

Devoir Surveillé 4

Les calculatrices sont autorisées

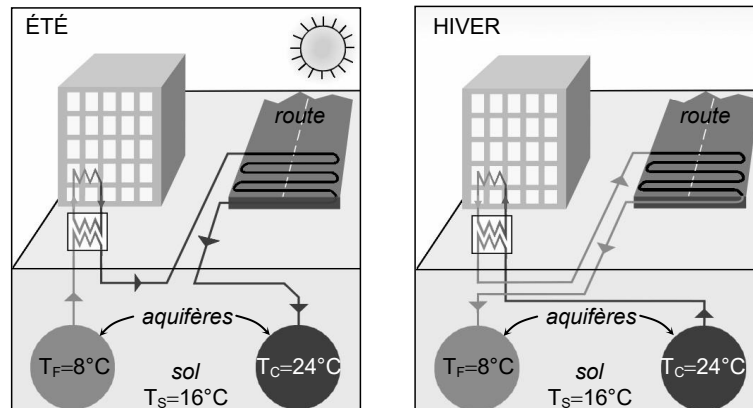
Samedi 16 Novembre 2019 : 8h30 - 12h30

Récupération d'énergie thermique dans la chaussée

L'énergie solaire absorbée par le bitume peut-être astucieusement utilisée pour assurer le chauffage d'habitations ou d'immeubles. Les sociétés néerlandaises O.O.M.S. (génie civil) et W.T.H. (génie thermique) ont développé dans ce but le dispositif Road Energy Systems[®] (schématisé sur la figure ci-dessous) constitué des organes suivants, dans lesquels circule de l'eau :

- un réseau de canalisations incluses dans la couche supérieure de la route ;
- un aquifère (réservoir d'eau naturel souterrain) "chaud" à la température $T_C = 24^\circ\text{C}$;
- un aquifère "froid" à la température $T_F = 8^\circ\text{C}$;
- un échangeur thermique de type eau/eau (entre le dispositif et le système de chauffage/climatisation de l'immeuble) ;
- une pompe assurant la circulation de l'eau (non représentée sur la figure 1).

Selon la saison, deux circuits différents de circulation d'eau sont utilisés afin de stocker de l'énergie thermique dans l'aquifère chaud (en été) puis de l'y récupérer (en hiver) :



Dimensionnement des aquifères

Les aquifères utilisés sont situés à une profondeur moyenne de 80 m où la température du sol est constante toute l'année et vaut $T_S = 16^\circ\text{C}$. Un aquifère est modélisé par une sphère de centre O et de rayon R_a contenant de l'eau de capacité calorifique massique $c_{eau} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$, de masse volumique $\rho_{eau} 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et de température T_E supposée uniforme. Cette sphère est entourée de terre de conductivité thermique $\lambda_{terre} = 1,0 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ dont la

température $T(r)$ est supposée ne dépendre que de la distance r au centre de la sphère et tendre vers $T_S = 16^\circ\text{C}$ lorsque la distance r tend vers l'infini. Les transferts thermiques sont étudiés en régime permanent.

1. Écrire la loi de Fourier ; en déduire la forme du vecteur densité de flux thermique dans la terre à l'extérieur de l'aquifère. (Rappel : $\vec{\text{grad}}(f(r)) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques)
2. Exprimer le flux thermique $\Phi(r)$ à travers une sphère de centre O et de rayon $r > R_a$, orientée selon $+\vec{e}_r$.
3. Montrer, en considérant une coquille sphérique de terre comprise entre r et $r + dr$, que le flux thermique $\Phi(r)$ se conserve. (il sera noté Φ dans la suite du problème)
4. Déduire des questions précédentes que le flux thermique peut s'écrire : $\Phi = K(T_E - T_S)$, en exprimant K en fonction des données.

Durant les six mois de fonctionnement en mode "hiver" ($t_H = 0,5$ an), la température de l'aquifère "chaud", initialement à $T_{E0} = T_C = 24^\circ\text{C}$, ne doit pas diminuer plus que $\Delta T = 1,0^\circ\text{C}$. Supposons, dans les questions 5 à 9, que l'aquifère ne perde de l'énergie que par conduction thermique dans la terre environnante au niveau de sa frontière, en $r = R_a$.

5. Établir l'équation différentielle vérifiée par la température T_E de l'eau, faisant intervenir $\frac{dT_E}{dt}$, T_E , T_S et τ , constante de temps à exprimer en fonction de c_{eau} , ρ_{eau} , R_a et λ_{terre} .
6. Résoudre l'équation différentielle précédente pour déterminer la température $T_E(t)$ en fonction de T_{E0} , T_S , t et τ , puis tracer son allure.
7. Déterminer une condition littérale sur τ pour que la diminution de température de l'aquifère liée aux pertes par conduction soit inférieure à ΔT durant t_H : $T_{E0} - T_E(t_H) < \Delta T$.
8. Calculer la valeur limite de τ et en déduire le rayon limite $R_{a,limite}$ de l'aquifère.

