de Fourier de ce signal fera-t-elle apparaitre des harmoniques ? Justifier.

Le signal n'étant pas sinusoïdal, plusieurs harmoniques seront présentes dans le spectre.

Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la figure suivante (filtre (F_a)).

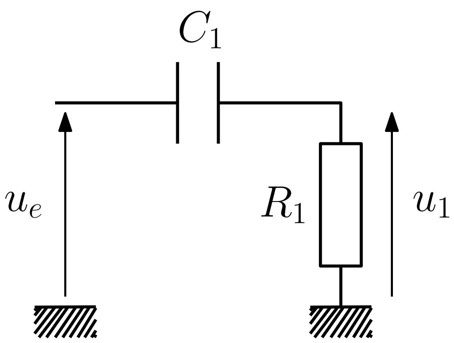


FIGURE 1 – Filtre (F_a)

5. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1, C_1 et de la pulsation ω du signal.

On applique un pont diviseur de tension :

$$H = \frac{R_1}{1/(jC_1\omega) + R_1} \quad (1)$$

$$H = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega} \quad (2)$$

6. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.

Il s'agit d'un filtre passe-haut d'ordre 1 de pulsation caractéristique $\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$, correspondant à sa pulsation de coupure.

7. Tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.

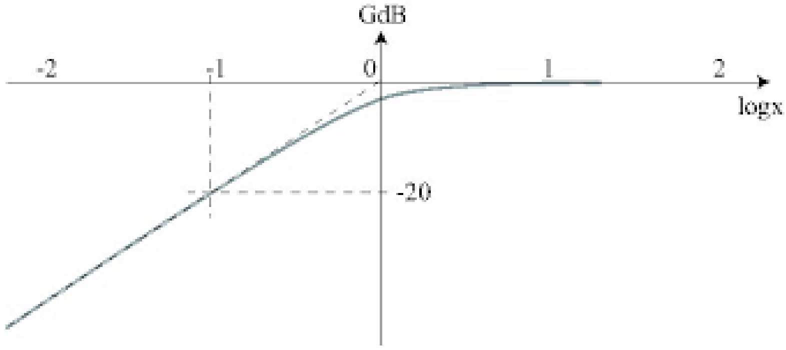
En posant $x = \frac{\omega}{\omega_1}$, on peut tracer le diagramme de Bode suivant :

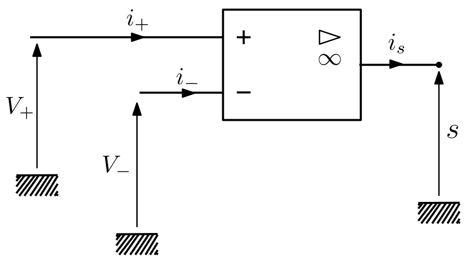
8. On a choisi $R_1 = 100\mathrm{k}\Omega$ et $C_1 = 100\mathrm{nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal précédent, quel est le rôle de ce premier filtre ?

La fréquence de coupure à -3 dB vaut donc $f_1 = \frac{1}{2\pi R_1C_1}$ soit numériquement $f_1 = 15,9$ Hz . Le rôle de ce filtre est donc de supprimer la composante continue afin d'obtenir un signal de valeur moyenne nulle.

Deuxième filtre

Dans cette sous-partie, les signaux sont sinusoïdaux. Les éléments représentés par le symbole ci-dessous sont des amplificateurs linéaires intégrés (ALI) qui sont supposés ici idéaux et fonctionnent en régime linéaire.





Un ALI supposé idéal et en régime linéaire a pour propriétés :

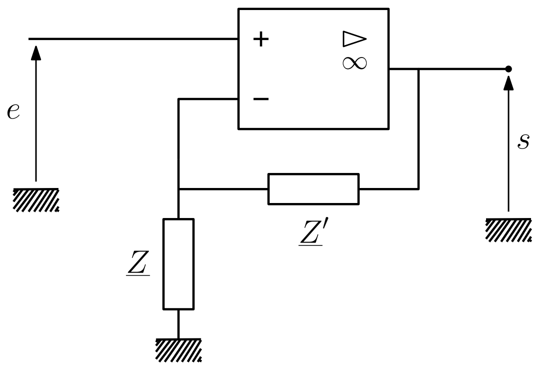
— les potentiels aux bornes + et - sont identiques $V_+ = V_-$.

