

DS 8

Éléments de correction

N°	Elts de rép.	Pts	Note
00-00	Titre de l'exo	0	0
0	éléments de réponse	0	0

	Communication avec la Terre		
	Propagation dans le vide		
1	Maxwell-Gauss $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, Maxwell-Flux $\text{div}(\vec{B}) = 0$, Maxwell-Ampère $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Dans le vide $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$ donc on obtient Maxwell-Gauss $\text{div}(\vec{E}) = 0$, Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, Maxwell-Flux $\text{div}(\vec{B}) = 0$, Maxwell-Ampère $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.	1	
2	On calcule $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = \vec{\text{rot}}(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$ donc $\text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta(\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}\vec{B})$ donc $0 - \Delta(\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}\vec{B})$ d'après Maxwell-Gauss dans le vide ($\text{div}(\vec{E}) = 0$), donc $-\Delta(\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$ d'après Maxwell-Ampère dans le vide ($\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$). D'où l'équation de propagation $\Delta \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.	1	
3	On reconnaît une équation de d'Alembert de la forme $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ avec $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ dont les solutions ont des composantes de la forme $f(x - ct)$ ou $f(x + ct)$ ou $f(y - ct)$ ou $f(r - ct)$ ou ... ce sont des fonctions d'onde.	1	
4	\vec{E} est une fonction de $t - \frac{z}{c}$ donc l'onde se propage dans la direction $+\vec{e}_z$ dans le sens des z croissant, car si t augmente pour $t + \Delta t$ avec $\Delta t > 0$ alors le champ électrique se reproduit identique à lui même en $z + \Delta z$ tel que $t + \Delta t - \frac{z + \Delta z}{c} = t - \frac{z}{c}$ donc $\Delta z = c \Delta t > 0$. Le champ \vec{E} ne dépend pas de x et de y donc on peut la qualifier d'onde plane. L'onde se propage selon la direction et le sens $+\vec{e}_z$ donc il s'agit d'une onde plane progressive. L'onde a une dépendance temporelle de la forme $\cos(\omega t - \phi)$ c'est une fonction sinusoïdale de pulsation ω , il s'agit donc d'une onde plane progressive monochromatique.	1	

