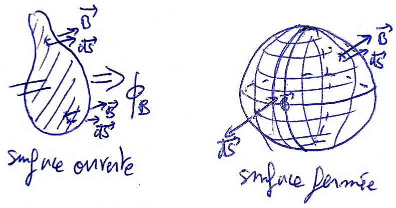
Devoir Maison 12
Éléments de correction

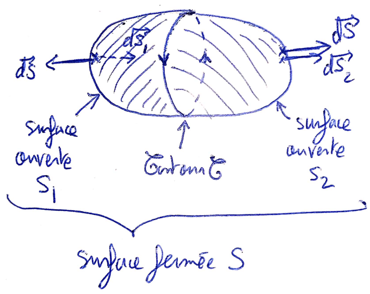
Création d'un champ $\vec{B}_1$ « tournant »

On fait l'hypothèse d'être dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaire (ARQS) magnétique : on calcule le champ magnétique créé par des courants variables $i(t)$, comme en magnétostatique. En particulier, on peut utiliser le théorème d'Ampère.

1. Donner l'expression du flux du champ magnétique à travers une surface quelconque. Que vaut ce flux si on choisit une surface fermée ? Si on découpe une surface fermée en deux surfaces collées, expliquer pourquoi on parle de conservation du flux magnétique.

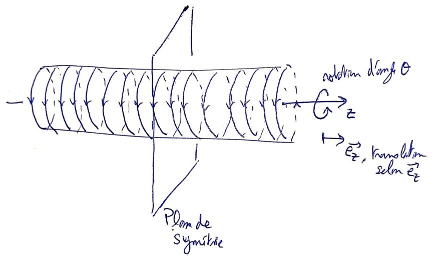


A travers une surface quelconque $\Phi_B = \iint_{M\in S} \vec{B}\,(M)\,.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$. Pour une surface fermée $\Phi_S = 0$.

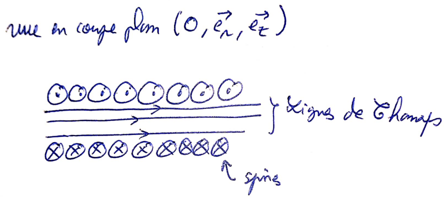


Si on découpe une surface fermée S en deux surfaces S_1 et S_2 partageant le même contour, on peut écrire $\Phi_S = \iint_{S_1} \vec{B}\,(M)\,.\overrightarrow{\mathrm{d}S} + \iint_{S_2} \vec{B}\,(M)\,.\overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$ or comme $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est toujours orienté vers l'extérieur on peut avoir $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ de même orientation que $\overrightarrow{\mathrm{d}S_2}$ et d'orientation opposée à $\overrightarrow{\mathrm{d}S_1}$, d'où $-\iint_{S_1} \vec{B}\,(M)\,.\overrightarrow{\mathrm{d}S_1} + \iint_{S_2} \vec{B}\,(M)\,.\overrightarrow{\mathrm{d}S_2} = 0$. Enfin on a $\iint_{S_1} \vec{B}\,(M)\,.\overrightarrow{\mathrm{d}S_1} = \iint_{S_2} \vec{B}\,(M)\,.\overrightarrow{\mathrm{d}S_2}$ le flux se conserve bien entre surface partageant le même contour car $\Phi_{S_1} = \Phi_{S_2}$

2. Faire un schéma d'un unique solénoïde et utiliser symétries et invariances pour tracer la carte des lignes de champs magnétiques.

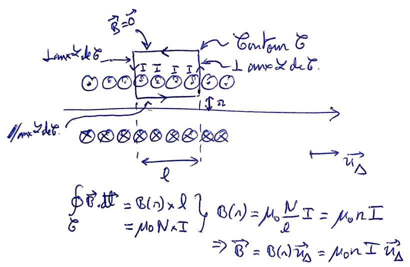


On fait un schéma d'une infinité de spires perpendiculaire à l'axe (Oz). On a le plan (M,$\vec{e}_x$,$\vec{e}_y$) comme plan de symétrie donc $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire au plan de symétrie, donc $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_z$. Le solénoïde est invariant par translation selon $\vec{e}_z$, donc $\vec{B}(M) = B(r,\theta)\vec{e}_z$, de plus le solénoïde est invariant par rotation autour de l'axe (Oz) donc $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_z$.



On peut ensuite tracer les lignes de champ magnétique comme des droites parallèles à l'axe (Oz).

3. On admet que le champ extérieur est nul : établir à l'aide du théorème d'Ampère l'expression du champ intérieur créé par le solénoïde unique en fonction de μ_0, n le nombre de spires par unité de longueur parcourue par un courant I et le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ de Δ l'axe du solénoide, l'orientation du courant étant celle qui correspond au sens direct autour de $\vec{u}_\Delta$.



