

Devoir Surveillé 2

La calculatrice est autorisée

3 Octobre 2020 8h30-12h30

Mécanique en référentiel non galiléen

1. Soit un référentiel R en mouvement par rapport à un référentiel galiléen R_G . A quelle condition sur R un point matériel M de masse m est soumis aux forces d'inertie de Coriolis \vec{F}_{ic} et d'entraînement \vec{F}_{ie} dans ce référentiel ? A quelle condition sur R , le point M est soumis uniquement à une force d'inertie d'entraînement ?
2. Soit le cas où le référentiel R a un mouvement de rotation uniforme de vecteur $\vec{\omega}$ autour d'un axe fixe (Δ) par rapport à R_G . Donner l'expression de la (ou des) force(s) d'inertie appliquées au point M .

Au cours de ce problème, nous envisagerons deux situations différentes d'un petit anneau M de masse m , considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottements le long d'une tige OA , de longueur l , effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe vertical (Δ) passant par son extrémité O .

3. A quelles conditions le référentiel lié au laboratoire peut être considéré comme galiléen ?

Ce référentiel lié au laboratoire sera en effet considéré comme galiléen.

L'espace est rapporté au repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au laboratoire et tel que :

\vec{e}_x : vecteur unitaire de l'axe horizontal Ox .

\vec{e}_y : vecteur unitaire de l'axe horizontal Oy .

\vec{e}_z : vecteur unitaire de l'axe vertical Oz .

On pourra lors des calculs vectoriels utiliser les vecteurs unitaires \vec{e}_r , \vec{e}_θ et \vec{e}_T définis de la manière suivante :

\vec{e}_r : vecteur unitaire du plan (Oxy) dirigé suivant la projection de la tige dans le plan (Oxy) et orienté dans le sens OA de la tige.

\vec{e}_θ : vecteur unitaire du plan (Oxy) , perpendiculaire au vecteur \vec{e}_r et tel que le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ soit un repère direct.

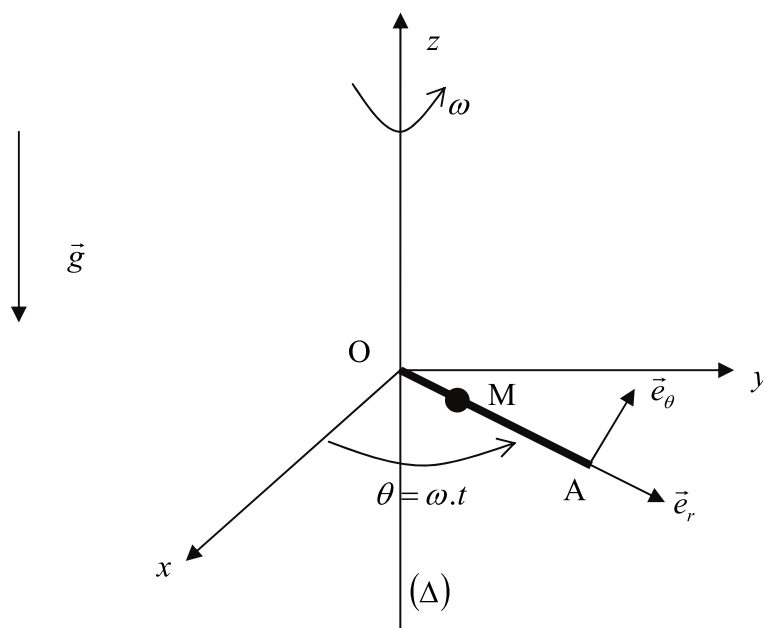
\vec{e}_T : vecteur unitaire de la tige et orienté de O vers A .

La tige OA est dans le plan horizontal

La tige OA se trouve dans le plan horizontal (xOy) et tourne autour de l'axe vertical (Δ) à la vitesse angulaire constante ω . L'axe (Δ) est ainsi confondu avec l'axe Oz .

