

Devoir Surveillé 1

La calculatrice est autorisée

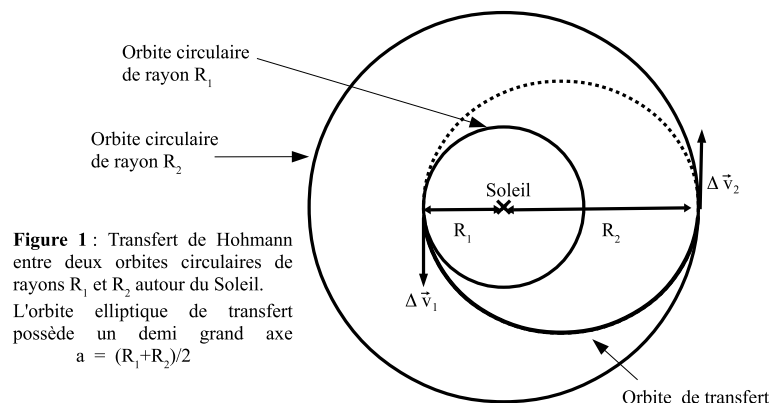
12 Septembre 2020 8h30-12h30

1 Navigation spatiale de la sonde Rosetta

Rosetta est une mission de l'agence spatiale européenne (ESA) qui a pour but d'étudier la comète Tchourioumov-Guérassimenko (67P/TG). La sonde a été lancée le 2 Mars 2004 par une fusée Ariane 5. Après un voyage de près de 10 ans pendant lequel elle aura parcouru près de 6,5 milliards de km, Rosetta a atteint la comète en août 2014 pour une période d'observation de 18 mois. La sonde est constituée d'un satellite principal et d'un atterrisseur (Philae). En novembre 2014, le module Philae a été envoyé à la surface de la comète. L'objet de cette section est d'aborder quelques questions relatives à la mission Rosetta. On désigne dans l'énoncé par \vec{v} le module du vecteur \vec{v} .

1. Donner l'expression de la force de gravitation universelle \vec{F} que le Soleil exerce sur un objet de masse m situé à une distance r de son centre ($r > R_S$ où R_S est le rayon du Soleil)
2. Montrer que cette force est conservative et donner l'expression de l'énergie potentielle associée.
3. Montrer que le mouvement d'un astre en orbite autour du Soleil est plan.
4. On suppose que le mouvement de la Terre autour du Soleil est circulaire. Montrer que le mouvement est uniforme et retrouver l'expression (et la valeur) de la vitesse de la Terre.

Une façon simple d'envoyer un engin spatial d'une orbite circulaire à une autre (coplanaire) est de lui faire parcourir une orbite temporaire de transfert elliptique. Cette trajectoire est tangente aux orbites de départ et d'arrivée. Elle est appelée orbite de transfert de Hohmann. Deux impulsions sont nécessaires pour effectuer ce transfert. Une première impulsion engendre une variation de vitesse Δv_1 (voir figure 1) ce qui permet le passage de l'orbite circulaire de départ vers l'orbite elliptique de transfert. Une seconde impulsion, associée à une variation de vitesse Δv_2 , permet le passage de l'orbite de transfert vers l'orbite d'arrivée.



On indique que l'énergie mécanique d'un objet de masse m en orbite elliptique autour d'un corps de masse M est donnée par : $E_m = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{a}$ où a est le demi grand axe de l'ellipse.

5. Montrer que l'expression du paramètre Δv_1 permettant de passer d'une orbite circulaire de rayon R_1 à une orbite elliptique de demi grand axe $a = (R_1 + R_2)/2$ est :

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1}} \left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1 \right)$$

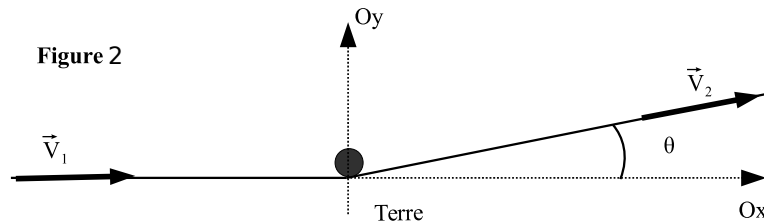
Le lanceur Ariane 5G+ utilisé pour la mission place dans un premier temps Rosetta sur une orbite héliocentrique de même rayon que celle de la Terre. La comète 67P/TG possède une trajectoire elliptique autour du Soleil dont le demi grand axe est de 3,5 ua. On supposera que la Terre possède une orbite quasi circulaire. On souhaite évaluer la valeur de Δv permettant de rejoindre la comète.