Un aquifère est en réalité constitué de terre et de roches poreuses de capacité calorifique massique $c_{terre} = 1,3 \cdot 10^3 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$, de masse volumique $\rho_{terre} = 8,0 \cdot 10^2 \text{ kg.m}^{-3}$, où l'eau est stockée.

9. Préciser quel doit être, dans ce cas, l'ordre de grandeur de $R_{a,limite}$.

Étude thermique de la chaussée durant l'été

La couche de bitume est assimilée à une plaque noire de surface S et de température uniforme T_R au contact de l'atmosphère de température $T_A = 300 \text{ K}$.

Sur sa face supérieure, cette couche :

- reçoit un rayonnement solaire de puissance surfacique moyenne $\phi_S = 400 \text{ W.m}^{-2}$;
- reçoit un rayonnement d'équilibre thermique de puissance surfacique ϕ_a^R de la part de l'atmosphère ;
- émet un rayonnement d'équilibre thermique de puissance surfacique ϕ_b^R vers l'atmosphère ;
- perd une puissance surfacique $\phi_{CC} = h(T_R - T_A)$ par conducto-convection ($h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$).

Sur sa face inférieure, la couche de bitume est en contact avec la terre dont la température est constante à partir d'une profondeur $p = 10 \text{ m}$, valant $T_S = 290 \text{ K}$. Ce contact est modélisé par une résistance thermique de longueur p, de surface S et de conductivité thermique $\lambda = 1,0 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$; celle-ci est traversée par un flux thermique de conduction $\Phi_C = S\phi_C$.

10. Faire un schéma de la couche de bitume, de l'atmosphère et de la terre en y faisant figurer les différentes températures, ainsi que les divers flux thermiques surfaciques.

On donne la loi de Stefan relative à la puissance surfacique $\phi^R = \sigma T^4$ rayonnée par un corps noir de température T . (constante de Stefan-Boltzmann : $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$)

11. Exprimer la résistance thermique R_{th} d'un barreau rectiligne unidimensionnel de section S , de longueur L et de conductivité thermique λ . En déduire l'expression de ϕ_C en fonction de λ , p , T_R et T_S .
12. Traduire de manière littérale l'équilibre thermique de la route en régime permanent à l'aide d'une première relation entre les divers flux surfaciques ϕ , puis par une seconde entre les températures et les constantes caractéristiques des différents échanges thermiques.
13. Montrer que si $T_R \simeq T_A$, alors $\phi_b^R - \phi_a^R = BT_A^\alpha (T_R - T_A)$ où B et α sont deux constantes à expliciter.
14. En déduire l'expression de T_R en fonction de ϕ_S , σ , h , λ , p , T_A et T_S .
15. Comparer numériquement entre eux les termes du numérateur de l'expression précédente. Faire de même pour ceux du dénominateur et en déduire une expression simplifiée de la température T_R de la route. Quel phénomène physique se trouve-t-il ainsi négligé ?
16. Calculer la valeur numérique de T_R (en K). Commenter.

L'énergie thermique prélevée par l'eau circulant dans les canalisations incluses dans la chaussée peut-être modélisée par un flux surfacique ϕ_E extrait de la couche de bitume.

17. Comment le bilan thermique est-il modifié pour tenir compte de ϕ_E ? En déduire la puissance surfacique maximale ϕ_E qui peut être extraite de la chaussée lorsque $T_R = T_C$.

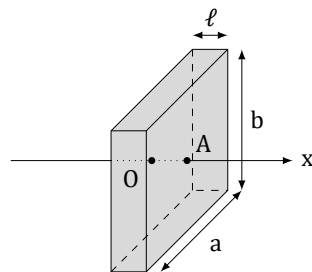
Le coefficient de diffusion thermique (ou diffusivité) de la couche de bitume vaut $D = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ uSI}$ et les tuyaux sont enterrés à la profondeur $e = 10 \text{ cm}$.

18. Rappeler l'unité de D , puis déterminer la durée caractéristique de diffusion thermique sur une distance e dans le bitume. L'hypothèse " T_R uniforme" est-elle valable ?

Dissipation thermique dans les systèmes électroniques

Les microprocesseurs des ordinateurs actuels sont constitués de plus d'un million de transistors répartis sur une plaque de silicium de quelques cm^2 . L'évacuation de la chaleur dégagée par le microprocesseur est indispensable pour le bon fonctionnement du composant.

On étudie tout d'abord le transport thermique à travers un objet solide parallélépipédique, de dimensions $a \times b \times l$ avec $a \gg l$ et $b \gg l$, lorsque les faces repérées par les points O et A sont uniformément aux températures T_1 et T_0 respectivement (cf figure ci-dessous). L'objet est caractérisé par sa masse volumique μ , sa capacité thermique massique c et sa conductivité thermique λ . L'origine de l'axe des x est prise en O.



