

Devoir Surveillé 1

1 Capteur capacitif

Les capteurs ont évolué et utilisent de plus en plus l'effet capacitif. Un élément chauffant intégré au capteur permet de le maintenir sec en vaporisant l'eau tombé. Ceci évite les fausses communications dues au brouillard ou à des phénomènes de condensation (rosée du matin). Le capteur est une platine sur substrat céramique, son principe de fonctionnement repose sur une détection capacitive. Ainsi l'accumulation de pluie sur la surface de la plaque aura pour conséquence de modifier la valeur de sa capacité.

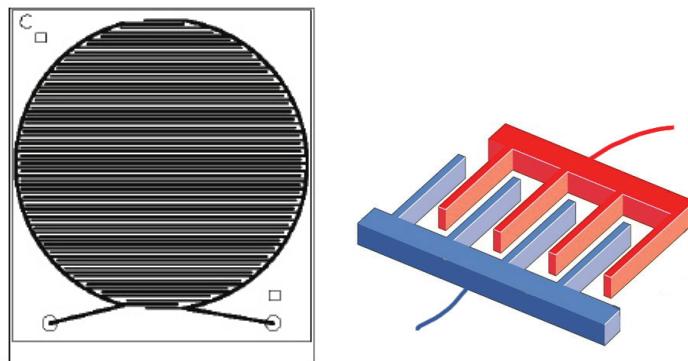


FIGURE – Cellule capacititive et schéma de principe de sa géométrie

1. Justifier que ce capteur puisse se modéliser par l'association de condensateur en parallèle et établir l'expression de la capacité équivalente de N condensateurs en parallèle.
2. La capacité du condensateur varie en fonction de la présence ou non de goutte d'eau sur le capteur. Afin de mesurer sa valeur, le condensateur est chargé avec le courant constant i et l'on mesure la durée Δt nécessaire pour que la tension à ses bornes atteigne la valeur de référence U_{ref} . Exprimer la capacité C du condensateur en fonction de i , U_{ref} et Δt .
3. Tracer l'allure de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps, lors d'une charge sous une tension constante U_{ref} à travers une résistance R . Tracer le graphe de la tension aux bornes du condensateur lors d'une charge à courant constant i l'emmenant à une tension finale U_{ref} . Comparer les graphes.
4. Proposer un montage permettant de mesurer la capacité C d'un condensateur au laboratoire, en précisant les mesures effectuées.

2 Mesure de la fréquence Doppler

Cette exercice porte sur la mesure de la vitesse d'un véhicule à l'aide d'un radar fonctionnant sur le principe de l'effet Doppler. Le radar émet une onde électromagnétique de fréquence $f = 1,00 \text{ GHz}$. On donne $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ la célérité d'une onde électromagnétique dans l'air qu'on assimile au vide.

Au niveau de l'antenne d'un radar, on dispose de deux tensions sinusoïdales correspondant aux ondes électromagnétiques émises et réceptionnées par le radar.

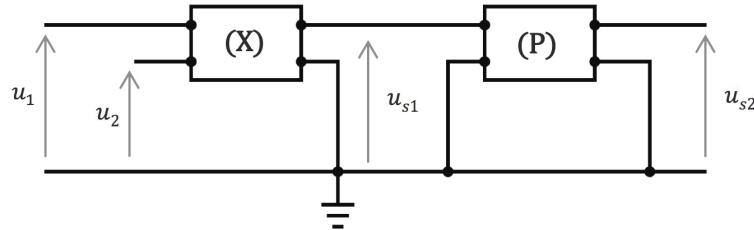
- $u_1(t) = u_{1m} \cos(\omega_1 t)$ la tension correspondant à l'onde émise ($\omega_1 = 2\pi f$)
- $u_2(t) = u_{2m} \cos(\omega_2 t + \phi)$ la tension correspondant à l'onde réfléchie ($\omega_2 = 2\pi f_r$).

