Concours Blanc Physique
Éléments de correction

Électromagnétisme

Données :

Charge élémentaire e=1,6.10^{-19} C
Masse de l'électron m_e = 0,91.10^{-30} kg
Vitesse de la lumière dans le vide $c = 299792458$ m/s
Perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m
Permittivité du vide $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$
Constante de Planck $h = 6,626.10^{-34}$ J.s
En coordonnées cylindriques :

$$\mathrm{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(A_z)}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(A_z)}{\partial\theta} - \frac{\partial(A_\theta)}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial(A_r)}{\partial z} - \frac{\partial(A_z)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial\theta}\right)\vec{e_z}$$

En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(r,\theta,\phi) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\vec{e_\phi}$$

l'élément de volume $dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

l'élément de surface sur la sphère de rayon r : $dS = r^2\sin\theta d\theta d\phi$

la valeur de l'intégrale $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}$

Ecrantage d'un champ magnétique

On considère un solénoïde Σ_1 d'axe Oz, de longueur $L = 20$ cm, de rayon $r_1 = 10$ cm et comportant $N_1 = 700$ spires jointives enroulés dans le même sens.

On négligera les effets de bord, on considérera le solénoïde comme très long. Cette bobine a pour résistance $R_1 = 50\Omega$. On pourra introduire le nombre de spire par unité de longueur $n_1 = \frac{N_1}{L}$.

On place un cylindre conducteur Σ_2 coaxial à Σ_1 de rayon intérieur $r_2 = 5$ cm, d'épaisseur $h = 50$ µm, de longueur L et de conductivité $\gamma = 4.10^7$ S.m^{-1}. Dans un premier temps, on assimile le cylindre à une surface.

Le solénoïde Σ_1 est traversé par un courant $i_0(t) = I_0\cos(\omega t)$

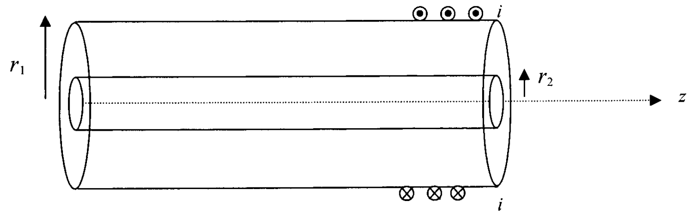

Figure 1. Vue en coupe longitudinale

1. Justifier rapidement que l'on puisse écrire $\vec{j}_s = \gamma h \vec{E}$ où $\vec{j}_s$ est la densité de courant surfacique sur le conducteur et $\vec{E}$ le champ électrique au même point. Justifier que $\vec{j}_s$ est orthoradial.

On définit d'abord la densité de courant volumique $\vec{j}$. Dans le conducteur cylindrique Σ_2, la densité volumique de courant vérifie la loi d'Ohm locale donc $\vec{j} = \gamma\vec{E}$.

Si on compare les différentes dimensions de Σ_2 : r_2, h, et L on a $h \ll r_2,\ L$, on peut donc considérer que le cylindre est une surface et la composante radiale de $\vec{j}$ est nulle $\vec{j}.\vec{e}_r = j_r = 0$.

On peut donc définir une densité de courant surfacique $\vec{j}_s$ avec :

$$di = \vec{j}.\vec{dS} = 0 + j_\theta drdz + j_z rdrd\theta$$

Or si on considère le cylindre comme une surface on peut considérer j_θ et j_z comme ne dépendant pas de r sur l'épaisseur h, donc on peut écrire $dr = h$ et

$$di = \vec{j}.\vec{dS} = 0 + j_\theta hdz + j_z rhd\theta$$

Si on introduit la définition de $\vec{j}_s$:

$$di = \vec{j}_S.\vec{dl} = 0 + \gamma E_\theta hdz + \gamma E_z rhd\theta$$

$$\vec{j}_S = \gamma h\vec{E}$$

On a deux directions possibles pour $\vec{j}_S$, orthoradiale ($\vec{e}_\theta$) ou longitudinale ($\vec{e}_z$).

Comme le cylindre est ouvert à ses extrémités selon l'axe $\vec{e}_z$, il ne peut pas s'écouler de courant dans cette direction. Il ne reste donc que la direction orthoradiale.

2. Déterminer la direction du champ magnétique dans tout l'espace.

Le courant porté par le solénoïde Σ_1 et la distribution de courant $\vec{j}_s$ sont orthoradiales et uniforme, donc les deux distributions de courant admettent les plans (M,$\vec{e}_r$,$\vec{e}_\theta$) comme plan de symétrie.

Donc le champ magnétique en M est orthogonal à ce plan donc $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_z$.

3. Calculer le champ magnétique $\vec{B}_e$ dans l'espace $r_2 < r < r_1$. On supposera le champ magnétique nul pour $r_1 < r$.

Les distributions de courant du solénoïde Σ_1 et $\vec{j}_s$ sont invariantes par translation selon $\vec{e}_z$ donc $\vec{B}(M) = B(r,\theta)\vec{e}_z$.

Elles sont aussi invariantes par rotation d'angle θ donc $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_z$.

On choisit un contour fermé rectangulaire dans le plan (O,$\vec{e}_z$,$\vec{e}_r$) comme sur le schéma suivant :

On applique le théorème d'Ampère dans l'hypothèse d'un régime d'ARQS :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 i_{\text{enlace}}$$

$$\int_{\mathcal{C}_\infty} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{\mathcal{C}_\in} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{\mathcal{C}_\ni} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{\mathcal{C}_\triangle} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 N_1 i_0(t)$$

Or sur $\mathcal{C}_\infty$ on a $\vec{B} \parallel \vec{dl}$, sur $\mathcal{C}_\in$ on a $\vec{B} \perp \vec{dl}$, $\mathcal{C}_\ni$ on a $\vec{B} = \vec{0}$, sur $\mathcal{C}_\triangle$ on a $\vec{B} \perp \vec{dl}$.

