

Devoir Surveillé 2

Éléments de correction

Séisme

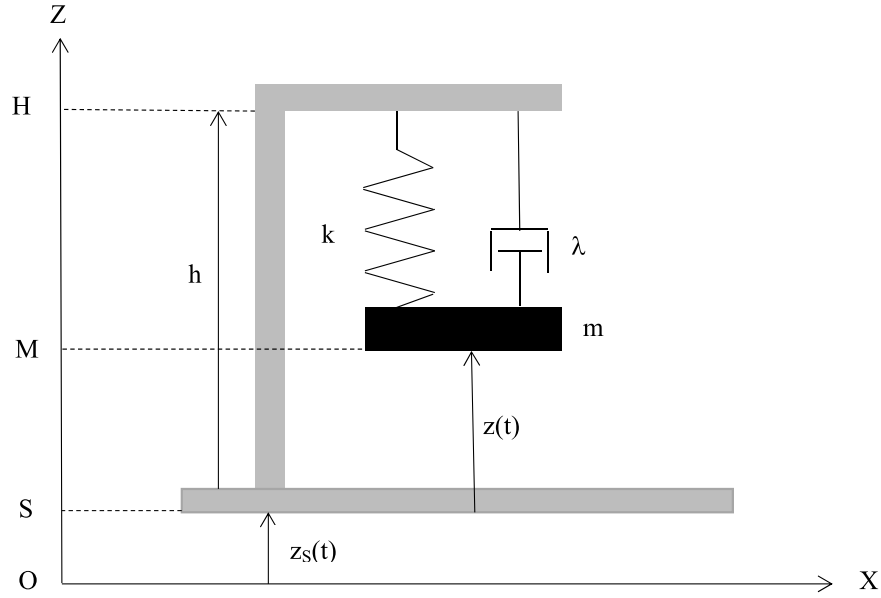
Un séisme ou tremblement de terre est une secousse du sol résultant de la libération brusque d'énergie accumulée par les contraintes exercées sur les roches. Cette libération d'énergie provient de la rupture des roches le long d'une faille préexistante, d'une activité volcanique. Elle peut être aussi d'origine artificielle (explosions par exemple). Les mouvements des roches engendrent des vibrations élastiques qui se propagent, sous la forme de paquets d'ondes sismiques, autour et au travers du globe terrestre.

Les mouvements du sol sont étudiés par l'intermédiaire de sismographes. L'acquisition et l'enregistrement du signal s'obtiennent dans une station sismique regroupant, outre les sismographes eux-mêmes, des enregistreurs, des numériseurs, des horloges et des antennes GPS.

Étude du sismographe

Un sismographe simple (figure ci-dessous) est constitué d'un support rigide de hauteur h , auquel on suspend une masse m , supposée ponctuelle, par l'intermédiaire d'un ressort de masse négligeable de raideur k , de longueur à vide l_0 et d'un amortisseur de coefficient de frottement λ . Cet amortisseur exerce sur la masse m une force :

$$\vec{F}_a = \lambda \frac{d(h-z)}{dt} \vec{e}_z = -\lambda \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$$



Sismographe

Un mouvement vertical du sol déclenche un mouvement vertical de la masse m caractérisé par la fonction $z(t)$ dans le référentiel lié au sol.

On pose : $z(t) = z_{eq} + u(t)$. La position $z = z_{eq}$ correspond à la position d'équilibre de la masse m en l'absence de séisme et $u(t)$ représente l'écart par rapport à l'équilibre.

1. Définir un référentiel d'étude non Galiléen, ainsi que son mouvement par rapport à un référentiel Galiléen.

Le référentiel R défini par le support rigide de hauteur h du sismographe auquel est attaché le repère cartésien $(S, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est un référentiel d'étude non Galiléen approprié.

Ce référentiel R est en mouvement de translation par rapport au référentiel Galiléen R_0 défini comme un référentiel terrestre avec O le centre de la Terre et trois axes reliés à la Terre.

En effet on peut définir comme repère cartésien attaché à R_0 le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ dont les axes sont de même direction que R .

2. Quelles forces s'appliquent sur la masse m et en donner l'expression ?

La masse m subit son propre poids \vec{p} , la force de rappel du ressort \vec{F}_k , la force exercée par l'amortisseur \vec{F}_a . Et enfin comme le référentiel R est non Galiléen et en translation elle subit une force d'inertie d'entraînement \vec{f}_{ie} .

$$\begin{aligned}\vec{p} &= -mg\vec{e}_z \\ \vec{F}_k &= k(h - z - l_0)\vec{e}_z \\ \vec{F}_a &= -\lambda \frac{dz}{dt} \vec{e}_z \\ \vec{f}_{ie} &= -m\vec{a}_{R_0}(S) = -m \frac{d^2 z_s}{dt^2} \vec{e}_z\end{aligned}$$

3. Déterminer l'expression z_{eq} en fonction des données du problème.

z_{eq} est définie en l'absence du mouvement du sol donc $\frac{d^2 z_s}{dt^2} = 0$ et à l'équilibre donc $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$ et $\frac{dz}{dt} = 0$.

Si on écrit le PFD projeté selon \vec{e}_z dans ces conditions on a :

$$0 = -mg + k(h - z_{eq} - l_0)$$

$$\text{d'où } z_{eq} = l_0 - h + \frac{mg}{k}$$

4. Déterminer l'équation différentielle suivie par $z(t)$ puis en déduire celle suivie par $u(t)$.

On écrit le PFD projeté sur \vec{e}_z :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg + k(h - z - l_0) - \lambda \frac{dz}{dt} - m \frac{d^2 z_s}{dt^2}$$

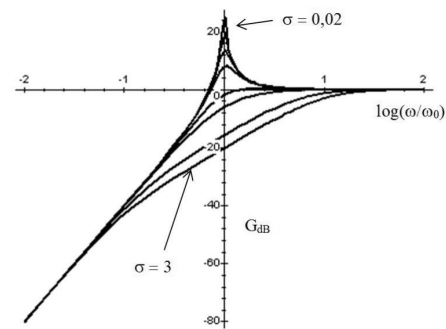
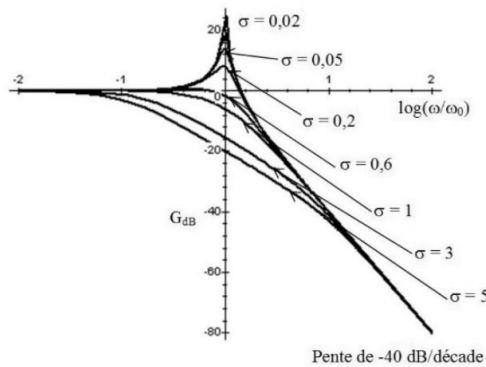
en utilisant $z(t) = u(t) + z_{eq}$