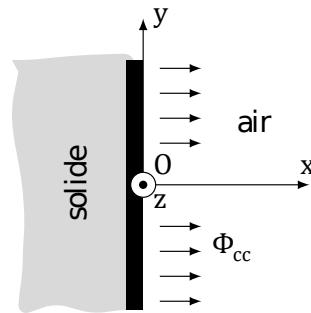
Figure

19. Justifier qu'on puisse considérer que la température dans le solide est une fonction de x et t seulement.
20. Établir l'équation de la diffusion thermique vérifiée par la température $T(x, t)$ dans le solide considéré.
21. Les températures T_0 et T_1 étant constantes, on étudie le régime stationnaire. Établir la loi d'évolution de la température dans le solide en fonction de x . Exprimer la puissance thermique Φ qui traverse le solide de O vers A.
22. Montrer qu'on peut relier la différence de températures $T_1 - T_0$ au flux Φ , de façon analogue à la loi d'Ohm en électrocinétique, faire apparaître la résistance thermique R_{th} de l'objet parallélépipédique.

Lorsqu'un solide est placé dans l'air dont la température est uniforme égale à T_a , l'échange thermique qui s'effectue à l'interface entre l'air et le solide est conducto-convectif. C'est à dire que dans une mince couche de fluide en surface du solide le gradient de température entraîne un mouvement de convection du fluide. Il en résulte une expression de la quantité de chaleur qui est transférée du solide vers l'air pendant dt à travers une surface de section $dS = dydz$:

$$\delta Q_{cc} = h(T_0 - T_a)dydzdt$$

où h est appelé coefficient de Newton, qui caractérise l'échange thermique entre le solide et le fluide et T_0 est la température de surface du solide (cf. figure ci-dessous).

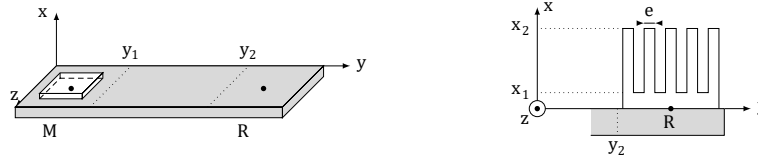


Figure

23. Donner l'unité de h dans le système international d'unités. Définir puis exprimer la résistance thermique R_h qui modélise l'échange thermique conducto-convectif pour une surface S de solide.
24. Dans le cas d'une interface silicium/air, $h_s = 30$ S.I. si l'air environnant est immobile et vaut $h_c = 300$ S.I. si l'air environnant est brassé, par exemple grâce à un ventilateur. On considère un parallélépipède de dimensions $a \times b \times l = 40 \times 24 \times 1,5$ mm³. Calculer les valeurs des résistances thermiques R_{th} dans le cas où l'objet est en cuivre puis en silicium, calculer aussi R_h l'air étant immobile, commenter.
25. Dans le cas du microprocesseur dont la documentation est fournie à la fin de l'exercice, estimer la durée Δt au bout de laquelle celui-ci est détruit en l'absence de dispositif de refroidissement.

Pour maintenir le microprocesseur à sa température de fonctionnement optimale $\simeq 70$ °C, on utilise un radiateur sur lequel souffle l'air brassé par un ventilateur d'une part et un dispositif appelé caloduc d'autre part, qu'on se propose d'étudier. Le caloduc est une enceinte métallique (elle est parfois en silicium) creuse, de volume constant, plate et longue, qui relie thermiquement

le microprocesseur situé en M au radiateur situé en R. La plupart des ordinateurs portables en sont équipés. La figure ci-dessous à gauche représente le caloduc vu de l'extérieur.



Figure

Dans un premier temps, on étudie le radiateur (cf figure ci-dessus à droite) qui est une pièce métallique qui présente une surface de contact avec l'air très importante, grâce à un grand nombre d'ailettes parallélépipédiques représentées en coupe sur la figure ci-dessus. La dimension des ailettes dans la direction \vec{e}_z est notée l_z , e selon \vec{e}_y et $H = x_2 - x_1$ selon \vec{e}_x . Pour étudier l'évolution de la température dans les ailettes, on isole une ailette, que l'on assimile à un milieu unidimensionnel selon \vec{e}_x . La température est notée $T(x)$, elle est uniforme dans une section de l'ailette. Enfin, comme l'ailette est plongée dans l'air, qui est en permanence renouvelé grâce au ventilateur, on considère que l'air qui entoure l'ailette a une température $T_a = 20^\circ\text{C}$, et on se limite à l'étude du régime stationnaire. On note T_R la température au niveau du socle du radiateur, on considère que c'est la température en $T(x_1)$ sur chacune des ailettes.

26. Après avoir fait un schéma correspondant à l'étude d'une ailette considérée isolément, effectuer un bilan d'énergie sur une tranche de longueur dx de l'ailette. Dédire de l'équation précédente l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} (T(x) - T_a) = 0$$

où δ est à exprimer en fonction de λ , e , l_z et h . Résoudre cette équation en considérant que la longueur H de l'ailette est très grande, c'est à dire $H \rightarrow +\infty$.

