

## DS 8

Les calculatrices sont autorisées

Samedi 29 Février 2020 : 8h30 - 12h30

### Communication avec la Terre

D'après Science et Avenir, 12 Septembre 2014 : "Loin des yeux mais pas loin du coeur. La sonde Rosetta a beau naviguer dans l'espace à plus de 400 millions de kilomètres de la Terre, elle donne de ses nouvelles en permanence aux équipes de l'agence spatiale européenne. En ce moment elle communique 24h/24 afin de transmettre toutes les données qu'elle recueille sur la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko, précise Sylvain Lodiot, responsable ESA des opérations sur Rosetta. Envoyées par ondes radio sur deux fréquences (proches de 8 GHz), les informations mettent aujourd'hui 20 minutes environ à nous parvenir et sont captées par plusieurs stations de l'ESA et de la NASA situées en Australie, en Espagne, en Argentine et aux Etats-Unis.

### Propagation dans le vide

On se propose d'étudier la propagation des ondes électromagnétiques entre la sonde Rosetta et la Terre, dans le vide.

Données :

- $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{E}\right)\right)=\overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\left(\vec{E}\right)\right)-\vec{\Delta}\left(\vec{E}\right)$
  - vitesse de la lumière dans le vide :  $c=3,00.10^8 \text{ m.s}^{-1}$
1. Rappeler les équations de Maxwell en présence de charges et de courants. Comment se simplifient-elles dans le vide ?
  2. Etablir l'équation de propagation dans le vide vérifiée par le champ électrique  $\vec{E}$ . Donner celle vérifiée par le champ magnétique  $\vec{B}$ .
  3. En déduire la célérité  $c$  des ondes électromagnétiques dans le vide, en fonction de  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$ .

On considère une onde électromagnétique pour laquelle le champ électrique en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\vec{E}=E_x \cos \left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right] \vec{e}_x+E_z \cos \left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right] \vec{e}_z$$

4. Dans quelle direction se propage cette onde ? Comment peut-on la qualifier ?
5. Exprimer son nombre d'onde  $k$  en fonction de  $\omega$  et  $c$ .
6. Simplifier l'expression proposée du champ électrique, à l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss.
7. Le champ magnétique  $\vec{B}$  associé s'écrit :

$$\vec{B}=B_x \cos \left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right] \vec{e}_x+B_y \cos \left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right] \vec{e}_y+B_z \cos \left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right] \vec{e}_z$$

Déterminer les constantes  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  en fonction de  $E_x$  et  $c$ .

8. Cette onde est-elle transversale ou longitudinale ?
9. Exprimer le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  associé à cette onde. Calculer sa valeur moyenne en fonction de  $E_x$ ,  $\mu_0$  et  $c$ , rappeler sa signification physique et commenter sa direction.

## Réception du signal

10. Au moment du largage de Philae, le délai de communication entre Rosetta et la Terre est de 28 minutes et 20 secondes. Calculer la distance entre la Terre et la comète à cet instant.

Les deux canaux attribués à la sonde Rosetta pour communiquer avec la Terre sont  $f_1 = 8421,79$  MHz et  $f_2 = 8423,15$  MHz.

Pour déterminer la vitesse relative  $v$  de la comète par rapport à la Terre (la comète se rapproche de la Terre), on mesure la fréquence  $f'$  du signal reçu, correspondant à la fréquence d'émission  $f$  (on assimile la vitesse de la comète à celle de Rosetta).

11. On considère qu'à l'instant  $t_0$ , la comète se situe à la distance  $L$  de la Terre. Le signal sinusoïdal émis est alors maximum. Déterminer l'instant  $t'_0$  correspondant à l'arrivée de ce maximum sur la Terre.
12. Exprimer en fonction de  $t_0$  et  $f$ , l'instant  $t_1$  auquel sera émis le maximum suivant du signal. En déduire la distance  $L'$  qu'il lui faut parcourir pour atteindre la Terre, puis la date  $t'_1$  correspondant à l'arrivée de ce second maximum sur Terre.
13. Déterminer la période  $T'$  qui sépare l'arrivée sur Terre des deux maximums successifs, d'une sinusoïde de fréquence  $f$  émise par Rosetta. En déduire au 1er ordre en  $\frac{v}{c}$ ,  $f' = f \left(1 + \frac{v}{c}\right)$ .
14. Calculer numériquement la vitesse  $v$  de la comète sachant que  $f'_1 = 8422,29$  MHz, puis déterminer la fréquence  $f'_2$  correspondant à un signal émis de fréquence  $f_2$ .