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -ku - \lambda \frac{du}{dt} - m \frac{d^2 z_s}{dt^2}$$

Le sismographe peut être assimilé à un système linéaire de fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{u}{z_s}$$

On donne sur la figure ci-dessous les diagrammes de Bode en amplitude pour des filtres du second ordre.



$$H = \frac{H_0}{1 + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$H = \frac{H_0 \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

5. Calculer les diagrammes de Bode en amplitude asymptotiques pour les deux filtres du second ordre, et vérifier qu'ils sont bien cohérent avec les diagrammes de Bode représenté.

Pour le premier filtre d'équation :

$$H = \frac{H_0}{1 + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

si $\omega \ll \omega_0$, alors $H \sim H_0$, donc $G(\omega \ll \omega_0) = |H_0|$.

si $\omega \gg \omega_0$, alors $H \sim H_0 \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^{-2}$, donc $G(\omega \gg \omega_0) = |H_0| \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-2}$.

Pour le second filtre d'équation :

$$H = \frac{H_0 \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

si $\omega \ll \omega_0$, alors $H \sim H_0 \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2$, donc $G(\omega \ll \omega_0) = |H_0| \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$.

si $\omega \gg \omega_0$, alors $H \sim H_0$, donc $G(\omega \gg \omega_0) = |H_0|$.

6. Justifier par le calcul l'évolution des deux diagrammes de Bode en fonction de σ . On pourra s'appuyer sur les notions de facteur de Qualité, gain à résonance, et bande-passante.

Pour les deux diagrammes de Bode on peut définir un facteur de qualité $Q = \frac{1}{2\sigma}$.

Un gain à résonance de $G(\omega_0) = \frac{|H_0|}{2\sigma} = Q|H_0|$

et pour $Q \gg 1$ soit $\sigma \ll 0.5$ une bande passante à -3dB de $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 2\sigma\omega_0$

7. Déterminer l'expression de la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{u}{z_s}$ du sismographe. De quel type de filtre s'agit-il ?

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -ku - \lambda \frac{du}{dt} - m \frac{d^2 z_s}{dt^2}$$

donc

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda \frac{du}{dt} + ku = -m \frac{d^2 z_s}{dt^2}$$

$$\frac{m}{k} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\lambda}{k} \frac{du}{dt} + u = -\frac{m}{k} \frac{d^2 z_s}{dt^2}$$

on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\sigma = \frac{\lambda}{2\sqrt{km}}$

$$\left(\left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2 + 2\sigma \frac{j\omega}{\omega_0} + 1 \right) u = - \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2 z_s$$

$$H = \frac{u}{z_s} = \frac{-1 \times \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2}{\left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2 + 2\sigma \frac{j\omega}{\omega_0} + 1}$$

c'est un filtre passe-haut

8. Préciser l'expression de l'amplitude maximale U de la réponse verticale $u(t)$ du régime forcé à la pulsation ω .

On a $U = |H(\omega)|Z_0$ donc

$$U = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} Z_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\sigma^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

9. Écrire deux conditions portant sur ω , k , m et λ pour que l'amplitude U du mouvement de la masse m soit égale à l'amplitude Z_0 du sol. La suspension est-elle qualifiée de souple ou de rigide? La masse m vibre-t-elle en phase, en quadrature de phase ou en opposition de phase avec le sol?

On a $U \sim Z_0$, si $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ et $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 2\sigma$.

Soit $\omega \gg \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega \gg \frac{\lambda}{m}$.

On a une faible raideur k et un amortissement faible λ , la suspension est donc souple.

D'autres part, si $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ alors $H \sim -1$ donc la masse vibre en opposition de phase avec le sol.

10. Le cahier des charges du sismographe impose d'éviter tout phénomène de résonance, ce qui impose une condition supplémentaire sur λ , k , et m . Préciser cette condition supplémentaire à l'aide d'une inégalité.

On peut déterminer d'après les courbes ou graphiquement qu'il n'y a pas résonance lorsque $\sigma > 0,6$ donc $\frac{\lambda}{\sqrt{km}} > 1,2$

Spectre d'un signal numérique

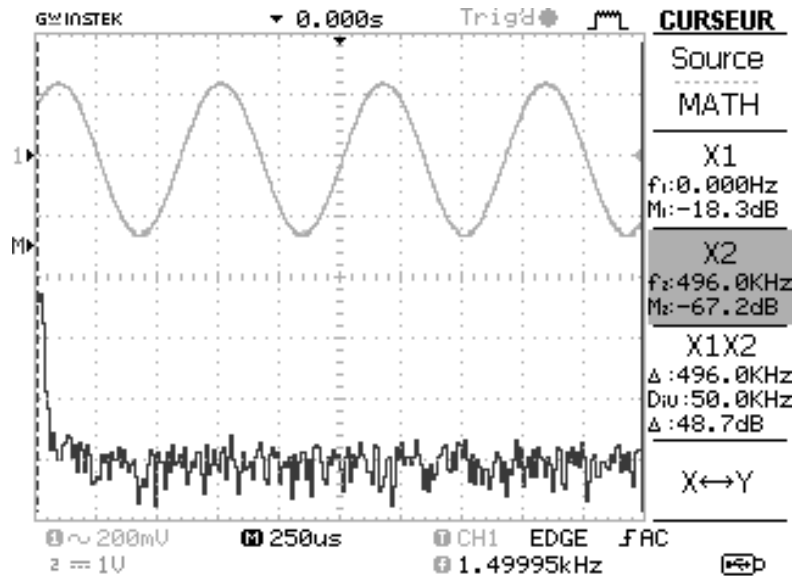
Nous nous proposons ici d'illustrer quelques impacts de la numérisation du signal sismique sur son spectre. Pour des raisons de facilité, cette étude est menée à plus haute fréquence avec le matériel usuel du laboratoire de sciences physiques du lycée. Elle se généralise à tout enregistrement numérique.