— il n'y a pas de courant entrant dans les bornes + et - $i_+ = i_- = 0$.

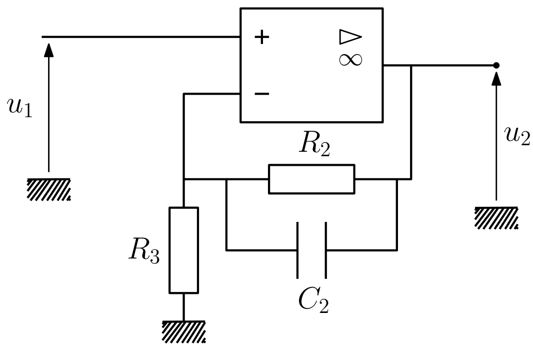
— par contre la tension de sortie s et le courant de sortie i_s peuvent être quelconque.

Préambule

Soit le filtre (a) de la figure ci-dessous.



(a) filtre a



(b) filtre $((F_b))$

9. Exprimer sa fonction de transfert $\underline{H}$ en fonction de $\underline{Z}$ et $\underline{Z}'$.

On peut appliquer le pont diviseur de tension à V_- et s . Il vient alors : $V_- = \dfrac{Z}{Z + Z'} s$.

Or comme on a $V_- = V_+ = e$, on en déduit la fonction de transfert : $H = \dfrac{Z + Z'}{Z} = 1 + \dfrac{Z'}{Z}$

10. Que devient $\underline{H}$ si $\underline{Z}$ et $\underline{Z}'$ sont des résistances ($\underline{Z} = R$, $\underline{Z}' = R'$) ? Que remarquez-vous de particulier pour cette fonction de transfert ? Quel est, dans ce cas, l'intérêt du montage ?

On obtient $H = 1 + \dfrac{R'}{R}$. Le gain de cette fonction de transfert est plus grand que 1, ce montage est un amplificateur.

Amplification (légèrement) sélective

En sortie du filtre (Fa) le signal $u_1(t)$ est envoyé sur le filtre de la figure (b) ci-dessus (filtre (F_b)).

11. Quelle est l'impédance $\underline{Z}_{\text{eq}}$ de la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 ?

On a pour une association parallèle : $\dfrac{1}{Z_{eq}} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}$ d'où $Z_{eq} = \dfrac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$

12. En déduire l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}_2$ de ce filtre en fonction de R_2, R_3 et C_2.

De ce qui précède, il vient : $H_2 = 1 + \dfrac{R_2}{R_3(1 + jR_2C_2\omega)}$

13. Mettre $\underline{H}_2$ sous la forme

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}}$$

et donner les expressions de G_0 et ω_2.

On obtient bien la forme demandée en posant $G_0 = \dfrac{R_2}{R_3}$ et $\omega_2 = \dfrac{1}{R_2C_2}$

14. Quelle est la limite de $|\underline{H}_2|$ en basse fréquence ? en haute fréquence ?

En basses fréquences $\omega \ll \omega_2$ donc $H_2 \to 1 + G_0$ et en hautes fréquences $\omega \gg \omega_2$ donc $H_2 \to 1$

15. Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680\text{k}\Omega$, $R_3 = 6\text{k}\Omega$ et $C_2 = 470\text{pF}$ ainsi que son gain G_0. Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

On a $f_2 = \dfrac{1}{2\pi R_2C_2}$ soit numériquement $f_2 = 498$ Hz, et $G_0 = 113$. Ce second filtre va donc amplifier fortement les fréquences inférieures à 500 Hz (c'est à dire correspondant au fondamental qui nous intéresse) et ne modifiera pas les harmoniques de rang élevé.

