

## Devoir Surveillé 4

### Éléments de correction

### Étude thermodynamique d'une réaction de destruction des ions perchlorate



En 2008, la mission Mars phoenix de la NASA découvre dans les sols martiens la présence de sels de perchlorate ( $\text{Mg}(\text{ClO}_4)_2$ ,  $\text{Ca}(\text{ClO}_4)_2$ ,  $\text{KClO}_4$ , ...), susceptibles de se décomposer sous l'effet de températures élevées ou d'une exposition aux rayons ultra-violetes solaires pour former des espèces chlorées capables de dégrader les acides aminés (constituants élémentaires des protéines) rendant l'habitabilité de Mars plus difficile que prévu.

On étudie ici la réaction pour les détruire modélisée par l'équation suivante



1. Énoncer la loi de Hess.

Pour une réaction chimique d'équation bilan algébrique  $\nu_1 C_1 + \nu_2 C_2 + \nu_3 C_3 + \dots + \nu_i C_i + \dots = 0$ , l'enthalpie de réaction  $\Delta_r H$  s'exprime en fonction des enthalpies de formation de chaque composé  $\Delta_f H(C_i)$  via

$$\Delta_r H = \sum_i \nu_i \Delta_f H(C_i)$$

2. Calculer  $\Delta_r H^\circ$ , l'enthalpie standard de la réaction à la température  $T_1 = 298 \text{ K}$ . La réaction est-elle endothermique ? exothermique ?

En appliquant la loi de Hess,

$$\Delta_r H^\circ = \frac{1}{2} \Delta_f H^\circ(\text{O}_{2(g)}) + \Delta_f H^\circ(\text{KClO}_{3(s)}) - \Delta_f H^\circ(\text{KClO}_{4(s)})$$

$$\Delta_r H^\circ = 35,1 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

$\Delta_r H^\circ$  est positif, donc la réaction est endothermique.

3. Énoncer la définition de l'enthalpie libre, puis celle de l'enthalpie libre de réaction, et expliquer en quoi consiste l'approximation d'Ellingham.

L'enthalpie libre est la fonction d'état  $G$  définie par  $G = H - TS = U + pV - TS$ , cette fonction d'état est un potentiel thermodynamique pour les transformations monothermes et monobares.

L'enthalpie libre de réaction  $\Delta_r G$  est la dérivée de  $G$  par rapport à l'avancement, les autres paramètres étant fixes  $\Delta_r G = \left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|_{T,p}$ .

D'après les définitions de l'enthalpie libre et l'enthalpie libre de réaction, on a  $\Delta_r G = \Delta_r H - T \Delta_r S$ , l'approximation d'Ellingham consiste à faire l'hypothèse que  $\Delta_r H$  et  $\Delta_r S$  ne dépendent pas de la température en dehors des changements d'état.

4. Dans le cadre de l'approximation d'Ellingham redémontrer le résultat de la loi de Van't Hoff.

$$\Delta_r G = \Delta_r H - T \Delta_r S, \text{ or } K = \exp \left( -\frac{\Delta_r G}{RT} \right)$$

$$\text{donc } \ln K = -\frac{\Delta_r G}{RT} = -\frac{\Delta_r H}{RT} + \frac{\Delta_r S}{R}$$

$$\text{donc } \frac{d \ln K}{dT} = \frac{\Delta_r H}{RT^2}$$

5. La constante d'équilibre de la réaction à la température  $T_1 = 298 \text{ K}$  vaut  $K^\circ(T_1) = 6,43 \cdot 10^{-2}$ . On se placera toujours dans le cadre de l'approximation d'Ellingham par la suite, exprimer alors  $K^\circ(T)$  en fonction des températures  $T$  et  $T_1$ , de  $R$ ,  $K^\circ(T_1)$  et de  $\Delta_r H^\circ$ .