Rappels sur le fonctionnement de l'oscilloscope numérique

- Lors d'un enregistrement, l'oscilloscope numérique discrétise et enregistre un signal sur une durée égale à la durée de balayage, soit $10 \text{ carreaux} \times \text{base de temps}$.
- Le nombre d'échantillons enregistrés est toujours le même et égal à 2480. La période d'échantillonnage dépend ainsi de la durée d'enregistrement et donc de la base de temps.
- Un menu permet l'affichage du spectre du signal échantillonné. Pour tous les spectres fournis dans cet énoncé, les amplitudes relatives des différentes composantes en fréquence sont représentées sur une échelle en dB en ordonnées. L'échelle des abscisses est linéaire, graduée de $f = 0 \text{ Hz}$ jusqu'à une fréquence f_{max} qui dépend de la base de temps. Deux curseurs verticaux, dénommés X1 et X2, permettent de pointer deux fréquences pour une lecture aisée de leur valeur sur l'écran.

Expérience 1

Un signal sinusoïdal est délivré par le GBF et est envoyé sur l'oscilloscope numérique. Il a été enregistré avec une base de temps de $250 \mu\text{s}$ représenté dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel sur l'oscillogramme de la figure ci-dessous.



11. Déterminer la période et la fréquence du signal sinusoïdal.

Graphiquement on lit $3T = 8\text{div} = 8 \times 250 \mu\text{s} = 2 \text{ ms}$, donc :

$$T = 0,67\text{ms et } f = 1,5\text{kHz}$$

12. Déterminer une valeur approchée de la fréquence d'échantillonnage de cet enregistrement.

Il y a $N = 2480$ échantillons sur une durée d'acquisition $T_a = 10 \text{ div} = 2500 \mu\text{s}$, donc $T_e = \frac{T_a}{N} \sim 1 \mu\text{s}$ et $f_e = 1 \text{ MHz}$.

13. Quel lien existe-t-il entre la plus haute fréquence $f_{\text{max}} = 496 \text{ kHz}$, repérée par le curseur 2, et la fréquence d'échantillonnage ?

Une bonne acquisition doit satisfaire au critère de Shannon, à savoir $f_e \leq 2f_{\text{max}}$. Un analyseur de spectre n'affiche donc que la fenêtre qui remplit a priori ce critère, soit :

$$f_e = 2f_{\text{max}}$$

Les valeurs numériques sont en accord avec cette égalité.

14. Pour un repérage aisé du pic en fréquence au moyen du curseur X1, il faut dilater l'échelle des fréquences. Quel ajustement proposez-vous de faire sur l'oscilloscope ? Est-ce cohérent avec le nouvel oscillogramme de la figure ci-dessous ?

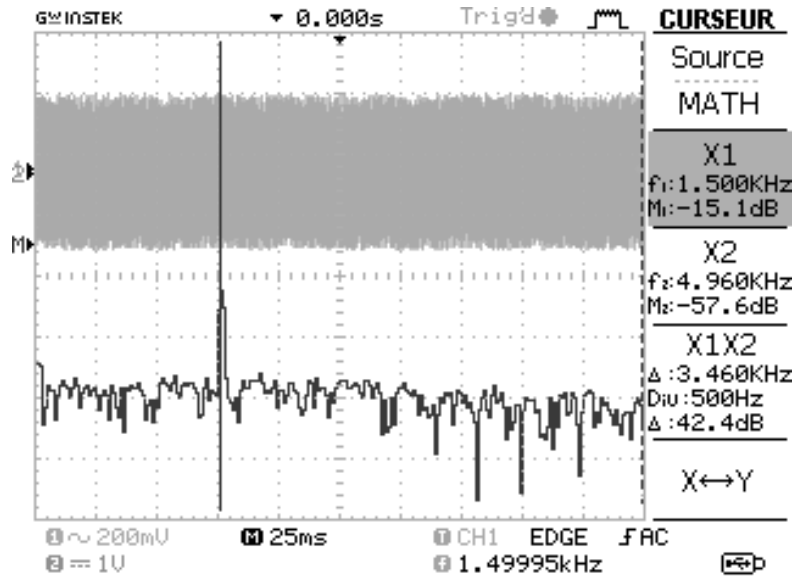
Il s'agit de diminuer f_{max} , or $f_e = 2f_{\text{max}}$,

donc diminuer f_e , or $f_e = \frac{1}{T_e}$,

donc d'augmenter T_e , or $T_e = \frac{T_a}{N}$,

ainsi d'augmenter la durée de l'acquisition T_a .

Il faut donc augmenter la base de temps pour « zoomer » sur le spectre.



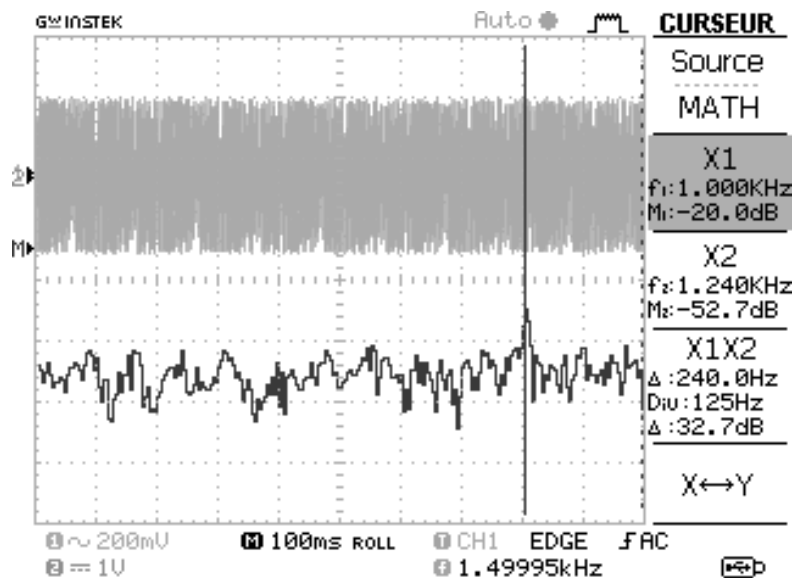
15. La nouvelle valeur de la plus grande fréquence f_{max} de ce spectre était-elle prévisible ? Si oui comment ?