Filtrage (très) sélectif commandé

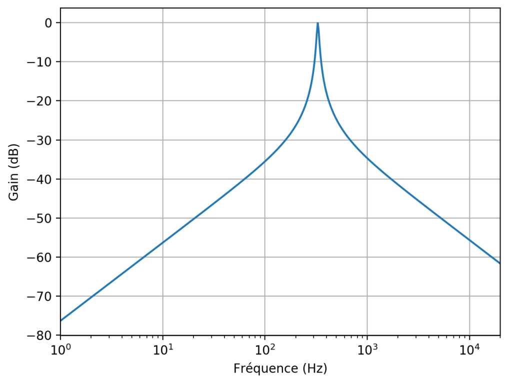
On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2, dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur (f_{ac}) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aigüe que l'on souhaite accorder.

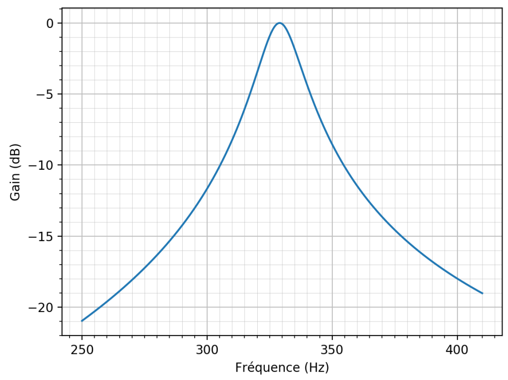
Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac}. Ce type de commande (à capacité commutée) sera précisé dans la dernière sous partie du sujet.

Diagramme de Bode

La figure ci-dessous représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

(a) (b)





16. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?

Ce filtre correspond à un filtre passe-bande (car le gain diminue rapidement en dehors de la bande passante $[f_{c1}; f_{c2}]$) d'ordre 2 (car les pentes des asymptotes sont -20 dB/décade). La fréquence centrale caractéristique est $f_0 = 330$ Hz par lecture sur le graphique. Remarque : on peut supposer qu'il s'agit en réalité de 329,6 Hz correspondant à la fréquence du Mi aigu.

17. Donner une estimation de sa bande-passante à -3dB.

Les fréquences de coupure sont les fréquences pour lesquelles le gain vaut $G_{dB,max} - 3$ dB ; la bande passante l'intervalle où $G_{dB} > G_{dB,max} - 3$ dB. Graphiquement, on lit : $f_{c1} = 320$ Hz et $f_{c2} = 340$ Hz. La bande passante est donc : [320 Hz ; 340 Hz]

18. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315$Hz, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

On lit graphiquement G(315 Hz) = -6 dB. Comme $G = 20 \log H$, on en déduit que $H = 0,5$. Si la fréquence est de 315 Hz, l'atténuation est de 50%.

Analyse spectrale

La figure ci-dessous correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté en début de sujet.

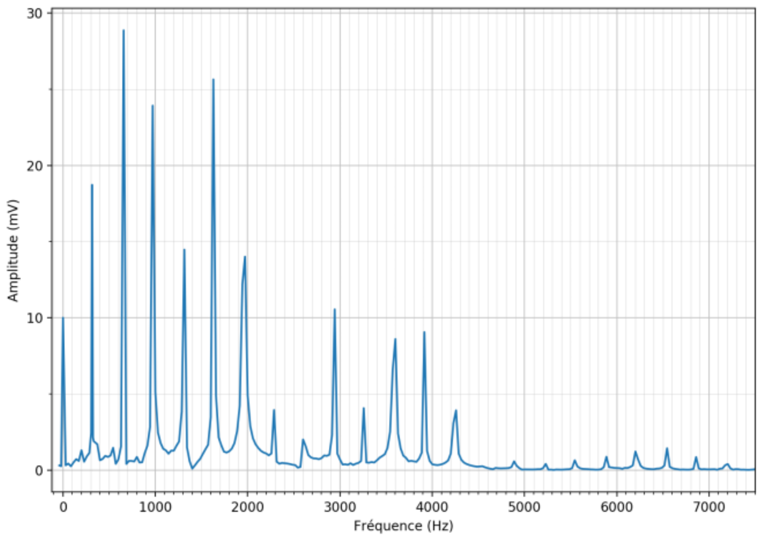


Figure Spectre du signal d'entrée

19. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal en début de sujet

On trouve un premier pic (à f = 0) à 10 mV ce qui correspond bien à la valeur moyenne estimée en début de problème. On remarque que le fondamental est un peu au-dessus de 300 Hz, ce qui est bien compatible avec un signal à 315 Hz. Enfin, la 10e harmonique existe et a une fréquence de 3200 Hz environ. Ceci correspond à un signal non sinusoïdal à 320 Hz ce qui, compte tenu des pics lors du relevé initial, correspond à la valeur attendue.

20. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la figure ci-dessous correspond à la sortie du premier filtre (F_a).

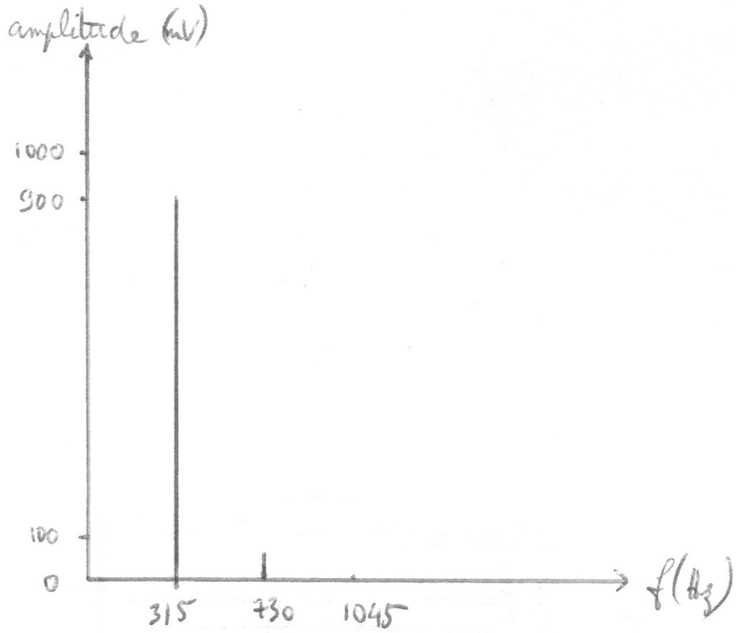
En sortie du premier filtre, seule la composante continue sera supprimée, le reste du spectre n'étant pas modifié. Il s'agit donc du spectre (a).

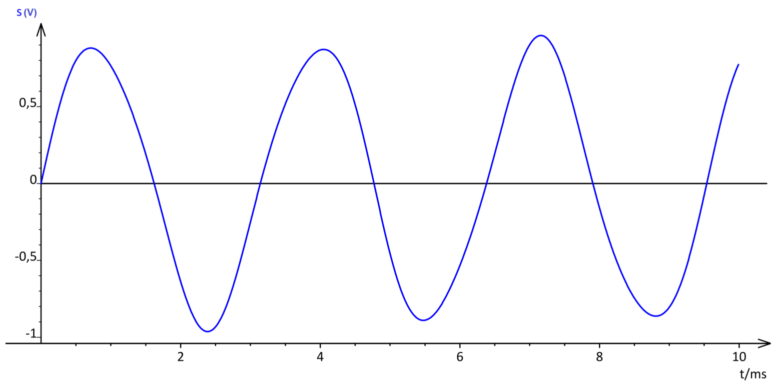
21. Même question, pour la sortie du filtre (F_b).

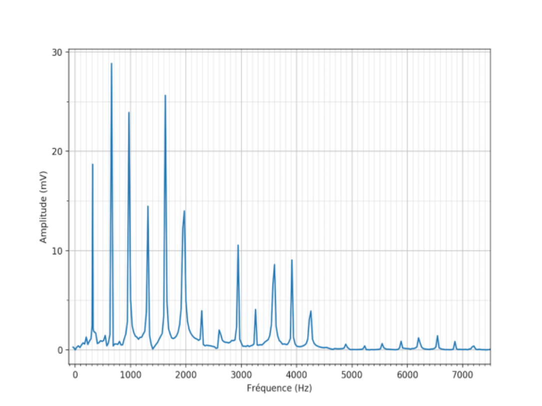
À 315 Hz, le filtre B amplifie environ 100 fois le fondamental, un peu moins l'harmonique de rang 2 et quasiment pas les autres harmoniques. On peut donc s'attendre à un signal avec un fondamental d'amplitude environ égale à 1800 mV, ce qui correspond au spectre (d).

22. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

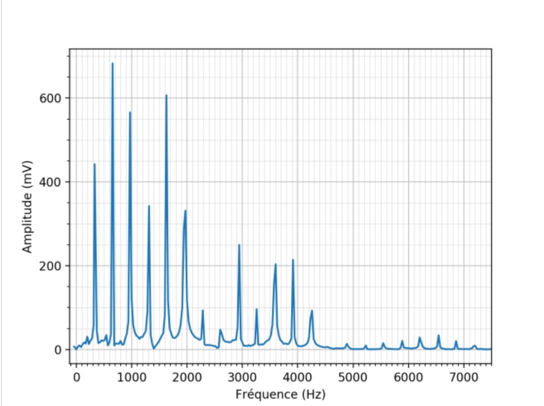
Le spectre du signal en sortie de (Fc) comprendra un fondamental à peu près divisé par 2 (gain à -6 dB) soit environ 900 mV, un harmonique de rang 2 très faible (un calcul montre qu'on obtient environ 63 mV) et des autres harmoniques quasi-absents. Le signal temporel sera quasi-sinusoïdal, d'amplitude 900 mV, et de fréquence 315 Hz.


amplitude (mV)
1000
900
100
0
315
730
1045
f (Hz)

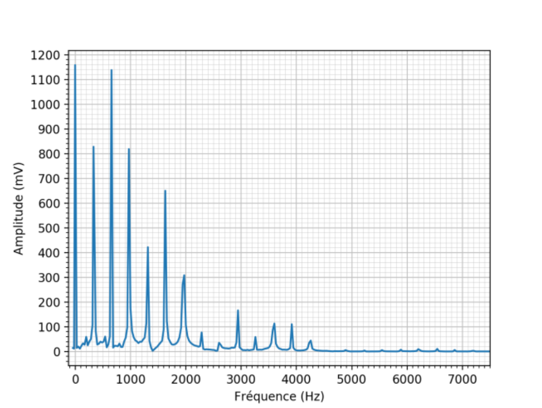

s (V)
0,5
0
-0,5
-1
2
4
6
8
10
t/ms



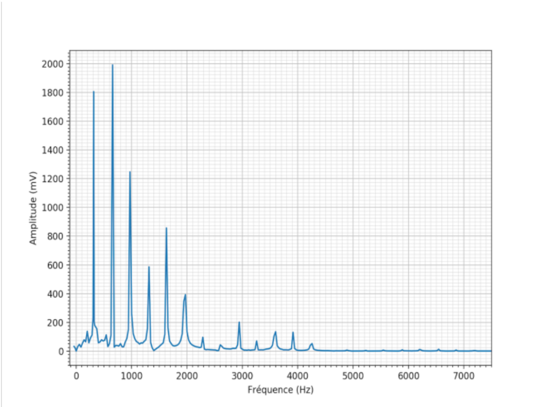
(a)



(b)



(c)

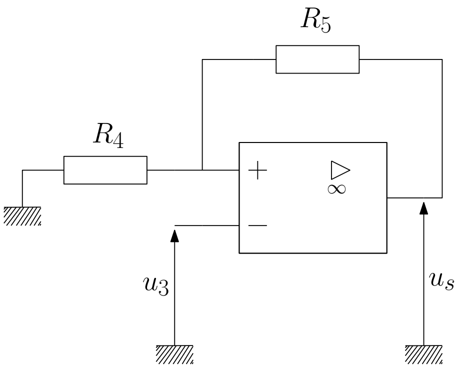


(d)

Figure Spectres

Mise en forme

À la sortie de l'étage précédent, le signal est donc proche d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} et d'amplitude dépendant de la force avec laquelle on a gratté la corde, mais de l'ordre du volt. Pour effectuer un traitement numérique qui permettra de comparer f_{co} à la fréquence théorique f_{ac} on souhaite fabriquer à partir du signal précédent un signal créneau de fréquence f_{co}. Pour cela, on utilise un comparateur à hystérésis, représenté ci-dessous.