$$\frac{d \ln K}{dT} = \frac{\Delta_r H}{RT^2}$$

$$\text{donc } \ln K(T) - \ln K(T_1) = \frac{\Delta_r H}{RT_1} - \frac{\Delta_r H}{RT}$$

$$\text{donc } K(T) = K(T_1) \exp \left( \frac{\Delta_r H}{RT_1} - \frac{\Delta_r H}{RT} \right)$$

6. Calculer la constante d'équilibre  $K^\circ(T_0)$  à la température  $T_0 = 210 \text{ K}$ . Par la suite, nous prendrons comme valeur :  $K^\circ(T_0) = 1,7 \cdot 10^{-4}$ .

$$\text{On applique } K(T_0) = K(T_1) \exp \left( \frac{\Delta_r H}{RT_1} - \frac{\Delta_r H}{RT_0} \right)$$

7. Sur Terre, la pression atmosphérique au sol est de l'ordre de la pression standard  $P^\circ$  tandis que sur Mars, elle vaut environ  $8 \cdot 10^2 \text{ Pa}$ . La valeur de la constante d'équilibre à  $T_0 = 210 \text{ K}$  (température moyenne de surface sur Mars) est-elle influencée par les conditions de pression qui règnent sur Mars ?

La constante thermodynamique ne dépend que de la température ; elle n'est donc pas influencée par la pression.

8. Exprimer le quotient de réaction  $Q_r$  de la réaction en fonction des activités des constituants, puis en fonction de la pression partielle de dioxygène  $P_{O_2}$  et de  $P^\circ$ .

$$Q_r = \frac{a(KClO_{3(s)})a(O_{2(g)})^{1/2}}{a(KClO_{4(s)})} = \left( \frac{P(O_2)}{P^\circ} \right)^{1/2}$$

9. Calculer la pression d'équilibre en dioxygène  $P_{O_2,eq}$  associée à la réaction à la température  $T_0$ .

$$\text{à l'équilibre } K(T_0) = Q_{r,eq} \text{ donc } K(T_0) = \left( \frac{P_{O_2,eq}}{P^\circ} \right)^{1/2} \text{ d'où } P_{O_2,eq} = P^\circ K(T_0)^2$$

$$P_{O_2,eq} = 2,9 \cdot 10^{-8} \text{ bar}$$

10. En réalité, il existe sur Mars un ensemble de mécanismes fixant la pression partielle en dioxygène gazeux : à  $T_0 = 210$  K, cette dernière vaut  $P'_{O_2} = 0,80$  Pa. À  $T_0 = 210$  K et pour une pression en dioxygène égale à  $0,80$  Pa, dans quel sens la réaction est-elle thermodynamiquement possible ?

Avec  $P'_{O_2} = 0,80$  Pa, on trouve  $Q_r = 3.10^{-3} \geq K^\circ(T_0)$  donc la réaction se fait dans le sens indirect.

### Enthalpies standard de formation (à $T_1 = 298$ K)

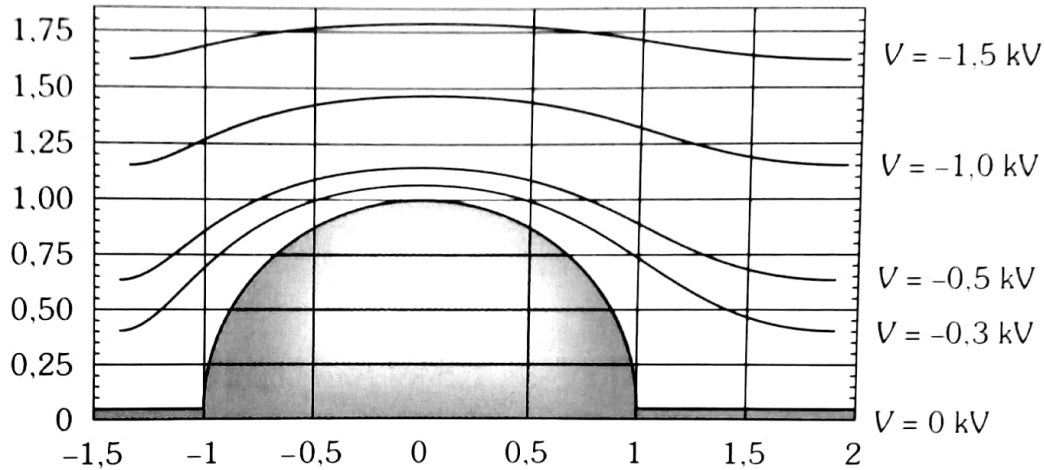
Perchlorate de potassium solide  $\Delta_f H^\circ(\text{KClO}_{4(s)}) = -432,8 \text{ kJ.mol}^{-1}$

