

Devoir Surveillé 8

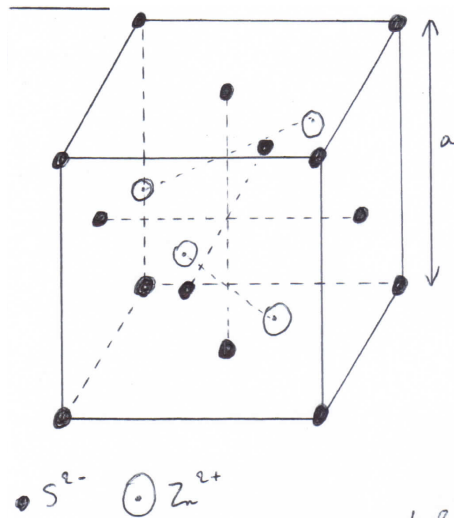
Éléments de correction

Chimie

Propriétés atomistiques et cristallographique du Zinc

Le sulfure de zinc ZnS(s) cristallise dans la blende selon un système cubique faces centrées d'ions S^{2-} dans lequel les cations Zn^{2+} occupent la moitié des sites tétraédriques de ce cube. La maille de ce réseau est assimilée à un cube de côté a dont les sommets et les centres de chaque face sont occupés par un anion. Les cations occupent la moitié des sites tétraédriques de ce cube.

1. Dessiner la maille du cristal.



2. Calculer le nombre de plus proches voisins pour les anions et pour les cations.

Pour une structure cfc métallique, la coordinnence est de 12 (6 autours, 3 au-dessus, 3 en-dessous), donc S^{2-} a 12 voisins S^{2-} .

Les cations occupent des sites tétraédriques, la coordinnence est de 4, donc Zn^{2+} a 4 voisins S^{2-} .

3. Établir la condition de tangence entre les anions et les cations. En déduire la distance cation-anion en fonction du paramètre de maille. Établir l'inégalité concernant le rapport des rayons ioniques dans l'hypothèse de la question précédente.

Il y a contact entre anion et cation sur la diagonale du cube.

$$R(S^{2-}) + R(Zn^{2+}) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$R(S^{2-}) > R(Zn^{2+})$ donc la non-tangence des anions sur la diagonale d'une face est :

$$\frac{a}{\sqrt{2}} > 2R(S^{2-})$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R(S^{2-}) + R(Zn^{2+}) > 2R(S^{2-})$$

$$\frac{R(Zn^{2+})}{R(S^{2-})} > \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$$

4. Calculer à partir des valeurs le rapport des rayons. Commenter.

On calcule $\frac{R(Zn^{2+})}{R(S^{2-})} = 0,40 > \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$

L'hypothèse est bien vérifiée, il y a bien tangence entre anions et cations, cette structure est stable.

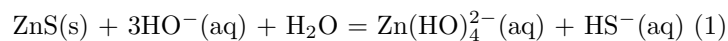
5. Exprimer la masse volumique ρ de $ZnS(s)$ en fonction du paramètre de maille. Donner un ordre de grandeur de sa valeur.

Il y a $8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$ ions S^{2-} par maille et 4 ions Zn^{2+} par maille.

$$\rho = \frac{4M(Zn) + 4M(S)}{N_A a^3} = 4.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

Thermodynamique de la dissolution du sulfure de zinc en solution aqueuse.

On propose de dissoudre le sulfure de zinc, $ZnS(s)$, dans une solution aqueuse de carbonate de sodium Na_2CO_3 contenant des ions CO_3^{2-} à la concentration de $10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ pour fixer le pH.



6. Indiquer si la solution est basique ou acide. Justifier. On ne cherchera pas à calculer le pH précisément.

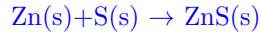
On trace le diagramme de prédominance, CO_3^{2-} prédomine pour $pH > 10,3$. Donc milieu basique.

7. On considère les grandeurs thermodynamiques de formation des espèces mises en jeu dans l'équilibre (1). Rappeler la définition de l'état standard de référence d'un constituant physicochimique. A quelle réaction correspond l'enthalpie standard de formation de $ZnS(s)$?

L'état standard de référence d'un élément est le corps pur simple le plus stable à la température T.

Les états standard de référence pour Zn et S à 298 K sont $Zn(s)$ et $S(s)$.