4. Que peut-on dire dans ce cas sur \vec{e}_r et \vec{e}_T ?

L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance r_0 du point O ($r_0 < l$). On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance r entre le point O et l'anneau M ($r = OM$).



L'étude est menée dans le référentiel lié à la tige.

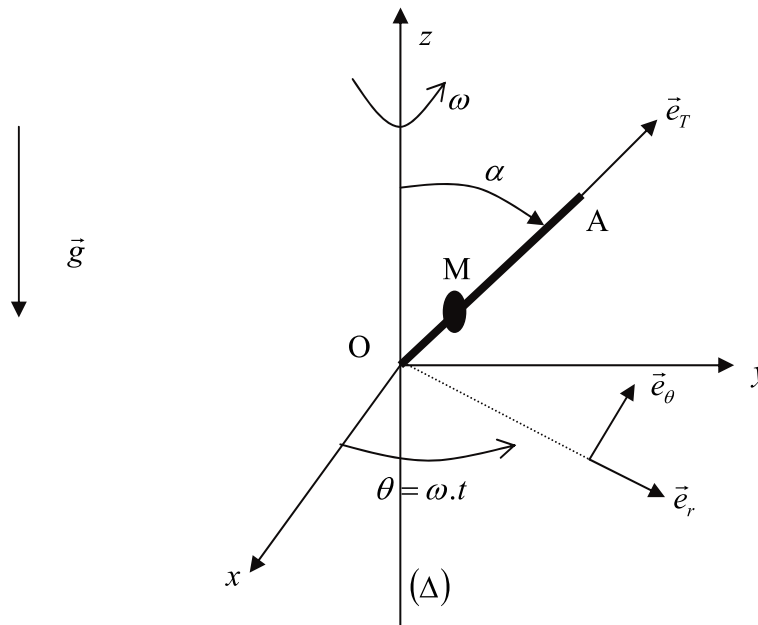
5. L'anneau est soumis à son poids, aux forces d'inertie et à la réaction de la tige.
Faire un schéma sur lequel apparaissent ces forces. Écrire l'expression vectorielle du poids et des forces d'inertie en fonction de m , g , ω , r et des vecteurs unitaires définis précédemment.
Quels sont les vecteurs unitaires qui portent les composantes de la réaction de la tige ?
6. Établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.
7. Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de r_0 , ω et t .
8. En déduire l'expression du temps τ que va mettre l'anneau pour quitter la tige. On exprimera τ en fonction de r_0 , l et ω .
9. Déterminer l'expression de la vitesse \vec{v}_f , calculée dans le référentiel lié à la tige, de l'anneau lorsqu'il quitte la tige en fonction de ω , r_0 , l et d'un ou plusieurs des vecteurs unitaires définis précédemment.
En déduire l'expression de la vitesse \vec{v}'_f , calculée dans le référentiel lié au laboratoire, de l'anneau lorsqu'il quitte la tige en fonction de ω , r_0 , l et d'un ou plusieurs des vecteurs unitaires définis précédemment.

la tige fait un angle α quelconque avec l'axe (Δ)

La tige OA fait maintenant un angle α ($\alpha < \frac{\pi}{2}$ rad) avec l'axe (Δ) . La tige tourne autour de (Δ) avec la vitesse angulaire constante ω .

On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance r entre le point O et l'anneau M ($r = OM$).

L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance r_0 du point O ($r_0 < l$).



L'étude est menée dans le référentiel lié à la tige.

10. L'anneau est soumis à son poids, aux forces d'inertie et à la réaction de la tige.
Faire un schéma sur lequel apparaissent ces forces.
Écrire l'expression vectorielle du poids et des forces d'inertie en fonction de m , g , ω , r , α et des vecteurs unitaires définis précédemment.
11. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.
12. Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de r_0 , α , g , ω et t .
13. Déterminer la position d'équilibre r_{eq} de l'anneau sur la tige. Exprimer r_{eq} en fonction de ω , α et g .
Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre de l'anneau sur la tige OA que si la vitesse angulaire ω est supérieure à une valeur seuil ω_0 que l'on déterminera. Exprimer ω_0 en fonction de α , g et l .
14. On se place dans le cas où $\omega > \omega_0$, l'anneau étant dans sa position d'équilibre. On écarte légèrement l'anneau de cette position d'équilibre.
Déterminer, en la justifiant, l'orientation de la résultante des forces appliquées à l'anneau ?
En déduire si l'équilibre est stable ou instable.