$$f_{max} = \frac{f_e}{2} = \frac{1}{2T_e} = \frac{N}{2T_a}$$

$$\text{donc la nouvelle } f'_{max} = \frac{N}{2T'_a} = \frac{T_a}{T'_a} f_{max} = 4,96 \text{ kHz.}$$

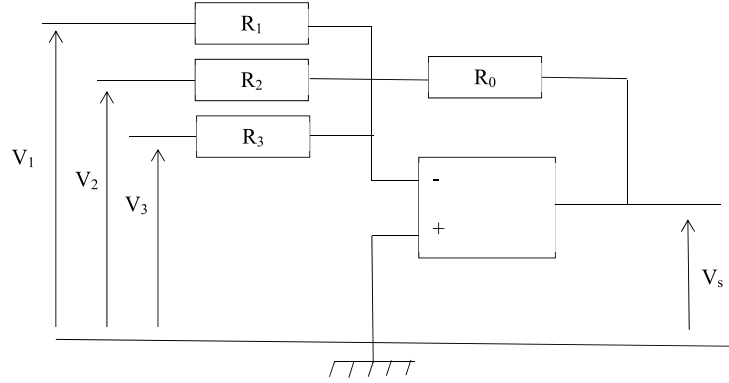
16. On renouvelle cette opération et on obtient l'oscillogramme de la figure ci-dessous. Expliquez la valeur $f = 1$ kHz de la fréquence donnée par le curseur X1.

On a désormais $f_{max} = 1,25$ kHz, soit $f_e = 2,5$ kHz tandis que la fréquence du signal est de 1,5 kHz. Le critère de Shannon n'est pas vérifié ; il y a repliement de spectre. On observe le pic correspondant à $f_e - f = 1$ kHz.



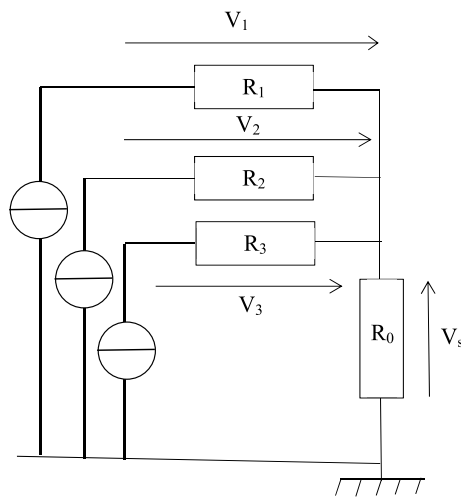
Expérience 2

On considère le montage électronique 1 (ci-dessous) où V_1 , V_2 , V_3 correspondent aux trois tensions d'entrée et V_s est la tension de sortie.



Montage électronique 1

Ce montage est équivalent au montage ci-dessous :



Montage électronique 1

17. Déterminer l'expression de V_s en fonction de V_1 , V_2 , V_3 , R_0 , R_1 , R_2 et R_3 . Quel est la fonction de ce montage ?

On applique la loi des noeuds, et en exprimant directement les courants via la loi d'Ohm :

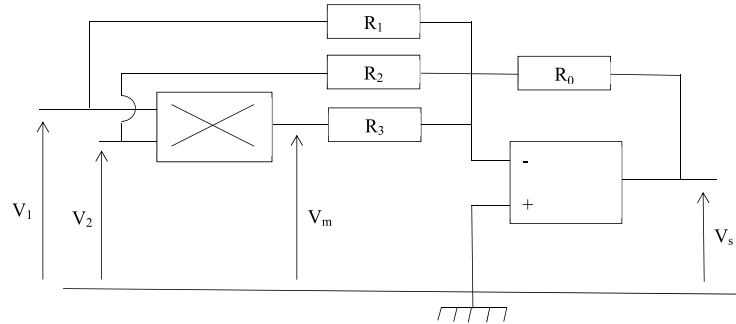
$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} = -\frac{V_s}{R_0}$$

soit

$$V_s = -R_0 \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} \right)$$

Il s'agit d'un additionneur, avec des pondérations sur les différentes tensions.

On associe au montage précédent un multiplieur dont les deux tensions d'entrée sont V_1 et V_2 . Il délivre en sortie la tension V_m avec : $V_m(t) = kV_1(t)V_2(t)$, où $k = 0,1 \text{ V}^{-1}$. On aboutit au montage électronique 2.



Montage électronique 2

$V_1(t)$ et $V_2(t)$ sont respectivement deux tensions sinusoïdales de même amplitude maximale V_0 et de fréquence f_1 et f_2 . On pose : $V_1(t) = V_0 \cos(2\pi f_1 t)$ et $V_2(t) = V_0 \cos(2\pi f_2 t)$.

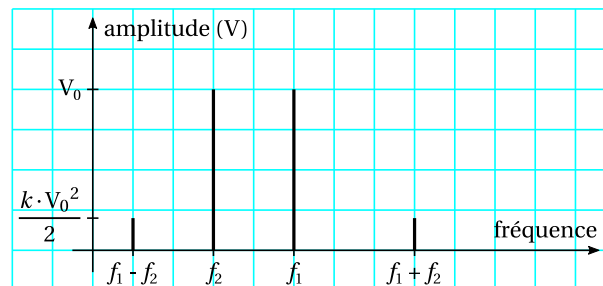
18. On suppose ici que $R_0 = R_1 = R_2 = R_3$. Tracer l'allure du spectre théorique de la tension de sortie V_s .