$$B_e L + 0 + 0 + 0 = \mu_0 N_1 i_0(t)$$

donc

$$\vec{B}_e = \mu_0 n_1 i_0(t) \vec{e}_z$$

4. Montrer que le champ magnétique $\vec{B}_i$ est uniforme dans l'espace $r < r_2$

On choisit un contour fermé rectangulaire C tel que $r < r_2$.
On applique le théorème d'Ampère dans l'hypothèse de l'ARQS :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 i_{\text{enlace}}$$

$$\int_{\mathcal{C}_\infty} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{\mathcal{C}_\in} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{\mathcal{C}_\ni} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{\mathcal{C}_\triangle} \vec{B}.\vec{dl} = 0$$

Or sur $\mathcal{C}_\infty$ on a $\vec{B} \parallel \vec{dl}$, sur $\mathcal{C}_\in$ on a $\vec{B} \perp \vec{dl}$, $\mathcal{C}_\ni$ on a $\vec{B} \parallel -\vec{dl}$, sur $\mathcal{C}_\triangle$ on a $\vec{B} \perp \vec{dl}$.

$$B_i(r)L + 0 + B_i(r')L + 0 = 0$$

donc $B_i(r) = B_i(r')$ donc B_i est uniforme.

5. Déterminer la direction du champ électrique $\vec{E}$ pour $r < r_2$; en déduire l'expression de l'amplitude complexe de ce champ au niveau du cylindre conducteur en fonction de $\underline{B_i}$, l'amplitude complexe de $\vec{B}_i$

On écrit l'équaiton de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Donc $\vec{E}$ est donné par rapport à $\vec{B}$ par la même équation aux dérivées partielle que $\vec{B}$ par rapport à $\vec{j}$ ($\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + ...$) donc on peut utiliser les mêmes propriétés de symétrie et d'invariance.

On a $\vec{B} = B(r)\vec{e}_z$, donc le champ magnétique admet le plan (M,$\vec{e}_r$,$\vec{e}_z$) comme plan de symétrie, donc $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à ce plan, donc $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_\theta$.

On choisit un contour fermé circulaire dans le plan (M,$\vec{e}_r$,$\vec{e}_\theta$) et on applique le théorème de Stokes à l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}.\vec{dl} = -\frac{d}{dt}(\Phi(\vec{B}))$$

$$2\pi r E = -\frac{d}{dt}(B_i \pi r^2)$$

$$E = -\frac{d}{dt}(\frac{r}{2} B_i)$$

$$\underline{E} = -i\omega \frac{r}{2} \underline{B_i}$$

6. En déduire la relation $\underline{B_i} = \dfrac{\underline{B_e}}{1 + j\omega\tau}$ où $\underline{B_e}$ désigne l'amplitude complexe de $\vec{B_e}$; on exprimera τ en fonction de h, r_2, γ et μ_0.

Pour $r = r_2$

$$\underline{E} = -i\omega \frac{r_2}{2} \underline{B_i}$$

Or $\vec{j_S} = \gamma h \vec{E}$

$$\underline{j_s} = -i\gamma h\omega \frac{r_2}{2} \underline{B_i}$$

On choisit à nouveau un contour fermé rectangulaire et on applique le théorème d'Ampère dans le cadre de l'ARQS :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 i_{\text{enlace}}$$

$$B_i L = \mu_0 (N_1 i_0 + L j_s)$$

$$B_i = \mu_0 n_1 i_0 + \mu_0 j_s$$

$$\underline{B_i} = \underline{B_e} - i\mu_0\gamma h\omega \frac{r_2}{2} \underline{B_i}$$

$$\underline{B_i} = \frac{\underline{B_e}}{1 + i\dfrac{\mu_0 h\gamma r_2}{2}\omega}$$

7. Application numérique. $I_0 = 1$A, la fréquence est de 11 kHz ; calculer l'amplitude du champ $\vec{B_e}$, celle de $\vec{B_i}$ ainsi que l'amplitude de l'intensité qui traverse le conducteur.

   A quel phénomène l'écrantage du champ magnétique est-il dû ?

$B_e = \mu_0 n_1 I_0 = 4\pi.10^{-7}.\dfrac{700}{0,2}.1$ T$= 4,4$ mT

$B_i = \dfrac{B_e}{\sqrt{1 + \dfrac{\mu_0^2 h^2\gamma^2 r^2}{4}\omega^2}} = \dfrac{0,0044}{\sqrt{1 + \dfrac{16\pi^2.10^{-14}.2,5.10^{-9}.16.10^{14}0,05^2}{4}4\pi^2.121.10^6}}$ T $= 3,6$ mT

$j_s = \dfrac{B_e - B_i}{\mu_0} = \dfrac{0,0044 - 0,0036}{4\pi.10^{-7}}$ A.m^{-1} $= 637$ A.m^{-1}

$i = j_s L = 637.0,2 = 127$ A

L'écrantage est dû au phénomène d'induction dans le cylindre Σ_2 (Maxwell-Faraday) qui crée des courant de Foucault (loi d'Ohm locale) qui crée eux-même un champ magnétique qui s'oppose au champ extérieur (loi de Lenz).

Estimation de la pulsation de coupure

Dans ce paragraphe, le conducteur cylindrique, qui n'est plus assimilé à une surface, est seul dans l'espace.

On cherche à caractériser le cylindre par son inductance L_2 et par sa résistance R_2.

8. On suppose le cylindre parcouru par un densité volumique uniforme de courant orthoradiale $\vec{j} = j\vec{e}_\theta$; déterminer le champ magnétique dans tout l'espace.

   On supposera que le champ magnétique est nul pour $r > r_2 + h$.

On étudie d'abord les symétries :

la distribution de courant volumique est orthoradiale et uniforme, elle admet donc le plan (M,$\vec{e}_r$,$\vec{e}_\theta$) comme plan de symétrie, donc $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan donc $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_z$.

