TP_3_2_Resolution_numerique_equation_de_diffusion

November 6, 2019

Au cours de ce TP nous allons modéliser numériquement l'évolution de la température dans une ailette. Lors du dernier TP nous avons observé à l'aide d'une caméra thermique une situation similaire en posant une plaque métallique sur le rebord d'une plaque chauffante. A la caméra thermique on a observé l'évolution de la température dans la plaque métallique et comparé nos observations pour une plaque en cuivre et en zinc.

1 Faire un schéma de l'expérience en vue de dessus

Avec la caméra thermique nous avons observé la température évoluer dans la partie suspendue de la plaque métallique. Repérer cette région sur votre schéma nous allons calculer l'évolution de la température en chaque point de cette région.

2 Etablissement de l'équation différentielle vérifiée par la température

On détermine d'abord la géométrie du problème considéré.

• Justifier pourquoi ce problème peut être considéré comme un problème à géométrie cartésienne en 1D selon la longueur de la plaque.

On choisit (Ox) l'axe selon lequel évolue la température.

• Repérer sur votre schéma un élément infinitésimal de la plaque compris entre x et $x + dx$

Pour établir l'équation différentielle nous allons faire un bilan d'énergie entre les instant t et $t + dt$ pour l'élément de la plaque schématisé.

• Quels sont les différents flux thermiques échangés par l'élément de plaque et l'extérieur ?

On remarquera qu'il y a des modes de transfert thermique par conduction avec les autres parties de la plaque, et des modes de transfert thermique par convection.

• Donner l'expression de ces différents flux en fonction de la température T de la plaque en x, en utilisant la loi de Fourier et la loi de Newton.

Ces différents flux thermiques font varier l'énergie interne ou l'enthalpie de l'élément de plaque.

• A l'aide du premier principe de la thermodynamique relier la variation d'enthalpie dH aux différents flux thermiques échangés par la plaque. Remplacer ensuite les flux thermique par leur expression en fonction de $T(x)$.

La variation d'enthalpie de l'élément de la plaque est la variation de cette fonction d'état entre les instants t et $t + dt$, c'est donc la différence entre $\delta H(t + dt)$ et $\delta H(t)$ avec δH la valeur infénitésimale de l'entalpie pour l'élément infinitésimal de plaque.

• Remplacer dH par la différence entre $\delta H(t+dt)$ et $\delta H(t)$. En introduisant la masse volumique ρ, le volume dV de l'élément de plaque, et l'enthalpie massique $h(t)$ et $h(t+dt)$, remplacer chacun des termes $\delta H(t)$ et $\delta H(t+dt)$.

• Remplacer dV par son expression en fonction de dx, et h par son expression en fonction de T en utilisant la capacité calorifique massique.

L'équation obtenue ne fait intervenir plus que la température, ainsi que des éléments infinitésimaux. On va pouvoir la ré-écrire sous forme d'équation aux dérivées partielles.

• Reconnaître les différentes dérivées qui entre en jeu dans l'équation et obtenir l'équation aux dérivées partielle $\frac{\partial T}{\partial t} = D\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\delta^2}(T - T_0)\right]$, que valent D, δ et T_0 ?

3 Adimensionnement de l'équation aux dérivées partielles

Afin de résoudre cette équation différentielle de manière numérique on va introduire des grandeurs sans dimension qui seront calculées numériquement. Nous allons donc effectuer des changements de variables pour adimensionner cette équation.

• Remplacer dans l'équation précédente la température T par $\tilde{T}$ tel que $T = T_0\tilde{T}$.

• Remplacer dans l'équation précédente la position x par $\tilde{x}$ tel que $x = \delta \times \tilde{x}$.

• Remplacer dans l'équation précédente le temps t par $\tilde{t}$ tel que $t = \frac{\delta^2}{D}\tilde{t}$.

On obtient ainsi l'équation différentielle adimensionnée $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \left[\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} - \left(\tilde{T} - 1\right)\right]$

4 Conditions initiales et conditions aux limites

Afin de résoudre une équation aux dérivées partielles on a besoin d'y ajouter des conditions initiales et des conditions aux limites.

Initialement la plaque vient d'être posée sur la plaque chauffante. La partie en contact avec la plaque chauffante atteint instantanément la même température que la plaque chauffante. La partie suspendue est encore à la même température que la pièce.