Chlorate de potassium solide  $\Delta_f H^\circ(\text{KClO}_{3(s)}) = -397,7 \text{ kJ.mol}^{-1}$

### Orage



Lors d'un orage peut se développer au niveau du sol une zone chargée. On a tracé les équipotentielle au niveau d'une aspérité. Celle-ci est supposée conductrice si bien que sa surface est une équipotentielle.



11. Donner la relation entre champ électrostatique et potentiel.

Que peut-on en déduire de l'orientation du champ électrique par rapport au potentiel ? Justifier.

Et que peut-on en déduire du tracé des lignes de champ par rapport au potentiel ? Justifier.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

donc  $\vec{E}$  indique la plus forte pente du potentiel, le champ électrique est orienté vers les potentiels décroissants.

Une ligne de champs est colinéaire en tout point à  $\vec{E}$ , or  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{l} = dV$ . Donc sur une iso-potentielle  $dV = 0$  donc  $\vec{E} \perp d\vec{l}$ . Les lignes de champs sont perpendiculaire aux iso-potentielle.

12. Représenter l'allure des lignes de champ.

13. Quel est le signe de la charge portée par l'aspérité ? Justifier.

Le champs électrique est dirigé vers les potentiels décroissants. Donc le champ électrique est orienté de l'aspérité vers le haut. Or le champ est orienté des charges positives vers les charges négatives. Donc l'aspérité est chargé positivement.

14. Dans quelles régions le champ est-il plus intense ? Justifier.

Les lignes de champ sur le tracé sont plus resserré en haut de l'aspérité. Hors l'air est une zone vide de charge, donc par conservation du flux le champ est plus intense en haut de l'aspérité.

15. Si on admet que loin de l'aspérité le champ est de  $5 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ , évaluer sa valeur au sommet de chaque aspérité.

D'après  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ , on a  $E = -\frac{dV}{dz}$  sur une ligne de champ verticale au centre de la figure.

On mesure sur la figure que loin de l'aspérité  $E = \frac{0.5}{1} \text{ kV/carreau} = 0.5 \text{ kV/carreau}$ , et au centre de la figure  $E = \frac{0.3}{0.2} \text{ kV/carreau} = 1.5 \text{ kV/carreau}$ .

Donc sa valeur au sommet de chaque aspérité est de  $15 \text{ kV.m}^{-1}$ .

16. La valeur du champ électrique maximal dans l'air (champ disruptif) est de  $30 \text{ kV.cm}^{-1}$ .  
Peut-on observer l'apparition d'un éclair? Dans quel cas pourrait-on l'observer?

$E_{\text{asperite}} \ll E_{\text{disruptif}}$  donc on ne peut pas observer d'éclair.

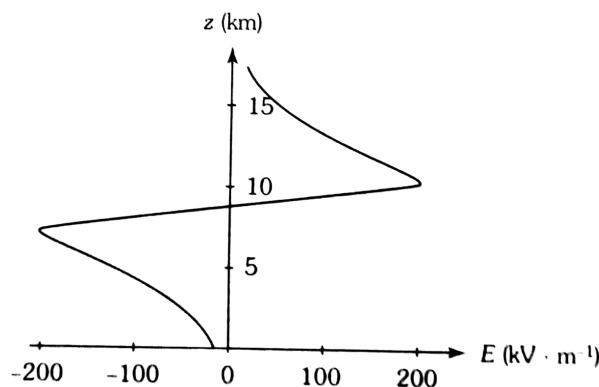
On pourrait l'observer si le champ loin de l'aspérité est de l'ordre de  $10 \text{ kV.cm}^{-1}$ . Ou si l'aspérité était plus pointue pour amplifier l'effet de pointe.