On étudie les invariances :

la distribution est invariante par translation selon l'axe $\vec{e}_z$ donc $\vec{B}(M) = B(r,\theta)\vec{e}_z$

la distribution est invariante par rotation d'angle θ donc $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_z$

On choisit un contour fermé rectangulaire dans le plan (O,$\vec{e}_z$,$\vec{e}_r$), et on commence par $r < r_2$.

On applique le théorème d'Ampère dans le cadre des régimes stationnaire :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 i_{\text{enlace}}$$

$$\int_{\mathcal{C}_\infty} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{\mathcal{C}_\in} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{\mathcal{C}_\ni} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{\mathcal{C}_\triangle} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 jhL$$

Or sur $\mathcal{C}_\infty$ on a $\vec{B} \parallel \vec{dl}$, sur $\mathcal{C}_\in$ on a $\vec{B} \perp \vec{dl}$, $\mathcal{C}_\ni$ on a $\vec{B} = \vec{0}$, sur $\mathcal{C}_\triangle$ on a $\vec{B} \perp \vec{dl}$.

$$B(r)L + 0 + 0 + 0 = \mu_0 jhL$$

$$\vec{B}(r < r_2) = \mu_0 jh\vec{e}_z$$

On fait de même pour $r_2 < r < r_2 + h$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 i_{\text{enlace}}$$

$$\int_{\mathcal{C}_\infty} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{\mathcal{C}_\in} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{\mathcal{C}_\ni} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{\mathcal{C}_\triangle} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 j(r_2 + h - r)L$$

Or sur $\mathcal{C}_\infty$ on a $\vec{B} \parallel \vec{dl}$, sur $\mathcal{C}_\in$ on a $\vec{B} \perp \vec{dl}$, $\mathcal{C}_\ni$ on a $\vec{B} = \vec{0}$, sur $\mathcal{C}_\triangle$ on a $\vec{B} \perp \vec{dl}$.

$$B(r)L + 0 + 0 + 0 = \mu_0 j(r_2 + h - r)L$$

$$\vec{B}(r_2 < r < r_2 + h) = \mu_0 j(r_2 + h - r)\vec{e}_z$$

9. Déterminer l'intensité du courant I qui traverse une section droite du conducteur de longueur L et de hauteur h.

$$I = \iint \vec{j}.\vec{dS} = jLh$$

10. Calculer l'énergie magnétique dans tout l'espace en négligeant la contribution du volume du cylindre $r_2 < r < r_2 + h$. En déduire l'expression de l'inductance L_2.

$$U_m = \iiint_V u_m dV = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{B^2 V}{2\mu_0}$$

$$U_m = \frac{(\mu_0 j h)^2 \pi r_2^2 L}{2\mu_0} = \frac{\pi \mu_0 I^2 r_2^2}{2L}$$

$$U_m = \frac{L_2 I^2}{2} = \frac{\pi \mu_0 I^2 r_2^2}{2L}$$

$$L_2 = \frac{\pi \mu_0 r_2^2}{L}$$

11. Pour calculer la résistance R_2, on fend le cylindre selon une génératrice (donc selon une droite de direction Oz) et on soumet les deux bords obtenus à une différence de potentiel U.

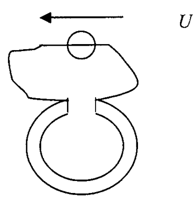

Figure 2. Cylindre vu de face

On suppose que les courants se répartissent uniformément dans le volume.

Relier la densité de courant au champ électrique, puis à la différence de potentiel ; en déduire la résistance.

La loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

On est en régime stationnaire donc $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$ donc il existe un potentiel V, tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$, donc $\vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$.

On calcule la circulation de $\vec{j}$ sur un cercle reliant les deux côtés fendus

$$\int_C \vec{j}.\vec{dl} = -\gamma \int_C \overrightarrow{\mathrm{grad}}(V).\vec{dl}$$

$$2\pi r j = -\gamma \Delta V$$

$$j = \frac{\gamma U}{2\pi r}$$

On remarque que dans cette expression j dépend de r on a donc deux possibilité :

la plus simplificatrice :

on suppose que l'énoncé en choisissant j uniforme fait l'approximation $h \ll r_2$ donc $r \simeq r_2$ donc $j = \dfrac{\gamma U}{2\pi r_2}$ donc $I = jLh = \dfrac{\gamma U}{2\pi r_2} Lh$ donc

$$R_2 = \frac{2\pi r_2}{\gamma L h}$$

le cas sans approximation :

$$I = \iint_S \vec{j}.\vec{dS} = \iint_S j.drdz = L\int_{r_2}^{r_2+h} \frac{\gamma U}{2\pi r}dr$$

$$I = \frac{\gamma L U}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2+h}{r_2}\right) = \frac{\gamma L}{2\pi} \ln\left(1+\frac{h}{r_2}\right) U$$

$$R_2 = \frac{2\pi}{\gamma L \ln\left(1+\dfrac{h}{r_2}\right)}$$

le développement limité à l'ordre 1 en $\dfrac{h}{r_2} \ll 1$ de cette expression redonne le résultat précédent.

12. Construire un temps caractéristique ; à quelle grandeur peut-on le comparer ?

Le tube se comporte comme une résistance R_2 en série avec une inductance L_2, on peut donc construire le temps caractéristique de ce circuit $\tau = \dfrac{L_2}{R_2}$.

On remarque que

$$\frac{L_2}{R_2} = \frac{\pi\mu_0 r_2^2}{L}\frac{\gamma L h}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0\gamma r_2 h}{2}$$

On retrouve la pulsation de coupure du phénomène d'écrantage.

Conductivité dans un semi-conducteur

On se propose d'étudier les effets d' un champ magnétique uniforme et stationnaire sur les propriétés électromagnétiques d'un matériau semi-conducteur. Cette partie (effet de magnétorésistance, effet Hall) est développée dans le cadre des régimes stationnaires. Le milieu matériel, électriquement neutre, est décrit comme un ensemble d'électrons (charge -e) évoluant au sein d'un réseau constitué de charges positives fixes. Les interactions de ces électrons "de conduction" avec le milieu sont entièrement prises en compte en leur affectant une masse effective m (différente de celle m_e d'un électron dans le vide) et en introduisant une force de "frottement" d'expression $-\alpha\vec{v}$, où α est un coefficient positif, caractéristique du milieu : la vitesse $\vec{v}$ décrit la dérive moyenne de l'ensemble des électrons par rapport au réseau sous l'action d'un champ électromagnétique ($\vec{E}$,$\vec{B}$).