Pour $R_0 = R_1 = R_2 = R_3$ on a $V_s = -(V_1 + V_2 + V_m)$ donc

$$V_s = - (V_0 \cos(2\pi f_1 t) + V_0 \cos(2\pi f_2 t) + kV_0^2 \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t))$$

$$V_s = - \left(V_0 \cos(2\pi f_1 t) + V_0 \cos(2\pi f_2 t) + \frac{kV_0^2}{2} \cos(2\pi(f_1 - f_2)t) + \frac{kV_0^2}{2} \cos(2\pi(f_1 + f_2)t) \right)$$

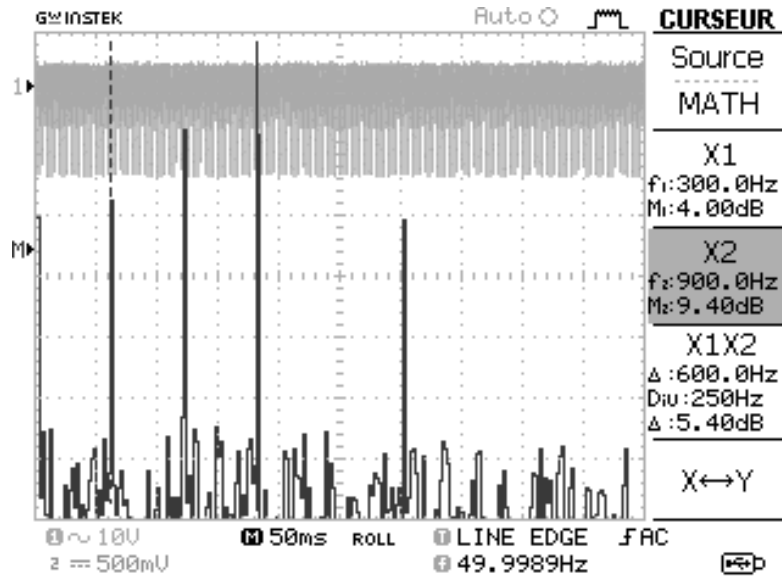
On suppose que $f_1 > f_2$. Et on obtient le spectre :



19. Comment est modifié ce spectre lorsque $R_0 = R_1 = R_2 = 2R_3$?

En modifiant les résistances, $V_s = -(V_1 + V_2 + 2V_m)$, donc l'amplitude des pics à $f_1 - f_2$ et $f_1 + f_2$ est multipliée par deux.

L'enregistrement du signal V_s et la détermination de son spectre par l'oscilloscope numérique sont donnés sur l'oscillogramme de la figure ci-dessous.



20. Déterminer les valeurs des fréquences f_1 et f_2 .

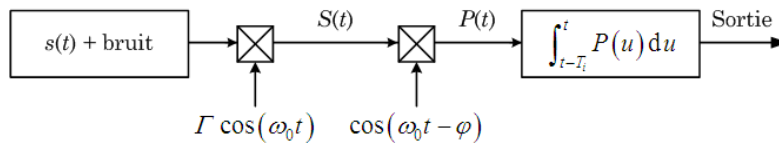
Si on suppose qu'il n'y a pas de repliement, alors le deuxième curseur donne $f_1 = 900$ Hz et le premier donne $f_1 - f_2 = 300$ Hz, soit $f_2 = 600$ Hz.

Détection synchrone (analogique)

Principe de la détection synchrone

Certains capteurs fournissent en sortie une tension lentement variable $s(t)$. La détection directe de ce signal présente des inconvénients, aux premiers rangs desquels on peut citer le bruit et la dérive des divers appareils. Le signal doit donc être traité.

La détection synchrone pallie partiellement ces problèmes. Dans cette méthode, le phénomène physique représenté par $s(t)$ est modulé sinusoidalement en amplitude à la fréquence angulaire ω_0 choisie de telle manière que s peut être considéré comme constant sur la durée $T_0 = 2\pi/\omega_0$; le signal de sortie s'exprime alors par $S(t) = \Gamma s(t) \cos(\omega_0 t) + b(t)$, où Γ est un réel positif et $b(t)$ est un bruit. Pour extraire s de S , on produit électroniquement le produit $P(t) = S(t) \cos(\omega_0 t - \phi)$, où ϕ est le déphasage accordable d'un générateur pilote. Le signal P traverse ensuite un filtre sélectif, qui donne en sortie le signal $\overline{m(t, T_i)} = \int_{t-T_i}^t P(u) du$.



Schématisation d'un détecteur synchrone.

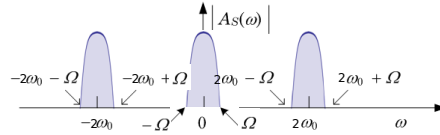
21. Justifier qualitativement que, dans un domaine fréquentiel donné, l'on puisse assimiler un filtre passe-bas à un intégrateur. Exprimer $\overline{m(t, T_i)}$ sous forme de la somme de deux intégrales, l'une faisant intervenir $s(t)$ et l'autre, notée $B(t)$, faisant intervenir $b(t)$; on rappelle la relation $\cos p \cos q = \frac{1}{2} [\cos(p+q) + \cos(p-q)]$. Que peut-on dire de $B(t, T_i)$?

Un filtre passe-bas du premier ordre correspond à une fonction de transfert $H = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$. Si l'on se place dans le domaine où $\omega\tau \gg 1$, on a $j\omega\tau s = e$ ce qui s'écrit $\tau \frac{ds}{dt} = e$ et par conséquent $s(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t e(t') dt'$. Le filtre passe-bas est donc bien un intégrateur pour le domaine des fréquences f telle que $f \gg \frac{1}{2\pi\tau}$.

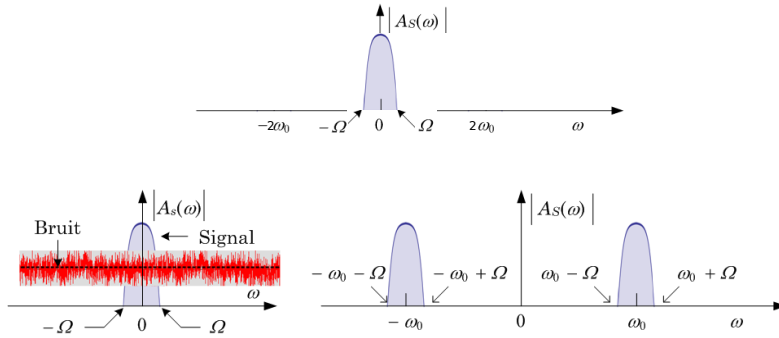
D'après l'opération réalisée, on a $P(t) = \Gamma s(t) \cos(\omega_0 t - \phi) + b(t) \cos(\omega_0 t - \phi)$. En utilisant la formule de trigonométrie, on obtient $P(t) = \Gamma s(t) \cos(\omega_0 t - \phi) + b(t) \cos(\omega_0 t - \phi)$. On en déduit le calcul de la moyenne : $\overline{m(t, T_i)} = \frac{\Gamma}{2} \int_{t-T_i}^t s(t') (\cos(2\omega_0 t' - \phi) + \cos(\phi)) dt' + B(t, T_i)$. $b(t')$ est un bruit, automatiquement $b(t') \cos(\omega_0 t' - \phi)$ est aussi un bruit pour $T_i \gg T_0$ et T_i grande devant les périodes présentes dans le bruit, car un bruit est par définition aléatoire donc apériodique. On peut donc en déduire que $B(t, T_i) = 0$.