Traitement d'un électrocardiogramme

Le système étudié est un appareil d'acquisition et de traitement d'un électrocardiogramme. La différence de potentiel qui apparaît entre des électrodes placées sur le corps humain est amplifiée par un amplificateur d'instrumentation. Le signal obtenu est ensuite numérisé.

Choix de la fréquence d'échantillonnage

15. Définir la fréquence d'échantillonnage. Et énoncer le critère de Shannon.

Il s'agit de déterminer la fréquence d'échantillonnage et de mettre en évidence les précautions à prendre pour assurer une prise correcte d'échantillons portant sur la tension $v_s(t)$ issue de l'amplificateur d'instrumentation.

L'information utile du signal ECG est comprise dans la bande de fréquence $[0; F_{max}]$ avec $F_{max} = 100$ Hz.

16. Relever la fréquence du signal $u_{card}(t)$ de l'ECG figure ci-dessous. Exprimer cette fréquence en battements par minute.

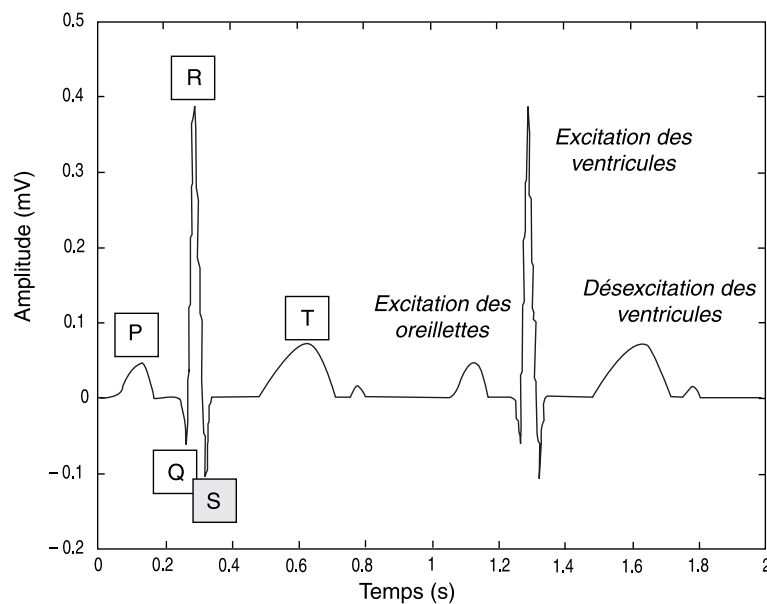


Figure Signal ECG en fonction du temps

17. Comparer cette fréquence à celle de la première raie de fréquence non nulle du spectre de $v_s(t)$ (Figure ci-dessous). Quel nom particulier donne-t-on à cette composante ?

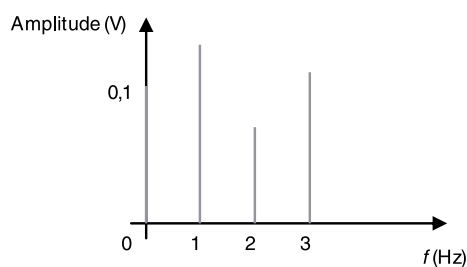


Figure Spectre d'amplitude du signal ECG amplifié $v_s(t)$ (détail de 0 à 3 Hz)

18. D'après la condition de Shannon, à partir de quelle fréquence $F_{e,min}$ est-il possible d'échantillonner $v_s(t)$ sans altérer le signal ECG ?

