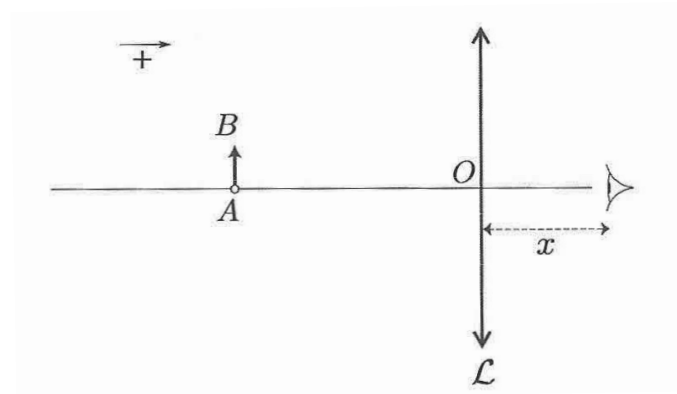


# Devoir Maison 1

## Eléments de correction

### Optique géométrique

Une loupe, assimilée à une lentille mince  $\mathcal{L}$  de distance focale image  $f' > 0$  et de centre optique  $O$ , est utilisée pour observer un objet  $AB$  situé dans un plan de front. L'ensemble est placé dans l'air dont on supposera l'indice de réfraction égal à l'unité. L'œil de l'observateur est situé à une distance  $x > 0$  en arrière de la lentille (Fig. ci-après). On modélise cet œil, que l'on supposera sans défaut (œil emmétrope), comme l'association d'une lentille mince  $\mathcal{L}'$  de vergence variable et d'un capteur fixe (la rétine). On note la distance entre l'œil et son punctum proximum, c'est-à-dire, la distance minimale de vision nette :  $d_m = 25$  cm. Dans tout l'exercice, on admet que les conditions de Gauss sont satisfaites.



On définit le grossissement  $G$  de la loupe par le rapport  $\theta'/\theta$  de l'angle  $\theta'$  sous lequel l'objet est vu à travers  $\mathcal{L}$  sur l'angle  $\theta$  sous lequel on voit l'objet directement (sans la loupe) lorsqu'il est placé au punctum proximum. Dans cette définition, la valeur de  $G$  dépend de la position de l'objet et de la position de l'œil. On cherche les conditions d'observation qui maximise le grossissement.

On donne la relation de conjugaison de Descartes, celle de Newton et le grandissement transversal  $G_t$  pour une lentille mince de distance focale image  $f_i$  :

$$-\frac{1}{p_o} + \frac{1}{p_i} = \frac{1}{f_i}$$

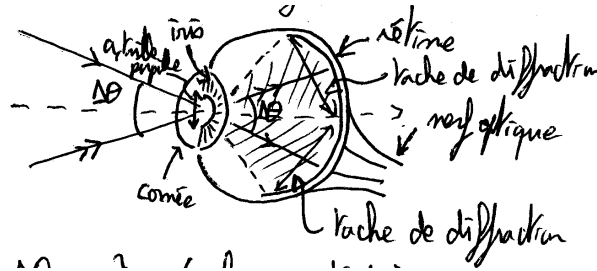
$$\sigma_o \sigma_i = -f_i^2$$

$$G_t = \frac{p_i}{p_o} = -\frac{\sigma_i}{f_i}$$

où  $p_o$  et  $p_i$  sont respectivement les distances algébriques de l'objet et de son image au centre de la lentille. En outre,  $\sigma_o$  et  $\sigma_i$ , sont les distances algébriques respectives de l'objet au foyer principal objet et de l'image au foyer principal image.

1. Calculer la limite de résolution angulaire d'un œil normal.

Limite de résolution angulaire :



donc

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{a} \left( \frac{\text{longueur d'onde}}{\text{taille pupille}} \right)$$

car c'est l'angle minimal avant que les taches de diffraction des deux rayons repérés sur le schéma ci-dessus par une simple et une double flèche se recouvrent.

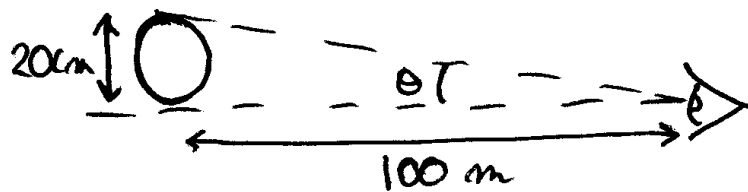
$$\lambda \approx 500 \text{ nm} \approx 5.10^{-7} \text{ m}$$

$$a \approx 5 \text{ mm} \approx 5.10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta\theta \approx 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\Delta\theta \approx 20''$$

2. Un ballon sphérique de 20 cm de diamètre placé à une distance de 100m est-il vu sous un angle supérieur à la limite de résolution angulaire ?



$$\tan \theta \approx \theta \approx \frac{20.10^{-2}}{100}$$

$$\theta \approx 2.10^{-4} \text{ rad}$$

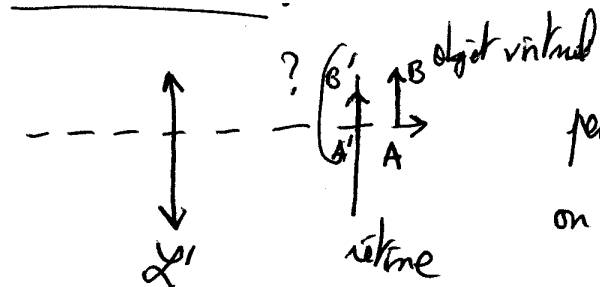
$$\theta \approx 40'' > \Delta\theta$$

3. Un œil emmétrope peut-il observer un objet à l'infini ?

Oui, l'infini est plus loin que le punctum proximum.