Équation de formation de $ZnS(s)$: on part des états standard de référence et $\nu_{ZnS(s)} = 1$



8. En utilisant les données thermodynamiques, exprimer et calculer l'enthalpie standard $\Delta_r H^\circ$ et l'entropie standard $\Delta_r S^\circ$ de la réaction (1). La réaction est-elle endo ou exothermique ? On justifiera la réponse.

Loi de Hess $\Delta_r H^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_f H_i^\circ$

$$\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ(\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}(\text{aq})) + \Delta_f H^\circ(\text{HS}^-(\text{aq})) - \Delta_f H^\circ(\text{ZnS(s)}) - 3\Delta_f H^\circ(\text{HO}^-(\text{aq})) - \Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O(l)})$$

$$\Delta_r H^\circ = -340 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

$\Delta_r H^\circ < 0$ la réaction est exothermique dans le sens direct.

$$\Delta_r S^\circ = \sum_i \nu_i S_{m,i}^\circ$$

$$\Delta_r S^\circ = S_m^\circ(\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}(\text{aq})) + S_m^\circ(\text{HS}^-(\text{aq})) - S_m^\circ(\text{ZnS(s)}) - 3S_m^\circ(\text{HO}^-(\text{aq})) - S_m^\circ(\text{H}_2\text{O(l)})$$

$$\Delta_r S^\circ = -62 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

9. Comment peut-on calculer l'enthalpie libre standard $\Delta_r G^\circ$ de la réaction (1) à 298K. $\Delta_r G^\circ = -321,5 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ$$

$$\Delta_r G^\circ = -321,5 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

10. Donner l'expression de la valeur de la constante d'équilibre de la réaction (1) en fonction de l'enthalpie libre standard de la réaction.

$$\Delta_r G^\circ = -RT \ln K^\circ$$

$$K^\circ = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right)$$

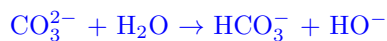
11. Du point de vue thermodynamique, cette réaction est-elle favorisée par une température plus élevée ?

Loi de Van't Hoff : $\frac{d \ln K^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2} < 0$

la réaction dans le sens direct n'est pas favorisée par une température plus élevée.

On dispose d'un volume de 100 mL d'une solution de bicarbonate de sodium de concentration $10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$, $\text{Na}_2\text{CO}_3(\text{s})$. Ce sel est soluble et se dissocie totalement pour donner 2Na^+ et CO_3^{2-} .

12. Écrire l'équation correspondant à la réaction acido-basique de l'eau sur les ions bicarbonate CO_3^{2-} notée (2) en ne tenant compte que de la première basicité des ions bicarbonate. Calculer la concentration en ions hydroxyde $[\text{HO}^-]$ dans cette solution de bicarbonate de sodium



On fait un tableau d'avancement, on suppose que $10^{-7} \text{ mol.L}^{-1} \ll [\text{HO}^-]_{eq} \ll 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$

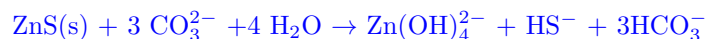
On écrit $Q_{r,eq} = K_2^\circ = \frac{K_e}{K_{a4}}$

on résout et on trouve $[\text{HO}^-]_{eq} = 10^{-2,4} \text{ mol.L}^{-1}$

On introduit dans cette solution une masse $m_{\text{ZnS(s)}}$ de sulfure de zinc ZnS(s) .

13. En combinant les réactions (1) et (2) proposer une équation bilan (3) pour la réaction des ions bicarbonate CO_3^{2-} avec le sulfure de zinc ZnS(s) . Calculer la constante d'équilibre de cette réaction (3). Que peut-on en conclure.