On considère un échantillon parallélépipédique dont le volume est délimité par les plans x = 0, x = L, y = 0, y = l , z = -a/2 et z = a/2 (Figure 1).

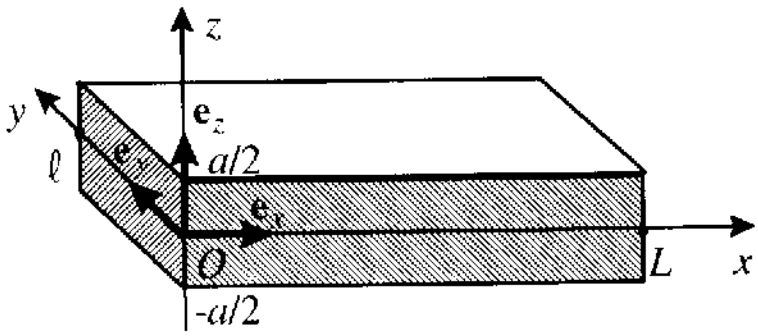

Figure 1

13. Dans ce matériau, on applique un champ électrique $\vec{E}$ stationnaire. Écrire l'équation du mouvement d'un électron animé d'une vitesse $\vec{v}$. A un instant pris comme origine, ce champ est brusquement annulé, Déduire l'évolution ultérieure de la vitesse de l'électron et donner une signification physique au coefficient $\tau = m/\alpha$.

Système : un électron de masse m
Bilan des forces : la force de Lorentz $\vec{F}_L = (-e)(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$ et la force de frottement $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$
Principe fondamental de la dynamique :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\vec{v} - e(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + \alpha\vec{v} = -e\vec{E}$$

$$\tau\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} = -\frac{e}{\alpha}\vec{E}$$

Si le champ est stationnaire, alors l'électron atteint sa vitesse limite avant l'instant $t = 0$ donc on a :

$$\vec{v}(t \leq 0) = -\frac{e}{\alpha}\vec{E}$$

à $t = 0$ le champ $\vec{E}$ est brusquement annulé donc l'équation du mouvement devient :

$$\tau\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} = \vec{0}$$

de solution

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t=0)e^{-t/\tau} = -\frac{e}{\alpha}e^{-t/\tau}\vec{E}$$

τ c'est la durée caractéristique pendant laquelle les électrons sont encore en mouvement après l'interruption du champs, donc c'est la durée caractéristique avant qu'ils ne rencontrent un obstacle qui les arrête.

On appelle τ la durée du libre parcourt moyen des électrons.

14. En régime stationnaire, montrer qu'en présence d'un champ électrique $\vec{E}$, le courant volumique $\vec{J}$ vérifie bien la loi d' Ohm. En déduire la conductivité électronique γ en fonction de e, τ, m et de la densité volumique n des électrons de conduction.

On a montré en régime stationnaire

$$\vec{v} = -\frac{e}{\alpha}\vec{E}$$

Or $\vec{J} = \rho\vec{v} = -en\vec{v}$ donc

$$\vec{J} = \frac{e^2 n}{\alpha}\vec{E} = \frac{e^2 n}{\alpha}\vec{E}$$

$$\vec{J} = \frac{e^2 n\tau}{m}\vec{E}$$

$$\gamma = \frac{e^2 n\tau}{m}$$

15. Dans un matériau semi-conducteur, tel que l'arséniure de gallium GaAs dopé au silicium, la conduction est assurée par des électrons dont la masse effective m est $0,06 m_e$. Sachant qu'à très basse température la valeur de la conductivité vaut $\gamma = 100$ S.m^{-1}, calculer τ pour n = 10^{24} m^{-3}.

$$\tau = \frac{m\gamma}{e^2 n}$$

$$\tau = \frac{0,06.0.91.10^{-30}.100}{(1,6.10^{-19})^2 10^{24}} \text{ s} = 2,1.10^{-16} \text{ s}$$

16. Un courant de densité volumique stationnaire circule parallèlement à l' axe Ox : $\vec{J} = \mathrm{J}\vec{e}_x$ L'épaisseur a étant faible devant les dimensions latérales L et l, l'échantillon est assimilé à une nappe de courant uniforme d'extension latérale infinie et d'épaisseur a. A l'aide des symétries d'une telle distribution, préciser l'orientation du champ magnétique $\vec{b}$ qu'elle crée en tout point de l'espace. Justifier le fait que ce champ est nul dans le plan z= 0 . A partir de la forme locale du théorème d' Ampère, calculer $\vec{b}$. Trouver sa valeur maximale pour a= 10 µm et J = 10^6 A.m^{-2}.

Pour tout point M vu que l est infini on a le plan (M,$\vec{e}_z$,$\vec{e}_x$) qui est un plan de symétrie de la distribution de courant. Donc $\vec{b}(M)$ est orthogonal à ce plan donc $\vec{b}(M) = b(M)\vec{e}_y$.

Le plan $z = 0$ est aussi un plan de symétrie de la distribution de courant donc $\vec{b}(z = 0) \parallel \vec{e}_z$ et $\vec{b}(\forall z) \parallel \vec{e}_y$ donc $\vec{b}(z = 0) = \vec{0}$.

L'équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire s'écrit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{b}) = \mu_0\vec{J}$

pour $|z| < a/2$, on a $\vec{J} = J\vec{e}_x$ donc on projette l'équation de Maxwell-Ampère selon $\vec{e}_x$.