On définit une fréquence Doppler $f_D = f_r - f \ll f_r$ telle que $f_D \ll f_r$ et $f_D \ll f$ et ayant pour expression :

$$f_D = \frac{2fv}{c} \quad (1)$$

avec v la vitesse du véhicule et c la célérité d'une onde électromagnétique.

Le schéma de principe de la mesure du décalage en fréquence f_D est donné ci-dessous :



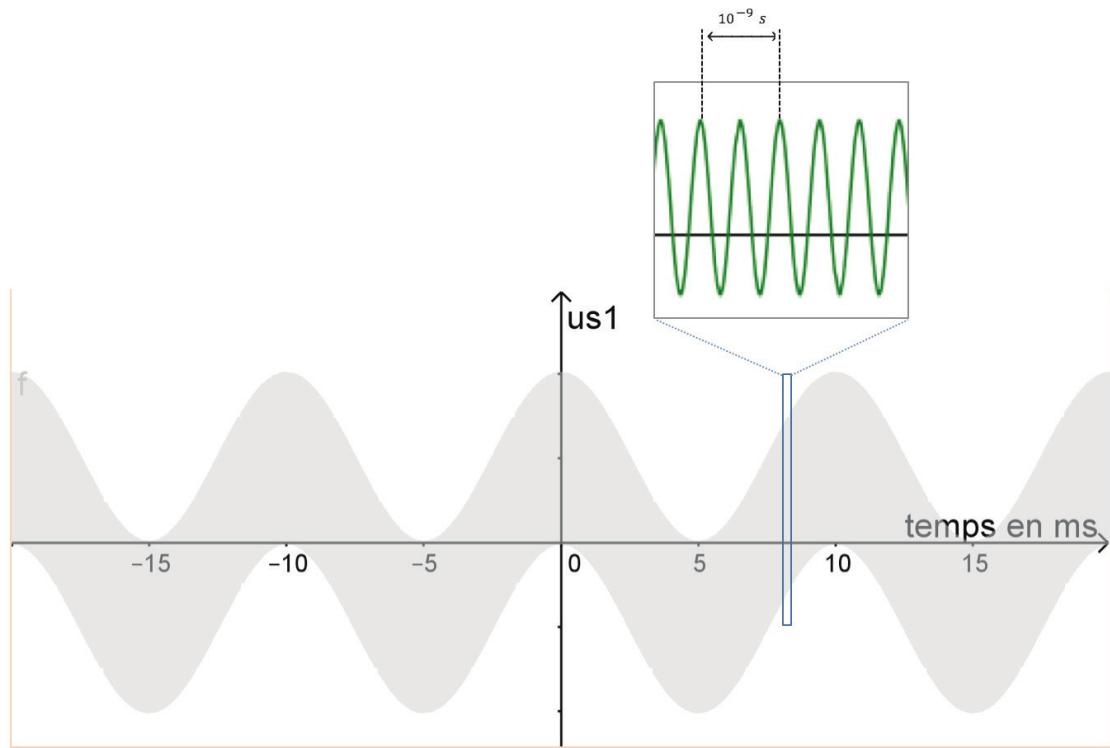
Le multiplicateur (X) réalise l'opération : $u_{s1}(t) = Ku_1(t)u_2(t)$

5. Linéariser l'expression de $u_{s1}(t)$
6. En déduire l'allure du spectre en amplitude de la tension $u_{s1}(t)$
7. Quelle doit-être la fonction du quadripôle (P) pour obtenir une tension de sortie sous la forme :

$$u_{s2}(t) \simeq K' \cos(2\pi f_D t + \phi)$$

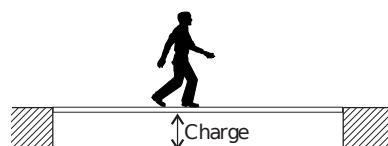
8. Proposer, en justifiant, une structure électrique pour ce quadripôle ainsi que des valeurs réalistes pour les composants choisis si on veut mesurer des vitesses de l'ordre de 30 m.s^{-1} .

On donne ci-dessous la courbe représentant $u_{s1}(t)$ et un zoom sur une petite portion de celle-ci.