On fait (3) = (1) + 3 × (2) et on obtiens :



Donc $\Delta_r G_3^\circ = \Delta_r G_1^\circ + 3\Delta_r G_2^\circ$

donc $-RT \ln K_3^\circ = -RT \ln K_1^\circ - 3RT \ln K_2^\circ$

donc $K_3^\circ = K_1^\circ \times K_2^{\circ 3}$

donc $K_3^\circ = 10^{45} \gg 1$

la réaction est quasiment totale

Données

Masses molaires :

$M(\text{S}) = 32,1 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(\text{Zn}) = 65,4 \text{ g.mol}^{-1}$

Rayons ioniques :

$R(\text{S}^{2-}) = 184 \text{ pm}$; $R(\text{Zn}^{2-}) = 74,0 \text{ pm}$

Paramètre de maille du cristal de type blende ZnS : $a = 541 \text{ pm}$

Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02.10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Données thermodynamiques à 298K :

	$\Delta_f H^\circ (\text{kJ.mol}^{-1})$	$S_m^\circ (\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1})$
S(s)		+32
Zn(s)		+42
$\text{Zn(OH)}_4^{2-}(\text{aq})$	-1500	-30
ZnS(s)	-203	+58
$\text{HS}^-(\text{aq})$	-18	+63
$\text{H}_2\text{O(l)}$	-285	+70
$\text{HO}^-(\text{aq})$	-230	-11

Constantes d'acidités :

— Sulfure de dihydrogène H_2S :

$\text{pK}_{a1}(\text{H}_2\text{S}/\text{HS}^-) = 7$; $\text{pK}_{a2}(\text{HS}^-/\text{S}^{2-}) = 13$

— Dioxyde de carbone CO_2 :

$\text{pK}_{a3}(\text{CO}_2/\text{HCO}_3^-) = 6,3$; $\text{pK}_{a4}(\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}) = 10,3$

Constantes de solubilité :

— $\text{pK}_{s1}(\text{Zn(OH)}_2(\text{s})) = 17$

— $\text{pK}_{s2}(\text{ZnS(s)}) = 20$

Constante d'équilibre K_c correspondant à la formation de l'espèce $(\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-})$:
 $\text{Zn}^{2+} + 4\text{HO}^- = \text{Zn}(\text{HO})_4^{2-}$ $K_c = 10^{+16}$

Électromagnétisme

Étude de la réflexion d'une onde électromagnétique

Dans cette partie nous allons nous intéresser à des milieux isolants non chargés, transparents et non absorbants. On admet que les propriétés de ces milieux sont semblables à celles du vide en remplaçant la permittivité ϵ_0 par $\epsilon_0\epsilon_r$, ϵ_r désignant la permittivité relative du milieu.

Propagation d'une onde électromagnétique dans un matériau isolant non chargé

14. Écrire les équations de Maxwell dans le milieu considéré en précisant leur nom.

Maxwell-Gauss $\text{div} \vec{E} = 0$, Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, Maxwell-flux $\text{div} \vec{B} = 0$ et Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0\epsilon_r\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

15. Établir l'équation de propagation du vecteur champ électrique dans le milieu.

On applique le rotationnel à l'équation de Maxwell-Faraday, ce qui permet alors d'obtenir l'équation différentielle suivante $\Delta \vec{E} - \mu_0\epsilon_0\epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

16. Exprimer la célérité de propagation de l'onde électromagnétique dans le milieu et montrer que son indice est alors $n = \sqrt{\epsilon_r}$

Par analyse dimensionnelle de l'équation de propagation, nous avons $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$.
 Or par définition de l'indice optique $n = \frac{c}{v}$, d'où $n = \sqrt{\epsilon_r}$.

On considère une onde plane progressive monochromatique se propageant vers les x croissants de la forme

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

17. L'onde plane progressive est-elle polarisée rectilignement ? Si oui, dans quelle direction ?

L'onde n'a qu'une seule composante vectorielle elle est donc polarisée rectilignement selon \vec{u}_y .

18. Déterminer l'expression du vecteur d'onde \vec{k} . On montrera en particulier que $k = n \frac{\omega}{c}$.

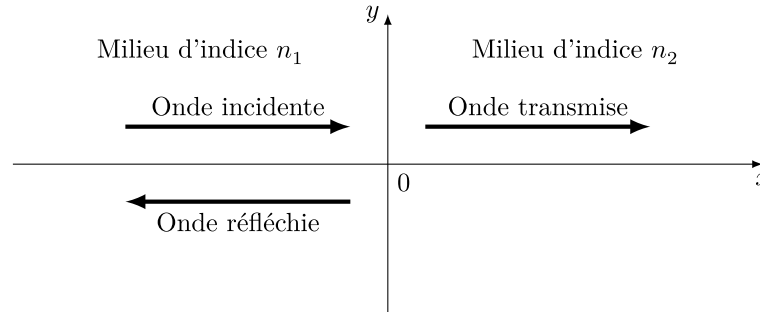
La relation de dispersion est obtenue à partir de l'équation de propagation, ce qui conduit à $k^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2$, d'où $k = n \frac{\omega}{c}$. Par ailleurs la direction de propagation est \vec{u}_x , ainsi $\vec{k} = n \frac{\omega}{c} \vec{u}_x$.