On refait la démo du cours avec un schéma, ensuite on choisi un contour rectangulaire dans un plan $(O, \vec{u}_\Delta, \vec{e}_r)$ avec un côté à l'extérieur et un côté à l'intérieur du solénoïde, on déduit que le champ est uniforme dans le solénoïde d'expression $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_\Delta$.

On considère un ensemble de deux solénoïdes infinis identiques d'axes Ox et Oy perpendiculaires concourants en O comme l'indique la figure ci-dessous. Les spires sont considérées comme circulaires car réalisées sur un cylindre de rayon R comportant n spires jointives par unité de longueur. Les spires du solénoïde d'axe Oy sont parcourues par une intensité $I_y = I_0 \cos(\Omega t + \alpha)$ et celles du solénoïde d'axe Ox par une intensité $I_x = I_0 \cos(\Omega t)$. L'orientation des courants correspond au sens direct autour des axes respectifs.

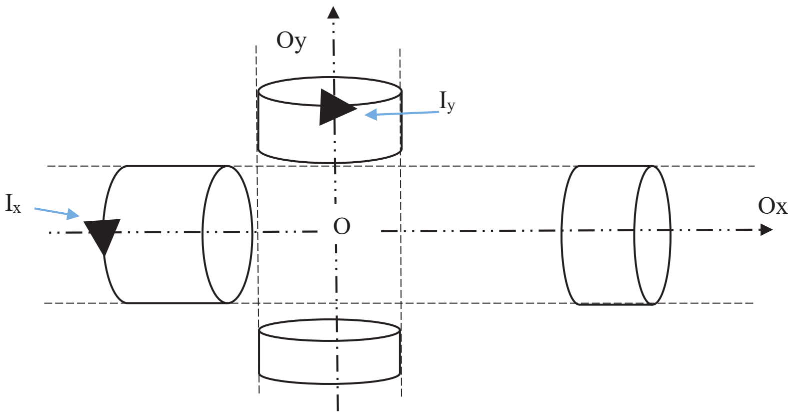
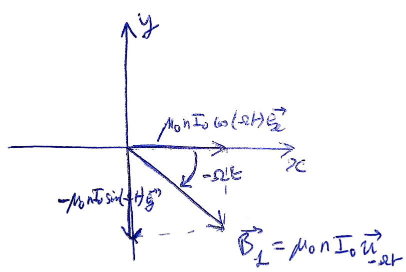


Figure – Configuration des solénoïdes
Les solénoïdes sont infiniment longs, seules quelques spires ont été représentées.

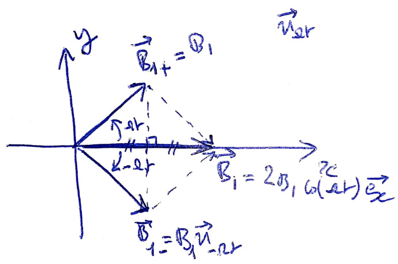
4. En utilisant le principe de superposition, établir que le champ magnétique dans la zone commune aux deux circuits, pour un déphasage $\alpha = \frac{\pi}{2}$, est un champ « tournant » $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}$, c'est-à-dire un champ de norme constante B_1 porté par une direction de vecteur unitaire $\vec{u}$ qui tourne à vitesse uniforme dans le plan xOy. On précisera sa norme B_1 et sa vitesse de rotation ω.



Principe de superposition, on ajoute le champ créé par les deux bobines $\vec{B}_1 = \mu_0 n I_x \vec{e}_x + \mu_0 n I_y \vec{e}_y = \mu_0 n I_0 \left(\cos(\Omega t)\, \vec{e}_x + \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y\right) = \mu_0 n I_0 \left(\cos(\Omega t)\, \vec{e}_x + \sin(-\Omega t)\, \vec{e}_y\right)$, donc $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}_{-\Omega t}$, avec $B_1 = \mu_0 n I_0$ et $\vec{u}_{-\Omega t}$ le vecteur unitaire tournant d'angle $-\Omega t$, donc de vitesse angulaire $\omega = -\Omega$.

Il est en réalité difficile de produire des champs tournants. On utilise donc un champ oscillant créé par une bobine unique d'axe Ox : $\vec{B}_1' = 2B_1 \cos(\omega t)\vec{e}_x$.

5. Montrer que ce champ est équivalent à la superposition de 2 champs de même amplitude (à préciser) qui tournent en sens opposé à la même vitesse.