$F_{e,min}$ est la fréquence minimale à partir de laquelle l'échantillonnage est correct. Pour des raisons technologiques, la fréquence d'échantillonnage retenue est $F_e = 448$ Hz.

Conséquence d'une prise d'échantillons sans filtre anti-repliement

On considère deux composantes parasites issues de la tension secteur, de fréquence $f_1 = 150$ Hz et $f_2 = 400$ Hz. On donne le spectre avant (Figure ci-dessous) et après échantillonnage (Figure suivante).

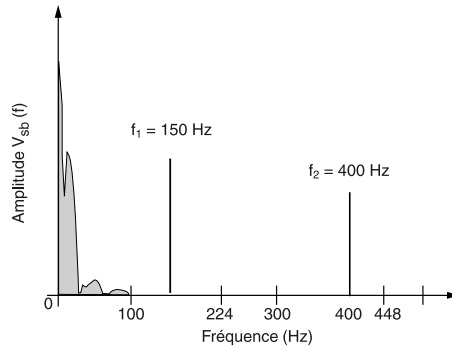


Figure Spectre d'amplitude de la tension $v_s(t)$ bruitée avant échantillonnage

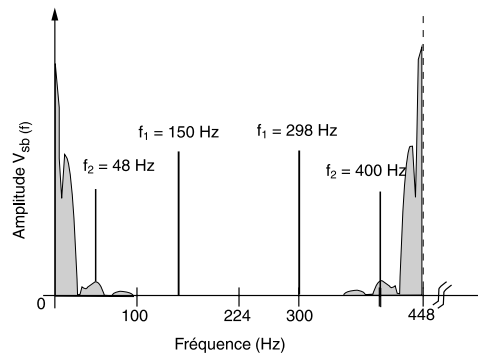


Figure Spectre d'amplitude de la tension $v_s(t)$ bruitée après échantillonnage

19. Les fréquences f_1 et f_2 vérifient-elles la condition de Shannon ?
20. Justifier la présence de raies aux fréquences $f'_1 = 298$ Hz et $f'_2 = 48$ Hz.

Filtre anti-repliement

21. Représenter une chaîne d'acquisition d'un signal analogique vers un signal numérique. Et expliquer l'intérêt d'un filtre anti-repliement.
22. Pour une fréquence d'échantillonnage de 448 Hz, montrer que la fréquence minimale susceptible de se replier sur le spectre utile de $v_s(t)$ vaut 348 Hz.
23. Pour la fréquence d'échantillonnage choisie, quelle doit être la valeur de la fréquence de coupure du filtre anti-repliement ?

La bande passante du filtre anti-repliement est-elle compatible avec l'occupation spectrale du signal ECG ?

Banc de test pour lunettes

Un banc de test pour lunettes est un dispositif d'aide et de conseil pour la vente de lunettes de soleil (Figure ci-dessous).

Après avoir disposé la paire de lunettes sur le banc, le cycle de test peut commencer. Sept sources lumineuses allant de l'ultraviolet à l'infrarouge éclairent successivement les lunettes. Après détection et traitement du rayonnement transmis, un écran indique le coefficient de transmission dans chaque bande de longueur d'onde et donne un conseil d'utilisation pour les lunettes considérées.