19. Déterminer l'expression du vecteur champ magnétique associé.

On utilise ici la relation de structure d'où $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{nE_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$.

Coefficients de transmission et réflexion en énergie à l'interface entre deux milieux

On s'intéresse à l'interface suivante entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 , séparés par le plan $x = 0$.



Figure

On considère une onde électromagnétique incidente, le vecteur champ électrique étant $\vec{E}_{incident} = \vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - k_1 x) \vec{u}_y$. On note $\vec{E}_{reflechi} = \vec{E}_2 = \rho E_0 \cos(\omega t - k_2 x) \vec{u}_y$ le champ électrique réfléchi et $\vec{E}_{transmis} = \vec{E}_3 = \tau E_0 \cos(\omega t - k_3 x) \vec{u}_y$ où ρ et τ désignent respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.

20. Justifier les formes des champs réfléchi et transmis fournis.

L'onde incidente et l'onde transmise se propagent selon les x croissants, ainsi la phase doit être de la forme $\omega t - k_i x$. Inversement l'onde réfléchi se propage dans le sens des x décroissants, ainsi la phase est de la forme $\omega t + k_r x$. Par ailleurs la pulsation ne dépend pas de l'indice optique qui impose donc la pulsation ω pour les trois ondes.

21. Quelle relation existe entre k_1 et k_2 ainsi qu'entre k_2 et k_3 ? Justifier.

Les trois ondes se propagent dans des milieux d'indice n_1 et n_2 ainsi d'après la relation de dispersion $k_1 = k_i = k_r = -k_2 = n_1 \frac{\omega}{c}$ et $k_3 = n_2 \frac{\omega}{c} = -\frac{n_2}{n_1} k_2$.

22. Déterminer les expressions des champs magnétiques associés $\vec{B}_{incident}$, $\vec{B}_{reflechi}$ et $\vec{B}_{transmis}$, notés respectivement \vec{B}_1 , \vec{B}_2 et \vec{B}_3 .

Nous pouvons appliquer à chaque fois la relation de structure ce qui donne : $\vec{B}_1 = n_1 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k_1 x) \vec{u}_z$,

$$\vec{B}_2 = -n_1 \frac{\rho E_0}{c} \cos(\omega t - k_2 x) \vec{u}_z \text{ et } \vec{B}_3 = n_2 \frac{\tau E_0}{c} \cos(\omega t - k_3 x) \vec{u}_z.$$

23. Les champs électriques et magnétiques doivent vérifier des relations dites de passage à l'interface entre les deux milieux. Compte tenu des propriétés des deux milieux, on admet que les champs électrique et magnétique sont continus à l'interface.

Traduire ces deux relations et en déduire que $\rho = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $\tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$.

La continuité du champ électrique à l'interface donne la relation $E_0 \cos(\omega t) + \rho E_0 \cos(\omega t) = \tau E_0 \cos(\omega t)$, d'où $1 + \rho = \tau$.

La continuité du champ magnétique à l'interface donne la relation $n_1 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) - n_1 \frac{\rho E_0}{c} \cos(\omega t) = n_2 \frac{\tau E_0}{c} \cos(\omega t)$ d'où $n_1(1 - \rho) = n_2 \tau$.

La combinaison de ces deux relations donne alors $n_1(1 - \rho) = n_2(1 + \rho)$ et ainsi $\rho = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $\tau = 1 + \rho = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$.

24. Déterminer les expressions des vecteurs de Poynting pour les ondes incidente, réfléchie et transmise.

Par définition $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$, d'où $\vec{\Pi}_1 = n_1 \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - k_1 x) \vec{u}_x$, $\vec{\Pi}_2 = -n_1 \frac{\rho^2 E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t + k_2 x) \vec{u}_x$ et $\vec{\Pi}_3 = n_2 \frac{\tau^2 E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - k_3 x) \vec{u}_x$.