4. Peut-on observer nettement un objet virtuel ?

modèle de l'oeil :

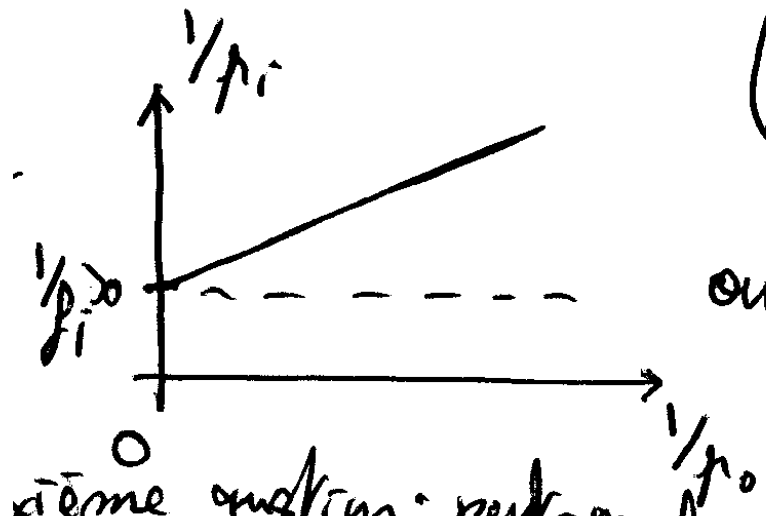


première question : peut-on avoir  $p_o > 0$  et  $p_i > 0$  ?

on sait que  $-\frac{1}{p_o} + \frac{1}{p_i} = \frac{1}{f_i}$

donc  $\frac{1}{p_i} = \frac{1}{f_i} + \frac{1}{p_o}$ .

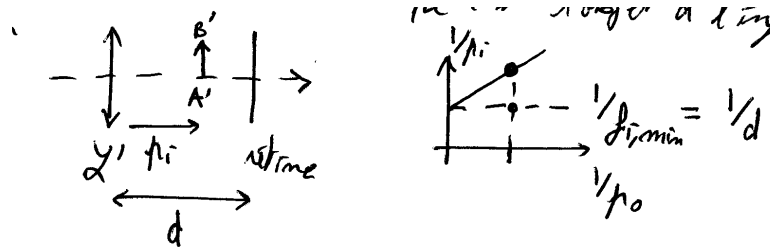
Et  $f_i > 0$  car la lentille est convergente (d'après la forme de la cornée et du cristallin)  
donc



oui, mais  $\frac{1}{p_i} > \frac{1}{f_i}$  donc  $p_i < f_i$

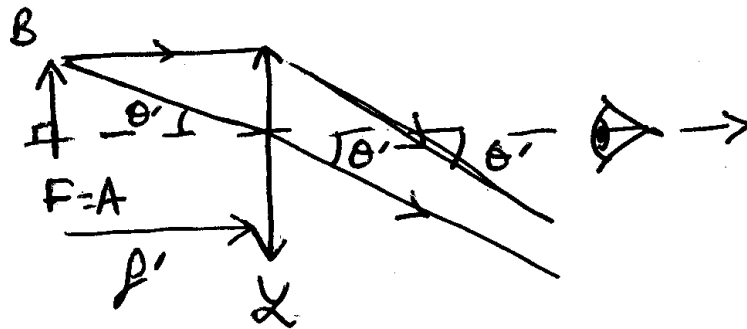
deuxième question : peut-on placer la rétine sur A'B' ?

Or la distance  $L'$ -rétine est fixe, l'œil peut augmenter  $f_i$  (accommodation) mais ne peut pas le diminuer donc le seul cas pour lequel A'B' est sur la rétine c'est l'objet à l'infini, sinon :



réponse : NON.

5.  $AB$  est placé dans le plan focal objet de  $\mathcal{L}$  et la position de l'œil, derrière la lentille est quelconque. L'œil voit nettement l'image de  $AB$  à travers  $\mathcal{L}$ . Déterminer  $\theta'$  et  $G$  en fonction de  $AB$ ,  $d_m$ ,  $f'$ .