$\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} = \mu_0 J$

or $b_z = 0$

donc $-\frac{\partial b_y}{\partial z} = \mu_0 J$

On intègre entre $z = 0$ et $|z| < a/2$, on a

$-b_y(z) + 0 = \mu_0 J(z - 0)$ donc

$$\vec{b}(|z| < a/2) = -\mu_0 Jz\vec{e}_y$$

De même pour $|z| > a/2$ on a $-\frac{\partial b_y}{\partial z} = \mu_0 \times 0$, donc le champ est uniforme à l'extérieur du plan

$$\vec{b}(z < a/2) = \mu_0 J \frac{a}{2} \vec{e}_y$$

$$\vec{b}(z > a/2) = -\mu_0 J \frac{a}{2} \vec{e}_y$$

Application numérique :

$$b_{max} = \mu_0 J \frac{a}{2} = 4\pi.10^{-7}.10^{6}.5.10^{-6}\ \mathrm{T} = 6\ \mathrm{\mu T}$$

17. L'échantillon est désormais plongé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}$, uniforme et stationnaire, dirigé selon Oz. $\vec{B} = \mathrm{B}\vec{e}_z$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ d'un électron du matériau soumis à la force de frottement et à ce champ magnétique.

    Montrer que, lorsque τ tend vers l' infini. le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur tournant dont on précisera le vecteur rotation.

    Calculer la norme ω_c de ce dernier, appelée pulsation cyclotron, pour B = 1 T et m = 0,06 m_e.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\vec{v} - e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\vec{v} - e\vec{v} \wedge B\vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{v}}{\tau} + \frac{eB}{m}\vec{e}_z \wedge \vec{v}$$

Or $\tau \to +\infty$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{eB}{m}\vec{e}_z \wedge \vec{v}$$

admet comme solution

$$\vec{v}(t) = v_\theta(0)\vec{e}_{\theta(t)} + v_z(0)\vec{e}_z$$

avec $\theta(t) = \omega_c t$ et pour $\theta = 0$, $\vec{v}(0) = v_\theta(0)\vec{e}_{\theta=0} + v_z(0)\vec{e}_z$

dans notre situation $v_z(0) = 0$, le semi-conducteur est fin et les électrons ne peuvent pas sortir donc $\vec{v}(t) = v_\theta(0)\vec{e}_{\theta(t)}$ est bien un vecteur tournant.

Son vecteur rotation est $\vec{\omega}_c = \dfrac{eB}{m}\vec{e}_z$.

Application numérique $\omega_c = \dfrac{eB}{m} = \dfrac{1,6.10^{-19}.1}{0,06.0,91.10^{-30}}$ rad.s^{-1} = 2,9.10^{12} rad.s^{-1}

18. On prend en compte les effets d'un champ électrique $\vec{E}$, parallèle au plan Oxy, et du champ $\vec{B}$ appliqué précédent.

    On néglige le champ magnétique créé par le milieu. Les effets d'amortissement sont toujours décrits par la force de frottement $-\alpha\vec{v}$. Établir, en régime stationnaire, les relations liant les composantes J_x et J_y du courant volumique aux composantes E_x et E_y du champ électrique. Montrer qu'elles peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante .

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}$$

dans laquelle : $\rho_{xx} = \rho_{yy} = 1/\gamma$ et $\rho_{xy} = -\rho_{yx} = B/(ne)$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\vec{v} - e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

en régime stationnaire :

$$\vec{0} = -\alpha\vec{v} - e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

or $\vec{J} = \rho\vec{v} = -en\vec{v}$ donc

$$\vec{0} = \frac{\alpha}{ne}\vec{J} - e\vec{E} + \frac{1}{n}\vec{J} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{E} = \frac{\alpha}{ne^2}\vec{J} + \vec{J} \wedge \frac{B}{ne}\vec{e}_z$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma}\vec{J} + \vec{J} \wedge \frac{B}{ne}\vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\gamma}J_x + \frac{B}{ne}J_y \\ E_y &= \frac{1}{\gamma}J_y - \frac{B}{ne}J_x \end{aligned}$$

19. L'échantillon a la forme d'un ruban allongé selon Oy a $\ll$ L $\ll$ l (Figure 2.a). On applique une différence de potentiel V entre les plans x = 0 et x = L métallisés. Le champ électrique $\vec{E}$ est supposé uniforme : $\vec{E}$ = E $\vec{e}_x$.
Calculer la résistance d' un tel échantillon. Quelle est la modification relative induite par le champ magnétique (effet de magnétorésistance) ? Calculer cette modification pour B = 1 T, γ = 100 S.m^{-1}, n = 10^{24} m^{-3} et m = 0,06 m$_e$.

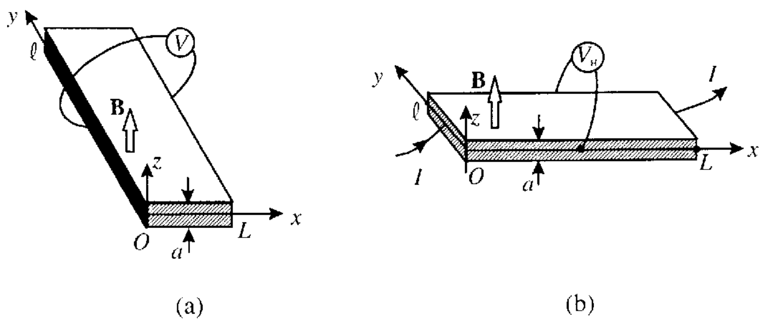

Figure 2

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\gamma} J_x + \frac{B}{ne} J_y \\ E_y &= \frac{1}{\gamma} J_y - \frac{B}{ne} J_x \end{aligned}$$