6. Le périhélie de la comète, c'est à dire le point de la trajectoire le plus proche du soleil est de l'ordre de 1 ua. On envisage une injection directe dans l'orbite de la comète depuis l'orbite circulaire de la Terre. Déterminer la valeur de Δv nécessaire à cette manœuvre.

Afin de contourner les problèmes liés à la quantité limitée de carburant, la sonde Rosetta a utilisé une trajectoire permettant d'exploiter l'effet de fronde gravitationnelle (appelé aussi assistance gravitationnelle). Cette stratégie a permis à la sonde d'acquérir de la vitesse en limitant l'utilisation de carburant. En contre-partie, la durée de la mission devient plus longue...

Rosetta a utilisé trois assistances gravitationnelles en passant à proximité de la Terre. On propose dans cette question une étude simplifiée d'une assistance gravitationnelle. On se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. La sonde arrive de l'infini (c'est à dire hors de la zone d'influence gravitationnelle de la Terre) avec une vitesse \vec{V}_1 dans le référentiel géocentrique. La sonde passe à proximité de la Terre puis s'éloigne ensuite à l'infini avec une vitesse asymptotique \vec{V}_2 (voir la figure 2).

7. Montrer que l'on a $V_1 = V_2$.
8. On posera $V = V_1 = V_2$. On suppose que dans le référentiel héliocentrique la vitesse de la Terre \vec{v}_T est dirigée suivant la direction Oy de la figure 2. Et on donne dans le référentiel héliocentrique les vitesses $\vec{v}_1 = \vec{V}_1 + \vec{v}_T$ et $\vec{v}_2 = \vec{V}_2 + \vec{v}_T$. En déduire l'expression de la variation $\Delta v = v_2 - v_1 = ||\vec{v}_2|| - ||\vec{v}_1||$ de la valeur de la vitesse \vec{v} de la sonde dans le référentiel héliocentrique à l'issue de son passage à proximité de la Terre en fonction de v_T , V et θ . Donner une estimation de Δv en prenant $V = 5 \text{ km.s}^{-1}$ et $\theta = 45^\circ$ (La valeur de v_T a été déterminée à la question 4).



9. Pour quelle raison selon vous, l'usage de l'assistance gravitationnelle augmente-t-il la durée du voyage vers la comète cible par rapport à une trajectoire directe ?

Données numériques :

- Masse du Soleil : $M_S = 2,0.10^{30}$ kg
- Masse de la Terre : $M_T = 6,0.10^{24}$ kg
- Rayon moyen de l'orbite de la Terre autour du Soleil :
1 unité astronomique (ua) = 150.10^6 km
- Rayon de la Terre : $R_T = 6,4.10^3$ km
- Constante de gravitation universelle : $G = 6,67.10^{-11}$ m³.kg⁻¹.s⁻²

2 Premiers instruments électroniques

Cette partie s'intéresse à différents instruments de musique dans lesquels le musicien crée des signaux électriques pour engendrer in fine à partir de ceux-ci des ondes sonores perçues par les auditeurs. Le problème étudie les transformations des signaux et leurs interactions au fur et à mesure de leur cheminement dans le montage électrique. Nous allons nous intéresser à un des instruments de musique qui sont les ancêtres des instruments électroniques et qui sont encore utilisés de nos jours pour leur musicalité particulière : le thérémine . Il utilise l'effet hétérodyne.



Figure 3 - Thérémine

Document 1 : description des deux instruments Le thérémine est un boîtier électronique avec deux antennes qui produit de la musique sans que l'instrumentiste ne touche l'instrument. Une antenne verticale est dite antenne de tonalité ou pitch car on commande la hauteur de la note en faisant varier la distance de la main droite à l'antenne verticale. L'antenne horizontale en forme de boucle est utilisée pour faire varier l'intensité du son selon la position de la main gauche (figure 1). La sortie du son se fait par un haut-parleur. Cet instrument exige de l'instrumentiste une grande précision des mouvements de ses mains et une quasi-immobilité du reste du corps.