## Prise en compte de l'ionosphère

Pour atteindre la surface de la Terre, les ondes électromagnétiques émises par Rosetta doivent traverser l'atmosphère. Celle-ci peut-être assimilée au vide en ce qui concerne la propagation des ondes électromagnétiques, à l'exception d'une couche située entre 60 km et 800 km d'altitude : l'ionosphère.

Sous l'influence du rayonnement solaire, le gaz présent dans l'ionosphère se comporte comme un plasma, contenant des ions positifs (masse  $m_p$  et charge  $+e$ ) et des électrons (masse  $m_e$  et charge  $-e$ ), avec une densité volumique  $n$ .

Les charges sont soumises à l'action de l'onde électromagnétique. Celle-ci est décrite par :  $\vec{E} = E_x \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \right] \vec{e}_x$  et  $\vec{B} = \frac{E_x}{c} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \right] \vec{e}_y$ . En notation complexe  $\vec{E} = E_x \exp [i(\omega t - kz)] \vec{e}_x$  et  $\vec{B} = \frac{E_x}{c} \exp [i(\omega t - kz)] \vec{e}_y$ .

15. Exprimer la force de Lorentz qui s'exerce sur une charge  $q$  qui se déplace à la vitesse  $\vec{v}$  et préciser pourquoi il est possible de négliger la composante magnétique devant la composante électrique.
16. On note respectivement  $\vec{v}_p$  et  $\vec{v}_e$ , les vitesses des ions positifs et des électrons. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à chacun des porteurs de charge pour exprimer les grandeurs complexes  $\vec{v}_p$  et  $\vec{v}_e$  (le poids est négligé devant la force électrique).
17. En déduire la densité volumique de courant  $\vec{j}$  dans le plasma et indiquer pourquoi on peut simplifier son expression pour écrire :  $\vec{j} = -i \frac{ne^2}{\omega m_e} \vec{E}$

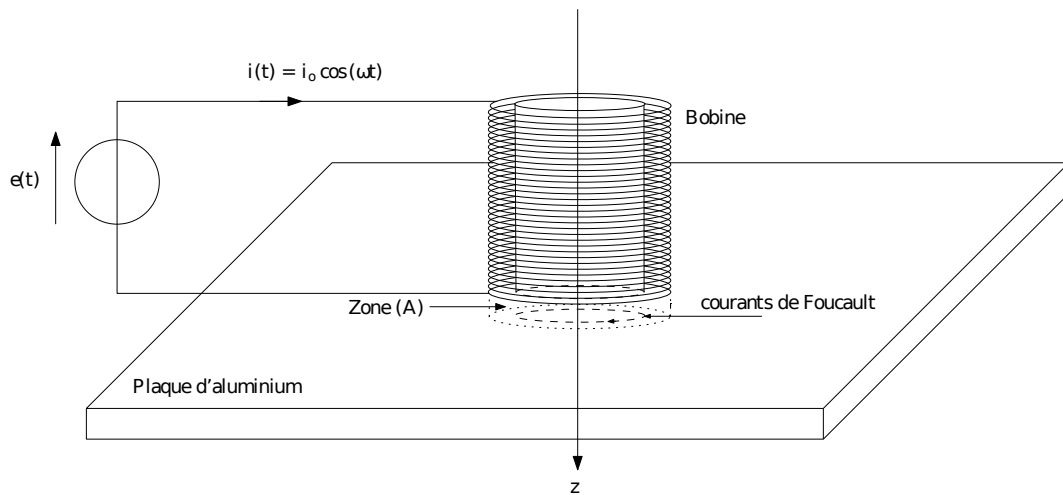
18. Ecrire l'équation de Maxwell-Ampère dans le plasma sous la forme  $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \epsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , où  $\omega_p$  est une constante à exprimer en fonction de  $n$ ,  $e$ ,  $m_e$  et  $\epsilon_0$ .
19. Établir l'équation de propagation alors vérifiée par le champ électrique. En déduire l'expression de  $k^2$ , en fonction de  $c$ ,  $\omega_p$  et  $\omega$ . Comment cette relation est-elle nommée ?
20. Que se passe-t-il pour  $\omega < \omega_p$  ?
21. Pour  $\omega > \omega_p$ , exprimer la vitesse de phase  $v_\phi$  et la vitesse de groupe  $v_g$ . Commenter.
22. Simplifier les deux expressions pour  $\omega \gg \omega_p$ . Commenter le choix des fréquences  $f_1 = 8421,79$  MHz et  $f_2 = 8423,15$  MHz pour assurer la communication entre Rosetta et la Terre, sachant que  $\omega_p \approx 10^7$  rad.s<sup>-1</sup> pour l'ionosphère terrestre.

