DM 5 : Référentiels non galiléens
Éléments de correction

Danger lié à un pendule suspendu dans un véhicule

Certains conducteurs aiment suspendre des objets à proximité de leur rétroviseur intérieur comme des porte-bonheur ou des diffuseurs solides de parfum. On se propose de s'intéresser aux dangers associés à cette pratique. Pour simplifier l'étude, on considère que l'objet est une masse M suspendue à un fil inextensible, sans raideur, de masse négligeable devant M et de longueur l dont l'autre extrémité est attachée au rétroviseur. On suppose que la voiture roule en ligne droite à vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ quand surgit un obstacle sur la route. Le conducteur freine brutalement avec une accélération constante $\vec{a} = -a_0\vec{e}_x$ On négligera les frottements de l'air.

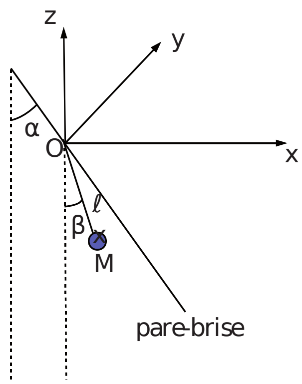

Figure : Pendule suspendu au pare-brise d'une voiture.

Le point de suspension du fil est situé sur le pare-brise, ce dernier étant incliné d'un angle $\alpha = 15°$ par rapport à la verticale.

1. Pour déterminer si la masse M risque de heurter le conducteur ou le pare-brise, dans quel référentiel doit-on étudier le mouvement ? Justifier la réponse.

Dans le référentiel de la voiture qui freine (non galiléen), car il est plus aisé d'exprimer sa position, sa vitesse et son accélération dans ce référentiel. Il faudra alors tenir compte des forces d'inertie dans l'écriture du PFD dans ce référentiel.

2. On considère que le référentiel terrestre est galiléen. Le référentiel lié à la voiture est-il galiléen ? La réponse diffère-t-elle en fonction de la phase du mouvement du véhicule (mouvement à vitesse constante ou phase de freinage) ?

En mouvement à vitesse constante, le référentiel lié à la voiture est translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre donc il est galiléen.

En phase de freinage le mouvement de la voiture n'est pas uniforme donc le référentiel qui y est lié est non-galiléen.

3. Le point M étant initialement au repos, établir que son mouvement est plan à condition que la trajectoire de la voiture soit rigoureusement rectiligne.

Si la trajectoire de la voiture est rigoureusement rectiligne, alors le théorème du moment cinétique en O s'écrit

$$\frac{d\vec{L}_{O,R}(M)}{dt} = \vec{M}_O(M\vec{g}) + \vec{M}_O(\vec{T}) + \vec{M}_O(\vec{f}_{ie})$$

or $\vec{M}_O(M\vec{g}) = \overrightarrow{OM} \wedge (-Mg\vec{e}_z)$ est parallèle à $\vec{e}_y$ ainsi que $\vec{M}_O(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}$ est parallèle à $\vec{e}_y$ et $\vec{M}_O(\vec{f}_{ie}) = \overrightarrow{OM} \wedge (-Ma_{R_0}(O_R)\vec{e}_x)$ est parallèle à $\vec{e}_y$, donc $\vec{L}_{O,R}(M)$ est parallèle à $\vec{e}_y$ donc le mouvement est contenu dans le plan (O,z,x).

Si la trajectoire de la voiture est un mouvement de rotation, alors il faut rajouter le moment de la force de Coriolis $\vec{M}_O(\vec{f}_{ic}) = \overrightarrow{OM} \wedge (-2M\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_R(M))$, or $\vec{\Omega} // \vec{e}_z$ et $\vec{v}_R(M) \in (O, z, x)$ donc $\vec{f}_{ic} // \vec{e}_y$ or $\overrightarrow{OM} \in (O, z, x)$ donc $\vec{M}_O(\vec{f}_{ic}) \in (O, z, x)$ donc le moment de la force de Coriolis provoque une rotation en dehors du plan $(0, z, x)$

4. Déterminer l'expression littérale de la position angulaire β_{eq} d'équilibre relatif lors de la phase de freinage.

Lors d'un freinage le référentiel est uniformément décéléré, donc $\vec{f}_{ie} = Ma_0\vec{u}_x$, le PFD donne :

$$M\vec{a}_R(M) = M\vec{g} + \vec{T} + Ma_0\vec{u}_x$$

à l'équilibre $\vec{a}_R(M) = \vec{0}$
et on projette sur $\vec{e}_\beta$

$$0 = -Mg\sin\beta_{eq} + 0 + Ma_0\cos\beta_{eq}$$

on trouve $\tan(\beta_{eq}) = \frac{a_0}{g}$

5. Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit la position angulaire $\beta(t)$ de l'objet suspendu dans le référentiel lié à la voiture lors de la phase de freinage.

On réutilise la projection du PFD sur $\vec{e}_\beta$:

$$M\vec{a}.\vec{e}_\beta(M) = M\vec{g}.\vec{e}_\beta + \vec{f}_{ie}.\vec{e}_\beta$$

$$Ml\ddot{\beta} = -Mg\sin(\beta) + Ma_0\cos(\beta)$$

donc $\ddot{\beta} + \frac{g}{l}\dot{\beta} = \frac{a_0}{l}\cos(\beta)$
On se place dans l'approximation des petits angles jusqu'à la fin de cette partie.

6. Établir l'expression de l'équation horaire de l'angle β en supposant qu'initialement le pendule est immobile et vertical.

Les approximations des petits angles sont : $\sin(\beta) \sim \beta$, $\cos(\beta) \sim 1$, $\frac{a_0}{g} = \tan(\beta_{eq}) \sim \beta_{eq}$
donc

$$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{\beta} + \beta = \beta_{eq}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$
La solution à un oscillateur harmonique est $\beta = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \beta_{eq}$,
les conditions initiales sont : $\beta(0) = 0$ et $\dot{\beta}(0) = 0$
d'où $\beta(t) = \beta_{eq}\left[1 - \cos(\omega_0 t)\right]$

7. Déterminer la valeur a_1 de l'accélération maximale du véhicule pour que la masse ne heurte pas le pare-brise. Commenter.

La masse oscille entre $\beta = 0$ et $\beta = 2\beta_{eq}$ donc il faut que $2\beta_{eq} < \alpha$ donc $a_0 < \frac{\alpha}{2}g = a_1$
L'application numérique donne : $a_1 \sim 2$ m.s^{-2} à comparer avec une voiture à 50 km.h^{-1} mets 50 m pour s'arrêter soit $a_0 = \frac{v^2}{d} \sim 4$ m.s^{-2}, donc le risque est bien réel.