Or $\vec{E} = E\vec{e}_x$ donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\gamma} J_x + \frac{B}{ne} J_y \\ 0 &= \frac{1}{\gamma} J_y - \frac{B}{ne} J_x \end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{\gamma} J_x + \frac{B}{ne} \gamma \frac{B}{ne} J_x$$

$$E = \frac{1 + \left(\frac{\gamma B}{ne}\right)^2}{\gamma} J_x$$

Or $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \Rightarrow E = \dfrac{U}{L}$ et $i = \iint_S \vec{J}.d\vec{S} \Rightarrow i = J_x la$

$$\frac{U}{L} = \frac{1 + \left(\frac{\gamma B}{ne}\right)^2}{\gamma} \frac{i}{la}$$

$$R = \left[1 + \left(\frac{\gamma B}{ne}\right)^2\right] \frac{L}{\gamma la}$$

$$\frac{\Delta R}{R_{B=0}} = \left(\frac{\gamma B}{ne}\right)^2$$

Application numérique : $\dfrac{\Delta R}{R_{B=0}} = \left(\dfrac{100.1}{10^{24}.1,6.10^{-19}}\right)^2 = 3,9.10^{-7}$

20. L'échantillon a la forme d'un ruban allongé selon Ox : a $\ll$ l $\ll$ L (Figure 2.b). Un courant stationnaire d' intensité I circule selon cette direction avec un courant volumique uniforme : $\vec{J} = \mathrm{J}\vec{e}_x$. Montrer que le champ électrique possède alors une composante E_y non nulle. Donner l'expression de la différence de potentiel V_H appelée tension de Hall, qui apparaît entre les plans y = 0 et y =l .
Calculer V_H pour I = 1 mA, a = 10 µm, n = 10^{24} m^{-3} et B = 1T . Quel est l'intérêt d'un tel dispositif ?

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\gamma} J_x + \frac{B}{ne} J_y \\ E_y &= \frac{1}{\gamma} J_y - \frac{B}{ne} J_x \end{aligned}$$

Or $\vec{J} = J\vec{e}_x$

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\gamma}J \\ E_y &= -\frac{B}{ne}J \neq 0 \end{aligned}$$

Or $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \Rightarrow E_y = \dfrac{V_H}{l}$ et $i = \iint_S \vec{J}.d\vec{S} \Rightarrow i = J_x la$

$$\frac{V_H}{l} = -\frac{B}{ne}\frac{I}{la}$$

$$V_H = -\frac{B}{nea}I$$

Application numérique : $V_H = \dfrac{1}{10^{24}.1,6.10^{-19}.10^{-5}}.10^{-3}$ V = 0,62 mV

L'effet Hall peut servir à caractériser la densité de charge $\rho = ne$ d'un semi-conducteur s'il on connait B, ou alors peut servir de telsamètre (mesure de B) s'il on connait la densité de charge du semi-conducteur ρ.

21. Des mesures effectuées à très basse température (quelques K) sur un échantillon de GaAs d'épaisseur très faible (a = 10 nm), placé dans un champ magnétique intense (B de quelques teslas), montrent que la composante ρ_{xy} varie en fonction de B par paliers. Cet effet, découvert par Von Klitzing en 1980, porte le nom d'effet Hall quantique : la répartition des électrons en niveaux d'énergie conduit à écrire la densité volumique des électrons sous la forme : n = peB/(ah) où p est un entier non nul et h la constante de Planck. Montrer que, dans ce cas, la valeur de la résistance transverse, définie selon $R_t = V_H/I$, se met sous la forme : $R_t = R_K/p$,R_K étant une résistance que l'on calculera. Pourquoi la résistance R_K, appelée constante de Klitzing, est-elle désormais utilisée comme étalon ?

$$R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{B}{nea} = \frac{B}{eapeB/(ah)} = \frac{h}{pe^2}$$

$$R_K = \frac{h}{e^2} = 25 \text{ k}\Omega$$

Boule chargée en mouvement de translation

On considère une boule de centre C, de rayon R uniformément chargée de densité volumique de charges ρ.

La boule précédente est animée d'un mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}$ suivant la direction Ox. À l'instant t = 0, le centre C de la boule passe par l'origine O. Un point M est repéré par r = CM et θ= (Cx, CM) (figure 1).

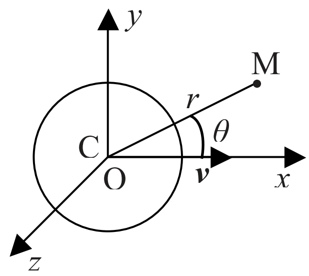

Figure 1 : boule chargée en mouvement de translation

22. Définir, en tout point M, en fonction de Q, R et $\vec{v}$, le vecteur densité de courant $\vec{j}$. On notera $\vec{j}_{int}$ et $\vec{j}_{ext}$ les vecteurs densité de courant, respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de la boule de rayon R.

$$\vec{j}_{int} = \rho\vec{v} = \frac{3Q}{4\pi R^3}\vec{v}$$

$$\vec{j}_{ext} = \vec{0}$$

Nous admettrons que à l'instant $t = 0$, $\vec{B}_{ext}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Qv}{r^2}\sin\theta\vec{e}_z$ au point M(r,θ,z=0) extérieur à la boule.

23. Déterminer la circulation $C_{B_{ext}}$ de B_{ext}, le long d'un contour circulaire (Γ) du plan yOz ($\theta = \pi/2$), centré en O et de rayon r $\simeq$ R légèrement supérieur à R (on supposera que $B_{ext}(r > R) = B_{ext}(r \simeq R)$).

La valeur du champ précédent est correcte pour tout M appartenant à xOy. Elle est invariante par rotation autour de l'axe x en raison des symétries donc

$$B_{ext} = \frac{\mu_0 Qv}{4\pi r^2}\sin\theta\vec{e}_\phi$$

Nous aurons donc$C_{B_{ext}} = \oint \vec{B}.\vec{dl} = 2\pi R\frac{\mu_0 Qv}{4\pi r^2}\sin\theta$

Si le calcul de la circulation se fait à t=0, le point C et le centre du repère sont confondus, nous avons alors $\theta = \pi/2$ donc $C_{B_{ext}} = \oint \vec{B}.\vec{dl} = 2\pi R\frac{\mu_0 Qv}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 Qv}{2R}$

24. Exprimer le flux Φ_j de la densité de courant j à travers une surface qui s'appuie sur (Γ).

$$\Phi_j = \iint_S \vec{j}.\vec{dS} = \iint_S jdS = j\iint_S dS = jS = \frac{3Qv}{4\pi R^3}\pi R^2 = \frac{3Qv}{4R}$$

25. En déduire que le théorème d'Ampère appliqué à la densité de courant j sur (Γ) n'est pas vérifié. Quelle en est la cause ?