## Contrôle non destructif (CND) par courants de Foucault

Le but des essais non destructifs est de détecter dans une pièce métallique, et en respectant son intégrité, toute particularité de sa structure. On souhaite ici contrôler la qualité d'une plaque d'aluminium, de faible épaisseur par rapport à ses autres dimensions, en utilisant une technique de contrôle non destructif par courants de Foucault. Le dispositif utilisé comprend :

- une bobine alimentée par un générateur de tension sinusoïdale de fréquence  $f$ . Cette bobine est déplacée à la surface de la plaque à tester, sans contact électrique ;
- un système de mesure d'impédance par détection synchrone afin de mesurer en direct l'impédance de la bobine. En effet, la bobine joue à la fois le rôle d'émetteur et de récepteur : lorsque l'opérateur passe la bobine au dessus d'un défaut interne à la plaque, son impédance interne est légèrement modifiée.

La figure 1 présente le système de détection, le dispositif de mesure d'impédance n'est pas représenté.



**Figure 1** Principe du CND

Données :

- fréquence du générateur  $f = 50$  Hz
- épaisseur de la plaque  $d = 3,0$  mm
- longueur de la bobine  $l_b = 12$  cm

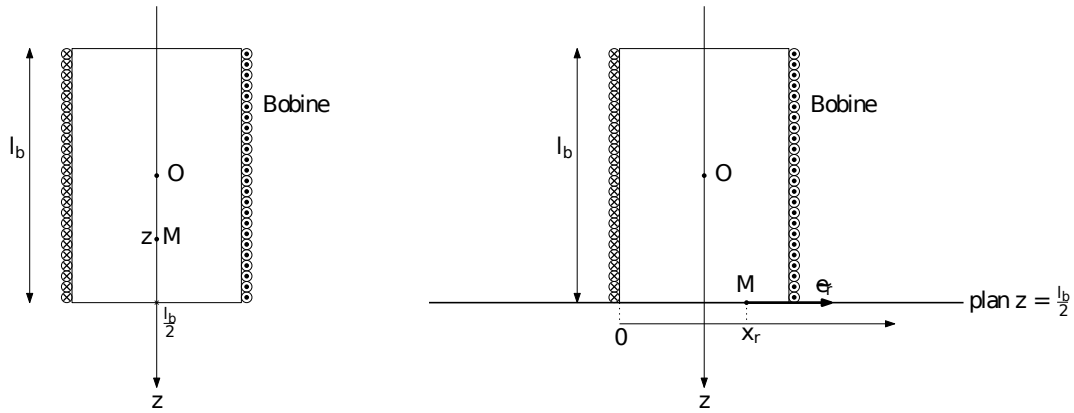
- nombre de spire de la bobine  $N = 1,0 \times 10^3$
- rayon moyen du bobinage  $R_b = 2,5 \text{ cm}$
- masse molaire de l'aluminium  $M = 27 \text{ g.mol}^{-1}$
- masse volumique de l'aluminium  $\mu = 2,7 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
- conductivité électrique de l'aluminium  $\gamma_0 = 3,8 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$
- perméabilité magnétique du vide  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

### Expression approchée du champ magnétique $\vec{B}$ créé par la bobine excitatrice dans la plaque

À l'aide d'un logiciel de simulation, on visualise les cartes du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par la bobine dans différentes situations et ce afin d'établir son expression approchée. Les figures 3, 4 et 5 représentent les cartes du champ créé par la bobine ainsi que les profils axiaux et radiaux de ce champ dans trois cas, avec une même amplitude de courant  $i_0$  :

- la bobine seule pour  $f = 50 \text{ Hz}$  (carte 1) ;
- la bobine en présence de la plaque pour  $f = 50 \text{ Hz}$  (carte 2) ;
- la bobine en présence de la plaque pour  $f = 200 \text{ Hz}$  (carte 3).