27. Calculer la puissance thermique évacuée par le radiateur complet, constitué de 6 ailettes et donner la valeur de la résistance thermique équivalente au radiateur. Pour l'application numérique on prendra $\lambda = 100 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$, $e = 2 \text{ mm}$ et $l_z = 1 \text{ cm}$.

Données sur le cuivre et le silicium

	Cu	Si
Numéro atomique	29	14
Masse atomique relative (g.mol^{-1})	64	28
Température de fusion ($^\circ\text{C}$)	1083	1410
Température d'ébullition ($^\circ\text{C}$)	2567	2355
État de la matière à 20°C et 1 bar	solide	solide
Densité à 20°C (g.cm^{-3})	9	2
Niveaux d'oxydation	1 ou 2	-4 ou 4
Électronégativité	1,75	1,74
Rayon atomique (pm)	128	118
Énergie d'ionisation (eV)	7,7	8,2
Fraction de masse dans le géosphère (%)	0,01	25,8
Conductivité électrique (S.m^{-1})	$59,6.10^6$	$2,5.10^{-4}$
Conductivité thermique ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)	401	148
Chaleur massique ($\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$)	380	700

Spécification du microprocesseur i7-4500U

Status	Launched
Launch Date	Q3'13
DMI2	5 GT/s
Processor Number	i7-4500U
# of Cores	2
# of Threads	4
Clock Speed	1.8 GHz
Max Turbo Frequency	3 GHz
Intel® Smart Cache	4 MB
Instruction Set	64-bit
Instruction Set Extensions	SSE 4.1/4.2, AVX 2.0
Lithography	22 nm
Max TDP	15 W
Recommended Customer Price	TRAY: \$393.00
Max Memory Size (dependent on memory type)	16 GB
Memory Types	DDR3L-1333/1600; LPDDR3-1333/1600
# of Memory Channels	2
Max Memory Bandwidth	25.6 GB/s
PCI Express Revision	2.0
PCI Express Configurations [†]	4x1, 2x4
Max # of PCI Express Lanes	12
Max CPU Configuration	1
T _{JUNCTION}	100°C
Package Size	40mm x 24mm x 1.5mm
Sockets Supported	FCBGA1168
Low Halogen Options Available	See MDDS

Forces d'interaction et formule de Derjaguin

L'objectif de cette partie est de décrire les interactions entre la pointe AFM (Microscope à Force Atomique) et un échantillon. Celles-ci sont dues aux forces de Van der Waals que l'on va chercher à évaluer.

Données :

- Rayon de Bohr : $a_0 = 5,3 \cdot 10^{-11}$ m
- Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹ (ou kg⁻¹.m⁻³.A².s⁴)
- Masse de l'électron $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg
- Constante de Planck réduite $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,1 \cdot 10^{-34}$ J.s
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C
- Electronvolt : 1eV = 1,610⁻¹⁹ J
- Nombre volumique d'atomes de silicium dans la pointe de l'AFM : $\rho = 5,0 \cdot 10^{22}$ cm⁻³
- Module d'Young du silicium : $E = 1,010^{11}$ U.S.I.
- Constante d'interaction dipôle-dipôle : $C = 5,67 \cdot 10^{-67}$ USI

On donne par ailleurs en coordonnées polaires $\vec{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$

Approche qualitative

28. Ces forces sont conservatives : rappeler ce que cela signifie et exprimer un lien entre \vec{F} et E_p , l'énergie potentielle dont elles dérivent.

Le profil de l'énergie potentielle d'interaction $E_p(r)$ entre la pointe et l'échantillon est représenté sur la figure ci-après.

29. Distinguer, sur la figure ci-dessous, deux gammes de distances : l'une pour laquelle l'interaction est répulsive et l'autre pour laquelle elle est attractive. Justifier.
30. Quelle énergie faut-il apporter au système à l'équilibre pour éloigner la pointe à une distance macroscopique (ie, à l'infini) ? Justifier.

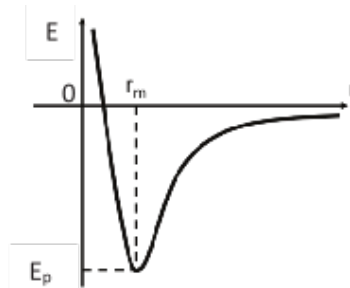


Figure . Énergie d'interaction entre la pointe et la surface de l'échantillon espacées d'une distance r

La suite de cette partie vise à établir la formule dite de Derjaguin modélisant simplement la force entre une pointe que l'on considère parabolique et une surface plane. Après avoir déterminé l'énergie d'interaction entre deux dipôles puis celle entre deux plans, l'interaction pointe-échantillon sera modélisée par un système paraboléoïde de révolution-plan infini.

Interaction entre deux dipôles

On souhaite modéliser les interactions entre deux dipôles par le modèle suivant. On place un dipôle permanent de moment dipolaire \vec{P} au centre O d'un repère.

31. On se place dans l'approximation dipolaire. Rappeler les hypothèses correspondantes.
32. Faire un schéma du dipôle centré en O dans un repère de coordonnées polaires.