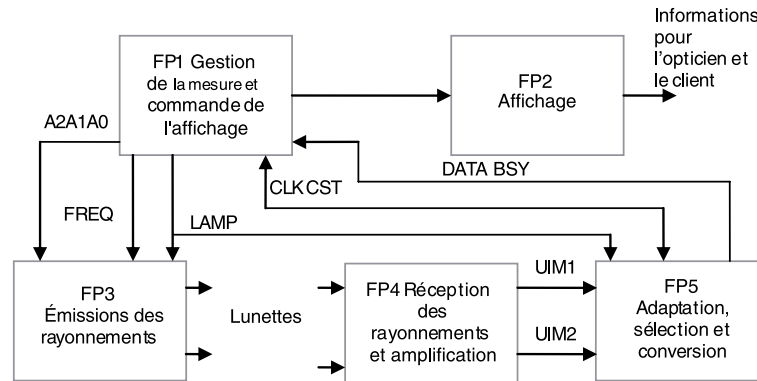


Figure Schéma fonctionnel simplifié

L'étude porte sur la fonction FP5, « Adaptation, sélection et conversion ». La tension U_{IM1} est filtrée par un filtre passe-bande centré sur 1,6 kHz. Un circuit spécialisé calcule sa valeur efficace U_{AMP1} . La tension U_{IM2} est simplement amplifiée pour donner U_{AMP2} . Le signal LAMP permet de sélectionner U_{AMP1} ou U_{AMP2} pour les convertir en binaire en vue du traitement par FP1. Les questions portent sur le traitement de U_{IM2} (Figure ci-dessous). Un extrait de la documentation du circuit intégré AD7896 est fourni en annexe.

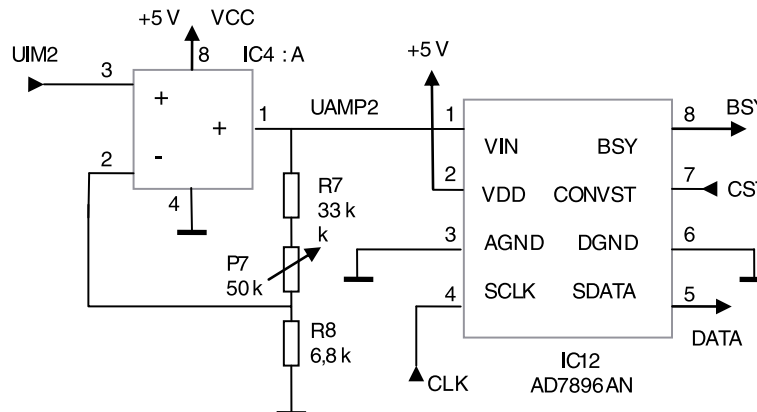
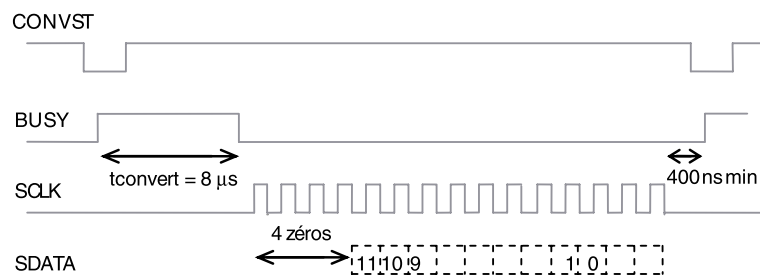


Figure Schéma partiel de FP5

Le circuit IC12 est un convertisseur analogique-numérique à sortie série. Il fournit à FP1 un mot binaire « DATA » image de la lumière transmise par les lunettes.

24. Quelles sont les limites autorisées pour U_{AMP2} ?

25. Quelle est la plus petite tension détectable par IC12 ? Donner le résultat avec quatre chiffres significatifs.
26. Déterminer le mot binaire DATA correspondant à une tension $U_{AMP2} = 0,2 \text{ V}$.
27. On veut acquérir une donnée toutes les $100 \mu\text{s}$. Calculer la fréquence du signal CLK pour ce fonctionnement à partir de la documentation du circuit AD7896, en particulier les chronogrammes fournis (Figure ci-dessous).



