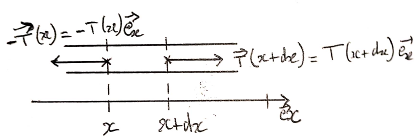
Devoir Maison 6
Éléments de correction

Un traineau sur la glace

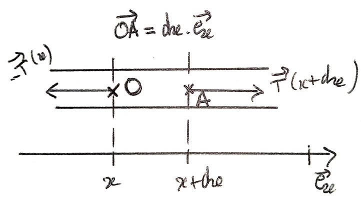
Un traîneau à chiens est un dispositif de masse totale M (le pilote, ou musher, est compris dans cette masse) qui peut glisser sur la surface de la glace avec des coefficients de glissement statique (avant le démarrage) μ_s et dynamique (en mouvement) μ_d.

1. Les chiens sont reliés au traîneau par des éléments de corde tendus, de masse négligeable et inextensibles. Appliquer le PFD à un élément de corde entre x et $x + dx$ avec $\vec{e}_x$ l'axe de la corde et montrer que la tension de la corde est constante le long de celle-ci.



On applique le PFD à l'équilibre à un élément infinitésimal de corde soit $-T(x)\vec{e}_x + T(x + dx)\vec{e}_x = \vec{0}$ donc $\vec{T}$ est un vecteur constant sur toute la corde

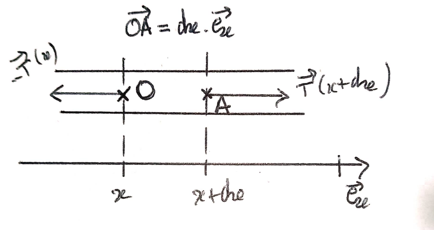
2. De même appliquer le théorème du moment cinétique sur ce même élément de corde et montrer que la tension est colinéaire à la corde.



On applique le théorème du moment cinétique sur un élément infinitésimal de corde au point O de coordonnée x. Soit $\vec{M}_0(-\vec{T}(x))+\vec{M}_0(\vec{T}(x+dx)) = \vec{0}$ donc $-\vec{T}(x)\wedge\overrightarrow{OO}+\vec{T}(x+dx)\wedge\overrightarrow{OA} = \vec{0}$ donc $\vec{T}(x+dx)\wedge\vec{e}_x = \vec{0}$ donc $\vec{T}$ colinéaire à $\vec{e}_x$ donc à la corde.

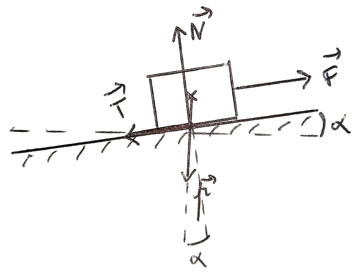
3. Le trajet se fait soit à l'horizontale, soit sur une faible pente ascendante caractérisée par l'angle α avec l'horizontale.
   Appliquer le PFD au traineau à l'horizontale et projeter selon les directions de $\vec{T}$ et de $\vec{N}$. En déduire une relation liant a, F, μ_d.
   De même pour une faible pente d'angle α établir la même équation et montrer que tout se passe comme dans un mouvement horizontal sous réserve de remplacer μ_d par $\mu_d' = \mu_d + \alpha$.

Dans les deux cas on applique le PFD au traineau à chien $M\vec{a} = \vec{F}+\vec{N}+\vec{T}+\vec{p}$,
A l'horizontale on a le schéma :



donc en projetant sur la verticale $N = Mg$ et en projetant sur l'horizontale $Ma = F - T$ or en glissement $T = \mu_d N$ donc $Ma = F - \mu_d Mg$