33. Établir l'expression du potentiel électrique V créé par un dipôle.
 34. Comment se simplifie l'expression obtenue précédemment dans l'approximation dipolaire ?
 35. En déduire l'expression du champ électrique \vec{E} créé en un point $M(r, \theta)$.

Lorsqu'un morceau de matière infinitésimal est soumis à un champ électrique \vec{E} , il se polarise et acquiert un moment dipolaire $\vec{p} = \alpha \vec{E}$, où α est la polarisabilité. Ce morceau de matière est soumis au champ \vec{E} du dipôle permanent décrit précédemment.

36. Justifier que l'énergie d'interaction entre ces deux dipôles (l'un placé en O, l'autre en M) puisse se mettre sous la forme :

$$U_{d-d} = -\frac{C}{r^6}$$

37. Cette expression dépend-elle de la direction des deux dipôles considérés ?

Interaction dipôle-plan

Considérons maintenant un dipôle \vec{p} , placé en O à une distance $d = \|\vec{OH}\|$ d'un demi-espace infini de dipôles induits sans interaction entre eux. Le nombre de dipôles par unité de volume est noté ρ_0 . Le système est étudié en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , l'axe (Oz) étant normal au plan et dirigé vers celui-ci (figure ci-dessous).

38. Justifier, à l'aide d'un schéma clair, qu'un volume infinitésimal du demi-espace infini s'exprime $dV = dr \cdot r \cdot d\theta \cdot r \cdot \sin(\theta) \cdot d\phi = r^2 \sin(\theta) \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi$

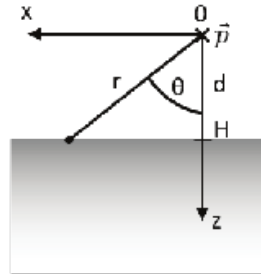


Figure . Dipôle unique p à une distance d d'un demi-espace infini de dipôles induits.

L'énergie d'interaction U_{d-e} entre le dipôle placé en O et ce demi-espace s'obtient en sommant l'énergie U_{d-d} de la question 36 sur tout le demi-espace. Cette somme s'écrit donc :

$$U_{d-e} = \iiint U_{d-d} \rho_0 dV = -\rho_0 \int_d^{+\infty} \frac{C}{r^6} r^2 \left(\int_0^{\theta_{max}} \sin(\theta) d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) dr$$

39. Justifier que la limite d'intégration sur θ vaille $\theta_{max} = \arccos\left(\frac{d}{r}\right)$.
 40. Montrer alors que :

$$U_{d-e} = -\frac{\rho_0 \pi C}{6d^3}$$

Interaction parabololoïde-plan

La question précédente permet d'établir que l'énergie d'interaction par unité de surface d'un demi-espace infini avec un cylindre infinitésimal de hauteur infinie et de section dS séparés par une distance h (cf figure ci-dessous b) vaut :

$$u_{e-e} = -\frac{\rho_0 \rho_1 \pi C}{12h^2}$$

où ρ_1 est le nombre de dipôles par unité de volume dans le cylindre.

41. Vérifiez que u_{e-e} est bien homogène à une énergie par unité de surface.

Lors de la réalisation d'une image par AFM, la pointe balaie une surface dont l'altitude varie (insert de la figure ci-dessous a). En zoomant fortement au niveau de la pointe, les reliefs ont des dimensions caractéristiques latérales grandes comparées à celles de la pointe (figure ci-dessous a). Afin de faciliter les calculs, la surface à imager est considérée localement plane (figure ci-dessous b). Le nombre volumique de dipôles de cette surface à imager est ρ_0 . La pointe est définie par un parabololoïde de révolution qui peut être décrit par la juxtaposition de cylindres infinitésimaux de section dS (figure ci-dessous b). Chacun de ces cylindres est à l'altitude $h(x, y)$ de la surface plane. Le nombre de dipôles par unité de volume de la pointe est noté ρ_1 .

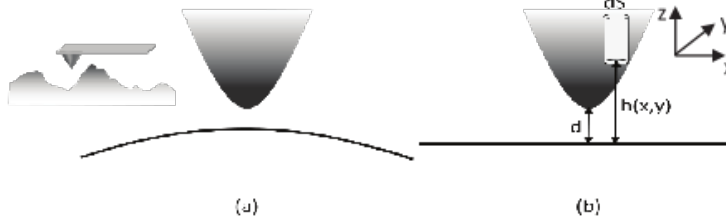


Figure 1. (a) Surface réelle vue par la pointe sans variation abrupte de relief (insert : Topographie à mesurer). (b) Modélisation plane de la surface.

L'altitude des cylindres est donnée par : $h(x, y) = d + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ où $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2}$, avec R_1 le rayon de courbure de la pointe et R_2 celui de la surface.

42. Si la surface est plane, quelle est la conséquence sur R_2 ? En déduire alors l'expression simplifiée de λ_1 et λ_2 . Dans la suite, celle-ci sera notée λ et R_1 sera notée R .
43. Écrire (sans chercher à la calculer ici) l'expression intégrale, notée E , de l'énergie d'interaction entre la pointe complète et la surface.