25. À l'aide d'un bilan énergétique clairement défini, déterminer les expressions des coefficients de réflexion et transmission en énergie à l'interface, notés respectivement R et T. L'énergie est-elle conservée ? Justifier.

Les coefficients R et T sont les coefficients en énergie déplacée par les ondes donc $R = \frac{\Pi_2(x=0)}{\Pi_1(x=0)} = \rho^2$ et $T = \frac{\Pi_3(x=0)}{\Pi_1(x=0)} = \frac{n_2}{n_1} \tau^2$, on remarque alors que $R+T = 1$ ce qui est équivalent à $P_{incident} = P_{reflechi} + P_{transmis}$. La puissance transportée, et donc l'énergie transportée, est bien conservée.

Formulaire

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \vec{\Delta}(\vec{a})$$

L'atmosphère : une cavité électromagnétique naturelle

Cette partie est consacrée à l'étude des ondes électromagnétiques, appelées ondes de Schumann, susceptibles de se propager dans la cavité atmosphérique et de leur amortissement. Toutes les valeurs numériques ou formules utiles dans cette partie, sont regroupées ci-après.

- Altitude de l'ionosphère : $h = 1,00.10^2$ km
- Rayon terrestre : $R_T = 6,40.10^3$ km
- Conductivité électrique de la Terre : $\gamma_t = 1 \text{ S.m}^{-1}$
- Conductivité électrique de l'ionosphère : $\gamma_i = 10^{-5} \text{ S.m}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
- Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \vec{\Delta}(\vec{a})$
- $\cos p + \cos q = 2 \cos(\frac{p+q}{2}) \cos(\frac{p-q}{2})$ et $\cos p - \cos q = -2 \sin(\frac{p+q}{2}) \sin(\frac{p-q}{2})$
- $\int_0^T \cos^2(2\pi/T) dt = \int_0^T \sin^2(2\pi/T) dt = T/2$
- Relations de passage : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$

Ondes de Schumann

La surface terrestre et l'ionosphère, couche supérieure conductrice de l'atmosphère, forment les deux parois, supposées parfaitement conductrices dans un premier temps, d'une cavité sphérique. Afin de simplifier la géométrie du problème, on « déplie » la cavité étudiée de façon à assimiler localement la surface terrestre à son plan tangent (Oxy). On utilisera la base ($O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) des coordonnées cartésiennes, conformément au schéma de la figure 3. L'intérieur de la cavité ($0 \leq z \leq h$) est supposé vide de charges et de courants, ses propriétés électromagnétiques sont identiques à celles du vide.

26. Justifier qualitativement l'approximation d'une cavité « dépliée ».

$R_T = 6400 \text{ km}$ et $h = 100 \text{ km}$. Le rayon de la Terre est donc très supérieur à la distance entre les deux parois conductrices, ce qui permet localement d'assimiler les surfaces à deux plans parallèles.

27. Expérimentalement, on observe que le bruit de fond électromagnétique atmosphérique, dû aux orages, présente des résonances pour les valeurs suivantes (à 0,5 Hz près) de la fréquence, appelées fréquences propres par la suite : 8, 14, 20, 26 Hz . . .

On envisage la propagation, dans l'atmosphère, d'une onde électromagnétique plane, progressive et monochromatique. La longueur d'onde λ_n , la pulsation ω_n , la fréquence f_n et le module du vecteur d'onde k_n de cette onde sont indexés par l'entier n strictement positif. Le champ magnétique de cette onde se met sous la forme :

$$\vec{B}_n^{(+)}(x, t) = B_{0n} \cos(\omega_n t - k_n x) \vec{e}_y$$

Définir chacun des termes : « onde électromagnétique », « plane », « progressive » et « monochromatique ».

Une onde électromagnétique correspond à la propagation simultanée de champs électrique et magnétique.

Dans le cas d'une onde plane, les fronts d'onde sont des plans. Dans le cas étudié, cela se traduit par le fait que les champs \vec{E} et \vec{B} ne dépendent que de x et de t .

Une onde progressive se propage dans le sens des x croissants ou décroissant, donc est une fonction de $x \pm ct$.

Une onde monochromatique ne contient qu'une seule longueur d'onde.