5	Son nombre d'onde k est défini par $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, avec λ la longueur d'onde donc la périodicité spatiale de l'onde donc $\cos(\omega(t - \frac{z+\lambda}{c})) = \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))$ donc $\omega \frac{\lambda}{c} = 2\pi$ donc $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$.	1	
6	On est dans le vide donc l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit $\text{div}(\vec{E}) = 0$ donc $\frac{\partial}{\partial x}(\vec{E} \cdot \vec{e}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{E} \cdot \vec{e}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{E} \cdot \vec{e}_z) = 0$ donc $0 + 0 + E_z(-k) \sin(\omega(t - \frac{z}{c})) = 0$ donc $E_z = 0$. D'où $\vec{E} = E_x \cos(\omega(t - \frac{z}{c})) \vec{e}_x$	1	
7	On a une onde plane progressive dans le vide donc on a les relation de structure du champ $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = \frac{1}{c} \vec{e}_z \wedge (E \vec{e}_x)$ donc $\vec{B} = \frac{E_x}{c} \cos(\omega(t - \frac{z}{c})) \vec{e}_y$. D'où $B_x = 0$, $B_y = \frac{E_x}{c}$, et $B_z = 0$	1	
8	$\vec{E} \cdot \vec{k} = 0$ et $\vec{B} \cdot \vec{k} = 0$ il s'agit donc d'une onde transversale.	1	
9	$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_x B_y}{\mu_0} \cos^2(\omega(t - \frac{z}{c})) \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \frac{E_x^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega(t - \frac{z}{c})) \vec{e}_z$. $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_x^2}{2c\mu_0} \cos^2(\omega(t - \frac{z}{c})) \vec{e}_z = \frac{E_x^2}{2c\mu_0} \vec{e}_z$. Le vecteur de Poynting est une puissance surfacique telle que la puissance transportée par l'onde électromagnétique à travers une surface S est donnée par le flux de $\vec{\Pi}$ à travers cette surface $P = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$. Le vecteur de Poynting a la même direction et le même sens que la direction de propagation de l'onde \vec{k} .	1	
Réception du signal			
10	La célérité de l'onde dans le vide est c , on a donc $d = c\Delta t = 5,1.10^{11}$ m	1	
11	on a $L = c\Delta t$ donc $L = c(t'_0 - t_0)$ donc $t'_0 = t_0 + \frac{L}{c}$	1	
12	L'émission du deuxième maximum aura lieu une période après donc $t_1 = t_0 + T = t_0 + \frac{1}{f}$. La sonde Rosetta se déplace à la vitesse v donc elle a pu se rapprocher de la distance vT donc $L' = L - vT = L - \frac{v}{f}$. Le deuxième maximum arrive à l'instant $t'_1 = t_1 + \frac{L'}{c} = t_0 + \frac{1}{f} + \frac{L - \frac{v}{f}}{c}$	1	
13	$T' = t'_1 - t'_0 = t_0 + \frac{1}{f} + \frac{L - \frac{v}{f}}{c} - (t_0 + \frac{L}{c}) = \frac{1}{f} - \frac{v}{fc} = \frac{1}{f}(1 - \frac{v}{c})$. Donc $f' = \frac{1}{T'} = \frac{f}{1 - \frac{v}{c}} \approx f(1 + \frac{v}{c})$	1	
14	$v = c(\frac{f'_1}{f_1} - 1)$ donc $v = 1,8.10^4$ m.s ⁻¹ et $f'_2 = f_2(1 + \frac{v}{c})$ donc $f'_2 = 8423,65$ MHz	1	
Prise en compte de l'ionosphère			
15	$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, et $\left\ \frac{q\vec{v} \wedge \vec{B}}{q\vec{E}} \right\ \approx \left\ \frac{v\vec{B}}{\vec{E}} \right\ \approx \frac{v}{c} \ll 1$	1	
16	Pour les ions positifs on a $m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = +e\vec{E}$ et pour les électrons $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}$ donc $i\omega m_p \vec{v}_p = +e\vec{E}$ et $i\omega m_e \vec{v}_e = -e\vec{E}$ donc $\vec{v}_p = \frac{e}{i\omega m_p} \vec{E}$ et $\vec{v}_e = \frac{-e}{i\omega m_e} \vec{E}$	1	