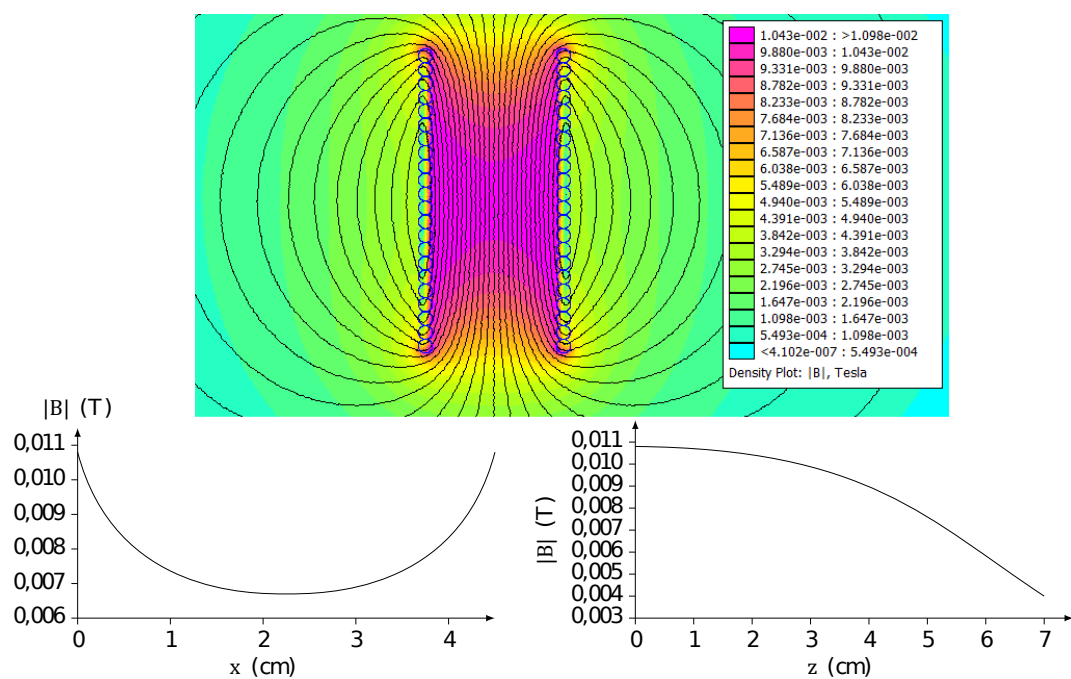
Le profil axial représente l'amplitude du champ magnétique  $\vec{B}$  en un point M appartenant à l'axe (Oz) en fonction de sa coordonnée z, l'origine de cet axe étant choisie au centre de la bobine (voir figure 2). Le profil radial représente l'amplitude du champ magnétique  $\vec{B}$  en un point M appartenant au plan  $z = l_b/2$  en fonction de son abscisse  $x_r$  sur l'axe  $(M, \vec{e}_r)$ , l'origine de cet axe étant choisie sur un des côtés de la bobine (voir figure 2).



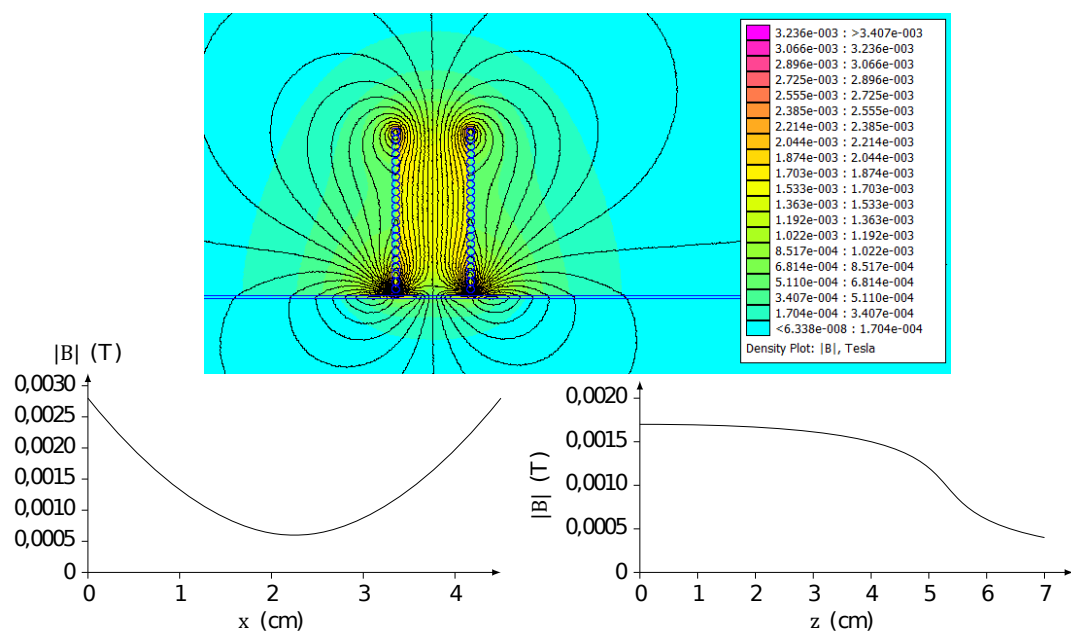
**Figure 2** Conventions pour les profils axial et radial