On considère la transformation T des coordonnées cartésiennes vers les coordonnées polaires :

$$T : \begin{cases} r \rightarrow x(r, \theta) = r \cos(\theta) \\ r \rightarrow y(r, \theta) = r \sin(\theta) \end{cases}$$

Grâce à cette transformation, on montre que l'élément de surface infinitésimal dS peut s'écrire sous la forme $dS = r \cdot dr \cdot d\theta$.

44. En déduire que E s'exprime $E = 2\pi R \int_d^{+\infty} u_{e-e}(h) dh$.

La composante, selon z , de la force d'interaction est liée à E par : $F_{int} = -\frac{\partial E}{\partial d}$

45. En déduire l'expression de F_{int} en fonction de u_{e-e} et de R .

L'expression trouvée à la question précédente se met généralement sous la forme : $F_{int} = -\frac{HR}{6d^2}$ où H est appelée la constante de Hamacker.

46. Donner l'expression de F_{int} en fonction de C , ρ_0 et ρ_1 .
47. Calculer la valeur numérique de H en considérant que la pointe et le matériau à imager sont en silicium.
48. Le rayon de courbure R de la pointe est de l'ordre de 10 nm. En déduire l'ordre de grandeur des forces de Van der Waals.

Mécanisme de déclenchement de l'étincelle

L'amorçage d'une décharge électrique dans un gaz (ou le claquage du gaz) est la transition de l'état isolant vers un état conducteur du milieu. Le mécanisme d'apparition d'une étincelle, parfois nommé arc électrique, est une sorte de phénomène d'avalanche se produisant dans le gaz au départ non ionisé. Initialement quelques électrons dits électrons primaires peuvent s'extraire de l'électrode par agitation thermique. Ces électrons vont alors être fortement accélérés par le champ électrique régnant entre les électrodes avant de frapper des molécules de dioxygène ou de diazote.

Ces chocs peuvent, dans certains cas, arracher des électrons aux molécules et créer des cations. Ces électrons secondaires de plus en plus nombreux au cours des chocs successifs vont eux aussi être accélérés sous l'action du champ électrique régnant dans le gaz. Cette action motrice du champ électrique est contrecarrée par les chocs des électrons sur les molécules. L'effet dominant dans les conditions expérimentales considérées est dû aux chocs électrons-particules lourdes (atomes ou molécules). Un processus de capture d'électrons par les cations va rapidement limiter le nombre d'électrons secondaires en mouvement. Nous considérons dans ce problème un gaz faiblement ionisé dans lequel le nombre de particules lourdes (molécules et cations) est très grand devant le nombre d'électrons en mouvement. On négligera donc systématiquement le nombre de cations devant le nombre de molécules gazeuses. De plus ce plasma est pratiquement électriquement neutre vu la très faible proportion électrons primaires/électrons secondaires.

Effet d'avalanche lors du déplacement d'un électron dans un gaz soumis à un champ électrique

L'effet d'avalanche se produit lorsque le champ électrique atteint une valeur critique, dit champ disruptif et noté $E_d = 3,6 \times 10^6 \text{ V.m}^{-1}$. Il s'agit, dans cette partie, de relier cette grandeur expérimentale macroscopique aux paramètres microscopiques du gaz.

Lorsque le gaz est placé dans une zone où règne un champ électrique \vec{E} que l'on peut supposer uniforme, le mouvement des électrons, qui sont les porteurs de charge mobiles, est une suite de chocs avec les molécules du gaz. Entre deux chocs, l'électron est accéléré sous l'action de la force électrique. Les vitesses après le choc sont distribuées de manière aléatoire.

Le temps moyen τ_c de collision électron-molécule est de l'ordre de $\tau_c = 1 \times 10^{-12} \text{ s}$. L'énergie de première ionisation de la molécule d'oxygène vaut $W_{oxy} = 2,2 \times 10^{-18} \text{ J}$ et celle de l'azote $W_{azo} = 2,4 \times 10^{-18} \text{ J}$. Lorsque l'énergie cinétique d'un électron primaire acquise lors du mouvement dans le champ électrique atteint l'énergie de première ionisation d'une molécule, un effet d'avalanche se produit. Un électron primaire suffisamment énergétique peut éjecter un électron secondaire d'un atome.

49. Montrer que ce modèle permet de déterminer une valeur cohérente du champ disruptif.

Le candidat est invité à expliciter soigneusement les diverses étapes de sa démarche de résolution.

50. Estimer le libre parcours moyen de l'électron défini comme la distance parcourue entre deux chocs successifs électron-molécule. En se référant à la première figure en fin d'énoncé, expliquer pourquoi l'hypothèse d'uniformité du champ électrique est pertinente.

Estimation de la tension inter électrodes nécessaire pour déclencher l'étincelle

Les documents nécessaires pour aborder ces questions sont regroupés en fin d'énoncé. Le candidat précisera clairement sur quel élément il s'appuie pour étayer sa réponse.