17	$\vec{j} = \rho_p \vec{v}_p + \rho_e \vec{v}_e = ne \vec{v}_p - ne \vec{v}_e = ne(\vec{v}_p - \vec{v}_e) = \frac{ne^2}{i\omega} (\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p}) \vec{E}$ or $m_p \gg m_e$ donc $\vec{j} = -i \frac{ne^2}{\omega m_e} \vec{E}$	1	
18	L'équation de Maxwell-Ampère est $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ or $\vec{j} = -i \frac{ne^2}{\omega m_e} \vec{E}$ donc $\vec{j} = -\frac{ne^2}{\omega^2 m_e} i \omega \vec{E}$ donc $\vec{j} = -\frac{ne^2}{\omega^2 m_e} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ donc $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = -\mu_0 \frac{ne^2}{\omega^2 m_e} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ donc $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = (1 - \frac{ne^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2}) \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ donc $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}}$	1	
19	$\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = (1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ donc $\vec{\text{rot}}(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = (1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ donc $-\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = (1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ donc $-\vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) + \vec{\Delta}(\vec{E}) = (1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ or $\rho = 0$ donc $\vec{\Delta}(\vec{E}) = (1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ en notation complexe $(-ik)^2 \vec{E} = (1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) \epsilon_0 \mu_0 (i\omega)^2 \vec{E}$ donc $k^2 = (1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) \epsilon_0 \mu_0 \omega^2$ donc $k^2 = (1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) \frac{\omega^2}{c^2}$. Cette relation est nommée relation de dispersion.	1	
20	Pour $\omega < \omega_p$ on a $k^2 < 0$ donc k est imaginaire pur, il n'y a pas de propagation de l'onde, on parle d'onde évanescence.	1	
21	Pour $\omega > \omega_p$, k est réel donc $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\omega^2}{k^2}} = \sqrt{\frac{\omega^2 c^2}{(1 - \omega_p^2/\omega^2)\omega^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}$. Et $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ donc $2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$ donc $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$. On remarque que la vitesse de phase dépend de la pulsation donc le milieu est dispersif, et que la vitesse de groupe est inférieure à la célérité de la lumière dans le vide ce qui est cohérent avec la relativité restreinte.	1	
22	Pour $\omega \gg \omega_p$ on a $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ll 1$ donc $v_\phi \approx v_g \approx c$. On retrouve les vitesses de phase et de groupe du vide. Par le choix des fréquences on a $\omega_p \ll f_1, f_2$ donc la ionosphère est transparente et non-dispersive comme le vide à ces fréquences là.	1	
Contrôle non destructif (CND) par courants de Foucault			
Expression approchée du champ magnétique \vec{B} créé par la bobine excitatrice dans la plaque			
23	Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan d'anti-symétrie de la distribution de courant, donc c'est un plan de symétrie pour le champ \vec{B} donc $\vec{B} \in (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ donc $\vec{B} = B_r(r, \theta, z, t) \vec{e}_r + B_z(r, \theta, z, t) \vec{e}_z$. La distribution de courant est invariante par rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz) donc $\vec{B} = B_r(r, z, t) \vec{e}_r + B_z(r, z, t) \vec{e}_z$.	1	

24	la carte 1 correspond a une bobine seule donc il n'y a pas de perturbation des lignes de champ, il s'agit de la première simulation en figure 3. La carte 3 correspond à une fréquence plus élevée que la carte 2. Or dans la limite d'une fréquence nulle, la présence d'une plaque conductrice ne modifie pas le champ magnétostatique (pas d'induction, pas de courant de Foucault, équation de Maxwell-Flux et Maxwell-Ampère en statique ne font pas intervenir \vec{E}). Donc la troisième simulation qui se rapproche le plus de la première est la carte 2. Enfin la carte 3 est associée à la deuxième simulation.	1	
25	On lit la valeur de $ B $ en $x = 2,5$ cm ou en $z = 6$ cm comme $B_0 = 0,003$ T.	1	
26	Calcul du champ sur l'axe d'un solénoïde infini, voir cour on a montré à la question 23 que $\vec{B} = B_r(0, z, t)\vec{e}_r + B_z(0, z, t)\vec{e}_z$. Or si le solénoïde est infini le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie donc c'est un plan d'anti-symétrie du champ donc $\vec{B} = B_z(0, z, t)\vec{e}_z$, et il y a invariance par translation selon \vec{e}_z donc $\vec{B} = B_z(t)\vec{e}_z$. Puis on choisit un contour fermé rectangulaire de hauteur l_b et de rayon plus grand que le rayon de la bobine dont un côté passe par l'axe (Oz), le théorème d'ampère s'écrit alors sur ce contour $B_z(t)l_b + 0 + 0 + 0 = \mu_0 N i_0 \cos(\omega t)$ avec comme hypothèse que le champ est nul à l'extérieur du solénoïde. Donc $B_z(t) = \frac{\mu_0 N i_0}{l_b} \cos(\omega t)$. On en déduit que $B_0 \cos(\omega t) = \alpha B_z(t)$ donc $B_0 = \alpha \frac{\mu_0 N i_0}{l_b}$. Graphiquement $\alpha = \frac{B_0 l_b}{\mu_0 N i_0} = \frac{ B (z=6cm)}{ B (z=0cm)} = 0,5$	1	
Courants de Foucault			
27	L'équation de Maxwell-Faraday est $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ d'après le théorème de Stokes on obtient la forme intégrale $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}(\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S})$ avec S la surface contenue dans le contour fermé C et orientée par C . Comme contour C on choisit un cercle dans le plan d'équation $z = l_b/2$, de rayon r et de centre sur l'axe (Oz). L'énoncé indique que le champ électrique est orthoradial $\vec{E} = E(r, \theta, t)\vec{e}_\theta$. Par invariance par rotation d'angle θ on a $\vec{E} = E(r, t)\vec{e}_\theta$ donc la forme intégrée de l'équation de Maxwell-Faraday donne après intégration $E(r, t) \times (2\pi r) = \frac{d}{dt}(-B_0 \cos(\omega t)\pi r^2)$, donc $E(r, t) = \frac{r\omega B_0}{2} \sin(\omega t)$. D'où $\vec{E} = \frac{r\omega B_0}{2} \sin(\omega t)\vec{e}_\theta$.	1	