23. Justifier que le champ créé en un point M de l'espace est de la forme

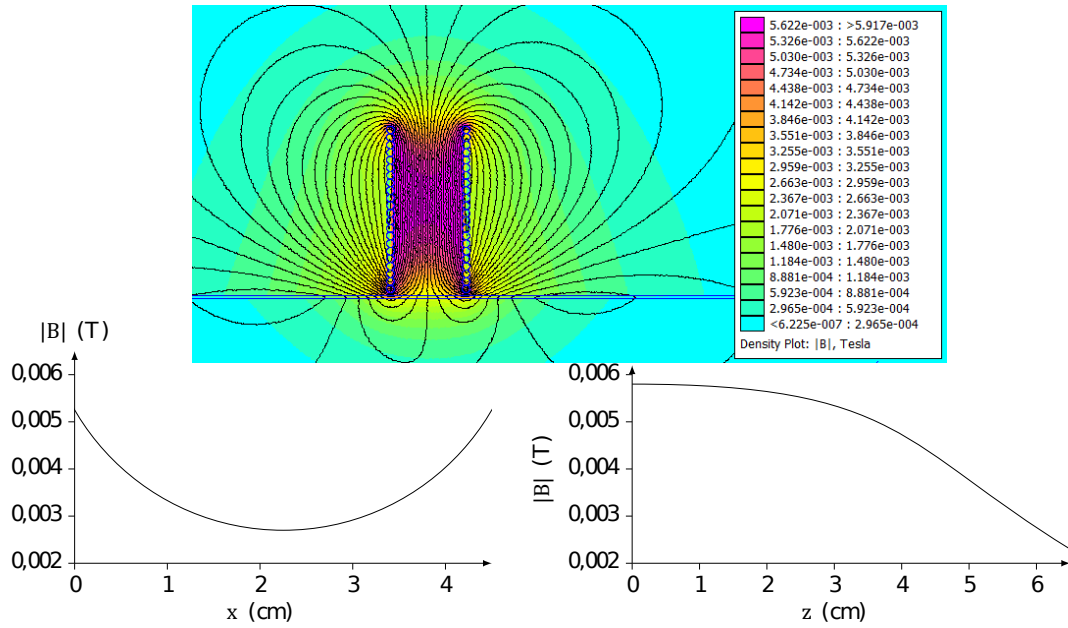
$$\vec{B}(M) = B_r(r, z, t)\vec{e}_r + B_z(r, z, t)\vec{e}_z$$



**Figure 3** Première simulation



**Figure 4** Deuxième simulation



**Figure 5** Troisième simulation

24. Affecter chaque simulation à chaque carte.

On s'intéresse au champ magnétique créé dans la partie de la plaque directement au contact avec la bobine (zone (A) sur la figure 1). Dans une première approximation, on suppose que le champ dans cette zone est de la forme  $\vec{B}(M) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$  où  $B_0$  est l'amplitude du champ magnétique supposée uniforme.

25. En vous aidant des profils de la carte 2, proposer une valeur numérique pour  $B_0$ .

26. En considérant que le champ au centre O de la bobine peut être assimilé au champ créé par un solénoïde infini et en vous aidant de la carte 2, justifier que  $B_0$  peut s'écrire

$$B_0 = \alpha \frac{\mu_0 N i_0}{l_b}$$

où  $\alpha$  est un coefficient dont on précisera la valeur numérique.

