

Épreuve Physique

Les calculatrices sont autorisées

Mercredi 8 Janvier 2020 : 8h30 - 12h30

Formulaire et données numériques relatives à l'ensemble de l'épreuve

- Constante de gravitation universelle : $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Vitesse de la lumière : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Masse d'un proton : $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
- Masse d'un électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Unités de distance : $1 \text{ UA} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$; $1 \text{ pc} = 3,1 \cdot 10^{16} \text{ m}$
- Masse du Soleil : $M_\odot = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
- Masse de la Terre : $M_t = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
- Rayon de la Terre : $R_t = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$
- Opérateurs scalaires et vectoriels :
 - $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} f) = \vec{0}$
 - $\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = 0$
 - $\text{div}(\vec{\text{grad}} f) = \Delta f$
- Laplacien scalaire
 - en coordonnées cartésiennes : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
 - en coordonnées sphériques : $\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$

NATURE DE LA GRAVITATION

Un aspect fondamental de la gravitation est le principe d'équivalence. Introduit par Galilée au début du XVIIe siècle alors qu'il étudiait la chute des corps, il fut le point de départ du développement de la théorie de la gravitation. Un peu moins d'un siècle plus tard, Newton fut le premier à décrire l'interaction gravitationnelle par une formule. Il en déduisit la version la plus élémentaire du "principe d'équivalence faible" : la trajectoire d'un corps tombant en chute libre

ne dépend ni de sa structure, ni de sa composition. Si l'on sait aujourd'hui que la gravitation régit la dynamique des composantes de l'Univers (planètes, étoiles, galaxies, ...), l'observation récente de l'expansion de l'Univers a conduit à se poser des questions fondamentales sur les théories de la gravitation classique. L'introduction dans la théorie cosmologique de l'énergie noire, qui serait la contribution énergétique majoritaire de l'Univers, permet d'expliquer certaines observations mais sa nature et ses propriétés restent principalement théoriques. Certaines extensions de la théorie de la gravitation suggèrent même l'existence d'une répulsion gravitationnelle entre matière et antimatière, nommée antigravité.

L'expérience d'Eötvös

1. Énoncer le "principe d'inertie" en mécanique ?
2. Énoncer le principe fondamental de la mécanique dans un référentiel galiléen. La grandeur caractéristique du mobile étudié dans cette expression porte, ici et dans la suite, le nom de *masse inerte* m_i .
3. Expliciter la force de gravitation entre deux points matériels. On introduira le paramétrage nécessaire sur un schéma. La grandeur caractéristique du mobile intervenant dans cette expression porte le nom de *masse grave* ou *masse pesante*.
4. Démontrer pour cette question uniquement que si la masse inerte est égale à la masse pesante, alors deux boules de masse inerte respective de 1 kg et 10 kg, lâchées sans vitesse initiale du haut de la tour de Pise, arrivent en même temps au sol lorsqu'on considère une chute libre.

Quantifier les déviations possibles au principe d'équivalence faible suppose que l'on puisse considérer les masses inertielle m_i et grave (ou pesante) m comme pouvant être différentes. Les premières mesures précises des écarts relatifs entre masses inertielle et grave, ont été obtenues par comparaison des périodes de deux pendules simples de masse et de composition différentes ; cette méthode, d'abord décrite par Galilée, a été menée par Newton (1686) ou encore Bessel (1826) et a conduit à des valeurs d'écarts relatifs compris entre 10^{-3} et 10^{-5} . L'invention du pendule de torsion par Eötvös autour de 1888, permet d'augmenter fortement la sensibilité.

Mesure du coefficient de torsion du pendule

L'expérience d'Eötvös utilise un pendule de torsion. Dans le dispositif simplifié, représenté sur la figure 1, deux sphères appelées S_1 et S_2 , homogènes de nature différente et de même masse pesante m ont leurs centres d'inertie placés aux extrémités d'une barre rigide, de masse M et de longueur $2L$, suspendue en son centre à un fil de quartz très fin, de constante de torsion C . On note m_{i1} et m_{i2} les masses inertielles respectives de S_1 et de S_2 . La barre est libre de tourner autour de l'axe Oz en tordant plus ou moins le ruban de suspension. On suppose que la barre reste tout le temps de l'expérience dans le plan orthogonal à l'axe Oz .