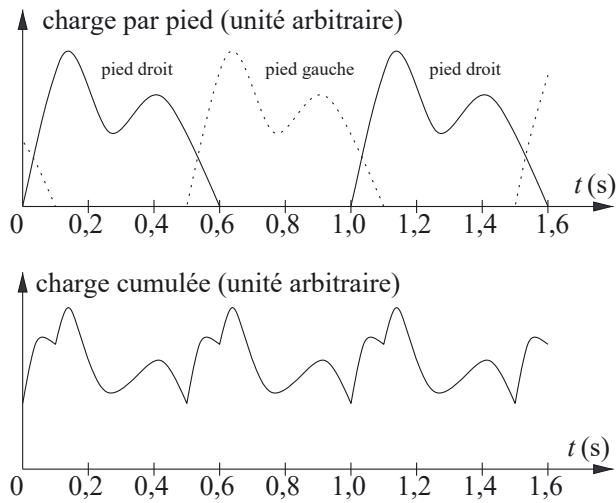


9. Justifier l'allure de cette courbe
10. Représenter sur votre copie l'allure de la courbe $u_{s2}(t)$ en indiquant l'échelle de temps.
11. Déterminer la vitesse de la voiture.

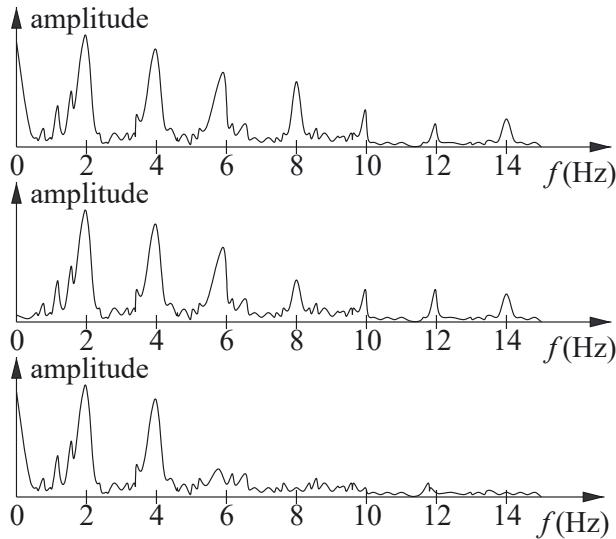
3 Signal de marche



L'action de la marche d'un piéton sur une passerelle est traduite par une force verticale périodique, appelée charge. Voici l'allure des graphes de charge par pied, puis cumulé en fonction du temps.



12. Quelle est la période du signal pour la charge du pied droit ? Du pied gauche ? Cumulée ?
13. Proposer une explication pour la forme du signal de charge d'un seul pied.
14. Pourquoi le signal cumulé est-il continu ?
15. Proposer une forme pour le signal cumulé d'un coureur.
16. Parmi les trois spectres en amplitude suivants, expliquer (en justifiant la réponse) lequel est le plus vraisemblable pour le signal cumulé.



4 Le Millennium Bridge



Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du Hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix huit mois de recherches furent nécessaire pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés.

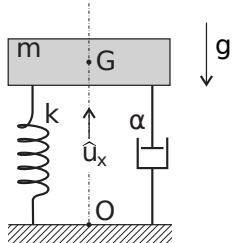


Fig. – Oscillateur

Un oscillateur est constitué d'une masse m dont le centre d'inertie G est repéré par la position x dans le référentiel galiléen (O, \vec{u}_x) – voir figure ci-dessus. L'origine O se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur k et de longueur à vide l_0 ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité α , exerçant sur m une force de frottement $\vec{F}_f = -\alpha \dot{x} \vec{u}_x$, avec $\alpha > 0$. A tout instant t , on assimile la distance OG à la longueur $l(t)$ du ressort. L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g \vec{u}_x$ avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

17. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$ dans laquelle on a introduit la fonction $X(t) = x(t) - \tilde{x}$ où \tilde{x} est une constante que l'on déterminera en fonction de g , ω_0 et l_0 . On précisera les expressions et significations de ω_0 et ξ .