On étudie maintenant les nuages orageux. Lorsque l'on se trouve sous le nuage, on le modélise comme une distribution de charge infinie horizontalement et dont la densité volumique de charge  $\rho$  ne dépend que de l'altitude  $z$ .

17. Faire un schéma, puis déterminer la direction du champ électrostatique, ainsi que les variables dont il dépend.

En tout point M, les plans (Mxz) et (Myz) sont des plans de symétrie donc  $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_z$ .  
 $\rho$  est invariant par translation selon  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ , donc  $E(M)$  ne dépend pas de  $x$  et de  $y$ . Soit  $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$ .

Pour étudier le champ électrique dans les nuages on envoie des petites sondes accrochées à des ballons. La figure donne un exemple du profil de sa valeur algébrique, comptée positivement pour un champ ascendant.



18. Énoncer le théorème de Gauss.

Pour toute surface fermée S,  $\Phi(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ .

Avec  $\Phi(\vec{E}) = \iint_{S, \text{ferme}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$  le flux sortant de la surface fermée.

Avec  $Q_{\text{int}} = \iiint_V \rho dV$  avec la charge intérieure de S, ici V est le volume qui a pour surface S.

Et  $\epsilon_0$  la permittivité diélectrique du vide.

19. En appliquant le théorème de Gauss à une couche d'épaisseur  $dz$ , relier la dérivée du champ électrique à la densité volumique de charge.

En déduire le signe des charges électriques dans un nuage en fonction de la zone du nuage.

$$\Phi(\vec{E}) = \iint_{S_1} \vec{E}(z+dz) \cdot dS \vec{e}_z + \iint_{S_2} \vec{E}(z) \cdot (-dS \vec{e}_z) + 0 = (E(z+dz) - E(z))S$$

$$Q_{int} = \rho(z)Sdz$$

$$\text{donc } (E(z+dz) - E(z))S = \frac{\rho(z)}{\epsilon_0} Sdz$$

$$\text{soit } \frac{dE}{dz} = \frac{\rho(z)}{\epsilon_0}.$$

Le signe des charges électriques est donné par le signe de la pente du graphe  $E(z)$ .

De 0 à 7 km,  $\rho \leq 0$ .

De 7 à 12 km,  $\rho \geq 0$ .

De 12 à 17 km,  $\rho \leq 0$ .

On modélise maintenant le nuage comme un dipôle électrostatique vertical situé en son centre à  $z = 10$  km.

20. Rappeler l'approximation dipolaire. Quelle hypothèse fait-on ici pour que cette approximation s'applique dans notre modélisation.

Soit un dipôle  $\vec{p} = q\vec{AB}$  qui est une charge  $-q \leq 0$  au point  $A$  et une charge  $+q \geq 0$  au point  $B$ . On est dans le cadre de l'approximation dipolaire si le point  $M$  où on considère le champ électrique est tel que  $OM \gg AB$ , avec  $O$  le centre de  $AB$ .

On fait l'hypothèse que l'épaisseur du nuage ( $\sim 5$  km) est petite devant la distance sol-nuage ( $\sim 10$  km). On peut alors utiliser l'approximation dipolaire pour calculer le champ au sol créé par le nuage.