• Si on repère par $\tilde{x} = 0$ la coordonnée du bord de la plaque chauffante, écrire la condition initiale pour $\tilde{T}(\tilde{x} > 0, t = 0)$

Comme nous considérons un problème en géométrie cartésienne en 1D, il n'y a que deux extrémités à la plaque. A l'extrémité du rebord de la plaque chauffante en $\tilde{x} = 0$, la température de la plaque est maintenue à la température de la plaque chauffante T_c. A l'extrémité suspendue de la plaque chauffante $\tilde{x} = \tilde{x}_{max}$ l'épaisseur de la plaque est tellement petite que l'on néglige le transfert thermique sur la face en bout de plaque, on fait l'hypothèse qu'il est donc calorifugé.

• Ecrire la condition au limite pour $\tilde{T}(\tilde{x} = 0, t)$

• Ecrire la condition au limite pour $\tilde{T}(\tilde{x} = \tilde{x}_{max}, t)$ à partir de la condition au limite sur la densité de flux thermique et la loi de Fourier.

5 Résolution numérique

Nous allons écrire le programme qui calcule numériquement toutes les valeurs de $T(x,t)$.

Pour commencer un programme il faut importer des librairies comportant les fonctions que nous allons utiliser

• Importer la librairie numpy avec le préfixe np

• Importer la librairie matplotlib.pyplot avec le préfixe plt

Il faut ensuite définir les paramètres du problème en début de programme
• Définir une variable $\tilde{T}_c = 2$
• Définir une variable $\tilde{x}_{max} = 1$
• Définir une variable $\tilde{t}_{max} = 1$
Il faut ensuite choisir le nombre de points que l'on veut allouer au calcul.
• Définir le nombre de position $\tilde{x}$ avec la variable $n_x = 30$
Ces variables déterminent les autres.
• Calculer $d\tilde{x}$ le pas entre deux positions $\tilde{x}$

• Pour la stabilité de la résolution numérique le nombre de point temporel doit respecter la formule $n_t = 20\frac{t_{max}}{dx^2}$, et n_t doit être un entier. En utilisant la fonction de numpy np.int(), calculer n_t.

• Calculer $d\tilde{t}$ le pas entre deux instants $\tilde{t}$

• En utilisant la fonction de numpy np.zeros initialiser un tableau $\tilde{T}$ de dimension $n_x \times n_t$ rempli de zéro dans lequel nous calculerons les valeurs de $\tilde{T}(\tilde{x}, t)$.

• Remplir dans ce tableau les valeurs initiales de $\tilde{T}(\tilde{x}, 0)$.

• Remplir dans ce tableau les valeurs limites de $\tilde{T}(0, \tilde{t})$, l'autre condition aux limites devra être calulé à chaque itération de la résolution numérique.

• L'équation aux dérivées partielles adimensionnées $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \left[\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} - \left(\tilde{T} - 1\right)\right]$ peut-être discrétisé à l'aide des formules:

$\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t} + d\tilde{t}) - \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} d\tilde{t}$
$\tilde{T}(\tilde{x} + d\tilde{x}, \tilde{t}) - \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x}$
$\tilde{T}(\tilde{x} + d\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{T}(\tilde{x} - d\tilde{x}, \tilde{t}) - 2\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} d\tilde{x}^2$
En déduire une expression de $\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t} + d\tilde{t})$ en fonction de $\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t})$, $\tilde{T}(\tilde{x} + d\tilde{x}, \tilde{t})$, $\tilde{T}(\tilde{x} - d\tilde{x}, \tilde{t})$.

• implémenter cette expression dans un boucle sur les indices de $\tilde{x}$ pour calculer $\tilde{T}(\tilde{x}, d\tilde{t})$, avec $\tilde{x}$ allant de $d\tilde{x}$ à $\tilde{x}_{max} - d\tilde{x}$.

• utiliser la deuxième condition au limite pour calculer $\tilde{T}(\tilde{x}_{max}, d\tilde{t})$

• implémenter ces deux dernière étapes dans une boucle sur les indices de $\tilde{t}$ pour calculer $\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t})$

6 Représentation des résultats

• à l'aide de la fonction de numpy np.linspace() définissez des listes $\tilde{x}$, $\tilde{t}$, et si vous voulez représenter aussi la dlargeur de la plaque $\tilde{y}$

• à l'aide des fonctions de matplotlib plt.figure(), plt.subplot, plt.plot, plt.show, plt.contourf(), plt.clim, représenter des traces de la température à différent instant, ou à différent endroit, ou des images de la plaque à différent instant.

• à l'aide de la fonction de matplotlib quiver(), vous pouvez après l'avoir calculé, représenter le champ vectoriel de vecteur densité de flux thermique.