Épreuve Physique
Éléments de correction

N°	Elts de rép.	Pts	Note
00-00	**Titre de l'exo**	0	0
0	éléments de réponse	0	0

01-35	**Nature de la gravitation**	36	
01-21	**L'expérience d'Eötvös**	22	
1	Il existe une classe de référentiels, appelées référentiels Galiléens, tels que tout référentiel Galiléen est immobile ou en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre référentiel Galiléen. Et dans un référentiel galiléen, un système mécanique isolé (soumis à aucune force) est immobile ou en translation rectiligne uniforme.	1	
2	Dans un référentiel Galiléen, le principe fondamental de la mécanique (ou dynamique) s'applique à un objet considéré comme ponctuel comme $m_i\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$ avec m_i la masse inerte de l'objet, $\vec{a}$ l'accélération du centre de masse de l'objet, et $\sum \vec{F}_{ext}$, la résultante des forces extérieures qui s'appliquent sur l'objet.	1	
3	**Faire un schéma.** Soit deux objets A et B, la force de gravitation exercée par A sur B s'écrit, $\vec{F}_{A\to B} = -G\frac{m_A m_B}{r_{AB}^2}\vec{u}_{AB}$ avec r_{AB} la distance entre A et B, m_A et m_B les masses pesantes de A et B, G la constante de gravitation universelle, et $\vec{u}_{AB}$ le vecteur unitaire dirigé selon (AB) de A vers B.	1	
4	**Faire un schéma.** Pour connaitre la durée de la chute de chaque objet, on applique le principe fondamental de la mécanique $m_i\vec{a} = m\vec{g}$. Il s'agit d'une chute libre d'où la seule force est le poids. On le projette sur la verticale $m_i a_z = -mg$ donc $\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{m}{m_i}g$. Initialement le lâché s'effectue à une hauteur $z(0) = h$ et sans vitesse initiale, donc $z(t) = h - \frac{m}{m_i}\frac{gt^2}{2}$. La durée de la chute libre τ est donnée par $z(\tau) = 0$ soit $\tau = \sqrt{\frac{m_i}{m}\frac{2h}{g}}$. Si $m_i = m$ alors τ ne dépend plus de la masse de l'objet lâché.	1	

05-16	**Mesure du coefficient de torsion du pendule**	12	
5	Si une force $\vec{F}$ est exercé sur un solide à la vitesse $\vec{v}$ alors la puissance de cette force est $P = \vec{F}.\vec{v}$. Si un couple $\vec{M}$ est exercé sur un solide de vecteur vitesse rotation $\vec{\omega}$, alors la puissance de ce couple est $P = \vec{M}.\vec{\omega}$.	1	
6	Si le couple dérive d'une énergie potentielle alors $\delta W = -dE_p$ donc $Pdt = -dE_p$ donc $\vec{M}.\vec{\omega}dt = -dE_p$ donc $M_0 \frac{d\theta}{dt} dt = -dE_p$ donc $M_0 d\theta = -dE_p$ donc $-M_0 = \frac{dE_p}{d\theta}$ donc $\frac{dE_p}{d\theta} = C(\theta - \theta_0)$ avec la condition initiale $E_p(\theta_0) = 0$, on en déduit que $E_p = \frac{1}{2}C(\theta - \theta_0)^2$.	1	
7	Un solide en translation à la vitesse $\vec{v}$ a pour énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m_i \vec{v}^2$, avec m_i sa masse inerte. Un solide en rotation a pour énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2$, avec J son moment d'inertie.	1	
8	Ici le solide S est en rotation donc $E_c = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2$	1	
9	L'énergie mécanique est donnée par $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C(\theta - \theta_0)^2$.	1	
10	D'après le théorème de l'énergie mécanique $\frac{dE_m}{dt} = \sum P_{nc}$ avec P_{nc} la puissance des forces non conservatives.	1	