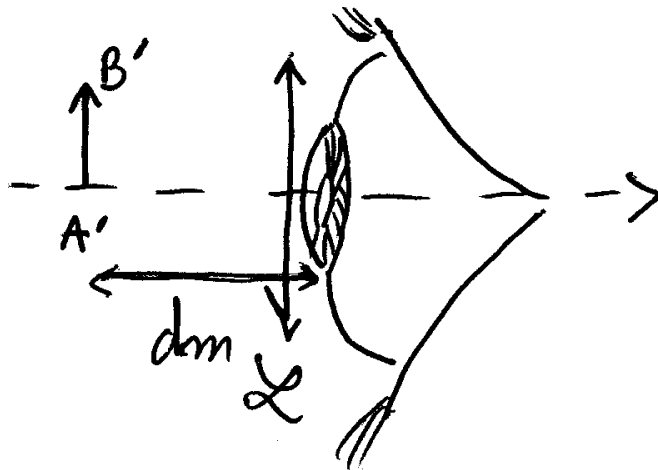
$$\begin{aligned}\tan \theta' &= \frac{AB}{f'} \\ &+ \text{conditions de Gauss} \\ \Rightarrow \theta' &= \frac{AB}{f'}\end{aligned}$$

$$G = \frac{\theta'}{\theta}$$

et  
donc

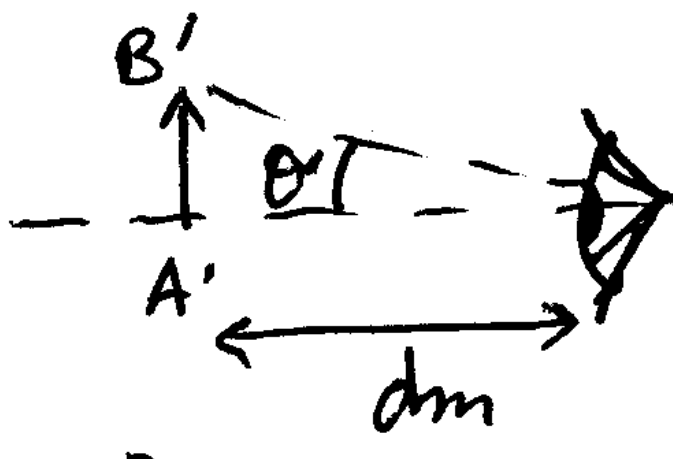
$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{AB}{d_m} \\ &+ \text{conditions de Gauss} \\ \Rightarrow \theta &= \frac{AB}{d_m} \\ \text{donc } G &= \frac{d_m}{f'}\end{aligned}$$

6. L'objet  $AB$  n'est plus dans le plan focal de  $\mathcal{L}$ . L'oeil est placé à proximité de la loupe ( $x \approx 0$ ) et accommode de sorte qu'il observe l'image de l'objet à travers  $\mathcal{L}$  à son punctum proximum. Calculer la position  $p_1 = \overline{OA}$  où l'objet est placé et le grossissement  $G_1$  de la loupe dans ces conditions d'observation, en fonction de  $d_m$  et  $f'$ .

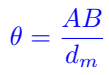


$$\begin{aligned}
 x &\approx 0 + \text{accommodation àu punctum proximum} \\
 \Rightarrow p_i &= -d_m \\
 \text{donc } -\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_i} &= \frac{1}{f'} \\
 \Rightarrow \frac{1}{p_1} &= -\frac{1}{d_m} - \frac{1}{f'} \\
 p_1 &= -\frac{d_m f'}{d_m + f'}
 \end{aligned}$$

$$G_1 = \frac{\theta'}{\theta}$$



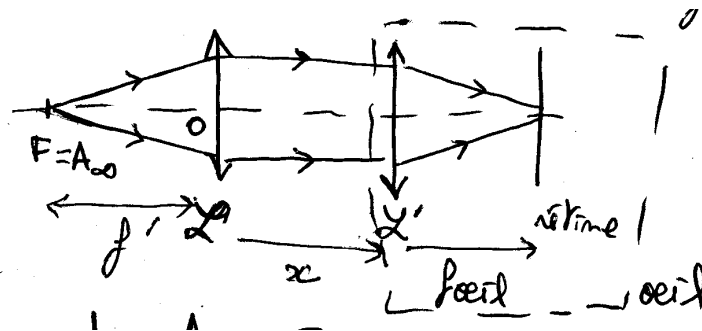
dm


$$G_1 = \frac{A'B'}{AB}$$


$$\begin{aligned}\tan \phi &= \frac{AB}{|p_1|} \\ \tan \phi &= \frac{A'B'}{d_m} \\ \text{donc } G_1 &= \frac{d_m}{|p_1|} \\ G_1 &= \frac{d_m(d_m + f')}{d_m f'} \\ G_1 &= 1 + \frac{d_m}{f'}\end{aligned}$$