## Courants de Foucault

On se place toujours dans l'hypothèse où le champ magnétique dans la zone (A) est de la forme  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ . Ce champ magnétique étant variable, il apparaît dans la plaque, un champ électrique  $\vec{E}$  orthoradial, lui-même à l'origine de courants induits.

27. À l'aide de la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday, déterminer dans la zone (A) l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  induit par les variations temporelles de  $\vec{B}$ .

28. Établir que l'expression du vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  est donnée par la relation  $\vec{j} = \frac{\gamma_0 \omega B_0}{2} r \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$  où  $\vec{e}_\theta$  est le vecteur unitaire orthoradial des coordonnées cylindriques.

## Modification de l'impédance de la bobine excitatrice

L'impédance de la bobine en l'absence de la plaque est  $Z = R + jL\omega$ . En présence de la plaque, cette impédance est modifiée. Le but de cette sous-partie est de déterminer cette nouvelle

impédance. On modélise les variations de l'impédance  $Z$  de la bobine en présence de la plaque de la manière suivante

$$\underline{Z} = (R + \delta R) + j\omega(L - \delta L) \text{ où } \delta R < i^2 > = < P_J > \text{ et } \frac{1}{2}\delta L < i^2 > = < E_m >$$

avec

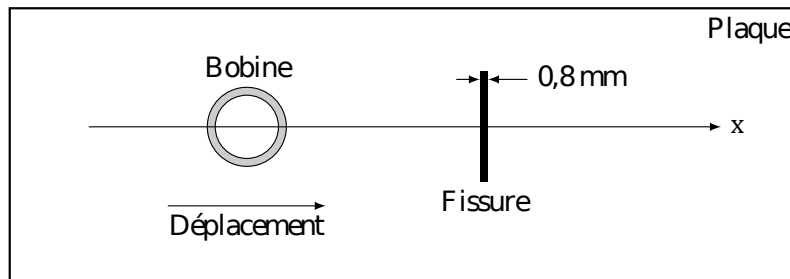
- $P_J$  la puissance dissipée par effet Joule par les courants de Foucault dans la plaque ;
  - $E_m$  l'énergie magnétique stockée dans la plaque ;
  - $< X >$  désignant la valeur moyenne temporelle de la grandeur  $X(t)$ .
29. En exploitant soigneusement les annexes 1 et 2, déterminer les valeurs numériques de  $R$  et de  $L$  qui caractérisent l'impédance de la bobine en l'absence de la plaque.
  30. Justifier à l'aide d'un argument énergétique simple, que la partie réelle de l'impédance de la bobine augmente.
  31. Justifier, en utilisant les cartes données par les figures 3, 4 et 5, que la partie imaginaire de l'impédance de la bobine diminue.
  32. Montrer que  $P_J = \frac{\pi d R_b^4 \gamma_0 \omega^2 B_0^2}{8} \sin^2(\omega t)$ . Dédurre, en utilisant la relation de la question 26, l'expression de  $\delta R$  en fonction de  $\alpha$ ,  $N$ ,  $d$ ,  $R_b$ ,  $\gamma_0$ ,  $\omega$  et  $l_b$ .

L'énergie électromagnétique  $E_m$  est due au champ magnétique  $\vec{B}'$  créé par les courants de Foucault dans la plaque. Pour simplifier, on suppose que ce champ  $\vec{B}'$  est nul en dehors de la zone (A) et que dans la zone (A) il est de la forme  $\vec{B}' = B'(r, z, t)\vec{e}_z$ .

33. En utilisant la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère écrite dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires, déterminer le champ magnétique  $\vec{B}'$  créé dans la zone (A). On supposera ce champ nul pour  $r = R_b$ .
34. En déduire l'expression de  $E_m$ .
35. Dédurre, en utilisant la relation de la question 26, l'expression de  $\delta L$  en fonction de  $\alpha$ ,  $N$ ,  $d$ ,  $R_b$ ,  $\gamma_0$ ,  $\omega$  et  $l_b$ .
36. Déterminer un ordre de grandeur de  $\delta R$  et  $\delta L$ . Conclure.
37. Discuter des avantages et inconvénients à travailler à fréquence plus élevée.