21. Retrouver l'expression du potentiel électrostatique généré par un dipôle.

$$\text{On utilise le principe de superposition } V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 AM} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 BM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right).$$

En coordonnées sphériques on calcule le développement limité des distance

$$BM^2 = \vec{BM} \cdot \vec{BM} = (\vec{BO} + \vec{OM}) \cdot (\vec{BO} + \vec{OM}) = BO^2 + OM^2 + 2\vec{BO} \cdot \vec{OM} = \frac{a^2}{4} + r^2 -$$

$$\text{donc } \frac{1}{BM} = \left( \frac{a^2}{4} + r^2 - ra \cos \theta \right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a \cos \theta}{2r} \right)$$

$$\text{de même } \frac{1}{AM} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{a \cos \theta}{2r} \right)$$

$$\text{donc } V \simeq \frac{qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \simeq \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

22. En déduire l'expression du champ électrique généré par un dipôle.

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{e}_\phi = - \left( -2 \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \vec{e}_r - \frac{1}{r} \left( -\frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \vec{e}_\theta -$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \times 0 \times \vec{e}_\phi$$

$$\text{donc } \vec{E} = \frac{p (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

23. En admettant que le champ au sol ( $5\text{kV.m}^{-1}$ ) est créé par ce dipôle, donner un ordre de grandeur de ce moment dipolaire. Préciser l'orientation de ce dipôle.

La densité volumique de charge ne dépend que de  $z$ , donc le dipôle a une orientation verticale. Donc  $\theta = 0$  ou  $\pi$ .

Donc  $\vec{E} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r$ . Or D'après le graphe  $E(z) < 0$  et  $\vec{e}_r = -\vec{e}_z$ , donc  $\cos \theta > 0$  soit  $\theta = 0$ , le dipôle est donc orienté vers le bas.

$$E_{sol} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 z^3} \text{ donc } p = 2\pi\epsilon_0 z^3 E_{sol}$$

$$\text{soit } p = 2,8.10^5 \text{ C.m}$$

24. A partir de la figure et en approximant la forme du champ électrique dans la zone considérée, estimer la différence de potentiel entre le bas du nuage (situé à une altitude de l'ordre de 5 km) et le sol. L'ordre de grandeur est voisin d'une de ces trois estimations : 400 kV, 4 MV ou 400 MV.

On a  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ , avec l'approximation  $\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$  on a  $E(z) = -\frac{dV}{dz}$ .

On peut approximer  $E(z) = -az$  avec  $a = 30 \text{ V.m}^{-2}$ , donc  $V = a\frac{z^2}{2}$  avec  $a = 30 \text{ V.m}^{-2}$  et  $z = 10 \text{ km}$ , on a  $V \sim 10^8 \text{ V}$ .

Cet ordre de grandeur est voisin de  $U = 400 \text{ MV}$ .

25. Lors de la décharge due à la foudre, l'intensité électrique associée est de l'ordre de  $10^5 \text{ A}$  et le phénomène dure environ  $500 \mu\text{s}$ . Quelle charge  $\Delta q$  est alors échangée? On admet que l'énergie dissipée est celle d'un condensateur de charge  $\Delta q$  sous la tension  $U$ . Évaluer l'énergie dissipée, ainsi que la capacité de ce condensateur.

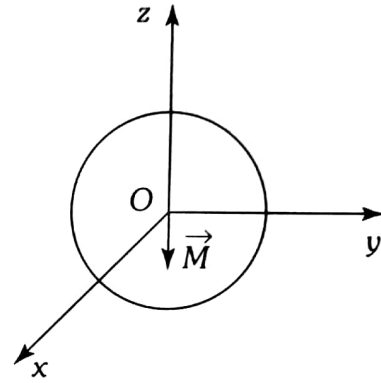
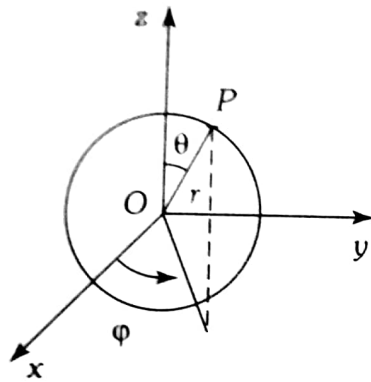
On estime  $\Delta q = I\Delta t = 50 \text{ C}$ .