Document 2 : caractéristiques des sons : hauteur et intensité La hauteur d'un son est la fréquence du fondamental. Les harmoniques décroissants avec le rang participent au son global. L'oreille perçoit la hauteur même si le fondamental est quasi-inexistant ! Mais il y a un lien avec la durée aussi car l'oreille possède une constante de temps mécanique et la durée limite en dessous de laquelle le son est perçu comme un bruit est 5 ms. Le « la3 » ou La du diapason

est un son de fréquence 440 Hz. Une octave correspond à la multiplication par 2 de la fréquence. Le timbre est lié à la composition spectrale (présence, durée et importance des harmoniques) et même l'oreille la moins exercée distingue facilement le timbre d'un instrument.

Intensité sonore

On obtient des effets musicaux en jouant certaines notes de manière plus intense que d'autres. Le son est généralement restitué par un haut-parleur qui transforme un signal électrique en son. L'intensité du son est une fonction croissante de l'amplitude du signal électrique. L'instrument s'appuie sur l'effet hétérodyne pour engendrer la fréquence audible.

Document 3 : audibilité L'oreille humaine moyenne est sensible aux sons dont la fréquence est dans le domaine [20Hz, 20kHz] . Le domaine audible correspond à 10 octaves ($10^3 \sim 2^{10}$). Un son grave est un son de basse fréquence, un son aigu de haute fréquence

On donne $\sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ L'effet hétérodyne est l'exploitation de deux signaux s_1 et s_2 , de fréquence f_1 et f_2 très élevées inaudibles, du domaine des radiofréquences et dont la différence produit une vibration de fréquence audible. L'oscillateur électrique local crée le signal électrique de fréquence f_2 stable et l'instrumentiste engendre le signal électrique de fréquence f_1 . Un « mélangeur » ou multiplieur crée la multiplication des deux signaux $s = k \cdot s_1 \cdot s_2$ avec un coefficient k réel.

10. On dispose de deux signaux harmoniques : s_1 de fréquence $f_1 = 80,440$ kHz et s_2 de fréquence $f_2 = 80,000$ kHz. Ces fréquences font-elles partie du domaine audible ?
11. On envoie ces signaux à l'entrée du multiplieur. Préciser quel est le spectre en fréquence du signal de sortie du multiplieur. Ces fréquences font-elles partie du domaine audible ?
12. Pourquoi faut-il placer un filtre en sortie du multiplieur ? Quelle doit être la nature de celui-ci ?

On suppose que le circuit oscillant local est un circuit série contenant une bobine idéale d'inductance L_0 et un condensateur de capacité C_0 (figure 4).

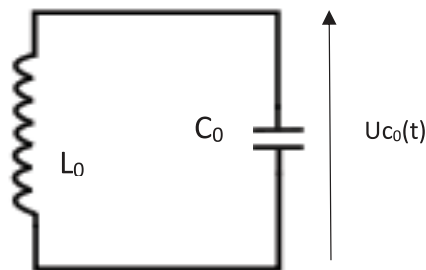


Figure 4 - circuit oscillant

13. Écrire la relation courant-tension complexe de la bobine et du condensateur.
14. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la tension $U_{C_0}(t)$ aux bornes du condensateur.
15. Quelle est la forme mathématique de la solution $U_{C_0}(t)$?
16. En déduire la relation qui lie la fréquence propre du circuit f_2 aux grandeurs L_0 et C_0 ?

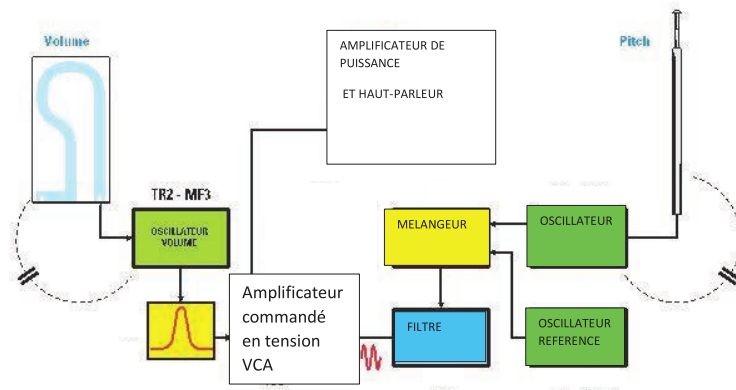


Figure 5 - Schéma-bloc A fonctionnel d'un thérimine

L'antenne de tonalité (pitch) est reliée à un circuit oscillant (L_0, C_0) identique à celui décrit en figure 4. Le caractère conducteur du corps humain de l'instrumentiste fait que l'ensemble (antenne de tonalité, main droite en face) revient à placer un condensateur de capacité C_{h1} (figures 5, 6 et 7) en parallèle sur le condensateur de capacité C_0 . De même l'antenne de volume introduit une capacité en parallèle sur son circuit électrique C_{h2} (figures 5, 6 et 7).