Dans cette sous partie l'ALI ne fonctionne pas en régime linéaire, mais ce comporte comme un comparateur.

Dans ce régime les propriétés de l'ALI changent :

— Les potentiels aux bornes + et - peuvent être différent $V_+ \neq V_-$.

— Si $V_+ > V_-$, alors $u_s = +U_{sat}$.

— Si $V_+ < V_-$, alors $u_s = -U_{sat}$.

— Il n'y a toujours pas de courant entrant dans les bornes + et - $i_+ = i_- = 0$.

— Le courant de sortie peut toujours être quelconque.

On appelle tension de saturation de l'ALI la tension U_{sat}. Le signal u_3 est sinusoïdal alternatif d'amplitude 1V et de fréquence f_{co} (c'est le signal sortant du filtre sélectif (F_c)).

23. Exprimer V_+ le potentiel de la borne + de l'ALI en fonction de R_4, R_5 et u_s. En déduire l'expression de $\epsilon = V_+ - V_-$.

On peut appliquer le pont diviseur de tension entre V_+ et u_s et il vient $V_+ = \dfrac{R_4}{R_4 + R_3} u_s$. D'où $\epsilon = V_+ - V_- = \dfrac{R_4}{R_4 + R_3} u_s - u_3$.

24. Comment varie ϵ quand u_3 varie (u_s étant fixé) ?

On a ϵ qui diminue si u_3 augmente.

Supposons que u_3 soit suffisamment faible pour que $\epsilon > 0$.

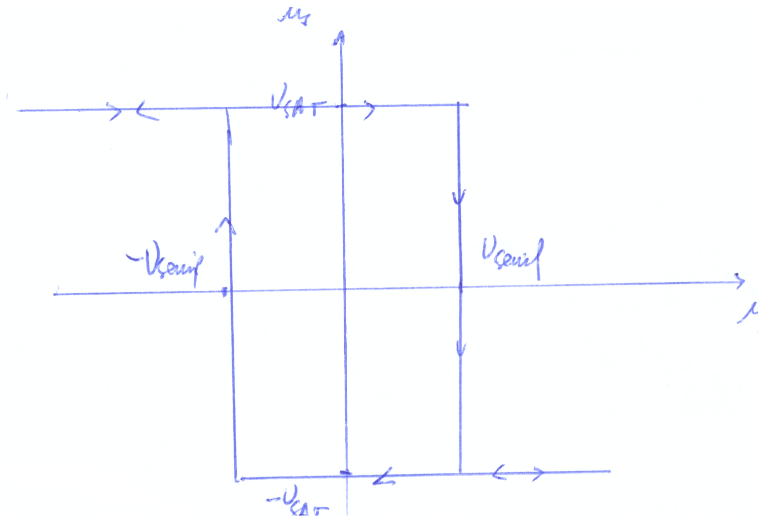
25. Quelle est la valeur de u_s ? À partir de cette situation, u_3 augmente : exprimer en fonction des données la valeur U_{seuil} de u_3 pour laquelle on observera le basculement de u_s. Quelle est alors la nouvelle expression de ϵ ?

Comme $\epsilon > 0$, $u_s = +U_{SAT}$. Tant que $\epsilon > 0$, la situation ne change pas. u_s va donc basculer lorsque $\epsilon < 0$ c'est à dire lorsque u_3 atteint $U_{seuil} = \dfrac{R_4}{R_4 + R_5} U_{SAT}$. u_s devient alors $-U_{SAT}$ et ϵ s'écrit alors $\epsilon = -\dfrac{R_4}{R_4 + R_5} U_{SAT} - u_3$ et est négatif.

26. À partir de cette nouvelle situation, traiter le cas où u_3 diminue.