22. La figure ci-dessous représente les spectres fréquentiels de $s(t)$, du bruit $b(t)$ et de $S(t)$. Représenter qualitativement les spectres fréquentiels du signal après passage dans le filtre sélectif puis après l'intégrateur.

après passage dans le deuxième multiplieur le spectre de $P(t)$ est :



après passage dans l'intégrateur le spectre de $\overline{m(t, T_i)}$ est :



Le spectre fréquentiel d'un signal $u(t)$ est défini par $A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \exp(i\omega t) dt$. Le module du spectre de s , $|A_s(\omega)|$, est représenté à gauche ; on lui a donné une forme symétrique sur la bande étroite, centrée en 0, $[-\Omega; \Omega]$. Le spectre du bruit est « plat ». La figure de droite représente le spectre de la partie utile de $S(t)$: le bruit n'y est pas représenté.

23. Quel compromis réaliser sur T_i pour que $\overline{m(t, T_i)}$ reproduise le plus fidèlement possible la forme de $s(t)$? Exprimer $\overline{m(t, T_i)}$ dans ces conditions, en fonction de Γ , $s(t)$ et ϕ , en supposant $B(t, T_i)$ négligeable. Comment choisir ϕ ?

Pour arriver à récupérer l'information, il faut que la période de $s(t)$ qui est en $\frac{2\pi}{\omega_0}$ soit grande devant la durée d'intégration T_i . Mais pour filtrer le reste du signal, il faut que cette même période T_i soit grande devant T_0 . Le compromis à trouver est donc : $\frac{2\pi}{\omega_0} \ll T_i \ll \frac{2\pi}{\Omega}$. Si cette

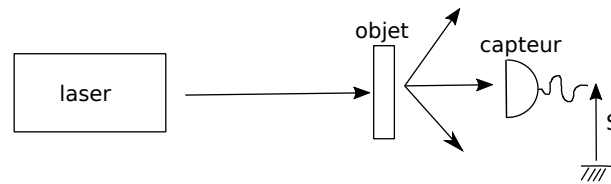
condition est réalisée alors $s(t)$ varie peu pendant la durée T_i : on peut la sortir de l'intégrale. On a donc :

$$\overline{m(t, T_i)} = \frac{\Gamma}{2} s(t) \int_{t-T_i}^t (\cos(2\omega_0 t' - \phi) + \cos(\phi)) dt' = \frac{\Gamma}{2} s(t) \cos(\phi) T_i$$

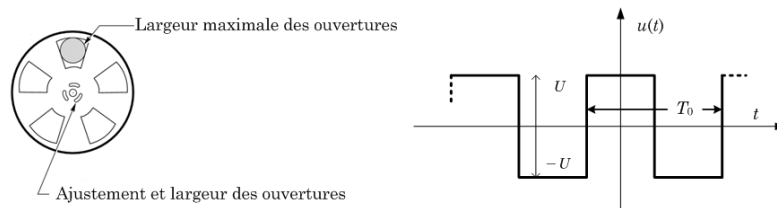
Pour obtenir le signal le plus grand possible, il faut choisir $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$.

Réalisation d'une détection synchrone

Prenons l'exemple d'un capteur lumineux dont $s(t)$ est la tension de sortie représentant l'intensité lumineuse mesurée. Et l'intensité mesurée est la lumière diffusée par l'objet d'étude une fois éclairé par un laser.



Pratiquement, la modulation est réalisée en utilisant un hacheur mécanique, tel que la roue ajourée représentée ci-dessous, interposée entre le laser et l'objet.



La roue du modulateur mécanique est percée de p quadrants identiques régulièrement répartis et de largeur ajustable; une photodiode et un photorécepteur placés de part et d'autre de cette roue produisent le signal rectangulaire de référence, symbolisé dans la partie droite de la figure.

Si ω_r est la vitesse angulaire de rotation, on note $T_0 = \frac{2\pi}{p\omega_r} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$.

Ce dispositif permet d'obtenir électriquement le signal rectangulaire périodique $u(t)$, nommé signal de référence dont la décomposition en série de Fourier est

$$u(t) = \frac{4U}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \left[2\pi(2n+1) \frac{t}{T_0} \right]$$

Le signal mesuré s , d'amplitude positive, est ainsi haché périodiquement, avec une période T_0 . On note $S(t)$ le produit (obtenu électroniquement) du signal périodique u et du signal s , porteur de l'information à traiter. La démodulation consiste à extraire ce dernier de S .

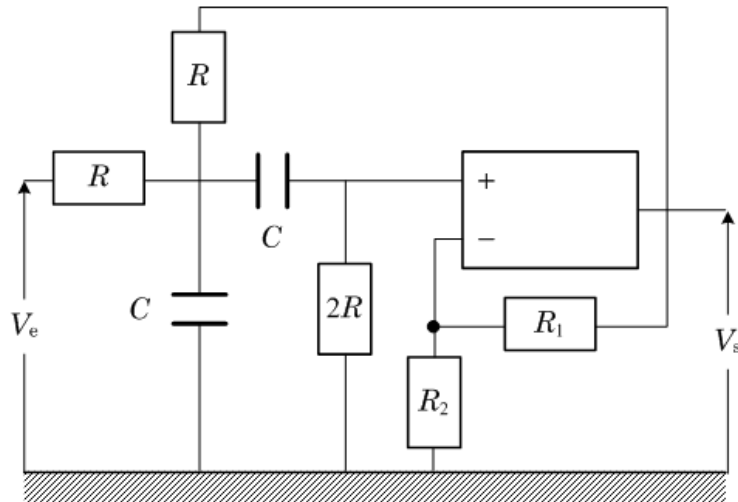
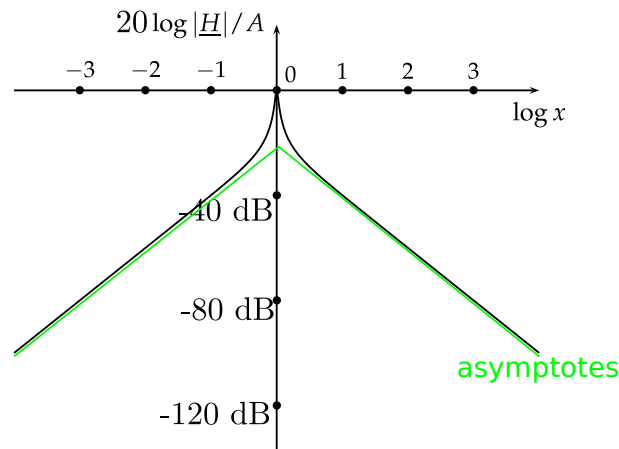
24. Montrer que tout se passe comme si le signal s était modulé par une infinité de porteuses sinusoïdales, dont on donnera les fréquences respectives.