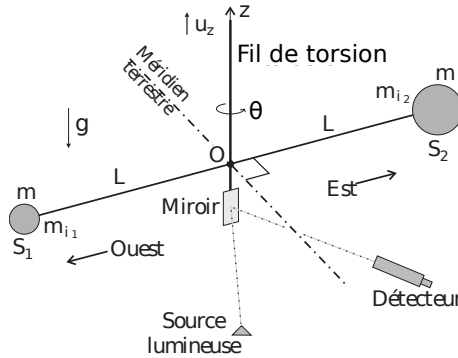


Fig. 1 - Dispositif d'Eöt vös

Le dispositif est placé de sorte qu'à l'équilibre, la barre soit normale au plan méridien à la latitude λ . Sa position est alors repérée par réflexion d'un faisceau lumineux sur un miroir plan, fixé au milieu de la barre, à l'aide d'une lunette. On note \mathfrak{R} le référentiel du laboratoire centré sur O et supposé galiléen dans cette sous-partie où l'objectif est la détermination de la constante de torsion C du pendule. On note J_0 le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe vertical (Oz) et J le moment d'inertie du système S = barre + sphères par rapport à (Oz). On repère la position de la barre à l'instant t par l'angle de torsion $\theta(t)$. On fait tourner le système d'un angle θ_m puis on le lâche sans vitesse initiale. Le fil exerce alors sur la barre un couple de rappel dont le moment en O a pour intensité $M_0 = -C(\theta(t) - \theta_0)$, l'angle θ_0 repère la position de la barre en l'absence de torsion.

5. Donner la relation de la puissance d'une force exercée sur un solide en fonction de cette force et de la vitesse du solide. Puis donner la relation de la puissance d'un couple exercé sur un solide en fonction de ce couple et de la vitesse de rotation du solide.
6. Montrer que le couple M_0 dérive d'une énergie potentielle que l'on déterminera. En déduire l'énergie potentielle $E_{p,S}$ de S en fonction de C et $\theta - \theta_0$, on choisira $E_p(\theta_0) = 0$.
7. Donner l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en translation à la vitesse \vec{v} . Donner l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un de ses axes d'inertie à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.
8. Déterminer l'énergie cinétique $E_{c,S}$ du solide S .
9. En déduire l'expression de l'énergie mécanique de S en fonction de C , J , θ , θ_0 et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.
10. Donner la relation entre l'énergie mécanique et la puissance des forces non-conservatives.
11. On fait l'hypothèse que la puissance totale des forces de frottement peut se mettre sous la forme $P_{frot} = -\alpha\dot{\theta}^2$ où α est une constante positive. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
12. On observe des oscillations très faiblement amorties. Quelle est la condition satisfaite par les constantes J , C et α ? Préciser la forme de la solution sans déterminer l'expression exacte des deux constantes d'intégration.
13. Quelle est la valeur θ_∞ de $\theta(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Exprimer la pseudo-période T du mouvement en fonction de la période propre T_0 et de la constante $\epsilon = \frac{\alpha}{2\sqrt{JC}} \ll 1$.
14. A quelle condition sur ϵ , l'erreur relative introduite par l'approximation $T \simeq T_0$ est-elle inférieure à 1%? Cette condition sera supposée vérifiée par la suite.

On note J_1 les moments d'inertie, considérés égaux, de chacune des deux sphères par rapport à l'axe vertical passant par leurs centres respectifs. On admettra que si le principe d'équivalence

faible s'applique alors $J = J_0 + 2J_1 + 2mL^2$. On mesure la période T des oscillations pour différentes valeurs de la longueur L avec des sphères de masse pesante $m = 0,2$ kg. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

L [m]	$6,0 \cdot 10^{-2}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$8,0 \cdot 10^{-2}$
T [s]	436	509	581