18. Dans le régime libre, le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles $X(0) = X_0 \neq 0$ et $\dot{X}(0) = V_0 \neq 0$. Déterminer les solutions du régime libre (en fonction de ω_0 , ξ , X_0 , V_0 et t) pour les cas $\xi = 0$ et $0 < \xi < 1$ et préciser leur comportement. Dans certains cas, le vent peut induire sur le système une force proportionnelle au vecteur vitesse que l'on écrit $\vec{F}_v = \beta \dot{x} \vec{u}_x$, avec $\beta > 0$. Quelle peut-être la conséquence de ce phénomène ?

Différents cas peuvent être examinés pour l'excitation (ou forçage) $F(t)$ de l'oscillateur étudié lors des deux précédentes questions. Nous nous placerons dans l'optique d'une passerelle piétonne.

L'action de la marche d'un piéton est caractérisé dans l'exercice précédent. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte.

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représentons cette force, appelée charge, par un vecteur périodique $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(2\pi ft)$.

Le vecteur \vec{F}_0 correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence f correspond à celle d'une marche normale. Nous considérerons que $\vec{F}_1 = 0,4\vec{F}_0$. Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme $-\vec{u}_x$.

On note $F_0 = \|\vec{F}_0\|$ le module de la force statique, $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ la réponse en déplacement de l'oscillateur et $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$ sa représentation complexe.

19. Que devient l'équation de l'oscillateur en Y sous le forçage piéton ? Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$, rapport de la représentation complexe de la réponse en déplacement \underline{Y} sur la représentation complexe de l'excitation $\underline{E} = \frac{1}{m}\underline{F}_1$. On exprimera $\underline{H} = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}}$ en fonction de ξ , ω_0 et $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$.
20. Sous quelle condition portant sur ξ , un phénomène de résonance peut-il se produire ? Pour quelle pulsation ω_r obtient-on alors ce phénomène ? Exprimer le gain en amplitude à la résonance $|H|(\omega_r)$ dans la limite $\xi^2 \ll 1$.
21. En se plaçant dans l'hypothèse $\xi^2 \ll 1$ et à partir d'une analyse de la courbe 1 de la figure ci-dessous, déterminer un ordre de grandeur de ξ ainsi que la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur modélisant le Millennium Bridge avant la mise en place des amortisseurs harmoniques.
22. Pourquoi est-il important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique ?

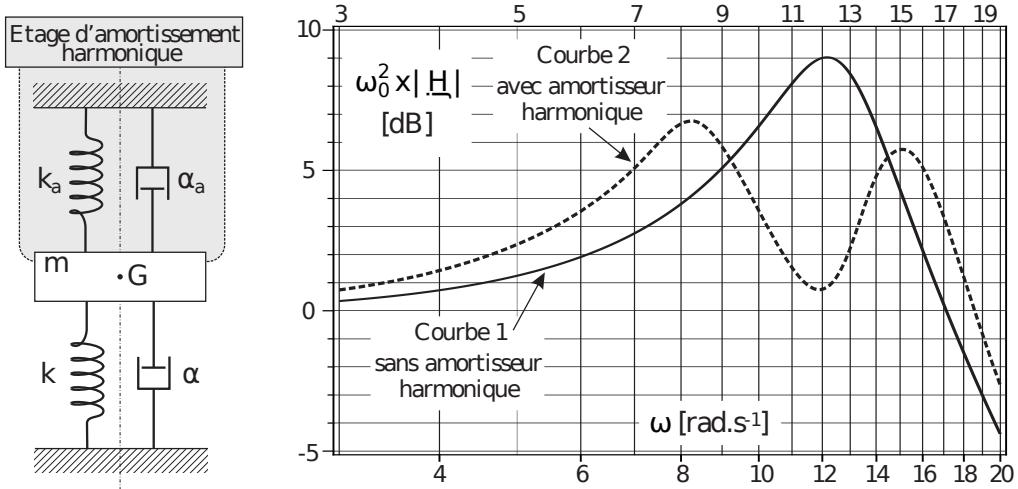


Figure – Schéma et réponse d'un amortisseur harmonique appliquée au modèle du Millennium Bridge.