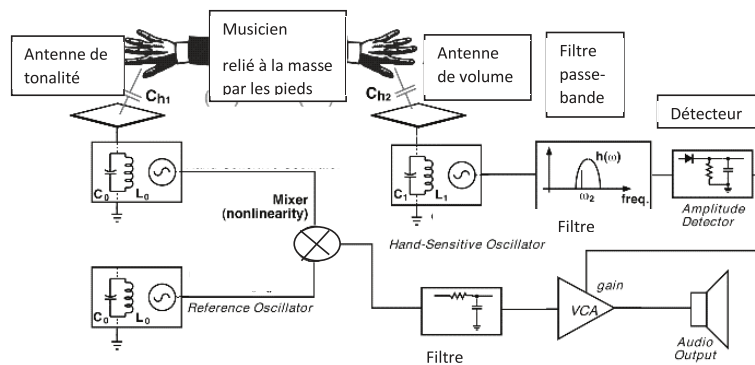


Figure 6 - Schéma-bloc B d'un thérimine

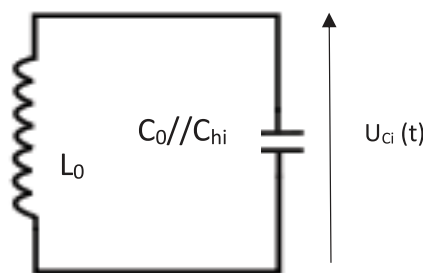


Figure 7 - circuit oscillant des antennes de volume ou de tonalité

17. Déterminer la fréquence f_1 du signal engendré par le circuit oscillant en présence de l'instrumentiste.
18. Quel est le spectre de fréquence du signal $u(t)$ qui sort du « multiplieur » exprimé en fonction de L_0 , C_0 et C_{h1} ? Comment choisir la fréquence de coupure du filtre qu'on applique à ce signal électrique $u(t)$?

On s'intéresse au filtrage du signal $u(t)$. On dispose d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C dont le montage est celui du schéma de la figure 8.

19. Établir la fonction de transfert. Quelle est la nature du filtre ? Exprimer la fréquence de coupure f_c du filtre à -3 dB en fonction de R et C .
20. On a une capacité $C = 0,01 \mu\text{F}$, quelle résistance proposez-vous de placer dans le circuit pour isoler la fréquence audible ?

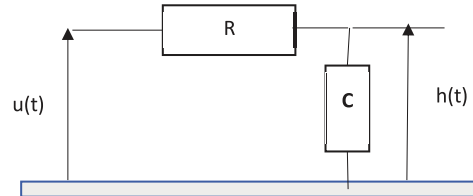


Figure 8 - montage R,C

Pour l'émission du signal audio un haut-parleur est utilisé.

Un haut-parleur est représenté sur la figure 9. Une partie mobile β est constituée d'une membrane et d'une bobine conductrice plate, solidaires l'une de l'autre. Elles peuvent se translater le long de leur axe de révolution commun zz' . Lorsque la bobine s'écarte de sa position d'équilibre elle est rappelée par une force élastique analogue à celle exercée par un ressort de raideur k . L'air exerce sur la membrane une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$ ($h > 0$), en notant \vec{v} la vitesse de la partie mobile β . Un aimant permanent crée au niveau de la bobine un champ magnétique radial $\vec{B} = b_0\vec{e}_r$. La bobine plate est un enroulement de N spires de rayon a . Elle est caractérisée par une résistance R , et une inductance propre L . La masse de β vaut m . On relie le signal sinusoïdal $s(t)$ en entrée de la bobine plate.