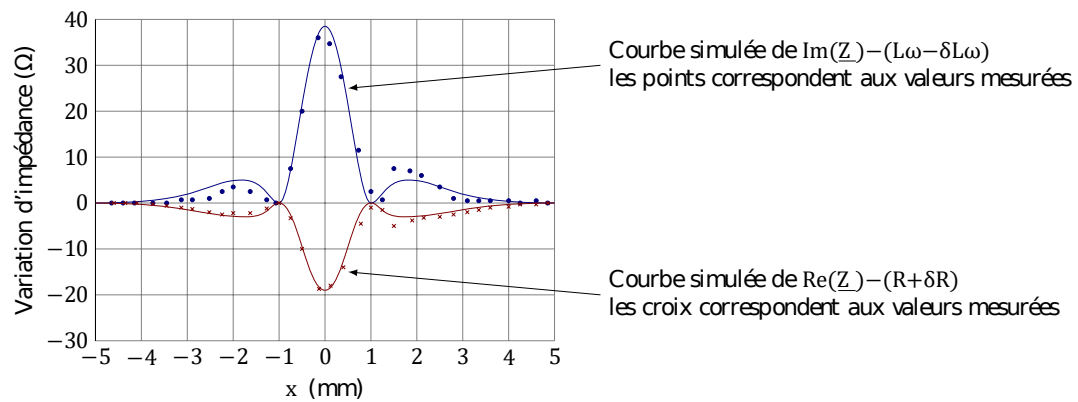
## Évolution de $Z$ en présence d'un défaut

La bobine est déplacée le long de la plaque suivant une trajectoire rectiligne. On note  $x$  sa position. Afin de détecter facilement la présence d'éventuels défauts, on observe  $\Re(Z) - (R + \delta R)$  et  $\Im(Z) - (L\omega - \delta L\omega)$  en fonction de  $x$ . La plaque présente une fissure superficielle rectiligne, de 0,8 mm de largeur et de 0,4 mm de profondeur, représentée sur la figure 10 et l'opérateur déplace la bobine en direction de la fissure.



**Figure 10** Déplacement de la bobine à la surface de la plaque (échelle non respectée)

La figure 11 présente des relevés effectués pour une fissure centrée en  $x = 0$ , lors d'une expérience similaire mais avec une bobine de configuration différente.



**Figure 11** Mesure et simulation des variations de  $\underline{Z}$ . D'après Yann Le Bihan, LGEP, CNRS—Supélec—Université Pierre et Marie Curie—Université Paris-Sud