L'énergie stockée dans un condensateur est  $E_c = \frac{1}{2}CU^2$  or  $\Delta q = CU$  donc  $E_c = \frac{U\Delta q}{2} = 10^4 \text{ MJ}$

$$\text{Et } C = \frac{\Delta q}{U} = 0,13 \mu\text{F}$$

## Champ magnétique terrestre

Le repère terrestre est associé aux coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  d'axe Oz orienté sud-nord. Le champ magnétique terrestre est modélisé par le champ d'un dipôle permanent de moment  $\vec{M} = -M\vec{u}_z$  situé au centre O de la Terre, assimilée à une sphère de rayon  $R_T = 6400 \text{ km}$ . Le noyau terrestre est assimilé à une sphère concentrique, conductrice, fluide et homogène, de rayon  $R_N < R_T$ , avec  $R_N = 500 \text{ km}$ . L'intensité du champ magnétique  $\vec{B}$  au pôle nord terrestre est notée  $B_0 = 6.10^{-5} \text{ T}$ .



Scanné avec CamScanner

26. Lister les analogies entre champ électrique et champ magnétique (source, champ, constante, flux, circulation, dipôle). En déduire par analogie avec la question 22, l'expression du champ magnétique terrestre.

source	densité de charge $\rho$	densité de courant $\vec{j}$
champ	électrique $\vec{E}$	magnétique $\vec{B}$
constante	permittivité $\frac{1}{\epsilon_0}$	perméabilité $\mu_0$
flux	$\phi(\vec{E}) = \iint_{S, ferme} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\phi(\vec{B}) = \iint_{S, ferme} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
circulation	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlace}$
dipôle	$\vec{p} = q\vec{AB}$	$\vec{m} = IS\vec{n}$

On avait  $\vec{E} = \frac{p(2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

Par analogie on a  $\vec{B} = \mu_0 \frac{m(2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)}{4\pi r^3}$

27. Trouver la valeur de M à partir de celle de  $B_0$ .

On est aussi en  $\theta = \pi$  donc  $B_0 = \frac{\mu_0 M}{2\pi R_T^3}$  donc  $M = \frac{2\pi R_T^3 B_0}{\mu_0} = 8.10^{22} \text{ A.m}^2$

28. En admettant que ce moment magnétique soit produit par des courants volumiques de densité  $\vec{j}$ , avec  $M \simeq jR_N^4$ , estimer la valeur de  $j$ .

$j = \frac{M}{R_N^4} = 1,3 \text{ A.m}^2$



29. Donner la définition de la densité volumique de courant  $\vec{j}$  et en déduire les valeurs de densités de courant usuelles dans les circuits ordinaire (TP, électroménager ...). Comparer ces valeurs au résultat de la question précédente.

On utilise  $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \simeq jS$  donc  $j \simeq \frac{I}{S}$ . Pour des sections de fils de l'ordre du  $\text{mm}^2$  et des courants de 10 mA à 1 A, on trouve  $j \sim 10^4$  à  $10^6 \text{ A.m}^{-2}$ .

On trouve un résultat plus de 10 000 fois plus grand.

30. Expliquer pourquoi le champ magnétique terrestre est du même ordre de grandeur que les champs magnétiques à proximité de circuit ordinaire.

La densité de courant volumique est de très faible intensité dans le noyau Terrestre comparé au circuit usuel mais les dimension en jeu ne sont pas les mêmes.

Si on ré-écrit le théorème d'Ampère en ordre de grandeur  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$  devient  $B \times L \sim \mu_0 j \times S$  donc  $B \sim \mu_0 j \frac{S}{L}$ .

Si pour le noyau terrestre on fait l'hypothèse que  $\frac{S}{L} \sim R_T \sim 10^4 \text{ m}$ , et pour la vie quotidienne  $\frac{S}{L} \sim 1 \text{ m}$ , alors on retrouve le rapport de 10 000 compensé par  $j$ .