Par un raisonnement analogue, on trouve que le nouveau basculement a lieu lorsque u_3 atteint $U_{seuil} = -\dfrac{R_4}{R_4 + R_5} U_{SAT}$

27. Représenter finalement le graphe $u_s = f(u_3)$ appelé cycle d'hystérésis de ce montage.



On obtient le cycle d'hystérésis suivant :

Dans le cadre de l'accordeur de guitare, $R_4 = 1\text{k}\Omega$, $R_5 = 10\text{k}\Omega$ et $U_{sat} = 5\text{V}$.

28. Tracer sur le document réponse l'allure du signal de sortie $u_s(t)$ correspondant aux deux exemples de signal $u_3(t)$ proposés.

On calcule la valeur des seuils : $U_{seuil} = 0,45$ V . On obtient alors les courbes suivantes :

Dans ce dernier cas, on remarque que l'amplitude est trop faible pour que u_s bascule, on n'obtient pas un signal carré comme souhaité.

29. Que peut-il se passer si la corde est vraiment trop désaccordée ?

Si la corde est trop désaccordée, on s'éloignera des 330 Hz et le signal correspondant sera trop atténué par le filtre (Fc) si bien qu'on se retrouvera dans le cas du second exemple. Le signal de sortie ne sera alors pas un signal carré exploitable.

Retour sur le filtre sélectif commandé

Regardons plus en détails la manière de fabriquer le filtre (F_c) dont la fréquence centrale est commandée par un signal carré externe. On utilise pour cela un filtre à capacité commutée.

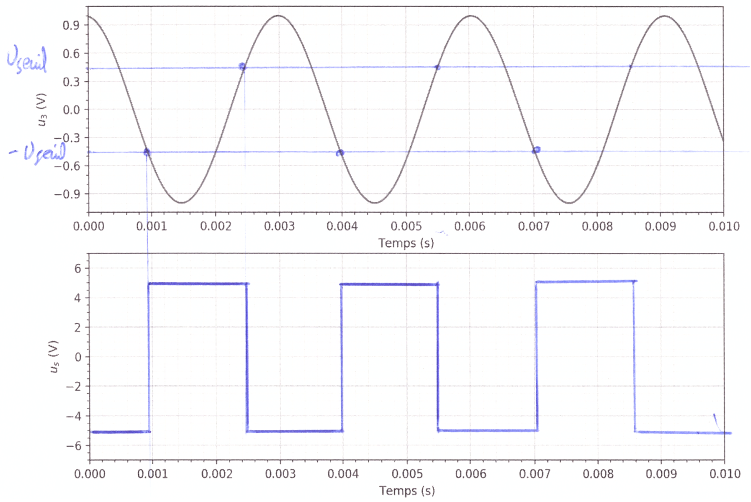
Capacité commutée

Soit un condensateur de capacité C aux bornes duquel on applique une tension u_C.

30. Rappeler l'expression de la charge q transférée au condensateur en fonction de C et u_c. On précisera, à l'aide d'un schéma, les conventions utilisées.

En convention récepteur, $q = Cu_c$.

On monte maintenant le condensateur de capacité C_k entre deux interrupteurs commandés notés K_A et K_B, comme l'indique la figure ci-dessous.



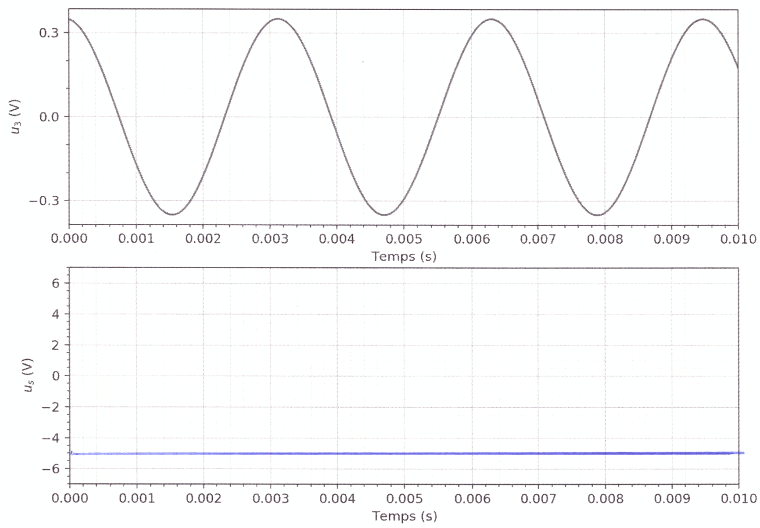
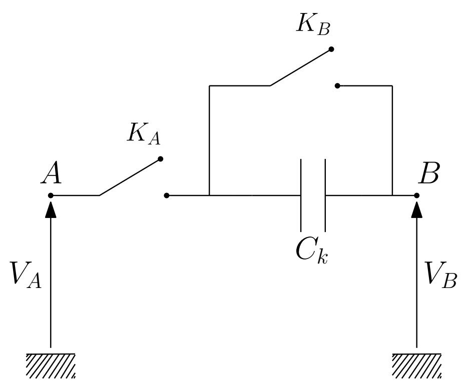