28	D'après la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ donc $\vec{j} = \frac{\gamma_0 r \omega B_0}{2} \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$	1	
Modification de l'impédance de la bobine excitatrice			
29	L'amplificateur fonctionne en régime linéaire donc d'après l'annexe 2 $V_+ = V_- = Y_1$. L'amplificateur est idéal donc $i_+ = 0$ donc $R_g i_+ = 0$ donc $e(t) = V_+$ donc $Y_1 = e(t)$. L'annexe 1 décrit que l'on enregistre la réponse du filtre $(R, L) - R'$ à un échelon de tension $e(t)$. La tension de l'échelon 0 et $E = 5,00$ V est inférieur aux bornes de saturation de l'amplificateur $ V_s = 12$ V, la durée d'acquisition est de 20 ms et la période de répétition 1 ms plus grande que la durée du régime transitoire lue sur le chronogramme $5 \times 78,4 \mu s$. La fréquence d'échantillonnage de la carte d'acquisition est de $f_e = 50$ kHz ce qui est supérieur à $\frac{2}{\tau}$ avec $\tau = 78,4 \mu s$ la durée du régime transitoire, donc le théorème de Shannon est respecté. En régime permanent la bobine se comporte comme une résistance, on a donc un pont diviseur de tension $\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{R'}{R+R'}$ donc $R = R'(\frac{E}{Y_2} - 1) \approx 50 \Omega$. La durée du régime transitoire d'un filtre $L - R$ est donnée d'après l'équation différentielle au premier ordre par $\tau = \frac{L}{R}$ donc $L = R\tau = 3,9$ mH	1	
30	Dans le cadre de l'effet joule, la puissance cédée par le champ électromagnétique au porteur de charge est donné par $P_J = \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} dV$ or dans un conducteur ohmique $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ donc $P_J = \iiint \gamma_0 E^2 dV > 0$, donc la bobine cède de l'énergie aux porteurs de charge dans la plaque donc la puissance électrique moyenne reçue par le système bobine + plaque augmente par rapport à la bobine seule donc $p = \langle UI \rangle = R \langle I^2 \rangle$ augmente donc R augmente.	1	
31	En comparant la première et troisième simulation, qui sont à la même fréquence, on remarque que lorsque on ajoute la plaque, l'amplitude du champ magnétique $ B $ diminue. Donc le flux du champ magnétique à travers la section de la bobine diminue. Donc l'inductance de la bobine diminue, donc la partie imaginaire de l'impédance de la bobine diminue.	1	
32	$P_J = \iiint \gamma_0 E^2 dV = \iiint \gamma_0 \frac{r^2 \omega^2 B_0^2}{4} \sin^2(\omega t) dV = \gamma_0 \frac{\omega^2 B_0^2}{4} \sin^2(\omega t) \iiint r^2 \times r dr d\theta dz = \gamma_0 \frac{\omega^2 B_0^2}{4} \frac{R_b^4}{4} 2\pi d = \frac{\pi d R_b^4 \gamma_0 \omega^2 B_0^2}{8}$ <p>Donc $\delta R = \frac{\langle P_J \rangle}{\langle i^2 \rangle} = \frac{\pi d R_b^4 \gamma_0 \omega^2 B_0^2}{8 \langle i^2 \rangle} = \frac{\pi d R_b^4 \gamma_0 \omega^2 \alpha^2 \mu_0^2 N^2 i_0^2}{4 l_b^2 i_0^2} = \frac{\pi d R_b^4 \gamma_0 \omega^2 \alpha^2 \mu_0^2 N^2}{4 l_b^2}$</p>	1	
33	L'équation de Maxwell-Ampère est $\vec{\text{rot}}(\vec{B}') = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans le cadre de l'ARQS on néglige le courant de déplacement devant la densité de courant volumique donc $\vec{\text{rot}}(\vec{B}') = \mu_0 \vec{j}$ la forme intégrée de cette équation est d'après le théorème de Stokes, $\oint_C \vec{B}' \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ avec C un contour fermé et S la surface s'appuyant sur C et orienté par C . On retrouve le théorème d'Ampère. Pour appliquer ce théorème on doit choisir un contour, on choisit un rectangle dans le plan radial $(O\vec{e}_z\vec{e}_r)$ qui va de r à R_b et de $z = l_b/2$ à $z = l_b/2 + d$. Le champ est supposé uniforme selon z car la plaque est fine devant les autres dimensions donc $\vec{B}' = B'(r, t) \vec{e}_z$. Après intégration on obtient $dB'(r, t) + 0 + 0 + 0 = \mu_0 \iint_S j dS$ donc $B'(r, t) = \frac{\mu_0}{d} \iint_S \frac{\gamma_0 r \omega B_0}{2} \sin(\omega t) dr dz = \frac{\mu_0 \gamma_0 \omega B_0 \sin(\omega t)}{2d} \frac{d(R_b - r)^2}{2} = \frac{\mu_0 \gamma_0 \omega (R_b - r)^2}{4} B_0 \sin(\omega t)$	1	