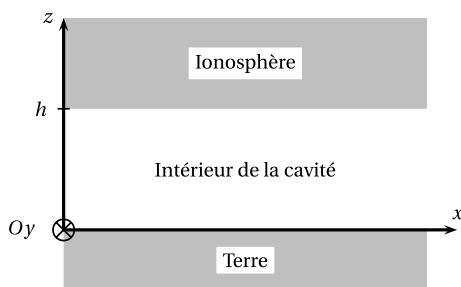


Figure Schéma de la cavité atmosphérique

28. On note $\vec{E}_n^{(+)}(x, t)$ le champ électrique de l'onde étudiée. Écrire les équations de Maxwell vérifiées par $\vec{B}_n^{(+)}(x, t)$ et $\vec{E}_n^{(+)}(x, t)$ à l'intérieur de la cavité et établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\vec{B}_n^{(+)}(x, t)$. En déduire la relation liant ω_n , k_n et $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

L'intérieur de la cavité étant supposée vide de charges et de courants :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{B}_n^+ &= 0 & \text{div} \vec{E}_n^+ &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_n^+ &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_n^+}{\partial t} & \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_n^+ &= -\frac{\partial \vec{B}_n^+}{\partial t} \end{aligned}$$

En utilisant ces équations et le formulaire, on peut écrire : $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_n^+ = -\Delta \vec{B}_n^+ = \overrightarrow{\text{rot}} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_n^+}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_n^+}{\partial t^2}$.

On en déduit par projection sur l'axe Oy avec $\vec{B}_n^+ = B_n^+(x, t) \vec{e}_y$: $-\frac{\partial^2 B_n^+}{\partial x^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_n^+}{\partial t^2}$.

On obtient alors $k_n^2 = \frac{\omega_n^2}{c^2}$.

29. L'approximation d'une cavité « dépliée » exige aussi que la circonférence terrestre soit égale à un multiple entier de la longueur d'onde λ_n : $2\pi R_T = n\lambda_n$. Interpréter cette relation. Calculer numériquement les fréquences propres pour les trois premières valeurs de n et les comparer aux fréquences propres mesurées expérimentalement.

Il faut pour tout x que $\vec{B}_n^+(x + 2\pi R_T) = \vec{B}_n^+(x)$. En effet si on fait un tour complet de cavité, on revient au même point. Cela suppose donc que la circonférence de la cavité soit égale à un nombre entier de longueurs d'onde : $2\pi R_T = n\lambda_n$

$f_1 = 7,46 \text{ Hz}$; $f_2 = 14,9 \text{ Hz}$; $f_3 = 22,4 \text{ Hz}$; on trouve des valeurs proches de celles mesurées expérimentalement.

30. Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}_n^{(+)}(x, t)$ de l'onde étudiée pour $0 \leq z \leq h$.

L'onde étudiée est une onde plane se propageant dans la direction de l'axe Ox avec $\vec{B}_n^+ = (B_n^+)_y(x, t) \vec{e}_y$. Le champ électrique est donc de la forme $\vec{E}_n^+ = (E_n^+)_z \vec{e}_z$.

La projection de $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_n^+ = -\frac{\partial \vec{B}_n^+}{\partial t}$ sur l'axe Oy permet d'écrire : $(E_n^+)_z = -c(B_n^+)_y$ donc $\vec{E}_n^+ = -cB_{0n} \cos(\omega_n t - k_n x) \vec{e}_z$.

31. En réalité, l'onde peut se propager dans la cavité dans le sens des x croissants comme dans le sens opposé.

Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}_n^{(-)}(x, t)$ en tout point identique à $\vec{B}_n^{(+)}(x, t)$ mais se propageant dans le sens opposé.

$$\vec{B}_n^-(x, t) = B_{0n} \cos(\omega_n t + k_n x) \vec{e}_y$$

32. On considère désormais que l'onde dans la cavité résulte de la superposition des deux ondes précédentes qui se propagent dans des sens opposés. En déduire les expressions suivantes du champ magnétique résultant $\vec{B}_n(x, t)$ et du champ électrique résultant $\vec{E}_n(x, t)$:

$$\begin{aligned} \vec{B}_n(x, t) &= 2B_{0n} \cos(\omega_n t) \cos(k_n x) \vec{e}_y \\ \vec{E}_n(x, t) &= -2cB_{0n} \cos(\omega_n t) \sin(k_n x) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Caractériser aussi précisément que possible l'onde résultante.