15. En utilisant les résultats précédents, écrire la relation entre T^2 , L^2 , J_0 , J_1 , m et C . A partir des résultats de mesure donner une estimation de la valeur de la constante de torsion C .
16. Compte-tenu des ordres de grandeurs des différents termes intervenant dans l'expression de T montrer que l'on peut écrire

$$m \approx \frac{C}{8\pi^2} \frac{T^2}{L^2}$$

Résultats et précision de l'expérience

Dans cette sous-partie le référentiel \mathfrak{R} du laboratoire centré sur O n'est plus supposé galiléen et l'on prend en compte les éventuels effets de la rotation de la terre sur les masses inertes m_{i1} et m_{i2} a priori différentes des deux sphères. On se place donc dans le référentiel \mathfrak{R}_t attaché au centre de gravité G de la terre supposé galiléen.

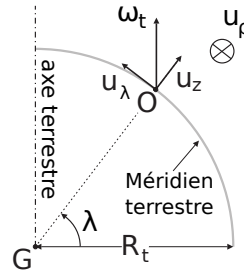


Fig. 2- Vue en coupe

La terre est supposée en rotation uniforme à la vitesse $\vec{\omega}_t$ (de norme ω_t) autour de l'axe terrestre et le point O se trouve à la latitude λ . Une vue en coupe de la situation est représentée sur la figure 2. L'ensemble constitué du pendule et du système optique est solidaire d'une plateforme. Lors d'une première mesure dans la configuration de la figure 1, on relève une valeur $\theta_{\infty 1}$ pour l'équilibre du pendule. On fait alors tourner la plateforme d'un angle π afin d'inverser les positions des deux sphères, et l'on répète la mesure. On relève une valeur $\theta_{\infty 2}$ pour l'équilibre du pendule dans cette nouvelle configuration.

17. Nommer et donner les expressions des deux forces d'inertie qui s'exerce sur une masse inerte m_i dans le référentiel terrestre en rotation uniforme.
18. Déterminer les composantes des forces d'inertie subies par m_{i1} et m_{i2} dans la base $(\vec{u}_z, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\lambda)$ en fonction de λ , L , ω_t , R_t , m_{i1} ou m_{i2} . On rappelle que les masses sont immobiles dans le référentiel du laboratoire.
19. En exploitant le théorème du moment cinétique à l'équilibre, déterminer l'écart angulaire $\Delta\theta = \theta_{\infty 1} - \theta_{\infty 2}$ entre les deux expériences en fonction de λ , C , L , ω_t , R_t , m_{i1} et m_{i2} .
20. La lunette utilisée pour la mesure permet de détecter une déviation du faisceau lumineux de l'ordre de 1,0 mm à 2,0 m de distance. En utilisant l'expression de m trouvée à la question 16, déterminer la précision de la méthode en estimant le rapport $\delta m = \frac{|m_{i1} - m_{i2}|}{m}$. On donne $\lambda = 45^\circ$ et $L = 6,0$ cm.

21. La déviation observée est nulle. Que déduire de ce résultat ?

Corriger la gravitation universelle classique ?

Leurs observations ne concordant pas avec les modèles classiques de la physique, les astronomes ont deux solutions : soit ils rajoutent arbitrairement au cosmos un ingrédient, une matière invisible qui permet de justifier les anomalies détectées, soit ils modifient les lois.

Si dans leur très grande majorité, les physiciens ont, depuis 1930, privilégié la première voie, il apparaît aujourd'hui que l'imperceptibilité persistante de cette matière noire devient gênante. Après avoir mis en évidence certaines observations qui ont conduit plusieurs astronomes à s'interroger sur l'existence d'une matière noire invisible, nous aborderons quelques aspects de la théorie de la gravitation modifiée par M. Milgrom.

Gravitation newtonienne, matière noire

Depuis plus de 50 ans les astrophysiciens comparent la quantité de matière visible dans les galaxies spirales, comme notre Voie Lactée, à celle qui est nécessaire pour expliquer la vitesse de rotation des étoiles dans ces mêmes galaxies. Une galaxie est assimilable à une distribution spatiale D de matière de masse volumique ρ créant un champ gravitationnel supposé statique $\vec{\Gamma}$ qui satisfait aux équations locales suivantes :

$$\operatorname{div} \vec{\Gamma} = -4\pi G \rho \text{ et } \operatorname{rot} \vec{\Gamma} = \vec{0} \quad (1)$$

La force de gravitation exercée par cette galaxie sur un point matériel M de masse m s'exprime alors selon la relation $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$.