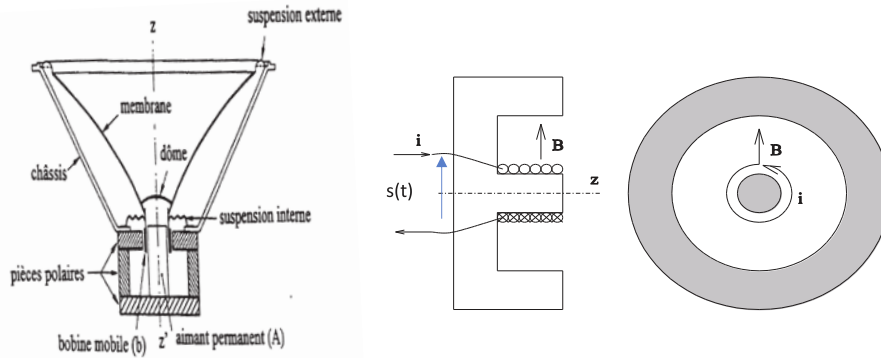


Figure 9 : haut-parleur

La bobine est un conducteur en mouvement dans un champ magnétique : il y a donc induction, qui se traduit par l'apparition d'un courant induit dans la bobine. La bobine se trouve dans un champ magnétique et subit donc une force de Laplace induite d'expression $\vec{F}_L = -2\pi N a b_0 \vec{e}_z$.

21. Écrire le théorème de la résultante cinétique (ou principe fondamental de la dynamique) pour le système β .
22. On peut établir, en faisant l'étude du phénomène d'induction, que l'équation électrique s'écrit sous la forme $s(t) = -2\pi N a \frac{dz}{dt} b_0 + R i + L \frac{di}{dt}$. La quantité $e = 2\pi N a \frac{dz}{dt} b_0$ représente

la force électromotrice induite qui est schématisée par un générateur de tension e . Faire le schéma électrique correspondant à l'équation électrique.

23. Le signal $s(t)$ étant harmonique de fréquence f montrer que la fonction de transfert vitesse sur tension est de la forme

$$H = \frac{-A}{B^2 + C \left(jm2\pi f + \frac{k}{j2\pi f} + h \right)}$$

en exprimant les grandeurs A , B et C avec les grandeurs N , a , b , L , f et R . Simplifier dans la situation habituelle où l'impédance $2\pi Lf$ est négligeable devant R .

24. Quelle est la nature et l'ordre du filtre auquel correspond le haut-parleur ?

25. La forme canonique de ce filtre est $H = \frac{H_0}{1 + jQ(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f})}$, que représentent H_0 , Q et f_0 ?

et exprimer H_0 , Q et f_0 pour le haut-parleur.

26. Donner l'expression des fréquences de coupures à -3dB pour la forme canonique, et montrer que leur différence vaut $\frac{f_0}{Q}$.

27. Dans les diagrammes ci-dessous indiquer quel est le diagramme qui peut correspondre à la fonction de transfert.

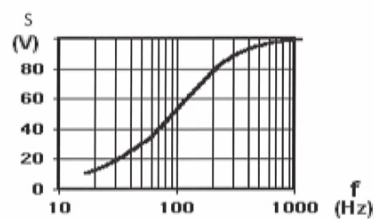


Figure -a

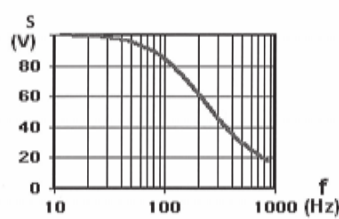


Figure -b

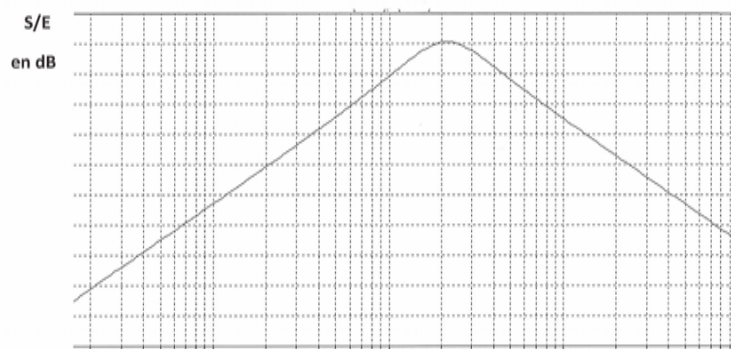


Figure 10

Figure 10

Un seul haut-parleur ne permet pas en général de couvrir l'ensemble du domaine audible, pour améliorer la qualité du son émis on utilise deux autres haut-parleurs supplémentaires pour les sons graves et aigus.

28. Quel problème peut poser un unique haut-parleur pour couvrir l'ensemble du domaine audible ?
29. On souhaite modifier un haut-parleur pour qu'il soit efficace pour les sons grave en utilisant un filtre linéaire, quel filtre pouvons nous utiliser, donner ses paramètres et son diagramme de Bode.