5 Caractéristique tension-courant d'une jonction Josephson

Une application directe des supraconducteurs est la jonction Josephson. Cette dernière est constituée de deux supraconducteurs en regard séparés par un isolant d'épaisseur d , typiquement de quelques nanomètres.

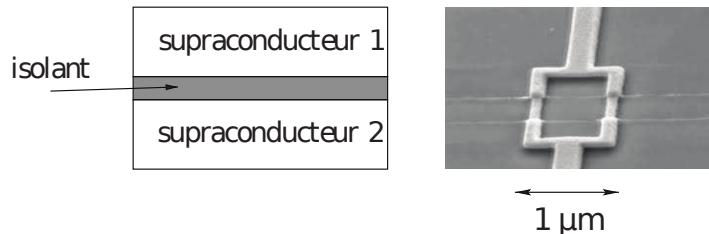


Fig. – À gauche : schéma d'une jonction Josephson. À droite : photographie réelle d'une jonction Josephson dans un circuit électrique.

On peut montrer qu'un courant de la forme $I_s = I_c \sin(\phi(t))$ peut traverser l'isolant, où I_c est appelé courant critique caractéristique de la jonction Josephson. La représentation électrique d'une jonction Josephson est donnée dans la figure ci-dessous. Lorsqu'il existe une tension électrique V aux bornes de la jonction Josephson, on peut montrer que

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{4\pi e}{h} V$$

Dans le paragraphe précédent, les effets capacitif et résistif d'une jonction Josephson ont été négligés. Afin de les prendre en compte, il faut rajouter un condensateur de capacité C et une résistance de valeur R en parallèle de la jonction. La représentation réelle de la jonction est donnée dans la figure ci-dessous.

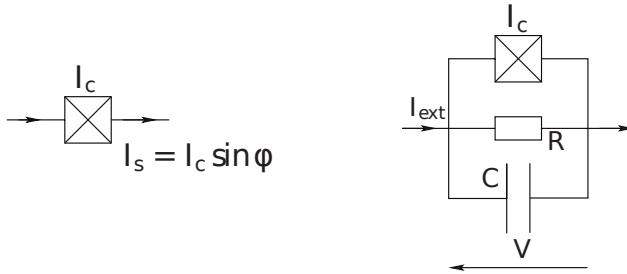


Fig. – Représentations électriques d'une jonction Josephson. À gauche, idéale, à droite réelle.

Dans cette partie, on étudie la caractéristique électrique de la jonction réelle lorsqu'elle est soumise à un échelon de courant de valeur I_{ext} .

23. A partir de la loi des noeuds et des relations précédentes, montrer que

$$I_{ext} = \frac{Ch}{4\pi e} \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{h}{4\pi e R} \frac{d\phi}{dt} + I_c \sin(\phi(t))$$

Dans toute cette partie on travaille avec des variables adimensionnées $\kappa = \frac{I_{ext}}{I_c}$, $\tau = \omega_J t$ et un paramètre β_J .

24. Montrer que l'équation différentielle électrique de la question précédente se met sous la forme suivante, pour laquelle on donnera les expressions de ω_J et β_J .

$$\kappa = \frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \beta_J \frac{d\phi}{d\tau} + \sin(\phi(t))$$

Etudions dans un premier temps le cas $\beta_J \gg 1$, appelé cas statique. Dans notre problème, la tension V dépend du temps. La grandeur pertinente est donc la moyenne temporelle $\langle V(t) \rangle$. Dans le cas $\beta_J \gg 1$, l'équation de la question précédente se résout analytiquement et on trouve
 $\langle V(t) \rangle = \pm R \sqrt{I_{ext}^2 - I_c^2}$ pour $|I_{ext}| \geq I_c$
 $\langle V(t) \rangle = 0$ sinon

25. La condition $\beta_J \gg 1$ est-elle vérifiée pour des petites ou des grandes capacités ? Comment le circuit électrique se simplifie-t-il dans ce cas ?