22. Énoncer le théorème de Gauss.
23. Que vaut la circulation sur un contour fermé du champs électrostatique \vec{E} ?
24. Citer les deux équations locales avec les opérateurs vectoriels appropriés qui correspondent au théorème de Gauss et à la circulation de \vec{E} . Ces deux équations sont analogues aux équations (1).
25. Peut-on, de la même façon, proposer une analogie avec la magnétostatique ? On définit le potentiel gravitationnel $\Phi(M)$ au point M , analogue du potentiel $V(M)$ en électrostatique. Démontrer avec soin que le potentiel gravitationnel $\Phi(M)$ satisfait à une équation de Poisson relative à la gravitation. Une équation de Poisson fait intervenir un opérateur Laplacien noté par Δ .

On considère un système \mathfrak{G} à répartition sphérique de masse centré sur un point O fixe : l'ensemble (O, \mathfrak{G}) permet de définir un référentiel galiléen. En un point M de ce système, la densité volumique de masse $\rho = \rho(M)$ et le potentiel gravitationnel $\Phi = \Phi(M)$ ne sont des fonctions que de la seule variable $r = \|\vec{r}\| = \|\vec{OM}\|$. On suppose qu'un point M de masse m contenue dans \mathfrak{G} n'évolue que sous l'action du champ de gravitation créé par \mathfrak{G} . Pour des raisons physiques évidentes la fonction $\rho(r)$ est décroissante et la fonction $\Phi(r)$ croissante.

26. Exprimer la force de gravitation \vec{F} subie par M en fonction de m , $\frac{d\Phi}{dr}$ et d'un vecteur unitaire que l'on précisera. Montrer que le mouvement de M s'effectue dans un plan. On considère les coordonnées polaires (r, θ) dans ce plan. Que représente la quantité $r^2\dot{\theta}$?
27. On appelle vitesse circulaire $\vec{v}_c(r)$ dans \mathfrak{G} , la vitesse qu'aurait le point M s'il était en orbite circulaire de rayon r dans \mathfrak{G} . Exprimer $\vec{v}_c(r)$ en fonction de r , $\frac{d\Phi}{dr}$ et \vec{u}_θ .

Du point de vue dynamique, on peut *a priori* considérer que notre galaxie, la voie lactée de masse visible M_g , est un système dont la masse est répartie de façon sphérique et constitué de trois composantes principales : un bulbe massif, un disque et un halo stellaire. Dans ce modèle, dit keplerien, le bulbe est assimilable à un point de masse $M_b \sim M_g$ et chaque étoile de masse m du disque évolue dans le potentiel gravitationnel $\Phi(r) = -\frac{GM_b}{r}$ créée par le bulbe uniquement.

28. Déterminer, dans ce modèle, l'expression de la vitesse circulaire dans la voie lactée en fonction de G , M_b , r et \vec{u}_θ . Pourquoi ce modèle est-il qualifié de keplerien ?

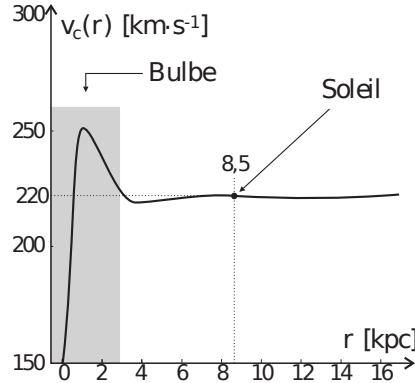


Fig. 3 - Vitesse circulaire dans la voie lactée

En réalité, la répartition des vitesses circulaires présente la même allure dans toutes les galaxies spirales comme la Voie Lactée. Les observations dans le cas de la Voie Lactée sont reportées sur la figure 3.