31. Vérifier l'homogénéité de la relation  $M = jR_N^4$ . Justifier à partir de la définition microscopique de  $\vec{j}$  que, en coordonnées sphériques, la direction dominante du vecteur densité de courant  $\vec{j}$  pour la Terre est  $\vec{u}_\phi$ .

$$[M] = [IS] = [I] \cdot L^2 \text{ et } [I] = [jS] = [j] \cdot L^2 \text{ donc } [M] = [j] \cdot L^4.$$

La définition microscopique est  $\vec{j} = \sum_{\text{porteurs}} \rho \vec{v}$  avec  $\rho$  densité volumique de charge des porteurs de charge et  $\vec{v}$  la vitesse des porteurs de charge.

Or la Terre est en rotation autour de son axe Nord-Sud donc la vitesse d'un point du noyau est selon le vecteur  $\vec{u}_\phi$ . Donc  $\vec{v}$  est colinéaire à  $\vec{u}_\phi$  d'où  $\vec{j} \parallel \vec{u}_\phi$ .

32. Calculer numériquement l'intensité  $B_A$  du champ magnétique en un point A du plan équatorial situé à la distance  $r_A = 6R_T$  du point O.

$$\text{Dans le plan équatorial } \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ donc } B_A = \mu_0 \frac{M}{4\pi r_A^3} = \mu_0 \frac{M}{4\pi 6^3 R_T^3} = \frac{B_0}{2 \times 6^3} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

33. Rappeler la définition d'une ligne de champ. En notant  $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$  la latitude du point d'observation établir l'équation de la ligne de champ  $C_A$  passant par A sous la forme  $r = f(r_A, \lambda)$ . Tracer la représentation graphique de la carte de champ.

Une ligne de champ est une courbe qui admet en tout point  $\vec{B}$  pour tangente. Donc  $d\vec{l} \parallel \vec{B}$  donc  $d\vec{l} \parallel (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$  donc  $d\vec{l} = \alpha (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$  donc  $dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi = \alpha (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$  donc

$$dr = 2\alpha \cos \theta, r d\theta = \alpha \sin \theta, \text{ et } d\phi = 0$$

donc  $\phi = \text{cte}$  ce qui implique que les lignes de champs sont dans un plan  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

On fait le rapport des deux premières équations donc  $\frac{dr}{r} = -\frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta}$  donc  $d \ln r = -2 d \ln \sin \theta$  donc  $\ln r = \text{cte} - 2 \ln \sin \theta$  donc  $r = \text{cte} \times \sin^2 \theta$

on fait le changement de variable  $r = \text{cte} \times \cos^2 \lambda$

et pour  $\lambda = 0$  on a  $r = r_A$  au point A donc  $r_A = \text{cte} \times 1$

d'où  $r = r_A \times \cos^2 \lambda$

34. Établir l'expression de la norme de  $\vec{B}$  sur  $C_A$  en fonction de  $\lambda$  et de  $B_0$ . Tracer l'allure de la courbe  $||\vec{B}(\lambda)||$ . Cette représentation rend-elle compte de la limite de  $||\vec{B}(\lambda)||$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$  ?

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{m(2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)}{4\pi r^3} \text{ donc } B = \mu_0 \frac{m\sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sqrt{3 \sin^2 \lambda + 1}$$

$$\text{sur } C_A \text{ on a } B = \frac{\mu_0 m}{4\pi (r_A \cos^2 \lambda)^3} \sqrt{3 \sin^2 \lambda + 1} = \frac{\mu_0 m}{4\pi (6R_T)^3} \frac{\sqrt{3 \sin^2 \lambda + 1}}{\cos^6 \lambda} = \frac{B_0}{2 \times 6^3} \frac{\sqrt{3 \sin^2 \lambda + 1}}{\cos^6 \lambda}$$

Lorsque  $\lambda \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , on a  $r \rightarrow 0$  donc l'approximation dipolaire n'est plus vérifiée, la limite de  $||\vec{B}||$  obtenue n'est donc pas valable.