Si l'on effectue maintenant le produit $s(t)u(t)$, on multiplie la fréquence du signal $s(t)$ par chaque fréquence présente dans le spectre du signal créneau. Il y en a une infinité sur le plan mathématique mais seules les premières ont une réalité physique car les harmoniques de rang

élevé ont une amplitude qui sera vite noyée dans le bruit. Les fréquences présentes dans la porteuse sont : $f_p = \frac{2n+1}{T_0}$.

25. Quelle est la nature du filtre de fonction de transfert : $H(jx) = A \frac{2m(jx)}{1 + (jx)^2 + 2m(jx)}$, où A et m sont réels positifs et $x = \frac{\omega}{\omega_c}$ une fréquence réduite? Esquisser, pour $m < 1$, le diagramme de Bode, en amplitude et en phase, de cette fonction de transfert.

On peut factoriser le terme $2m(jx)$ dans l'expression de la fonction de transfert fournie pour écrire que $H(jx) = \frac{A}{1 + \frac{j}{2m}(x - 1/x)}$. Il s'agit d'un filtre passe-bande centré en $x = 1$ avec une résonance relativement fine puisque $m < 1$ (le facteur de qualité $Q = 1/(2m)$). Sa phase évolue entre $\pi/2$ et $-\pi/2$, elle s'annule en $x = 1$. Le diagramme de Bode en amplitude de ce filtre est :



Filtre de Sallen-Kay. L'ALI, supposé parfait, fonctionne en régime linéaire. La fonction de transfert est alors $H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = K \frac{jRC\omega}{1 + (3 - K)jRC\omega + (jRC\omega)^2}$, où $K = 1 + \frac{R_1}{R_2}$.

26. La fonction de transfert complexe du Filtre de Sallen-Kay de la figure ci-dessus est du type de celui de la question précédente. Exprimer A , $Q = 1/2m$ et ω_c en fonction des composants R_1 , R_2 , R et C de ce filtre.

La fonction de transfert du filtre analogique proposé peut encore s'écrire $H(j\omega) = \frac{K/(3-K)}{1 + j\frac{1}{3-K}\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$.

On peut donc facilement identifier les facteurs : $A = \frac{K}{3-K}$ et $Q = \frac{1}{3-K}$. La pulsation de résonance est $\omega_c = \frac{1}{RC}$, on peut aussi exprimer le gain maximum et le facteur de qualité avec les résistances du circuit : $A = \frac{R_2 + R_1}{2R_2 - R_1}$ et $Q = \frac{R_2}{2R_2 - R_1}$.

27. Le filtre de Sallen-Kay a pour entrée par le signal rectangulaire $u(t)$. Comment choisir les composants pour une utilisation optimale du filtre ?

Il ne faut laisser passer qu'une seule harmonique, alors autant que cela soit celle d'amplitude la plus élevée. Il faut donc centrer la pulsation ω_c sur la pulsation $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. On doit donc avoir $T_0 = 2\pi RC$. Il faut aussi que la bande-passante soit suffisamment fine pour éviter qu'une seconde harmonique ne passe dans le filtre. Ici, la seconde harmonique est $3\Omega_0$. La bande-passante du filtre étant $\frac{\omega_c}{Q}$, il suffit que $\frac{\omega_c}{Q} < 3\Omega_0$ donc $\frac{1}{3} < Q$ pour obtenir un bon filtrage.

Échantillonneur bloqueur (numérique)

Un signal numérique est moins sensible aux perturbations qu'un signal analogique et surtout, il se prête bien plus facilement au traitement (numérique!). Pour ces raisons, on choisit de convertir le signal analogique issu d'un détecteur en signal numérique binaire. La chaîne de transmission des données est représentée ci-dessous.



Chaîne de traitement de signal. CAN = Convertisseur Analogique Numérique. La boîte Capteur analogique peut contenir des éléments de traitement analogique.

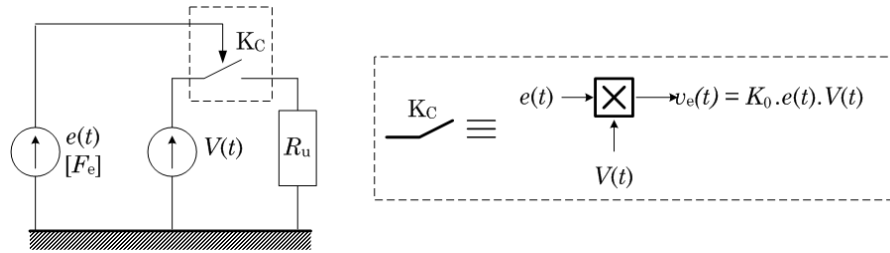
Échantillonnage

La conversion analogique numérique commence par l'échantillonnage, transformation du signal continu analogique en signal discontinu. L'élément réalisant cette transformation (Figure ci-dessous) est essentiellement un interrupteur commandé par une tension périodique $e(t)$ de fréquence $F_e = 1/T_e$ (T_e est la période de fermeture de l'interrupteur). La durée de fermeture est très petite devant T_e . Le signal de commande $e(t)$ est modélisé par une suite périodique de pics d'amplitude constante et de largeur temporelle ϵ très petite devant T_e (voir ci-dessous); le pic centré sur l'instant $t = nT_e$ étant noté $\delta(t - nT_e)$, la tension de commande s'exprime alors par $e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$.