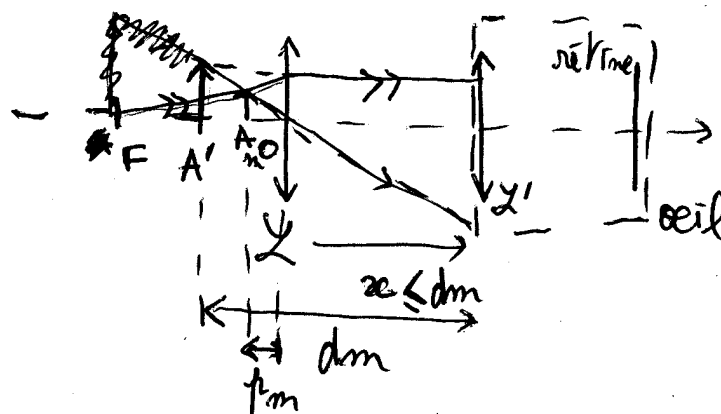
7. L'œil est désormais placé à une position quelconque dans l'intervalle  $0 < x \leq d_m$ . On note  $A_\infty$  la position de  $A$  qui permet à l'œil d'observer l'image de l'objet donnée par  $\mathcal{L}$  sans accommodation et  $A_m$  la position de  $A$  qui oblige l'œil à accommoder au punctum proximum. On introduit les distances algébriques  $p_\infty = \overrightarrow{OA_\infty}$  et  $p_m = \overrightarrow{OA_m}$ . Exprimer ces dernières en fonctions de  $x$ ,  $f'$ ,  $d_m$ .

Sans accommodation l'œil observe à l'infini.



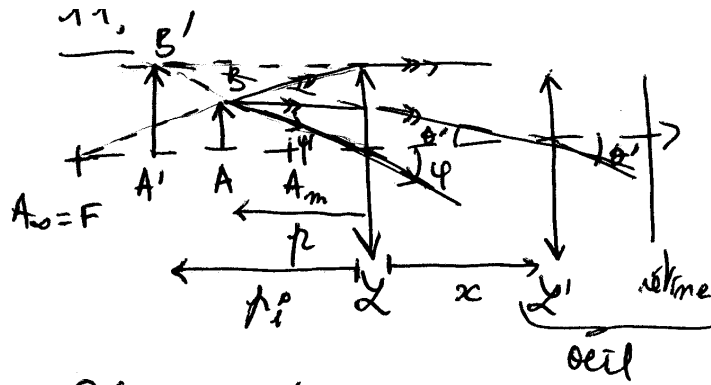
$$\begin{aligned}\text{donc } A_\infty &= F \\ \text{donc } p_\infty &= \overrightarrow{OA_\infty} = \overrightarrow{OF} = -f'\end{aligned}$$

Avec accommodation l'œil observe à la distance  $d_m$ .



$$\begin{aligned}
-\frac{1}{p_m} + \frac{1}{p_i} &= \frac{1}{f'} \\
\text{or } p_i &= \overrightarrow{OA'} = x - d_m \\
\text{donc } \frac{1}{p_m} &= \frac{1}{x - d_m} - \frac{1}{f'} \\
p_m &= -\frac{f'(d_m - x)}{f' + d_m - x}
\end{aligned}$$

8. On note  $p = \overline{OA}$  la position de  $A$  telle que  $p_\infty \leq p \leq p_m$ . Calculer le grossissement  $G(x, p)$  de la loupe pour ces positions  $x$  de l'oeil et  $p$  de l'objet.



$$\begin{aligned}
G(x, p) &= \frac{\theta'}{\theta} \\
\theta &= \frac{AB}{d_m} \\
\theta' &= \frac{A'B'}{|p_i| + x} \\
\frac{A'B'}{p_i} &= \frac{AB}{p} \\
\theta' &= \frac{AB p_i}{p(x - p_i)}
\end{aligned}$$

$$G(x, p) = \frac{d_m p_i}{p(x - p_i)}$$

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{p_i} = \frac{1}{f'} \Rightarrow p_i = \frac{p f'}{p + f'}$$

$$G(x, p) = \frac{d_m f'}{x(p + f') - p f'}$$

9. On note  $A'$  l'image de  $A$  par  $\mathcal{L}$  et  $p' = \overline{OA'}$ . Pour quelle position  $x$  de l'oeil et quelle



$$\begin{aligned}
 G(x, p') &= \frac{d_m p'}{p(x - p')} \\
 \text{or } p &= \frac{p' f'}{f' - p'} \\
 \text{donc } G(x, p') &= \frac{d_m (f' p')}{f' (x - p')}
 \end{aligned}$$

$G$  décroissant avec  $x$  donc  $x = 0$ .

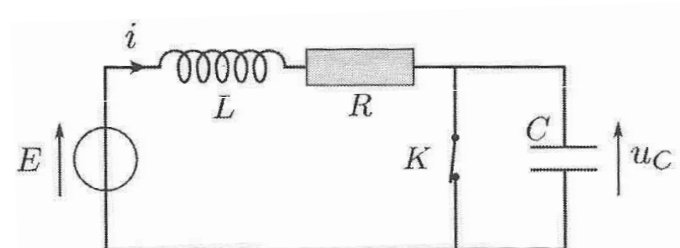
$$G(0, p') = d_m \left( \frac{1}{f'} - \frac{1}{p'} \right)$$

