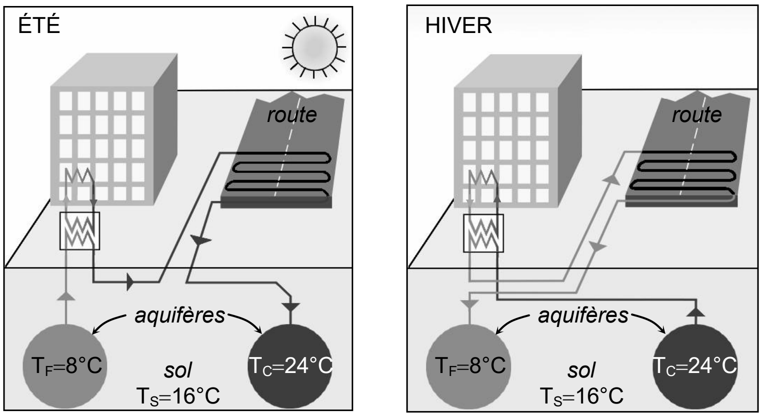
Devoir Maison 8
Éléments de correction

Récupération d'énergie thermique dans la chaussée

L'énergie solaire absorbée par le bitume peut-être astucieusement utilisée pour assurer le chauffage d'habitations ou d'immeubles. Les sociétés néerlandaises O.O.M.S. (génie civil) et W.T.H. (génie thermique) ont développé dans ce but le dispositif Road Energy Systems (schématisé sur la figure ci-dessous) constitué des organes suivants, dans lesquels circule de l'eau :

- un réseau de canalisations incluses dans la couche supérieure de la route ;
- un aquifère (réservoir d'eau naturel souterrain) "chaud" à la température $T_C = 24°\text{C}$;
- un aquifère "froid" à la température $T_F = 8°\text{C}$;
- un échangeur thermique de type eau/eau (entre le dispositif et le système de chauffage/climatisation de l'immeuble) ;
- une pompe assurant la circulation de l'eau (non représentée sur la figure 1).

Selon la saison, deux circuits différents de circulation d'eau sont utilisés afin de stocker de l'énergie thermique dans l'aquifère chaud (en été) puis de l'y récupérer (en hiver) :



Dimensionnement des aquifères

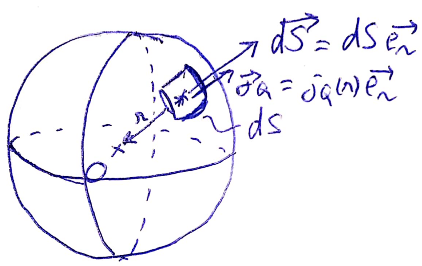
Les aquifères utilisés sont situés à une profondeur moyenne de 80 m où la température du sol est constante toute l'année et vaut $T_S = 16°\text{C}$. Un aquifère est modélisé par une sphère de centre O et de rayon R_a contenant de l'eau de capacité calorifique massique $c_{eau} = 4,2.10^3$ J.K^{-1}.kg^{-1} , de masse volumique $\rho_{eau} = 1,0.10^3$ kg.m−3 et de température T_E supposée uniforme. Cette sphère est entourée de terre de conductivité thermique $\lambda_{terre} = 1,0$ W.m^{-1}.K^{-1}

dont la température $T(r)$ est supposée ne dépendre que de la distance r au centre de la sphère et tendre vers $T_S = 16°C$ lorsque la distance r tend vers l'infini. Les transferts thermiques sont étudiés en régime permanent.

1. Écrire la loi de Fourier ; en déduire la forme du vecteur densité de flux thermique dans la terre à l'extérieur de l'aquifère. (On donne : $\overrightarrow{grad}(f(r)) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques)

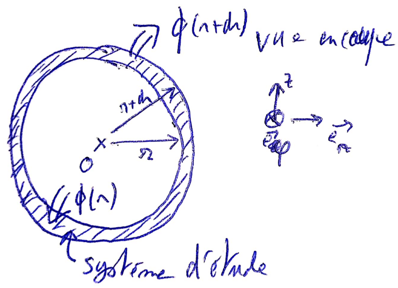
$\vec{j}_Q = -\lambda\overrightarrow{grad}(T)$, $\vec{j}_Q = j_Q(r)\vec{e}_r = -\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\vec{e}_r$

2. Exprimer le flux thermique $\Phi(r)$ à travers une sphère de centre O et de rayon $r > R_a$, orientée selon $+\vec{e}_r$.