Annexe : documentation du circuit intégré AD7896

Convertisseur analogique-numérique 12 bits à sortie série

Temps de conversion : $8 \mu\text{s}$;

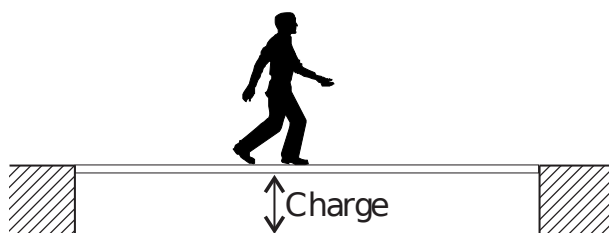
Tension d'alimentation V_{DD} : $2,7 \text{ V}$ à 5 V

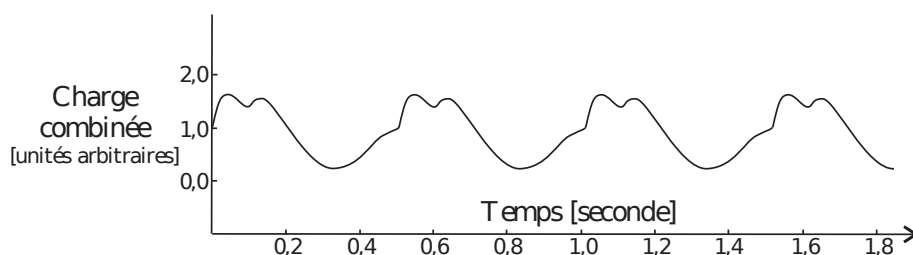
Tension d'entrée : 0 à V_{DD} ;

Puissance dissipée faible : 9 mW

Numéro de broche	Symbole	Description
1	VIN	Entrée analogique, de 0 à V_{DD}
2	VDD	Tension d'alimentation de $2,7 \text{ V}$ à 5 V
3	AGND	Masse analogique
4	SCLK	Entrée horloge série. Une horloge doit être appliquée à cette entrée pour obtenir une donnée en sortie. Quand la conversion est terminée ($8 \mu\text{s}$ après le front descendant de CONVST), il faut appliquer 16 périodes d'horloge sur SCLK pour obtenir la donnée SDATA.
5	SDATA	Sortie de données en série. C'est un nombre de 12 bits émis en série. Le poids le plus fort (DB11) est émis en premier, suivi de DB10, et jusqu'au poids le plus faible DB0. En fait, 16 bits sont émis : d'abord 4 zéros puis les 12 bits du nombre. L'opération de lecture doit prendre soin au minimum 400 ns avant une nouvelle conversion.
6	DGND	Masse logique
7	CONVST	Début de conversion
8	BUSY	Sortie permettant de savoir si une conversion est en cours

Numérisation d'un signal de marche





Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation.

L'acquisition est effectuée sur des durées allant de quelques secondes à quelques minutes. Les signaux ainsi obtenus sont similaires mais pas parfaitement identiques. Chacun de ces signaux présente les caractéristiques essentielles du signal de la charge combinée représentée sur la figure ci-dessus. On calcule alors le spectre de ces signaux en les échantillonnant en $N = 300$ points équidistants sur un intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$. Les différents spectres obtenus sont rassemblés sur la figure ci-dessous.

28. Analyser et interpréter aussi précisément que possible ces différents spectres. Sont-ils tous exploitables? Lequel vous paraît le plus pertinent? En déduire la (ou les) fréquence(s) caractéristique(s) de la marche étudiée. Était-ce qualitativement prévisible?