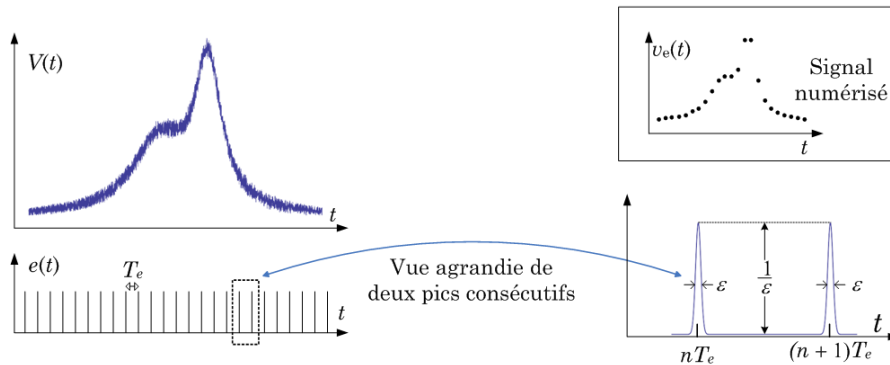
28. Exprimer la tension de sortie $v_e(t)$.

On a $v_e(t) = K_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_e) \right) V(t)$. Comme la durée d'un signal $\delta(t - nT_e)$ est très brève, on peut considérer que $V(t)$ n'a pas le temps de changer de valeur pendant cette durée.

On peut donc rentrer $V(t)$ dans la somme définissant le signal d'échantillonnage. On écrit donc : $v_e(t) = K_0 \sum_{n=0}^{\infty} V(nT_e) \delta(t - nT_e)$.

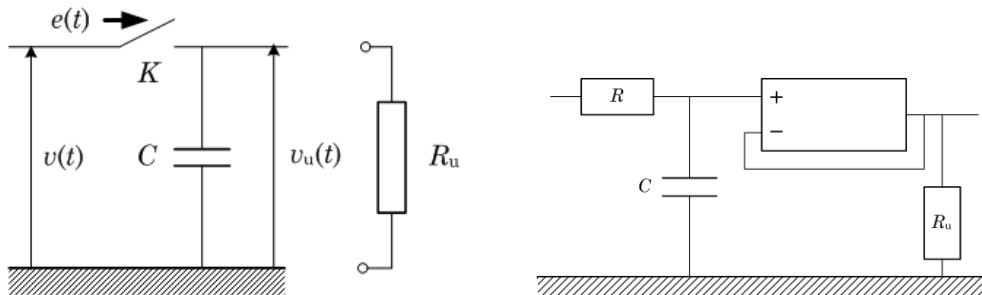


Principe d'un échantillonneur ; le commutateur K_C est un multiplieur commandé de gain K_0 entre $e(t)$ et le signal $V(t)$. Le circuit d'utilisation est modélisé par la résistance R_u .



Échantillonnage. Le cartouche en haut à droite donne l'allure de $v_e(t)$, tension aux bornes de R_u ; l'allure de la courbe originale est préservée, mais le pointé du sommet est imprécis.

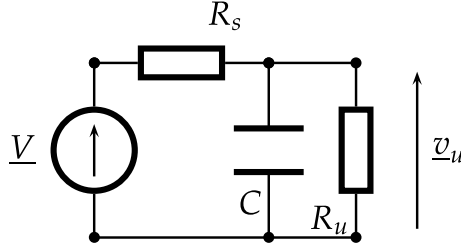
Le convertisseur analogique numérique doit conserver (bloquer) la valeur à convertir pendant le temps nécessaire à cette conversion. On transforme pour cela le circuit ci-dessous en circuit de mémorisation formant ainsi un échantillonneur bloqueur. Le schéma électrique de principe du dispositif est représenté dans la partie gauche suivante.



À gauche : Échantillonneur bloqueur ; la résistance R_u modélise le circuit d'utilisation.
À droite : Échantillonneur bloqueur avec ALI parfait. La résistance R représente l'ensemble des résistances en amont, lorsque l'interrupteur est fermé.

29. En position fermée, la résistance de sortie du générateur fournissant la tension $V(t)$ (à laquelle s'ajoute celle de l'interrupteur de commande) est assimilable à une résistance de valeur R_s . Donner l'expression du temps au bout duquel la tension aux bornes du condensateur atteint 95% de sa valeur limite, supposée constante pendant la charge.

En position fermée, nous considérons le schéma :



On reconnait un pont diviseur de tension en utilisant l'expression de l'impédance équivalente $Z_{eq} = \frac{R_u}{1 + jR_u C\omega}$. On a donc

$$v_u = \frac{Z_{eq}}{R_s + Z_{eq}} V = \frac{R_u / (R_s + R_u)}{1 + j \frac{R_u}{R_s + R_u} C\omega} V$$

La durée caractéristique du filtre est $\tau_a = \frac{R_u}{R_s + R_u} C$. Il faut une durée de l'ordre de $\Delta t = 3\tau_a = 3 \frac{R_u}{R_s + R_u} C$ pour considérer l'acquisition du signal réalisée.

30. Que se passe-t-il lorsque l'interrupteur K bascule en position ouverte ?

Lorsque l'interrupteur est ouvert, on obtient un circuit simple constitué uniquement du condensateur C et de la résistance R_u . La constante de temps est $\tau_h = R_u C$. Le condensateur va se décharger dans la résistance R_u . Le temps de maintien du signal est de l'ordre de τ_h

Sur la figure de droite l'ALI joue le rôle de suiveur, c'est-à-dire qu'il impose que les tensions aux bornes du condensateur et de la résistance R_u sont identiques, par contre il n'y a aucun courant circulant dans sa borne +. Le temps de maintien de la tension par le condensateur quand K est ouvert devient alors infiniment long.

31. Représenter l'allure du signal obtenu à la sortie de l'échantillonneur bloqueur. On notera t_a le temps d'acquisition et t_h le temps de maintien de la charge du condensateur.

L'allure du signal obtenu à la sortie de l'échantillonneur-bloqueur est :