Le champ tournant établit précédemment est $\vec{B}_{1-} = B_1 \left(\cos(\Omega t)\,\vec{e}_x + \sin(-\Omega t)\,\vec{e}_y\right)$ celui tournant en sens opposé, est $\vec{B}_{1+} = B_1 \left(\cos(\Omega t)\,\vec{e}_x + \sin(\Omega t)\,\vec{e}_y\right)$, la somme des deux donne $\vec{B}'_1 = \vec{B}_{1-} + \vec{B}_{1+} = 2B_1 \cos(\Omega t)\,\vec{e}_x$

Création d'un champ permanent intense $\vec{B}_0$

On utilise un solénoïde « épais » (épaisseur $e = R_2 - R_1$) considéré comme la superposition de solénoïdes infinis (en réalité de longueur $L \gg R_2$) de même axe Oz. Il est réalisé par un empilement jointif de spires de section carrée, de côté $a = 1,0$ mm, enroulées sur un cylindre de longueur $L = 4,0$ m, depuis un rayon $R_1 = 20$ cm jusqu'à un rayon $R_2 = 25$ cm. Les spires sont des fils de cuivre parcourus par un courant continu I_0 uniformément réparti, orienté dans le sens direct autour de Oz. La situation est schématisée sur la figure ci-dessous. Les sections carrées sont dans les plans $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$ c'est-à-dire en positionnement radial.

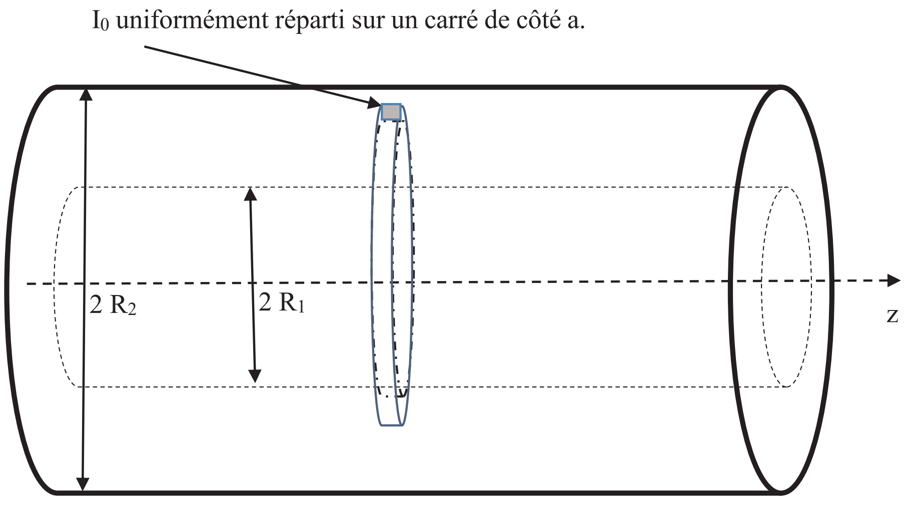
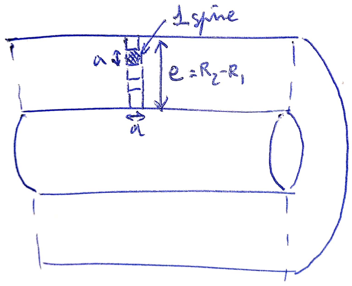


Figure – Solénoïde épais

6. On modélise ce solénoïde épais comme une succession de solénoïde concentrique. Quel est le nombre de solénoïdes concentriques parcouru par un courant I_0 qui sont empilés dans

le solénoïde épais ? Quelle est le nombre de spire par unité de longueur parcourue par un courant I_0 d'un de ces solénoïdes ?



Une spire est de côté a et elles sont empilés sur une hauteur $R_2 - R_1 = e$. Il y a donc $\frac{e}{a}$ spire empilées radialement, donc le nombre de solénoïde est $\frac{e}{a}$. Pour un de ses solénoïdes une spire prend une longueur de taille a donc il y a 1 spire toutes les longueurs a, soit une densité linéique de $n = \frac{1}{a}$.

7. En utilisant le principe de superposition et le résultat la question 3., calculer le champs total créé par le solénoïde épais. Quelle est l'intensité nécessaire pour engendrer un champ de 1 Tesla ?

On ajoute les $\frac{e}{a}$ champs créé par un solénoïde de densité linéique de spire $\frac{1}{a}$ parcours par un courant I_0. On obtient $B = \frac{e}{a}\mu_0\frac{1}{a}I_0 = \frac{\mu_0 e I_0}{a^2}$. Donc $I_0 = \frac{a^2 B}{\mu_0 e} = \frac{a^2 B}{\mu_0(R_2-R_1)} = 16$ A