Avec une pente α on a le schéma :



donc en projetant sur la normale $N = Mg\cos(\alpha)$ et en projetant sur l'horizontale $Ma = F - T - Mg\sin(\alpha)$ or en glissement $T = \mu_d N$ donc $Ma = F - \mu_d Mg\cos(\alpha) - Mg\sin(\alpha) = F - (\mu_d\cos(\alpha)+\sin(\alpha))Mg$ donc $\mu_d' = \cos(\alpha)\mu_d + \sin(\alpha)$ si $\alpha \ll \frac{\pi}{2}$ alors $\mu_d' = \mu_d + \alpha$

L'intensité de la force de traction totale F exercée par l'ensemble des chiens dépend de leur vitesse v et on adoptera le modèle $F = F_0 - \beta v$ où F_0 et β sont des constantes positives. On prendra les valeurs $M = 5,0\times10^2$ kg, $\alpha = 0$, $\mu_d = 5,0\times10^{-2}$ et $\mu_s = 8,0\times10^{-2}$.

4. Déterminer la valeur minimale de F_0 permettant le démarrage du traîneau.

à $\alpha = 0$ et dans le cas de non-glissement $T < \mu_s N$ donc $T < \mu_s Mg$.

En utilisant le PFD à l'équilibre $v = 0$ et $a = 0$ on a $T = F = F_0$ à l'arrêt, donc $F_0 < \mu_s Mg$ donc $F_{0_{min}} = \mu_s Mg = 4,0.10^2$ N

5. La vitesse du traîneau en régime stationnaire est $v_0 = 3$ m.s^{-1}, atteinte à 5% près au bout d'un temps $t_1 = 5$ s.

   Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse du traineau, faire apparaître une constante de temps, en déduire une expression de β en fonction de M et t_1 et faire l'application numérique.

On reprend $Ma = F - T$ donc $M\frac{dv}{dt} = F_0 - \beta v - \mu_d M g$ donc en régime transitoire $\frac{M}{\beta}\frac{dv}{dt} + v = v_0$ donc $\tau = \frac{M}{v_0}$ donc $t_1 = 3\tau = 3\frac{M}{\beta}$ donc $\beta = 3\frac{M}{t_1} = 3.10^2$ kg.s^{-1}

6. En utilisant le régime stationnaire, exprimer F_0 en fonction de β, v_0, μ_d, M et g et calculer sa valeur numérique.

en régime stationnaire $v = v_0$ donc le PFD projeté selon $\vec{T}$ donne $0 = F_0 - \beta v_0 - \mu_d M g$ donc $F_0 = \beta v_0 + \mu_d M g$ et $F_0 = 1,2.10^3$ N

Toujours à vitesse constante v_0, le traîneau aborde une courbe à plat qu'on assimilera à un cercle de centre O et de rayon R (cf. figure). Les chiens (modélisés ici en un seul point C) doivent donc tirer vers l'intérieur du cercle.

7. Déterminer en fonction des données la tension $\vec{T}$ de la corde et l'angle θ entre la force de traction et la trajectoire.

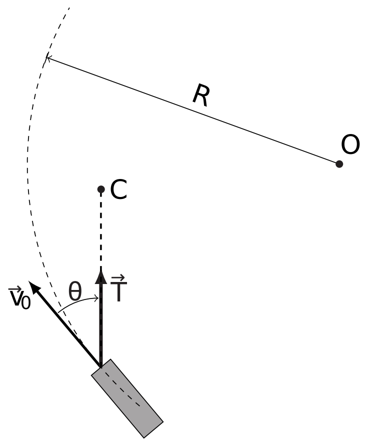


Figure – Trajectoire circulaire du traîneau

PFD appliqué au traineau, la projection radiale donne $-M\frac{v_0^2}{R} = -T\sin(\theta)$, la projection ortho-radiale donne $0 = T\cos(\theta) - R_T$, la projection verticale donne $0 = Mg - N$, en glissement $R_T = \mu_d N$, donc $\tan(\theta) = \frac{v_0^2}{\mu_d R g}$ et $T = \frac{\mu_d M g}{\cos(\theta)}$