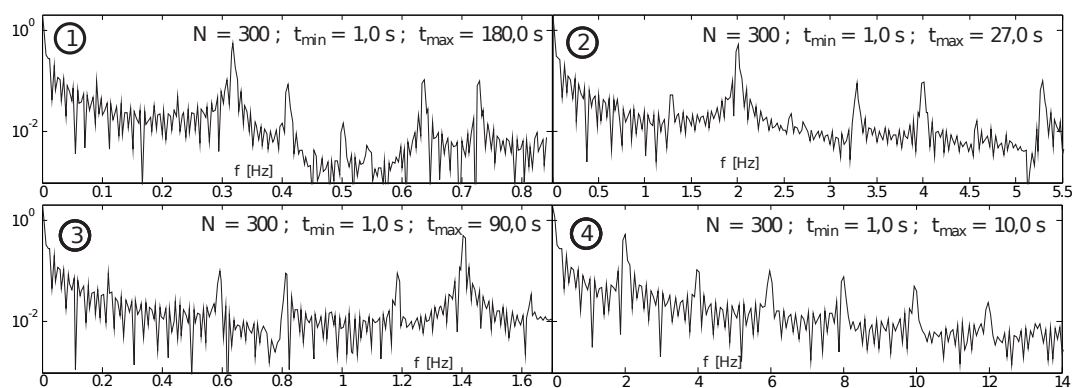


Figure – Spectres des signaux correspondants à la marche d'un piéton

Extraction d'un signal faible du bruit par effet de moyenne

Un détecteur enregistre un spectre en le décomposant sur plusieurs canaux numérotés de 1 à N . Chacun de ces canaux représente une bande de fréquence très étroite. Lors d'une séquence d'acquisition, le détecteur enregistre une série de valeurs $x_k = s_k + b_k$ pour k variant de 1 à N . L'éventuel signal s_k est celui dont la détection est souhaitée. Le signal b_k est un parasite appelé bruit; différents phénomènes physiques sont à l'origine du bruit, à commencer par l'agitation thermique des porteurs de charges. Le bruit considéré, b_k , prend une valeur aléatoire de moyenne b indépendante de k . La dispersion autour cette moyenne est supposée gaussienne d'écart-type σ ; c'est-à-dire que pour un grand nombre n d'acquisitions indépendantes dont les résultats sont ajoutés canal par canal, la valeur moyenne du signal sommé sera nb et l'ordre de grandeur de la dispersion de chaque coté de cette valeur moyenne sera $\sqrt{n}\sigma$.

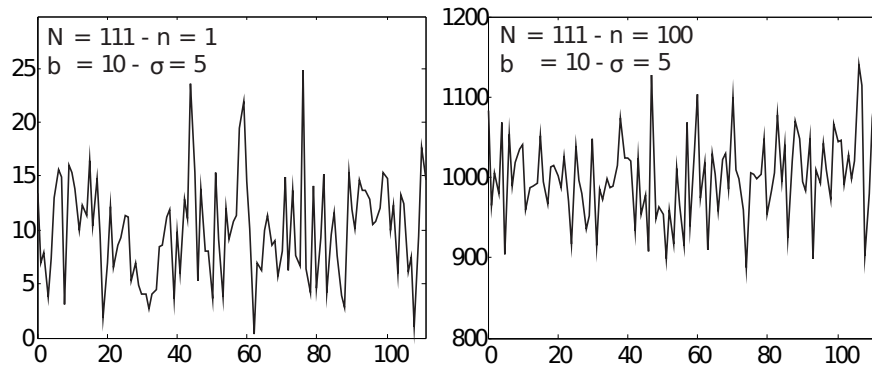


Figure e - Acquisition d'un bruit ($s_k = 0$ pour tout k) sur $N = 111$ canaux avec $b = 10$ et $\sigma = 5$. La figure de gauche représente 1 acquisition, celle de droite la somme canal par canal de 100 acquisitions indépendantes.

29. Représenter l'allure du graphe que l'on pourrait obtenir après 2500 acquisitions, l'axe des ordonnées étant clairement gradué dans sa partie utile.

On considère maintenant qu'en plus du bruit gaussien d'amplitude $b = 10$ et d'écart-type $\sigma = 5$ présent constamment sur chaque canal, un signal utile non nul, constant et d'amplitude 1 est présent uniquement sur les canaux 34 et 67 à chaque acquisition.

30. Le signal utile est-il détectable par une seule acquisition ? Représenter l'allure de la somme canal par canal de 2500 acquisitions. Le signal est-il devenu détectable ?
31. Dans le cadre d'un bruit de dispersion σ et d'amplitude b , estimer le nombre n d'acquisitions permettant de faire apparaître un signal constant d'amplitude s_p dans le canal p .