26. Que devient le circuit simplifié de la question précédente lorsque $I_{ext} \gg I_c$? Interpréter.

On donne le résultat expérimental de la caractéristique tension-courant obtenue par Courtois, Meschke, Peltonen et Pekola (2008) dans la figure ci-dessous.

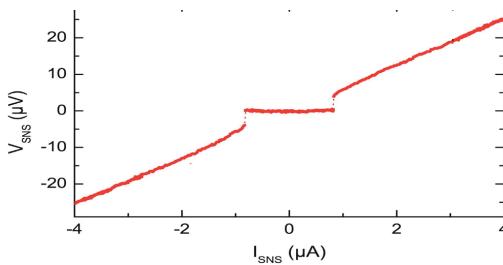


Fig. – Caractéristique électrique expérimentale obtenue par Courtois, Meschke, Peltonen et Pekola (2008). On mesure la tension moyenne V_{SNS} aux bornes de la jonction Josephson en fonction du courant extérieur I_{SNS}

27. A partir du graphe expérimental, déterminer la valeur de I_c et celle de la résistance R du circuit. On prendra soin de bien expliquer le raisonnement.

6 Les memristors - le quatrième dipôle

En 1971, le professeur Léon Chua - qui exerça à l'Université de Berkeley - prédit l'existance d'un dipôle passif nouveau capable de servir de mémoire. Ce dipôle venant compléter la liste des trois dipôles fondamentaux de l'électricité à savoir le résistor, la bobine et le condensateur. Le terme de memristor qu'il inventa résulte de la contraction des deux termes memory et resistor.

En 2008, des chercheurs des HP Labs ont publié un article dans la revue Nature intitulé The missing memristor is found, dans lequel ils annoncent avoir mis au point un memristor présentant les propriétés prévues par Léon Chua en 1971. La photographie de la figure ci-dessous montre un ensemble de ces memristors.

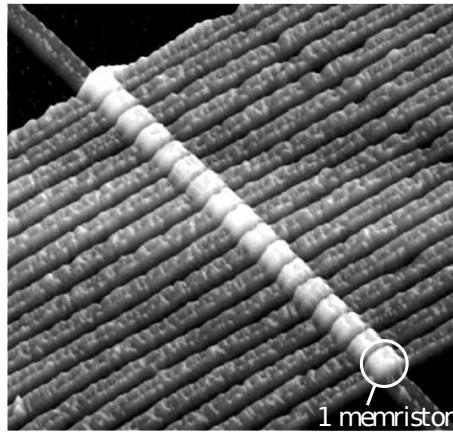


Figure – Un ensemble de memristors (échelle nanométrique) HP Labs

En 2015, HP et SanDisk se sont associés pour développer la technologie des mémoires à base de memristors. Les atouts espérés de ce type de mémoires peuvent laisser rêveur : 1 000 fois plus rapides que les mémoires flashs actuelles, 1 000 fois plus de cycles lecture-écriture qu'actuellement et , pour couronner le tout, une densité inégalée au point de pouvoir doter un smartphone d'une mémoire de 100 To en 2020 !

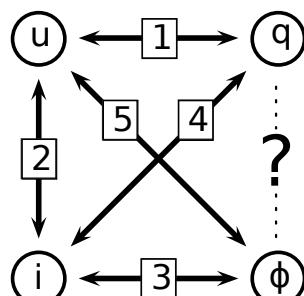


Figure – Carré fondamental

Les grandeurs fondamentales de l'électrocinétique sont la charge q , le courant i , le flux propre magnétique ϕ à travers le circuit et la tension u . Elles sont en général dépendantes du temps t . On considère les trois dipôles classiques que sont le résistor de résistance R , la bobine d'inductance L et le condensateur de capacité C . Ces trois dipôles seront supposés parfaits. Il est

possible de représenter les quatre grandeurs fondamentales de l'électrocinétique au sommet d'un graphe - carré en l'occurrence - où les arêtes représentent des relations fondamentales ou des relations fonctionnelles des dipôles. Ce carré est représenté sur la figure ci-dessus. Avant 1971, on connaissait cinq relations entre les sommets de ce graphe et une était manquante. On se placera systématiquement en convention récepteur pour tout dipôle étudié dans la suite du problème.