11	On utilise le théorème de l'énergie mécanique $\frac{dE_m}{dt} = P_{frot}$ donc $J\dot{\theta}\ddot{\theta} + C\dot{\theta}(\theta - \theta_0) = -\alpha\dot{\theta}^2$ donc $J\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + C(\theta - \theta_0) = 0$.	1	
12	On observe des oscillations donc on est dans le régime pseudo-périodique. Cela correspond a des racines complexes du polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle. Donc un discriminant négatif donc $\alpha^2 - 4JC < 0$. La forme de la solution est $\theta - \theta_0 = e^{-\frac{\alpha}{2J}t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$ avec $\omega = \frac{\sqrt{4JC - \alpha^2}}{2J}$ d'après les racines du pôlynome caractéristique. A et B sont les deux constantes dont il n'est pas nécessaire de les déterminer.	1	
13	Lorsque $t \to +\infty$ alors $\theta \to \theta_0$. La pseudo période est $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi J}{\sqrt{4JC - \alpha^2}}$. La période propre est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$. Donc $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}} \frac{2\sqrt{J}}{\sqrt{4J - \frac{\alpha^2}{C}}} = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4JC}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$	1	
14	Soit e l'erreur relative, $\left\lvert \frac{T - T_0}{T_0} \right\rvert = e$ donc $\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - 1 = e$ ... $\epsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1+e}\right)^2}$ donc $e < 0,01$ implique que $\epsilon < 0,14$	1	
15	$T = T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$ donc $T^2 = 4\pi^2 \frac{J}{C}$ donc $\frac{CT^2}{4\pi^2} = J_0 + 2J_1 + 2mL^2$. Il faut tracer $2mL^2$ en fonction de $\frac{T^2}{4\pi^2}$ et effectuer une régression linéaire pour estimer la pente $C = 3,0.10^{-7}$ N.m	1	

16	$\frac{CT^2}{4\pi^2} = J_0 + 2J_1 + 2mL^2$. L'ordonnée à l'origine du graphe tracé à la question précédente est petite devant l'ordonnées des points $2mL^2$, donc on peut simplifier l'équation en $\frac{CT^2}{4\pi^2} = 2mL^2$ donc $m = \frac{CT^2}{8\pi^2 L^2}$	1	
17-21	**Résultats et précision de l'expérience**	5	
17	Une référentiel en rotation uniforme est un référentiel non-galiléen avec deux forces d'inertie la force d'inertie d'entrainement ou force centrifuge et la force d'inertie de Coriolis. La force centrifuge s'écrit $\vec{f}_{ie} = -m_i\vec{\omega}_t \wedge \left(\vec{\omega}_t \wedge \overrightarrow{GO}\right) = m_i\omega_t^2\overrightarrow{HO}$ avec H le projeté orthogonal de O sur l'axe terrestre. La force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -2m_i\vec{\omega}_t \wedge \vec{v}_G(O)$.	1	
18	Si les masses sont immobiles, la force d'inertie de Coriolis n'intervient pas. Il reste donc que la force centrifuge. $\vec{f}_{ie,1} = m_{i1}\omega_t^2\overrightarrow{HS_1} = m_{i1}\omega_t^2(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OS_1})$ avec $HO = \cos\lambda R_t$ et $OS_1 = L$ donc $\vec{f}_{ie,1} = m_{i1}\omega_t^2(\cos\lambda R_t(\cos(\lambda)\vec{u}_z - \sin(\lambda)\vec{u}_\lambda) - L\vec{u}_\rho)$ de même $\vec{f}_{ie,2} = m_{i2}\omega_t^2(\cos\lambda R_t(\cos(\lambda)\vec{u}_z - \sin(\lambda)\vec{u}_\lambda) + L\vec{u}_\rho)$	1	