$\vec{B}_n(x, t) = \vec{B}_n^+(x, t) + \vec{B}_n^-(x, t) = 2B_{0n} \cos(\omega_n t) \cos(k_n x)$ en utilisant la relation de trigonométrie donnée.

De même : $\vec{E}_n(x, t) = \vec{E}_n^+(x, t) + \vec{E}_n^-(x, t) = -cB_{0n} \cos(\omega_n t - k_n x) \vec{e}_z + cB_{0n} \cos(\omega_n t + k_n x) \vec{e}_z = -2cB_{0n} \sin(\omega_n t) \sin(k_n x)$ en utilisant la relation de trigonométrie donnée.

L'onde résultante est une onde stationnaire de longueur d'onde $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$ et de période $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$.

33. Rappeler les relations de passage pour le champ électromagnétique aux deux interfaces en $z = 0$ et en $z = h$. En déduire l'existence de courants et de charges électriques à la surface terrestre et à la surface de l'ionosphère. Établir les expressions des densités surfaciques de courant correspondantes $\vec{j}_{sn}(x, z = 0, t)$ et $\vec{j}_{sn}(x, z = h, t)$.

A l'interface entre deux milieux 1 et 2 : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} n_{12} \vec{e}_z$ et $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge n_{12}$.

L'ionosphère et la Terre sont considérées comme étant parfaitement conductrices. Les champs \vec{E} et \vec{B} y sont donc nuls.

On obtient alors en $z = 0$: $\vec{E}_n = \frac{\sigma_n(z=0)}{\epsilon_0} \vec{e}_z$ et $\vec{B}_n = \mu_0 \vec{j}_{sn}(z = 0) \wedge \vec{e}_z$.

On en déduit $\vec{j}_{sn}(x, z = 0, t) = -\frac{B_n}{\mu_0} \vec{e}_x$

De même en $z = h$: $\vec{E}_n = -\frac{\sigma_n(z=h)}{\epsilon_0} \vec{e}_z$ et $\vec{B}_n = -\mu_0 \vec{j}_{sn}(z = h) \wedge \vec{e}_z$.

On en déduit $\vec{j}_{sn}(x, z = h, t) = \frac{B_n}{\mu_0} \vec{e}_x$

Facteur de qualité de la cavité atmosphérique

Comme la Terre et l'ionosphère ne sont pas des conducteurs parfaits, l'énergie des ondes électromagnétiques présentes dans l'atmosphère est dissipée par effet Joule dans les parois de la cavité atmosphérique. L'amortissement correspondant peut être caractérisé par un facteur de qualité.

On définit une tranche de la cavité atmosphérique comme étant le volume compris entre $x = 0$ et $x = \lambda_n$, entre $z = 0$ et $z = h$ et entre $y = 0$ et $y = b$.

34. En utilisant les résultats des questions 31 et 32, établir l'expression de la valeur moyenne temporelle $\langle \mathcal{E}_n \rangle$ de l'énergie électromagnétique de l'onde $(\vec{B}_n(x, t), \vec{E}_n(x, t))$, stockée dans la tranche considérée.

L'énergie électromagnétique volumique a pour expression $e_n = \frac{B_n^2}{\mu_0} = \frac{4B_{0n}^2 \cos^2(\omega_n t) \cos^2(k_n x)}{\mu_0}$.

Sa valeur moyenne temporelle vaut donc : $\langle e_n \rangle = \frac{2B_{0n}^2 \cos^2(k_n x)}{\mu_0}$.

L'énergie de la tranche considérée s'obtient alors par intégration : $\langle E_n \rangle = \iiint_{tranche} \langle e_n \rangle dx dy dz$.

On obtient $\langle E_n \rangle = \frac{B_{0n}^2 b h \lambda_n}{\mu_0}$.