28. Rappeler les relations fonctionnelles de proportionnalité caractérisant les trois dipôles parfaits classiques. Ces relations correspondent aux arrêtes 1, 2 et 3 du carré fondamental de la figure ci-dessous. On précisera l'unité usuelle de chaque coefficient de proportionnalité.
29. Rappeler la relation fondamentale liant q , i et t . A partir de la caractéristique d'une bobine justifier que $u = \frac{d\phi}{dt}$.
30. Déduire des deux questions précédentes une écriture de chaque relation 1 à 5 du carré fondamental de la figure ci-dessus sous la forme $dx = ydz$.
31. Dans son article de 1971, Léon Chua prédit l'existence d'une relation $f(\phi, q) = 0$ que l'on peut soit expliciter sous la forme $\phi = \phi(q)$, on dit que l'on a un memristor contrôlé par la charge ; soit sous la forme $q = q(\phi)$, on dit alors que l'on a un memristor contrôlé par le flux. La sixième relation différentielle est posée sous la forme $d\phi = M(q)dq$ où $M(q)$ est la memristance. Quelle unité rencontrée fréquemment en électricité est aussi celle de la memristance ? On justifiera précisément sa réponse.
32. On associe deux memristors de memristances M_1 et M_2 en série. Quelle est la memristance M du dipôle équivalent ? On justifiera sa réponse. Même question si on associe M_1 et M_2 en parallèle.

Afin de concrétiser la notion de memristor, on propose de le modéliser par la relation $\phi(q) = \alpha q + \frac{\beta}{3}q^3$ où α et β sont des coefficients réels positifs. On impose dans le memristor une intensité $i(t) = i_0 \sin(\omega t)$ pour $t \geq 0$ et on suppose que pour $t < 0$, $i = 0$. Enfin, on considère qu'à la date $t = 0$, on a $q(t = 0) = 0$.

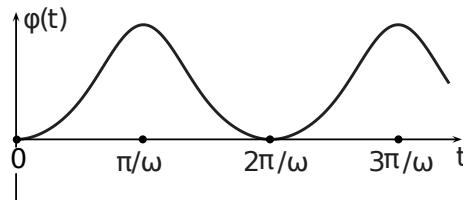


Figure – Graph de $\phi(t)$

33. Déterminer l'expression de $q(t)$ et tracer sur un même graphique les courbes représentatives de $i(t)$ et $q(t)$.
34. On donne sur la figure ci-dessus la courbe représentative de $\phi(t)$. Reproduire cette courbe en y rajoutant sans calcul l'allure de la courbe représentative de $u(t)$.

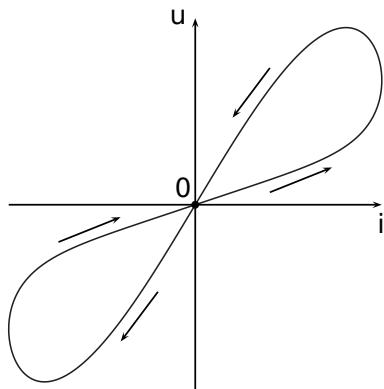


Figure – Courbe $u(i)$ du memristor proposé

35. En analysant la courbe $u(i)$ du memristor précédent représentée sur la figure ci-dessus, pourquoi peut-on dire, en simplifiant un peu que le memristor étudié présente deux régimes de fonctionnement : l'un dans lequel il laisse passer le courant et l'autre dans lequel ce n'est pas le cas ?
36. La courbe $u(i)$ de la figure ci-dessus présente donc un phénomène particulier. De quoi dépend la résistance du memristor ? Expliquer la possibilité d'utiliser le memristor pour mémoriser une information.
37. Léon Chua qualifia le memristor de non volatile memory, c'est-à-dire de mémoire permanente. Quel élément sur le graphique de la figure ci-dessus permet de dire que le memristor est une telle mémoire ?