$G$  croissant avec  $p'$  donc  $p' = -d_m$  car au-delà c'est flou, donc

$$G_{\max}(0, -d_m) = 1 + \frac{d_m}{f'}$$

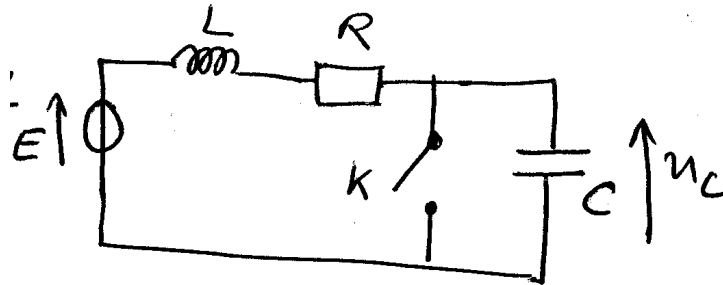
## Régime transitoire

Le condensateur d'un circuit  $RLC$  série, de capacité  $C = 20 \mu\text{F}$ , est mis en court-circuit par un interrupteur  $K$  depuis une durée suffisamment longue pour que le régime soit établi (permanent). Le circuit est alimenté par une source de tension stationnaire idéale de force électromotrice  $E$ . On ouvre  $K$  à un instant pris comme origine temporelle. La bobine du circuit possède une inductance  $L = 50 \text{ mH}$ . On note  $R$  la résistance du résistor,  $i$  l'intensité du courant électrique qui traverse la bobine, et  $u_C$ , la tension aux bornes du condensateur (Fig. ci-après).



Lorsque  $K$  est ouvert, le facteur de qualité du circuit vaut  $Q = 10$ . On note  $\omega_0$  la pulsation propre du circuit.

10. Calculer numériquement  $R$ .



$$\begin{aligned}
\frac{u_c}{E} &= \frac{1/(jC\omega)}{1/(jC\omega) + R + jL\omega} \\
\frac{u_c}{E} &= \frac{1}{jRC\omega \left[ 1 + j\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \left( \sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega} \right) \right]} \\
\frac{u_c}{E} &= \frac{1}{j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} \left( 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)}
\end{aligned}$$

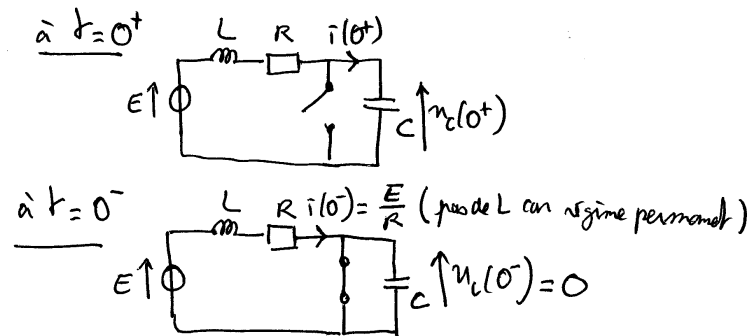
avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$   
donc

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}} \\
Q &= 10 \\
L &= 5 \cdot 10^{-2} \text{ H} \\
C &= 2 \cdot 10^{-5} \text{ F} \\
R &= 5 \text{ } \Omega
\end{aligned}$$

11. Calculer une valeur approchée de la pseudo-pulsation  $\omega_a$ , en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .

$$\begin{aligned}
\frac{u_c}{E} &= \frac{1}{j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} \left( 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \\
\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{u}_c + \frac{1}{Q\omega_0} \dot{u}_c + u_c &= E \\
\frac{\lambda^2}{\omega_0^2} + \frac{\lambda}{Q\omega_0} + 1 &= 0 \\
x^2 + \frac{x}{Q} + 1 &= 0 \\
\Delta &= \frac{1}{Q^2} - 4 < 0 \text{ car } Q \gg 1 \\
x &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{Q} \pm i\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} \right) \\
\lambda &= \omega \left( -\frac{1}{2Q} \pm i\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right) \\
u_c &= A \exp(-\omega_0 t / (2Q)) \cos \left( \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t \right) \\
\omega_a &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \\
\omega_a &\approx \omega_0 \left( 1 - \frac{1}{8Q^2} \right) \text{ avec } Q \gg 1
\end{aligned}$$

12. Que valent  $i(0^+)$  et la tension  $u_C(0^+)$  à l'instant  $t = 0^+$  succédant immédiatement à l'ouverture de  $K$  ?



$$i_c = C \frac{du_c}{dt}$$

donc  $u_c$  continu

donc  $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$

et

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

donc  $i_L$  continu

donc  $i(0^+) = i(0^-) = \frac{E}{R}$

13. La tension aux bornes du condensateur évolue selon :

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{t}{2\tau_e}\right) [A \cos(\omega_a t) + B \sin(\omega_a t)]$$

$A$ ,  $B$  et  $\tau_e$  étant des constantes temporelles. Exprimer  $A$  en fonction de  $E$ .