Le théorème d'Ampère s'écrit $\oint_\Gamma \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0\Phi_j$

Or ici $\oint_\Gamma \vec{B}.\vec{dl} = \frac{\mu_0 Qv}{2R} \neq \mu_0\frac{3Qv}{4R} = \mu_0\Phi_j$

Nous ne sommes pas en régime statique, il faut prendre en compte tout les termes de l'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ donc la forme intégrale devient

$\oint_\Gamma \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 \Phi_j + \epsilon_0\mu_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt}$

En régime variable, le théorème d'Ampère doit s'appliquer à la densité de courant "généralisée" :

$\vec{J} = \vec{j} + \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ où $\vec{j}$ est la densité de courant définie en précédemment.

26. Que représente le terme $\epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans l'expression de $\vec{J}$?

C'est le courant de déplacement.

27. Calculer les champs $\vec{E}_{ext}$ et $\vec{E}_{int}$, à l'extérieur et l'intérieur de la boule, lorsque celle-ci est au repos (si $\vec{v} = \vec{0}$).

Symétries : les plans (M,$\vec{e}_r$,$\vec{e}_\theta$) et (M,$\vec{e}_r$,$\vec{e}_\phi$) sont plans de symétries donc $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_r$
Invariances : la distribution est invariante par rotation d'angle θ et ϕ donc $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$
On choisit la sphère de centre C et passant par M comme surface fermée S.
On applique le théorème de Gauss :

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

On distingue si on est à l'intérieur ou à l'extérieur de la boule chargée.

$$\begin{aligned} E_{int} 4\pi r^2 &= \frac{r^3 Q}{R^3 \epsilon_0} \\ E_{ext} 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{int} &= \frac{Q}{4\pi R^2 \epsilon_0} \times \frac{r}{R}\vec{e}_r \\ \vec{E}_{ext} &= \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}\vec{e}_r \end{aligned}$$

28. Exprimer les champs $\vec{E}_{int}$ et $\vec{E}_{ext}$ respectivement en fonction de $\overrightarrow{\text{grad}}_M(r^2) = 2r\vec{e}_r$ et de $\overrightarrow{\text{grad}}_M(1/r) = -\dfrac{1}{r^2}\vec{e}_r$.

$$\begin{aligned} \vec{E}_{int} &= \frac{Q}{4\pi R^2 \epsilon_0} \times \frac{r}{R}\vec{e}_r = \frac{Q}{8\pi R^3 \epsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}}(r^2) \\ \vec{E}_{ext} &= \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}\vec{e}_r = \frac{-Q}{4\pi \epsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}}(1/r) \end{aligned}$$

29. Montrer que :
$\dfrac{\partial \vec{E}_{int}}{\partial t} = \dfrac{A}{R^3}\overrightarrow{\text{grad}}_M f(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial \vec{E}_{ext}}{\partial t} = A\overrightarrow{\text{grad}}_M g(r,\theta)$
où l'on définira A et les fonctions scalaires $f(r,\theta)$ et $g(r,\theta)$. Ces fonctions nécessitent le calcul de $\left(\dfrac{\partial r}{\partial t}\right)_{t=0} = -v\cos\theta$ obtenu, par exemple, en explicitant r^2 en fonction des coordonnées cartésiennes x, y, z et des variables v et t.

$$\begin{aligned}\vec{E}_{int} &= \frac{Q}{8\pi R^3\epsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}}(r^2)\\ \vec{E}_{ext} &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}}(1/r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{E}_{int}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q}{8\pi R^3\epsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}}(r^2)\right)\\ \frac{\partial\vec{E}_{ext}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{-Q}{4\pi\epsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}}(1/r)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{E}_{int}}{\partial t} &= \frac{Q}{8\pi R^3\epsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}}(\frac{\partial}{\partial t}(r^2))\\ \frac{\partial\vec{E}_{ext}}{\partial t} &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}}(\frac{\partial}{\partial t}(1/r))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{E}_{int}}{\partial t} &= \frac{Q}{8\pi R^3\epsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}}(2r\frac{\partial r}{\partial t})\\ \frac{\partial\vec{E}_{ext}}{\partial t} &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}}(\frac{-1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial t})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{E}_{int}}{\partial t} &= \frac{-Qv}{4\pi R^3\epsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}}(r\cos\theta)\\ \frac{\partial\vec{E}_{ext}}{\partial t} &= \frac{-Qv}{4\pi\epsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}}(\frac{\cos\theta}{r^2})\end{aligned}$$

donc $A = \frac{-Qv}{4\pi\epsilon_0}$, $f(r,\theta) = r\cos\theta$, $g(r,\theta) = \frac{\cos\theta}{r^2}$

30. Déterminer les composantes radiales et à t=0 de : $\frac{\partial\vec{E}_{int}}{\partial t}$, $\frac{\partial\vec{E}_{ext}}{\partial t}$, $\vec{j}_{int}$, $\vec{j}_{ext}$, $\vec{J}_{int}$, $\vec{J}_{ext}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{E}_{int}}{\partial t}.\vec{e}_r &= \frac{A}{R^3}\overrightarrow{\text{grad}}(f(r,\theta)).\vec{e}_r\\ \frac{\partial\vec{E}_{ext}}{\partial t}.\vec{e}_r &= A\overrightarrow{\text{grad}}(g(r,\theta)).\vec{e}_r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{E}_{int}}{\partial t}.\vec{e}_r &= \frac{A}{R^3}\frac{\partial f}{\partial r}\\ \frac{\partial\vec{E}_{ext}}{\partial t}.\vec{e}_r &= A\frac{\partial g}{\partial r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{E}_{int}}{\partial t}.\vec{e}_r &= \frac{A}{R^3}\cos\theta \\
\frac{\partial \vec{E}_{ext}}{\partial t}.\vec{e}_r &= -2A\frac{\cos\theta}{r^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{j}_{int}.\vec{e}_r &= \frac{3Q}{4\pi R^3}\vec{v}.\vec{e}_r = \frac{3Qv\cos\theta}{4\pi R^3} \\
\vec{j}_{ext}.\vec{e}_r &= \vec{0}.\vec{e}_r = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{J}_{int}.\vec{e}_r &= \frac{3Qv\cos\theta}{4\pi R^3} + \epsilon_0\frac{A}{R^3}\cos\theta = \epsilon_0\frac{-3A\cos\theta}{R^3} + \epsilon_0\frac{A}{R^3}\cos\theta = -2\epsilon_0 A\frac{\cos\theta}{R^3} \\
\vec{J}_{ext}.\vec{e}_r &= -2\epsilon_0 A\frac{\cos\theta}{r^3}
\end{aligned}$$