Une étincelle peut se produire entre les électrodes s'il existe un chemin reliant ces conducteurs métalliques tel qu'en chaque point le champ électrique dépasse la valeur disruptive. Un logiciel de simulation est mis à profit pour dresser une carte de potentiel dans la zone des extrémités des électrodes, l'une étant portée au potentiel +1 V et l'autre au potentiel -1 V.

51. Préciser les éléments de symétrie de la distribution de charges sur les électrodes. Quelles conséquences peut-on en tirer ?
52. Compléter la carte de potentiel de la première figure en fin d'énoncé par un réseau de lignes de champs électriques. Préciser le sens du champ électrique, les signes des charges électriques déposées sur chaque électrode ainsi que les valeurs des potentiels des diverses équipotentielles tracées par le logiciel de simulation dans les cadres prévus à cet effet.
53. Le logiciel indique la valeur de la charge électrique q portée par une des électrodes $q = 6,2 \times 10^{-13}$ C. Que vaut la capacité du condensateur formé par les deux électrodes ?
54. En s'appuyant sur la carte de potentiel (première figure en fin d'énoncé) et sur le graphe de la deuxième figure en fin d'énoncé, estimer la différence de potentiel minimale à imposer entre ces électrodes pour déclencher l'étincelle. Les diverses étapes du raisonnement doivent être clairement explicitées.
55. Indiquer la valeur de l'énergie électromagnétique stockée dans ce condensateur lorsque l'étincelle se déclenche. Sous quelles formes cette énergie peut-elle se dissiper ?
56. L'étincelle suit souvent un parcours légèrement chaotique entre les deux électrodes du fait d'inhomogénéités locales du plasma. Un critère empirique précise que la conduction par le gaz reste importante même si le champ électrique s'écarte de 10% de sa valeur disruptive. Estimer la largeur radiale de la zone parcourue par un courant en exploitant l'une des figures du document réponse.

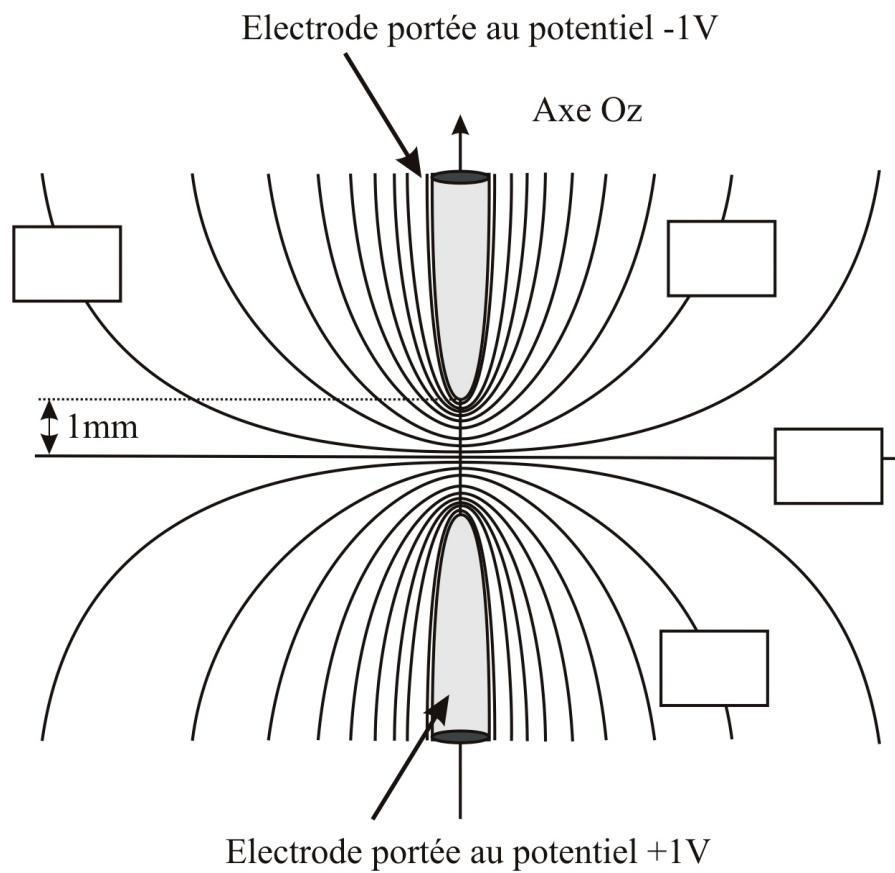


Figure Carte de potentiel au voisinage des électrodes obtenue par un logiciel de modélisation (le saut de potentiel d'une ligne équipotentielle à l'autre est de 100 mV)