$$u_c(0) = 0$$

$$u_c(0) = \exp\left(-\frac{0}{2\tau_e}\right) [A \cos(\omega_a) + B \sin(\omega_a \times 0)]$$

$$A = 0$$

14. De même exprimer  $B$ .

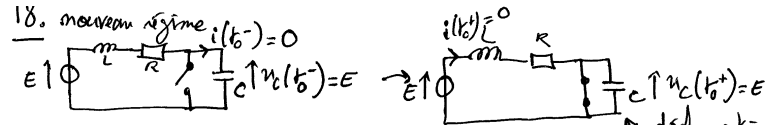
$$i_C(0^+) = i(0^+) = \frac{E}{R}$$

$$i_C(0^+) = C \frac{du_C(0^+)}{dt} = CB \left[ -\frac{1}{2\tau_e} \exp\left(-\frac{0}{2\tau_e}\right) \sin(\omega_a) + \exp\left(-\frac{0}{2\tau_e}\right) \omega_a \cos(\omega_a \times 0) \right]$$

$$\frac{E}{R} = CB\omega_a$$

$$B = \frac{E}{RC\omega_a}$$

15. On attend suffisamment longtemps que le régime s'établisse puis, à un instant pris comme nouvelle origine temporelle, on ferme  $K$ . On retiendra par convention, comme durée du régime transitoire, la durée nécessaire pour que  $i$  atteignent 95% de sa valeur finale (on indique que  $\ln 20 \approx 3$ ). Déterminer la durée  $\tau_{rt}$  du régime transitoire succédant à la fermeture de  $K$ .



$$E = u_L(t > t_0) + Ri(t > t_0)$$

$$E = L \frac{di}{dt} + Ri$$

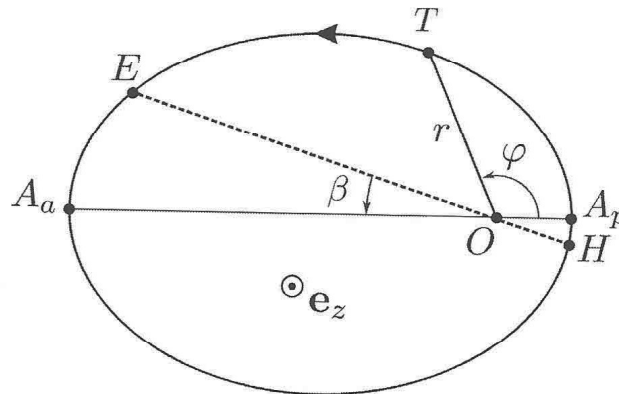
$$\frac{E}{R} = \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i$$

$$i = \frac{E}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right), \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$\tau_{rt} = 3\tau = \frac{3L}{R} = 30 \text{ ms}$$

## Mécanique

La Terre assimilée à un corpuscule  $T$  de masse  $M_T$ , possède une orbite elliptique dans le référentiel héliocentrique. Ce dernier, supposé galiléen, est centré sur le Soleil de masse  $M_S$ , placé en  $O$ . On note  $A_p$  et  $A_a$  les positions orbitales extrêmes de  $T$  : la périhélie  $A_p$  et l'aphélie  $A_a$ . On repère la position de  $T$  à l'aide du système de coordonnées polaires de centre  $O$  :  $r = OT$  et  $\phi = \widehat{A_p OT}$ . Les angles sont orientés dans le sens de parcours de la trajectoire, le vecteur  $\vec{e}_z$  étant orthogonal au plan orbital (Fig. ci-après).



On pose  $r_p = OA_p$  et  $r_a = OA_a$  et on note  $G$  la constante de Newton (dite de gravitation universelle). On introduit  $v_p$  et  $v_a$  les vitesses de  $T$  respectivement en  $A_p$  et  $A_a$ . Sur la figure

précédente, on a représenté la position  $H$  occupée par la Terre au début de l'hiver (solstice d'hiver), ainsi que la position  $E$  occupée par la Terre au début de l'été (solstice d'été) à l'aide de l'angle  $\beta = \widehat{EOA_a} = \widehat{HOA_p} = 12,2^\circ$ .

L'origine (ou référence) de l'énergie potentielle gravitationnelle est prise à l'infini et on note  $\mathcal{E}_m$  l'énergie mécanique de  $T$  dans le référentiel héliocentrique.

On note  $\vec{L}_O$  le moment cinétique de  $T$  en  $O$  et on introduit  $L_z = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_z$

16. Établir une relation entre  $r_p, v_p, r_a, v_a$ .