19	A l'équilibre, la somme des moments des forces est nulle. Le couple de rappel selon z est $M_0 = -C(\theta_{\infty,1} - \theta_0)$, le couple de la force centrifuge exercée sur m_{i1} projeté selon $\vec{u}_z$ est $M_z(\vec{f}_{ie,1}) = (\overrightarrow{OS_1} \wedge \vec{f}_{ie,1}).\vec{u}_z = (-L\vec{u}_\rho \wedge \vec{f}_{ie,1}).\vec{u}_z = -L(\vec{f}_{ie,1}.\vec{u}_\lambda) = -Lm_{i1}\omega_t^2\cos\lambda R_t(-\sin(\lambda))$ celui exercé sur m_{i2} est $M_z(\vec{f}_{ie,2}) = (\overrightarrow{OS_2} \wedge \vec{f}_{ie,2}).\vec{u}_z = (L\vec{u}_\rho \wedge \vec{f}_{ie,2}).\vec{u}_z = -L(\vec{f}_{ie,2}.\vec{u}_\lambda) = Lm_{i2}\omega_t^2\cos\lambda R_t(-\sin(\lambda))$ d'où à l'équilibre $-C(\theta_{\infty,1} - \theta_0) + Lm_{i1}\omega_t^2\cos\lambda R_t\sin(\lambda) - Lm_{i2}\omega_t^2\cos\lambda R_t\sin(\lambda) = 0$. Dans la deuxième configuration il faut inverser les rôle joué par les masses 1 et 2, on obtient alors $-C(\theta_{\infty,2} - \theta_0) + Lm_{i2}\omega_t^2\cos\lambda R_t\sin(\lambda) - Lm_{i1}\omega_t^2\cos\lambda R_t\sin(\lambda) = 0$ en soustrayant une équation à l'autre on obtient la relation faisant l'écart angulaire $-C\Delta\theta + 2L(m_{i1} - m_{i2})\omega_t^2\cos\lambda R_t\sin(\lambda)$ d'où $\Delta\theta = \frac{L\omega_t^2 R_t\sin(2\lambda)}{C}(m_{i1} - m_{i2})$	1	
20	D'après l'équation précédente $m_{i1} - m_{i2} = \frac{C\Delta\theta}{L\omega_t^2 R_t\sin(2\lambda)}$ et d'après la question 16 $m = \frac{CT^2}{8\pi^2L^2}$. Donc $\delta m = \frac{\lvert m_{i1} - m_{i2}\rvert}{m} = \frac{C\lvert\Delta\theta\rvert}{L\omega_t^2 R_t\sin(2\lambda)}\frac{8\pi^2L^2}{CT^2} = \frac{8\pi^2 L\lvert\Delta\theta\rvert}{T^2\omega_t^2 R_t\sin(2\lambda)}$ en faisant l'application numérique on trouve $\delta m = 3.10^{-7}$	1	
21	On peut en déduire que l'écart relatif entre les masses inertielle est inférieur à 0,3 millionième.	1	
22-35	**Corriger la gravitation universelle classique ?**	14	
22-31	**Gravitation newtonienne, matière noire**	10	
22	Soit S une surface fermée, alors le flux Φ du champ électrostatique $\vec{E}$ est donné par $\Phi = \iint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$, avec Q_{int} la charge intérieure à la surface S et ϵ_0 la permittivité du vide. Soit V le volume définit par la surface fermé S, pour une distribution volumique ρ de charge $Q_{int} = \iiint_V \rho dV$	1	

23	La circulation du champ électrostatique $\vec{E}$ sur un contour fermé C est nulle, $\oint_C \vec{E}.\overrightarrow{dl} = 0$	1	
24	Le théorème de Gauss correspond à $\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ et la circulation du champ à $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$	1	
25	Pour le champ magnétostatique le flux est nul et le rotationnel non nul donc on ne peut pas proposer d'analogie. Par analogie $\vec{\Gamma} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Phi(M))$, donc $-\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Phi(M))) = -4\pi G\rho$ donc $\triangle\Phi(M) = 4\pi G\rho$	1	
26	$\vec{F} = m\vec{\Gamma} = -m\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Phi)$, or Φ ne dépend que de r donc on ne garde que la composante selon r, $\vec{F} = -m\frac{d\Phi}{dr}\vec{u}_r$ avec $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire radial de direction et sens de O vers M. Le théorème du moment cinétique nous donne $\frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ car $\vec{F}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinaires donc le moment cinétique est de direction constante donc le mouvement est plan. Le moment cinétique s'écrit $\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$, donc $r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement appelé constante des aires.	1	
