Complément Devoir Surveillé 5

La calculatrice est autorisée

5 Décembre 2020
si il reste du temps après avoir rendu sa copie

Croissance hivernale de l'épaisseur de glace

Pour étudier la croissance de la couche de glace en hiver, on modélise l'océan sous la banquise en formation de la manière suivante : en profondeur, la température de l'eau est maintenue constante à $T_1 = 4$ °C par les courants océaniques. Sur une hauteur constante e sous la banquise, l'eau se refroidit progressivement jusqu'à atteindre $T_0 = 0$ °C à l'altitude z = 0 de formation de la glace (on néglige tout effet de salinité de l'eau). La couche de glace a une épaisseur croissante $z_g(t)$ qu'il s'agit de déterminer ; au-dessus de celle-ci, l'air est à la température constante $T_2 = -40$ °C. On notera λ_e et λ_g les conductivités thermiques et c_e et c_g les capacités thermiques massiques de l'eau liquide et de la glace, ρ_g et l_f la masse volumique et l'enthalpie massique de fusion de la glace ; toutes ces grandeurs sont des constantes. L'épaisseur de glace $z_g(t)$ augmente régulièrement du fait de la cristallisation de l'eau refroidie à $T_0 = 0$ °C à la base de la couche de glace. Toutes les études pourront être faites pour un système défini par un cylindre vertical de surface S unité au sein duquel les transferts thermiques unidimensionnels sont régis par la loi de Fourier.

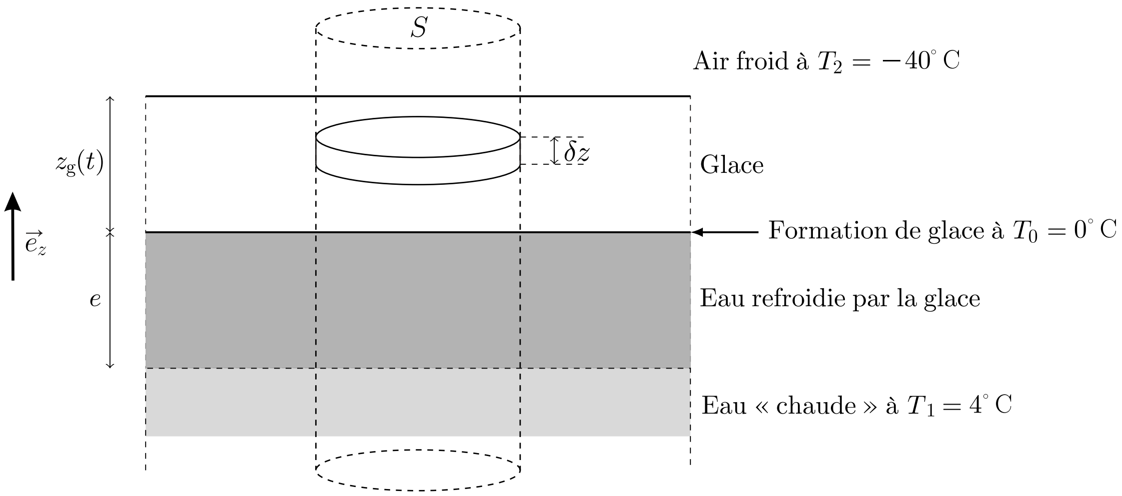

FIGURE L'océan sous la banquise en formation

1. Par une étude des échanges thermiques de l'épaisseur δz prise à l'intérieur de la glace, établir une équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T_g(z,t)$ au sein de la glace.

2. Déterminer une expression donnant l'ordre de grandeur de la durée Δt de la diffusion thermique au sein de la glace sur une hauteur Δz. Quelle durée doit-on attendre afin de pouvoir considérer que, pour des évolutions assez lentes, la température T_g ne dépend pratiquement plus du temps ? Préciser ce que l'on entend par "assez lentes".

On se place dans ce cas dans toute la suite : dans l'eau comme dans la glace, les répartitions de température seront supposées quasi–statiques.

3. Définir et exprimer les résistances thermiques R_g et R_e, pour une aire donnée S, des couches de glace et d'eau refroidie sous la glace.

Les transferts thermiques à travers la surface supérieure de la banquise sont décrits par la loi de Newton des transferts pariétaux (radiatifs et convecto–conductifs) : la puissance échangée par unité d'aire de cette surface vérifie $|P_u| = h|T_s - T_2|$ où T_s est la température au sommet de la couche de glace ; le coefficient $h > 0$ de la loi de Newton est supposé connu et constant.

4. Exprimer la résistance thermique R_i, pour une aire S, de l'interface entre l'air et la glace.
5. Montrer que le régime quasi–permanent de croissance de la couche de glace peut être décrit par le schéma électrique équivalent de la figure ci-dessous et préciser l'expression du "courant" Φ du "générateur de courant" en fonction notamment de l_f , ρ_g et de la vitesse de croissance $v_g = \dfrac{dz_g}{dt}$ de la couche de glace.

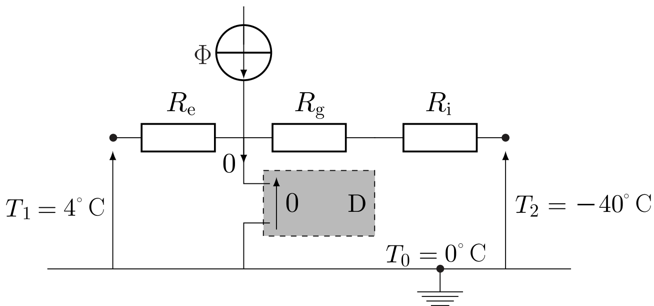

FIGURE Circuit électrique équivalent à la croissance de la couche de glace. Le dipole D représenté sur cette figure permet d'assurer une différence de potentiel nulle sans appel de courant dans cette branche du circuit.

6. Établir l'équation différentielle vérifiée par $z_g(t)$. On suppose que pour toutes les valeurs de t considérées on a $\dfrac{e}{\lambda_a} \gg \dfrac{z_g}{\lambda_g} + \dfrac{1}{h}$, en déduire la loi d'évolution de l'épaisseur de la couche de glace sous la forme $\tau_g \left[l_g z_g(t) + z_g^2(t) \right] = l_g^2 t$ où l'exprimera les grandeurs τ_g et l_g en fonction des paramètres du modèle. L'instant $t = 0$ correspond au début de la formation de la banquise.
7. Tracer et commenter l'allure de la courbe donnant z_g en fonction de t. On montrera notamment l'existence de deux régimes successifs.