Théorème du moment cinétique :  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$  or  $\vec{F} // \vec{OA}$

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= cte \\ L_z &= cte \\ m(\vec{OA} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{e}_z &= cte \\ r(\vec{e}_r \wedge \vec{v}) \cdot \vec{e}_z &= cte \\ r^2 \dot{\phi} &= cte \\ (r^2 \dot{\phi})_p &= (r^2 \dot{\phi})_a \\ r_p^2 \frac{v_p}{r_p} &= r_a^2 \frac{v_a}{r_a} \\ r_p v_p &= r_a v_a\end{aligned}$$

17. A-t-on la même énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$  aux points  $A_p$  et  $A_a$  ?

La force gravitationnelle est conservative donc  $E_m(A_p) = E_m(A_a)$

18. Exprimer  $v_a$  en fonction de  $G, M_S, M_T, r_a, r_p$

$$\begin{aligned}\frac{E_m(A_p)}{2} - \frac{GM_T M_S}{r_p} &= \frac{E_m(A_a)}{2} - \frac{GM_T M_S}{r_a} \\ \text{or } v_p &= \frac{r_a v_a}{r_p} \\ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{r_a}{r_p} \right)^2 - 1 \right) v_a^2 &= GM_S \left( \frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a} \right) \\ v_a &= \sqrt{\frac{2GM_S r_p}{r_a(r_a + r_p)}}\end{aligned}$$

19. Exprimer  $L_z$  en fonction de  $G, M_S, M_T, r_a, r_p$

$$\begin{aligned}L_z &= M_T r^2 \dot{\phi} = M_T r_a^2 \dot{\phi}_a \\ L_z &= M_T r_a^2 \frac{v_a}{r_a} = M_T r_a v_a \\ L_z &= M_T \sqrt{\frac{2GM_S r_a r_p}{r_a + r_p}}\end{aligned}$$

20. L'équation polaire de la trajectoire de la Terre est la suivante :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi}$$

où  $e$  et  $p$  sont deux constantes temporelles indépendantes de  $r$  et  $\phi$ . Sachant que  $e \ll 1$ , donner une expression approchée de  $\frac{L_z}{M_T}$  en fonction de  $p$ ,  $e$ , et  $\phi$ .

$$\begin{aligned} L_z &= M_T r^2 \dot{\phi} = M_T \frac{p^2}{(1 + e \cos \phi)^2} \dot{\phi} \\ \frac{L_z}{M_T} &= p^2 (1 + e \cos \phi)^{-2} \dot{\phi} \approx p^2 (1 - 2e \cos \phi) \dot{\phi} \end{aligned}$$

21. On rappelle l'égalité suivante, dans laquelle  $g'(\phi)$  désigne la dérivée d'une fonction  $g(\phi)$  par rapport à  $\phi$  :

$$g'(\phi) \dot{\phi} = \frac{d}{dt} [g(\phi)]$$

ainsi que la relation :

$$\int_0^{\tau_1} dt = \tau_1$$

En déduire une expression approchée de la durée  $\tau_1$  nécessaire pour que  $T$  passe de  $H$  à  $E$ , c'est-à-dire, la durée qui s'écoule entre le solstice d'hiver et le solstice d'été. On exprimera  $\tau_1$  en fonction de  $p$ ,  $M_T$ ,  $L_z$ ,  $\beta$ .

$$\begin{aligned} \frac{L_z}{M_T} &\approx p^2 (1 - 2e \cos \phi) \dot{\phi} = \text{cte} \\ \int_0^{\tau_1} \frac{L_z}{M_T} dt &\approx \int_0^{\tau_1} p^2 (1 - 2e \cos \phi) \dot{\phi} dt \\ \frac{L_z}{M_T} \tau_1 &\approx \int_{\phi_H = -\beta}^{\phi_E = \pi - \beta} p^2 (1 - 2e \cos \phi) d\phi \\ \frac{L_z}{M_T} \tau_1 &\approx p^2 (\pi - 4e \sin \beta) \\ \tau_1 &\approx \frac{M_T p^2}{L_z} (\pi - 4e \sin \beta) \end{aligned}$$

22. De même exprimer la durée  $\tau_2$  nécessaire pour que  $T$  passe de  $E$  à  $H$ , c'est-à-dire, la durée qui s'écoule entre le solstice d'été et d'hiver.

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_2} \frac{L_z}{M_T} dt &\approx \int_{\pi - \beta}^{2\pi - \beta} p^2 (1 - 2e \cos \phi) d\phi \\ \tau_2 &\approx \frac{M_T p^2}{L_z} (\pi + 4e \sin \beta) \end{aligned}$$

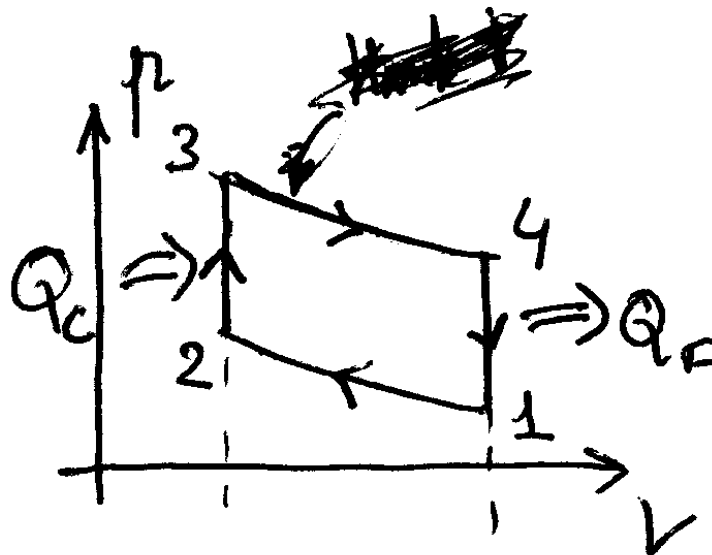
## Thermodynamique

Un moteur thermique à air fonctionne en cycle fermé au cours duquel  $n$  moles d'air, assimilés à un gaz parfait subissent entre quatre états  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  et  $E_4$  les transformations réversibles suivantes :

- $E_1 \rightarrow E_2$  une compression isentropique ;
- $E_2 \rightarrow E_3$  une compression isochore ;
- $E_3 \rightarrow E_4$  une détente isentropique ;
- $E_4 \rightarrow E_1$  une détente isochore.