7 Le saut de Felix Baumgartner

Document 1 : le saut supersonique de Felix Baumgartner

D'après J.M. Colino et al., étude dynamique d'un mémorable plongeon en chute libre, Physics Today, Avril 2014.

Le saut de tous les records

Le 14 octobre 2012, Felix Baumgartner effectue, dans l'atmosphère terrestre, un plongeon hors-norme : les records de tous ses prédécesseurs sont battus. Baumgartner fut tout d'abord hissé jusqu'à une altitude voisine de 39km grâce à un ballon d'hélium. Un appareil GPS, fixé sur sa poitrine, permit de suivre précisément sa position au cours du saut.

En février 2013, les organisateurs de cette mission rendirent publiques ces données. Confirmées par la fédération internationale des sports aériens, elles montrent que Baumgartner a établi trois records. Premièrement, il a atteint une vitesse maximale de $1357,6 \text{ km.h}^{-1}$, supérieure de 11% à la vitesse du son dans l'air (prise égale à 340 m.s^{-1}). Il s'agit de la plus grande vitesse verticale jamais atteinte sans dispositif de stabilisation. Deuxièmement, Baumgartner a sauté d'une altitude record de 38,9694 km. Enfin, il est resté en chute libre sur une hauteur record de 36,4026 km.



Figure Felix Baumgartner au départ de son saut

Une affaire de trainée

Les corps qui chutent vers la surface terrestre ne le font pas sous la seule action de la pesanteur. Ils sont aussi soumis à une force dirigée dans le sens opposé à la vitesse, exercée par l'air atmosphérique. Cette force appelée force de trainée, est proportionnelle au carré de la vitesse. Elle est donnée par la relation $F_D = K A \rho v^2$, où A est l'aire de l'objet projeté sur un plan orthogonal à la direction du mouvement, ρ la masse volumique de l'air et K une constante.

Quelques détails sur le saut de Baumgartner

Les données enregistrées pendant le saut montrent qu'initialement, la composante de la vitesse de Baumgartner parallèle au sol est nulle. Comme l'air est raréfié en haute altitude, la force de trainée joue peu au début du saut et l'accélération de Baumgartner s'identifie quasiment à l'intensité du champ de pesanteur. Ensuite, au fur et à mesure que la vitesse augmente et que l'altitude diminue, l'action de l'air devient de plus en plus importante et la force de trainée équilibre le poids. La vitesse terminale de Baumgartner atteint $79,4 \text{ m.s}^{-1}$.

Document 2 : le modèle de l'atmosphère isotherme

Sous l'effet de la pesanteur, les molécules constitutives de l'air ont tendance à tomber vers le sol. L'agitation thermique a un effet antagoniste et tend à uniformiser la distribution des molécules dans l'atmosphère. Lorsqu'on assimile l'air à un gaz parfait et que l'on considère la température et la pesanteur uniformes dans l'atmosphère, il en résulte une distribution d'équilibre, caractérisée par le champ de masse volumique suivant, qui ne dépend que de l'altitude z comptée depuis le sol : $\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{M_a g z}{R T}\right)$ où ρ_0 désigne la masse volumique au niveau du sol en $z = 0$, R la constante des gaz parfaits, T la température de l'atmosphère, M_a la masse molaire de l'air et g l'intensité du champ de pesanteur.

Questions

Il est légitime de se demander pourquoi il est nécessaire de hisser le sauteur à une altitude aussi élevée afin d'atteindre la vitesse du son.

38. Quelle devrait être l'altitude minimale de départ si le sauteur, voulant atteindre la vitesse du son, n'était soumis qu'à la force de pesanteur ?
39. En exploitant les documents 1 et 2, donner une estimation de la hauteur minimale de saut qui permet d'atteindre la vitesse du son au cours de la chute. Le choix de certaines valeurs numériques relève de votre initiative. Comparer l'estimation obtenue à l'altitude de départ de Felix Baumgartner et discuter les hypothèses que vous aurez retenues.