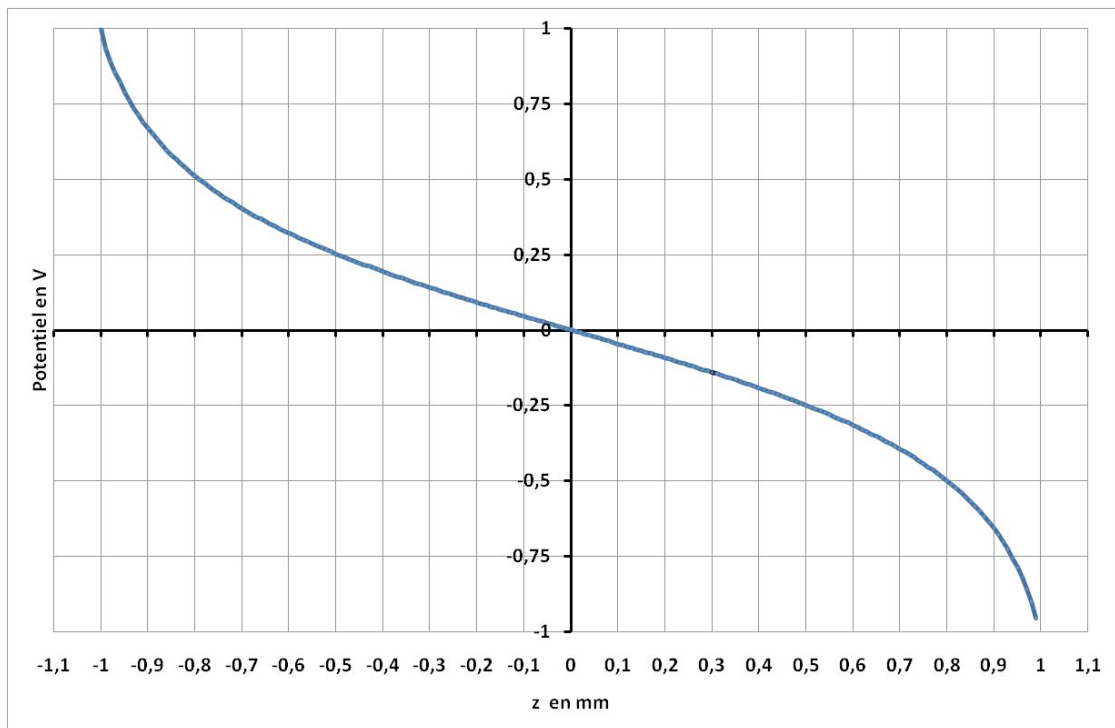


Figure Graphe du potentiel en fonction de la position sur l'axe (Oz) de révolution des électrodes

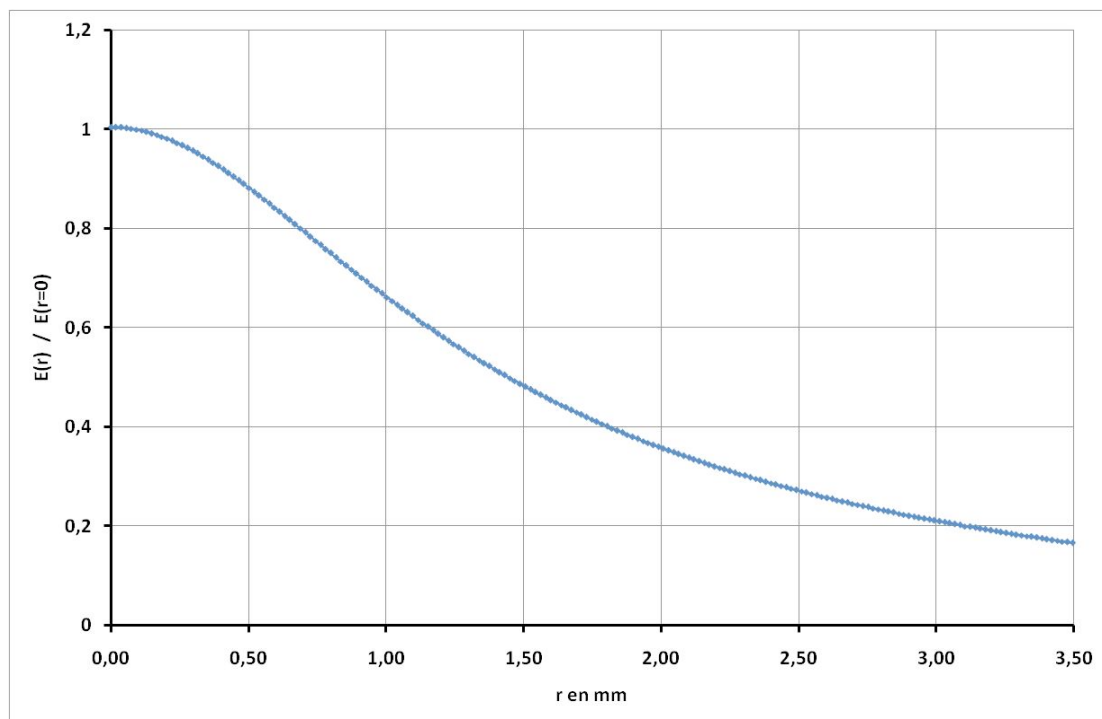


Figure Graphe de la norme du champ électrique en fonction de la distance à l'axe (Oz) dans le plan médiateur des électrodes