On désigne par  $p_k$ ,  $V_k$  et  $T_k$  les pressions, volumes et températures des états  $E_k$ , où  $k = 1, 2, 3$  ou  $4$ . On pose  $V_M = V_1 = V_4$  et  $V_m = V_2 = V_3$  et on introduit le facteur de compression  $a = V_M/V_m$ . On note  $R$  la constante des gaz parfaits et  $\gamma = C_{pm}/C_{vm}$ , le rapport de la capacité thermique molaire à pression constante sur la capacité thermique molaire à volume constant. On note respectivement  $Q$  et  $W$  le transfert thermique et le travail algébriquement reçu par le gaz au cours d'un cycle et  $Q_{ij}$  et  $W_{ij}$  respectivement le transfert thermique et le travail algébriquement reçu par le gaz lors de la transformation menant de l'état  $E_i$  à l'état  $E_j$ .

23. On note  $Q_c$  le transfert thermique échangée avec la source chaude. Identifier le  $Q_{ij}$  correspondant à  $Q_c$ .



$Q_c$  est forcément positive,  $T_3 > T_2$  car  $p_3V_3 > p_2V_2$  donc  $U(T_3) > U(T_2)$  donc  $Q_c = Q_{23} = \Delta_{23}U > 0$ .

24. Exprimer  $Q_c$  en fonction d'une capacité thermique molaire et d'une différence de température.

$2 \rightarrow 3$  isochore donc  $W_{23} = 0$  donc

$$\begin{aligned} \Delta_{23}U &= Q_{23} \\ nC_{V,m}(T_3 - T_2) &= Q_c \end{aligned}$$

25. On note  $Q_f$  le transfert thermique échangée avec la source froide. Identifier le  $Q_{ij}$  correspondant à  $Q_f$ .

$Q_f$  est forcément négative,  $T_1 < T_4$  car  $p_1 V_1 < p_4 V_4$  donc  $U(T_1) < U(T_4)$  donc  $Q_f = Q_{41} = \Delta_{41}U < 0$ .

26. Exprimer  $Q_f$  en fonction d'une capacité thermique molaire et d'une différence de température.

$4 \rightarrow 1$  isochore donc  $W_{41} = 0$  donc

$$\begin{aligned}\Delta_{41}U &= Q_{41} \\ nC_{V,m}(T_1 - T_4) &= Q_f\end{aligned}$$

27. Exprimer l'efficacité  $\eta$  de cette machine, rapport du transfert d'énergie utile, sur le transfert d'énergie nécessaire pour la faire fonctionner. On exprimera  $\eta$  en fonction des  $Q_{ij}$ .

Il s'agit d'un moteur donc son objectif est de transformer  $Q_c$  en  $W$  donc  $\eta = \frac{|W|}{Q_c}$ .

Le premier principe sur un cycle complet donne  $\Delta_{11} = Q_c + Q_f + W = 0$

$$\text{donc } \eta = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}}$$

28. Déterminer les températures  $T_1$  et  $T_3$  en fonction des températures  $T_2$ ,  $T_4$ , et  $a$ .

$1 \rightarrow 2$ , isentropique + réversible + gaz parfait  $\Rightarrow$  loi de Laplace.

$$\begin{aligned}p_1 V_1^\gamma &= p_2 V_2^\gamma \\ T_1 V_1^{\gamma-1} &= T_2 V_2^{\gamma-1} \\ T_1 &= T_2 \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} \\ T_1 &= T_2 \left( \frac{V_m}{V_M} \right)^{\gamma-1} = T_2 a^{1-\gamma}\end{aligned}$$

$3 \rightarrow 4$ , isentropique + réversible + gaz parfait  $\Rightarrow$  loi de Laplace.

$$\begin{aligned}T_3 V_3^{\gamma-1} &= T_4 V_4^{\gamma-1} \\ T_3 &= T_4 \left( \frac{V_4}{V_3} \right)^{\gamma-1} \\ T_3 &= T_4 \left( \frac{V_M}{V_m} \right)^{\gamma-1} = T_4 a^{\gamma-1}\end{aligned}$$

29. Exprimer  $\eta$  en fonction des températures  $T_k$ .



$$\begin{aligned}\eta &= 1 + \frac{Q_f}{Q_c} \\ \eta &= 1 + \frac{nC_{V,m}(T_1 - T_4)}{nC_{V,m}(T_3 - T_2)} \\ \eta &= 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}\end{aligned}$$