38. Commenter les relevés.

39. Comment seraient modifiés les relevés si la fissure était suivant l'axe (Ox) ?

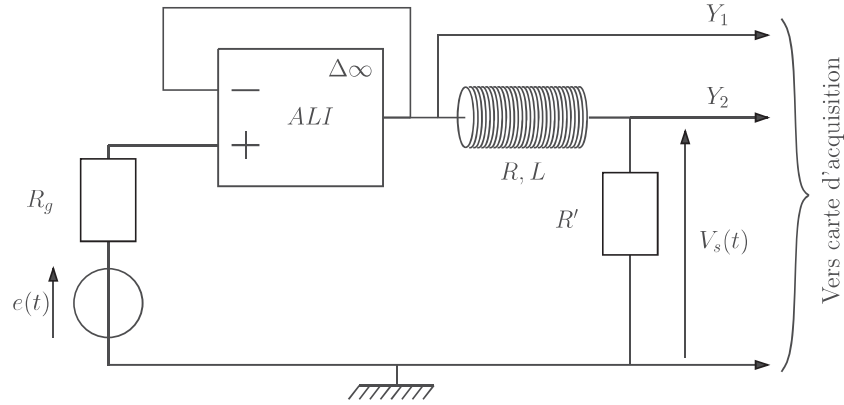


# ANNEXES

## Annexe 1 : Mesure de l'impédance de la bobine détectrice

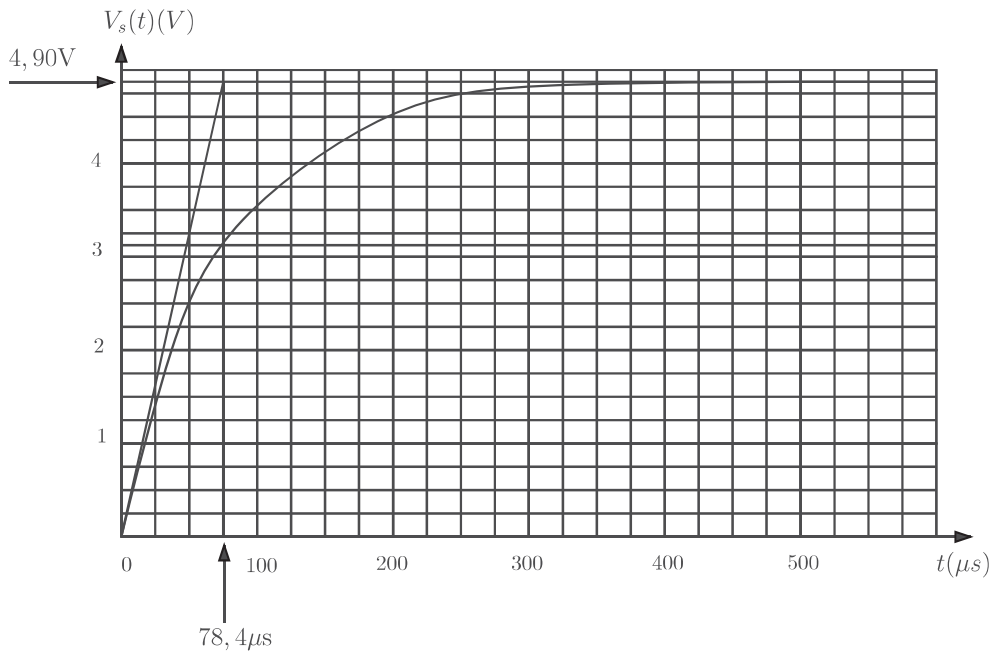
Pour mesurer l'impédance de la bobine, on réalise le montage donné figure 22 où

- la résistance  $R'$  vaut  $500\ \Omega$  ;
- l'amplificateur linéaire intégré fonctionne en régime linéaire ;
- le générateur basse fréquence est réglé en générateur de crêteaux de fréquence  $f = 1/T = 1\ \text{kHz}$  : pour  $0 \leq t \leq T/2$ ,  $e(t) = E = 5,00\ \text{V}$  et pour  $T/2 \leq t \leq T$ ,  $e(t) = 0$  ;
- la tension  $Y_1(t)$  est utilisée pour déclencher la carte d'acquisition. La fréquence d'échantillonnage étant  $f_e = 50\ \text{kHz}$  et la durée d'acquisition est de  $20\ \text{ms}$ .



**Figure 22** Schéma du montage

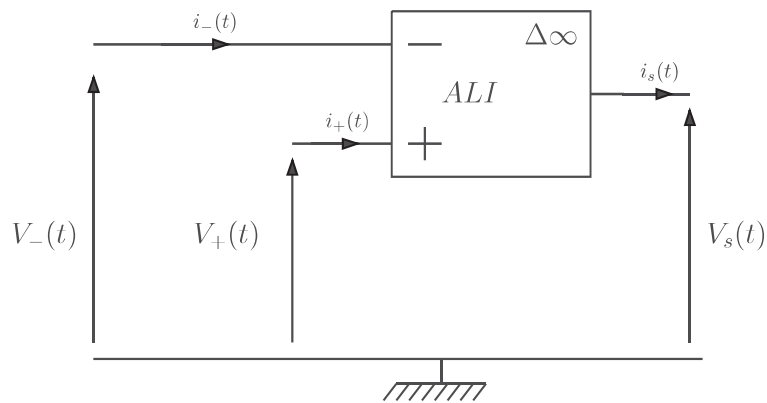
Le chronogramme de  $Y_2(t)$  est donné figure 23.



**Figure 23** Chronogramme de  $Y_2$

## Annexe 2 : L'amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire

L'amplificateur opérationnel (ALI), représenté figure 24, est un composant électronique permettant d'amplifier la différence de potentiel entre les entrées  $V_+$  et  $V_-$ .



**Figure 24** Représentation de l'ALI

Un ALI idéal est un ALI vérifiant les conditions suivantes :

1. les courants d'entrée  $i_+(t)$  et  $i_-(t)$  sont nuls ;
2. lorsque l'ALI idéal fonctionne en régime linéaire, on a  $V_+(t) = V_-(t)$  et  $|V_s(t)| < V_{\text{sat}} \approx 12 \text{ V}$  ;
3. lorsque l'ALI idéal fonctionne en régime non linéaire, on a :  $V_s(t) = +V_{\text{sat}}$  si  $V_+(t) > V_-(t)$  et  $V_s(t) = -V_{\text{sat}}$  si  $V_+(t) < V_-(t)$ .