34	$E_m = \iiint \langle e_m \rangle dV = \iiint \frac{\langle B'^2(r,t) \rangle}{2\mu_0} r dr d\theta dz = \frac{\mu_0 \gamma_0^2 \omega^2}{8} B_0^2 <$ $\sin^2(\omega t) > 2\pi d \int (R_b - r)^4 r dr = \frac{\mu_0 \gamma_0^2 \omega^2}{8} B_0^2 \pi \frac{R_b^5}{5} = \frac{\pi \mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 B_0^2 R_b^5}{40}$	1	
35	$\delta L = \frac{2E_m}{\langle i^2 \rangle} = \frac{4E_m}{i_0^2} = \frac{\pi \mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 B_0^2 R_b^5}{10 i_0^2} = \frac{\pi \mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 R_b^5}{10 i_0^2} \alpha \frac{40}{\mu_0^2 N^2 i_0^2} =$ $\frac{\pi \alpha^2 \mu_0^3 \gamma_0^2 \omega^2 R_b^5 N^2}{10 l_b^2}$	1	
36	Faire les application numériques pour δR et δL	1	
37	Lorsqu'on travaille à fréquence plus élevée les variation de δR et δL sont plus grande, et on peut aussi travailler avec une bobine plus petite tout en respectant l'uniformité du champ $\lambda \ll R_b$ et donc avoir une meilleure résolution des défauts. Par contre on risque de ne plus respecter l'ARQS et de voir un effet de peau dans la plaque, on sonde alors que la plaque en superficie et pas sur toute son épaisseur.	1	
	Évolution de Z en présence d'un défaut		
38		1	
39		1	