35. Les conductivités électriques respectives de la Terre et de l'ionosphère sont notées γ_t et γ_i . Pour calculer l'énergie dissipée par effet Joule, on modélise les courants circulant dans la Terre par une densité volumique de courant $\vec{J}_n(x, z, t)$ énergétiquement équivalente et circulant seulement sur une épaisseur δ_{tn} , appelée « épaisseur de peau », à la surface de la Terre :

$$\vec{J}_n(x, z, t) = \vec{j}_{sn}(x, z = 0, t) / \delta_{tn} \text{ pour } -\delta_{tn} \leq z \leq 0 \quad (1)$$

$$\vec{J}_n(x, z, t) = \vec{0} \text{ pour } z \leq -\delta_{tn} \quad (2)$$

avec $\delta_{tn} = \sqrt{2/(\mu_0 \gamma_t \omega_n)}$ et où $\vec{j}_{sn}(x, z = 0, t)$ est la densité surfacique de courant déterminée à la question 33.

Contrôler que δ_{tn} est bien homogène à une longueur

La densité volumique de courant J_n s'exprime en $A.m^{-2}$ et la densité surfacique de courant j_{sn} en $A.m^{-1}$ donc δ_{tn} est bien homogène à une longueur.

36. Rappeler l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule en fonction de $\|\vec{J}\|$ et de γ dans un conducteur ohmique de conductivité γ parcouru par des courants électriques de densité volumique \vec{J} .

$$p_J = \frac{\|\vec{J}\|^2}{\gamma}$$

37. En déduire l'expression de l'énergie dissipée par effet Joule dans la Terre, pendant une période $2\pi/\omega_n$, entre $x = 0$ et $x = \lambda_n$, $y = 0$ et $y = b$. Exprimer le résultat en fonction de B_{0n} , μ_0 , b , δ_{tn} et λ_n .

L'énergie dissipée dans la Terre est dissipée dans une couche d'épaisseur δ_{tn} , la densité volumique de courant étant nulle pour une profondeur supérieure.

L'énergie dissipée en une période dans la tranche terrestre considérée s'obtient alors par intégration dans l'espace et le temps :

$$W_{Jtn} = \iiint_{tranche, periode} p_{Jtn} dx dy dz dt = \iiint_{tranche, periode} \frac{\|j_{sn}(x, z=0, t)\|^2}{\delta_{tn}^2 \gamma} dx dy dz dt.$$

On obtient après calcul, en utilisant l'expression de la conductivité donnée dans l'énoncé :

$$\gamma = \frac{2}{\mu_0 \omega \delta^2}, W_{Jtn} = \frac{B_{0n}^2 \delta_{tn} b \pi \lambda_n}{\mu_0}.$$

38. Sans calculs supplémentaires, donner l'expression de l'énergie dissipée par effet Joule dans l'ionosphère, pendant une période $2\pi/\omega_n$, entre $x = 0$ et $x = \lambda_n$, $y = 0$ et $y = b$. On fera intervenir la profondeur de peau dans l'ionosphère $\delta_{in} = \sqrt{2/(\mu_0 \gamma_i \omega_n)}$.

$$\text{De même : } W_{Jin} = \frac{B_{0n}^2 \delta_{in} b \pi \lambda_n}{\mu_0}$$

39. Exprimer l'énergie totale W_{Jn} dissipée par effet Joule, pendant une période, dans les parois de la tranche considérée.

$$W_{Jn} = W_{Jtn} + W_{Jin}$$

40. On définit le facteur de qualité Q_n de la cavité atmosphérique pour l'onde étudiée par une relation $W_J = \frac{2\pi}{Q} \langle \mathcal{E} \rangle$. Exprimer Q_n en fonction de h , δ_{tn} et δ_{in} . Donner la valeur numérique de Q_n pour les deux premières valeurs de n .

$$Q_n = \frac{2\pi \langle E_n \rangle}{W_{Jn}}$$

$$\text{On obtient alors } Q_n = \frac{2h}{\delta_{in} + \delta_{tn}}.$$

$$Q_1 = 10^3 \text{ et } Q_2 = 1,5 \cdot 10^3.$$

41. Déduire de la valeur de Q_n une estimation numérique de la durée caractéristique τ_n d'amortissement de l'onde pour $n = 1$. La comparer à la durée moyenne entre deux impacts de foudre sur la Terre, qui est de l'ordre de 10^{-2} s.

$$\tau_n = \frac{Q_n}{\omega_n} \approx \frac{10^3}{10} = 10^2 \text{ s.}$$