27	$\vec{v}_c = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ pour une orbite circulaire. Et en projetant le PFD sur $\vec{u}_r$ on a $-mr\dot{\theta}^2 = -m\frac{d\Phi}{dr}$ donc $\vec{v}_c = \sqrt{r\frac{d\Phi}{dr}}\vec{u}_\theta$ car $\Phi(r)$ est croissante.	1	
28	si $\Phi(r) = -\frac{GM_b}{r}$ alors $\frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM_b}{r^2}$ donc $\vec{v}_c = \sqrt{\frac{GM_b}{r}}\vec{u}_\theta$. Ce modèle est dit keplerien car il est analogue au système solaire même constante des aires, même loi de Kepler, même vitesse circulaire, ...	1	
29	En dehors du bulbe la vitesse circulaire est à peu près constante , ce qui est en contradiction avec le modèle keplerien qui prévoit une décroissance en $\propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ de la vitesse circulaire.	1	
30	L'équation de Poisson donne $\triangle\Phi = 4\pi G\rho$ donc $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 4\pi G\frac{C_0}{r_0^2+r^2}$ donc $\frac{d}{dr}\left(rv_c^2\right) = 4\pi GC_0\frac{r^2}{r_0^2+r^2}$ donc $rv_c^2 - 0 = 4\pi GC_0\left(r - r_0\arctan\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)$ donc $v_c = \sqrt{4\pi GC_0\left(1 - \frac{r_0}{r}\arctan\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)}$. Quand $r \gg r_0$ on retrouve bien $v_c \simeq \sqrt{4\pi GC_0}$ une constante. Donc $C_0 = \frac{v_c^2}{4\pi G} = 5,8.10^{19}$ kg.m^{-1} = 9.10^5 M$_\odot$.pc^{-1}. La constante r_0 représente l'échelle à partir de laquelle l'effet de la matière noire est importante.	1	

31	La masse de matière noire est donc $M_n = \iiint \rho dV = 4\pi C_0 \int_0^{R_d} \frac{1}{r_0^2+r^2} r^2 dr = 4\pi C_0 \left(R_d - r_0 \arctan\left(\frac{R_d}{r_0}\right)\right) \simeq 4\pi C_0 R_d$. L'application numérique donne $M_n = 3,3.10^{11}$ $M_\odot$. La matière visible représente donc environ 3% de la matière totale de l'univers. Les 97% restant sont de la matière noire qui modifie la rotation des galaxies.	1	
32-35	**Gravitation modifiée**	4	
32	$[\mu(u)] = 1$ donc $[\sqrt{u}] = 1$ donc $[u] = 1$ donc $[a_0]^2 = [\mathrm{grad}\Phi_m]^2$ donc $[a_0] = [\Gamma] = [\frac{F}{m}] = L.T^{-2}$. Pour retrouver mes équations précédente il faut que $K = 1$.	1	
33	$\mathrm{div}\left(\mu(u)\overrightarrow{\mathrm{grad}}\Phi_m\right) = 4\pi G\rho = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\Phi\right)$ donc $\mathrm{div}\left(\mu(u)\overrightarrow{\mathrm{grad}}\Phi_m - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\Phi\right) = 0$. Et d'après le formulaire $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{h}\right) = 0$ donc il existe un vecteur $\vec{h}$ qui vérifie la propriété énoncé.	1	
34	si $u \ll 1$ alors $\sqrt{u}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\Phi_m = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\Phi$ donc $\frac{1}{a_0}\left(\frac{d\Phi_m}{dr}\right)^2 = \frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM_b}{r^2}$ et $v_c = \sqrt{r\frac{d\Phi_m}{dr}} = \sqrt{r\frac{\sqrt{a_0 GM_b}}{r}} = (a_0 GM_b)^{1/4}$	1	
35	D'après l'équation ci-dessus $a_0 = \frac{v_c^4}{GM_b} = 1,7.10^{-9}$ m.s^{-2}. L'accélération subie par le Soleil est $a = \frac{v_c^2}{r} = 1,8.10^{-10}$ m.s^{-2}. On est bien dans le régime $u \ll 1$	1	