FIGURE 2 –



On fait les hypothèses suivantes.

- Les interrupteurs sont idéaux (d'impédance infinie quand ils sont ouverts et nulle quand ils sont fermés).
- Ils sont toujours dans des états complémentaires : si K_A est ouvert, alors K_B est fermé et inversement.
- Ils sont commandés de manière périodique par un signal extérieur (signal u_{ref} carré périodique de fréquence f_k (période T_k)) de telle sorte que :
  - sur l'intervalle $[0, T_k/2]$: K_A est fermé et K_B ouvert ;
  - sur l'intervalle $[T_k/2, T_k]$: K_A est ouvert et K_B fermé.
- Les condensateurs ont le temps de se charger/décharger sur chaque intervalle de temps.
- La période T_k est faible devant tous les autres temps caractéristiques.

31. Donner les expressions de q_1 et q_2, les charges portées par l'armature du condensateur reliée directement au point B respectivement sur l'intervalle $[0, T_k/2]$ et $[T_k/2, T_k]$. On précisera les conventions utilisées.

    On en déduit $\delta q = q_2 - q_1$ la charge transférée de l'entrée vers la sortie en une période.

Pendant la première demi-période, $t \in [0; T_k/2]$, le schéma équivalent est un condensateur situé entre A et B, on trouve alors $q_1 = C_k(V_B - V_A)$; pendant la seconde demi-période, $t \in [T_k/2; T_k]$, le schéma équivalent est un condensateur court-circuité et on a alors $q_2 = 0$.

32. À quoi est alors égale la charge totale Q transférée de l'entrée vers la sortie en un temps $t \gg T_k$?

Le courant vaut donc $i = \dfrac{\delta q}{T_k/2} = \dfrac{C_k(V_B - V_A)}{T_k/2}$ pendant la première demi-période et 0 ensuite. La charge transférée pendant un temps long vaut donc $Q = \dfrac{C_k(V_B - V_A)}{T_k} t$

33. En déduire l'expression de l'intensité moyenne I_m associée à ce transfert en fonction de V_A, V_B, C_k et f_k.

On sait que le courant moyen peut alors s'exprimer par $I_m = Q/t$ d'où $I_m = \dfrac{C_k(V_B - V_A)}{T_k} = f_k C_k (V_B - V_A)$

34. Pourquoi peut-on en conclure que ce dipôle AB se comporte comme une résistance R_k ? Donner l'expression de cette résistance en fonction de f_k et C_k.

On peut définir une grandeur R_k telle que l'on peut écrire $U = V_B - V_A = R_k I_m$. La capacité commuté est alors équivalente à une résistance $R_k = \dfrac{1}{f_k C_k}$

La capacité commutée se comporte donc comme une résistance R_k dont la valeur est commandée par un signal extérieur et plus exactement par la fréquence f_k de ce signal.

Filtre à capacité commutée

35. Expliquer qualitativement comment utiliser cette capacité commutée pour créer des filtres dont la fréquence caractéristique est réglée par le signal de référence u_{ref} et, en particulier, un filtre du type recherché pour (F_c).

On peut introduire cette capacité commutée dans un filtre, passe-bande, dont la fréquence centrale dépend de R_k. Ainsi, un réglage de la fréquence f_k permettra de régler la valeur de la fréquence centrale.