29. Que peut-on dire de l'évolution de $v_c = ||\vec{v}_c||$ en dehors du bulbe ? Le modèle keplerien est-il valable ?

En plus de la matière visible, on considère une répartition de masse invisible (noire) selon la densité volumique de masse suivante :

$$\rho(r) = \frac{C_0}{r_0^2 + r^2}$$

30. En utilisant l'équation de Poisson relative à la gravitation (obtenue à la question 25) en symétrie sphérique, montrer que la prise en compte de cette matière noire permet de rendre compte de la courbe de vitesse observée. On fixera la valeur C_0 en unités de masse solaire (M_\odot) et de parsec (pc) pour une bonne adéquation avec la valeur de vitesse observée et on interprètera la constante r_0 . On rappelle que

$$\int_0^r \frac{x^2}{r_0^2 + x^2} dx = r - r_0 \arctan\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

31. Estimer la masse minimale de ce halo de matière noire en considérant que ce dernier s'étend sur l'ensemble de la galaxie dont le rayon est de l'ordre de $R_d = 30$ kpc. Commenter ce résultat sachant que la masse visible de notre galaxie est de l'ordre de $10^{10} M_\odot$.

Gravitation modifiée

Face à la situation décrite dans la section : "Gravitation newtonienne, matière noire", M. Milgrom propose, en 1983, de modifier les lois de Newton de la gravitation afin d'expliquer pourquoi,

en périphérie des galaxies, les étoiles tournent plus vite que la loi classique ne le laisse supposer. Dans cette théorie phénoménologique, baptisée MOND (acronyme anglais de dynamique newtonienne modifiée), la gravitation se mettrait à décroître beaucoup moins rapidement que prévu par la théorie newtonienne dans le régime des faibles accélérations en deçà d'un certain seuil que l'on se propose d'évaluer. Dans cette théorie de la gravitation modifiée le potentiel de gravitation vérifie une équation de Poisson modifiée qui s'écrit

$$\operatorname{div} \left(\mu(u) \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi_m \right) = 4\pi G_\rho \quad (2)$$

où μ est un champ scalaire de la variable réduite sans dimension $u = \frac{1}{a_0^2} \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi_m \right)^2$ caractérisant la théorie et dont le comportement est le suivant

$$\begin{aligned} \mu(u) &= \sqrt{u} \text{ si } u \ll 1 \\ &= K \text{ sinon} \end{aligned}$$

32. Quelle est la dimension du paramètre positif a_0 ? Quelle valeur doit-on donner à la constante K si l'on souhaite que la théorie MOND soit équivalente à la gravitation newtonienne si u n'est pas négligeable devant 1.
33. En combinant l'expression (2) avec l'équation de Poisson de la question 25 relative à la gravitation non modifiée et au potentiel newtonien Φ , montrer qu'il existe un vecteur \vec{h} tel que $\mu(u) \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi_m = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi + \operatorname{rot} \vec{h}$. On fera par la suite l'hypothèse que $\operatorname{rot} \vec{h}$ est toujours négligeable devant le gradient du potentiel newtonien Φ .

Pour modéliser notre galaxie avec la théorie MOND il n'est plus nécessaire d'introduire de la matière noire, on prend donc simplement $\Phi(r) = -\frac{GM_b}{r}$. Pour cette modélisation on suppose également que $\Phi_m = \Phi_m(r)$ et l'on admettra que la vitesse circulaire est toujours donnée par la relation obtenue à la question 27 généralisée à Φ_m .

34. Montrer que dans le régime $u \ll 1$, la vitesse circulaire prévue par la théorie MOND pour notre galaxie est donnée par la relation $v_c \simeq (GM_b a_0)^{1/n}$ où l'on déterminera l'entier n .
35. Estimer la valeur numérique de a_0 afin que la théorie MOND permette de rendre compte de la vitesse circulaire observée dans notre galaxie. Commenter ce résultat en évaluant un ordre de grandeur de l'accélération subie par le Soleil dans la voie lactée (voir Fig. 3).

Même si MOND possède de nombreux avantages sur la gravitation de Newton à l'échelle galactique, la théorie relativiste associée, TEVES proposée en 2004 par J. Bekenstein, pose de graves problèmes.