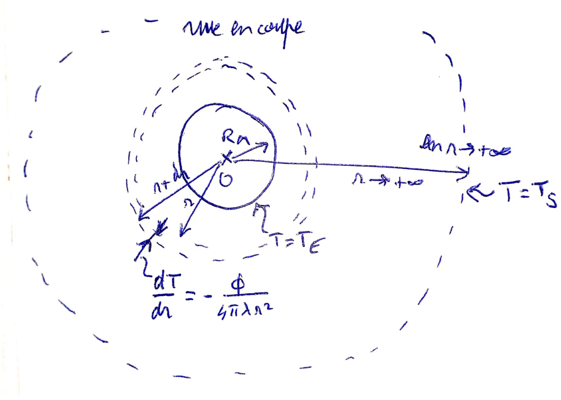
$\Phi(r) = \iint_S \vec{j}_Q.\vec{e}_r dS = \iint_S j_Q(r)dS = j_Q(r)\iint_S dS = j_Q(r)S = -\lambda\frac{dT}{dr}4\pi r^2$

3. Montrer, en considérant une coquille sphérique de terre comprise entre r et $r + dr$, que le flux thermique $\Phi(r)$ se conserve. (il sera noté Φ dans la suite du problème)



On applique le 1er principe à la coquille sphérique pendant dt : $CdT = [\Phi(r) - \Phi(r + dr)]dt$ en régime permanent $\frac{dT}{dt} = 0$ donc $\Phi(r) = \Phi(r + dr) = \Phi$

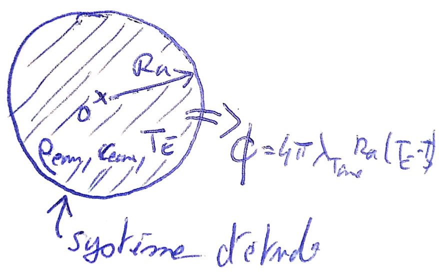
4. Déduire des questions précédentes que le flux thermique peut s'écrire : $\Phi = K(T_E - T_S)$, en exprimant K en fonction des données.



On a donc $dT = -\frac{\Phi}{4\pi\lambda_{terre}}\frac{dr}{r^2}$ donc $\int_{T_E}^{T_S} dT = -\frac{\Phi}{4\pi\lambda_{terre}}\int_{R_a}^{+\infty}\frac{dr}{r^2}$ donc $T_S - T_E = \frac{\Phi}{4\pi\lambda_{terre}}(-\frac{1}{R_a})$ soit $\Phi = 4\pi\lambda_{terre}R_a(T_E - T_S)$

Durant les six mois de fonctionnement en mode "hiver" ($t_H = 0,5$ an), la température de l'aquifère "chaud", initialement à $T_{E0} = T_C = 24°\text{C}$, ne doit pas diminuer plus que $\Delta T = 1,0°\text{C}$. Supposons, dans les questions 5 à 8, que l'aquifère ne perde de l'énergie que par conduction thermique dans la terre environnante au niveau de sa frontière, en $r = R_a$.

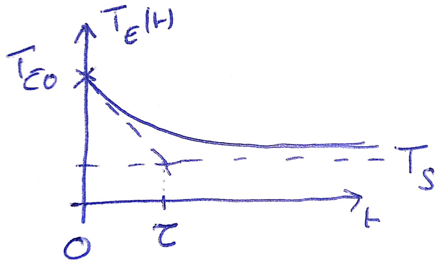
5. Établir l'équation différentielle vérifiée par la température T_E de l'eau, faisant intervenir $\frac{dT_E}{dt}$, T_E , T_S et τ, constante de temps à exprimer en fonction de c_{eau}, ρ_{eau}, R_a et λ_{terre}.



On applique maintenant le 1er principe à l'aquifère pendant un temps dt : $\rho_{eau}\frac{4}{3}\pi R_a^3 c_{eau} dT_E = -\Phi dt = -4\pi\lambda_{terre}R_a(T_E - T_S)dt$ soit $\frac{dT_E}{dt} + \frac{T_E}{\tau} = \frac{T_S}{\tau}$ avec $\tau = \frac{\rho_{eau}c_{eau}R_a^2}{3\lambda_{terre}}$

6. Résoudre l'équation différentielle précédente pour déterminer la température $T_E(t)$ en fonction de T_{E0}, T_S, t et τ, puis tracer son allure.

$T_E = T_S + \alpha e^{-\frac{t}{\tau}}$ or $T_E(0) = T_S + \alpha = T_{E0}$ donc $T_E(t) = T_S + (T_{E0} - T_S)e^{-\frac{t}{\tau}}$



7. Déterminer une condition littérale sur τ pour que la diminution de température de l'aquifère liée aux pertes par conduction soit inférieure à ΔT durant t_H : $T_{E0} - T_E(t_H) < \Delta T$.

$T_{E0} - T_E(t) < \Delta T$ si $T_{E0} - T_S - (T_{E0} - T_S)e^{-\frac{t_H}{\tau}} < \Delta T$ soit $\tau > -\frac{t_H}{ln\left(1-\frac{\Delta T}{T_{E0}-T_S}\right)}$

8. Calculer la valeur limite de τ et en déduire le rayon limite $R_{a,limite}$ de l'aquifère.

$\tau \geq 11,8.10^7$ s, donc $R_{a,limite} = \sqrt{\frac{3\lambda_{terre}\tau}{\rho_{eau}c_{eau}}} = 9,2$ m