31. Exprimer $\vec{B}_{int}$ et $\vec{B}_{ext}$ par application du théorème d'Ampère. On choisira le contour circulaire (Γ'), dans un plan parallèle à yOz, passant par M et (S') la surface de la calotte sphérique ayant pour centre C et s'appuyant sur (Γ'). Le champ $\vec{B}$ sera pris sous la forme $\vec{B}$(M) = B(r,θ)$\vec{e}_\phi$.

Un élément de surface de la calotte sphérique est $d\vec{S}' = (rd\theta')\times(r\sin\theta' d\phi)\vec{e}_r = r^2\sin\theta' d\theta' d\phi\vec{e}_r$, avec r =cte, $\theta' = 0 \to \theta$, $\phi = 0 \to 2\pi$.

Le théorème d'Ampère généralisé s'écrit :

$$\oint_{\Gamma'} \vec{B}_{int/ext}.\vec{dl} = \mu_0 \iint_{S'} \vec{J}_{int/ext}.d\vec{S}$$

$$2\pi r B_{int/ext} = \mu_0 r^2 \left(\int_0^\theta \vec{J}_{int/ext}.\vec{e}_r \sin\theta' d\theta'\right)\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)$$

$$\begin{aligned}
B_{int} &= \mu_0\frac{r}{2\pi}\left(\frac{-2\epsilon_0 A}{R^3}\right)\left(\int_0^\theta \cos\theta'\sin\theta' d\theta'\right)2\pi = 2\frac{\epsilon_0\mu_0 A}{R^2}\sin^2\theta\frac{r}{R} \\
B_{ext} &= \mu_0\frac{r}{2\pi}\left(\frac{-2\epsilon_0 A}{r^3}\right)\left(\int_0^\theta \cos\theta'\sin\theta' d\theta'\right)2\pi = 2\frac{\epsilon_0\mu_0 A}{r^2}\sin^2\theta
\end{aligned}$$

32. En déduire, en fonction de Q, v et R, les énergies magnétiques W_{1m} dans la boule et W_{2m} à l'extérieur de la boule et vérifier que l'énergie magnétique $W_m = W_{1m} + W_{2m}$ est égale à $\dfrac{\mu_0 Q^2 v^2}{10\pi R}$.

$$W_m = \iiint_V w_m dV = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0}dV$$

$$
\begin{aligned}
W_{1m} &= \int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{B_{int}^2}{2\mu_0}r^2\sin\theta dr d\theta d\phi \\
W_{2m} &= \int_{r=R}^{r=+\infty}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{B_{ext}^2}{2\mu_0}r^2\sin\theta dr d\theta d\phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{1m} &= \frac{2\mu_0\epsilon_0^2A^2}{R}\int_{r=0}^{r=R}\frac{r^4dr}{R^5}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin^5\theta d\theta\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}d\phi \\
W_{2m} &= \frac{2\mu_0\epsilon_0^2A^2}{R}\int_{r=R}^{r=+\infty}\frac{Rdr}{r^2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin^5\theta d\theta\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}d\phi
\end{aligned}
$$

Remarque $\int_0^1 x^4dx = \frac{1}{5}$, $\int_1^{+\infty} x^{-2}dx = 1$, $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin^5\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin^3\theta d\theta = \frac{2}{3}$, $\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}d\phi = 2\pi$

$$
\begin{aligned}
W_{1m} &= \frac{8\pi\mu_0\epsilon_0^2A^2}{15R} \\
W_{2m} &= \frac{8\mu_0\epsilon_0^2A^2}{3R}
\end{aligned}
$$

$$
W_m = W_{1m} + W_{2m} = (\frac{1}{15}+\frac{1}{3})\frac{8\pi\mu_0\epsilon_0^2A^2}{R} = \frac{2}{5}\frac{8\pi\mu_0\epsilon_0^2}{R}\left(\frac{-Qv}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 = \frac{\mu_0Q^2v^2}{5\pi R}
$$

33. Application numérique : en assimilant l'énergie magnétique W_m à l'énergie cinétique, en vitesse non relativiste, d'un électron de masse m et pour la charge e, quel serait le rayon R_e de l'électron ?

$$
W_m = \frac{1}{2}m_ev^2 = \frac{\mu_0e^2v^2}{10\pi R_e}
$$

$$
R_e = \frac{\mu_0e^2}{5\pi m_e}
$$

Application numérique : $R_e = 2.10^{-15}$ m

Optique

Télescopes au sol et en association

Le premier des quatre principaux télescopes du « Très Grand Télescope » (acronyme anglo-saxon VLT) installé au sommet du Cerro Paranal, au Chili, a été prénommé Antu (Soleil en langue mapuche) et a été mis en service en 1998. Comme tous les télescopes du VLT, il est de type Ritchey - Chrétien, avec un des quatre foyers de type Cassegrain. On étudiera un montage interférométrique à deux télescopes. Outre le télescope Antu du VLT, appelé T_1 par la suite, le montage considéré inclut également Kueyen (Lune en langue mapuche), télescope mis en service en 1999 et appelé T_2.

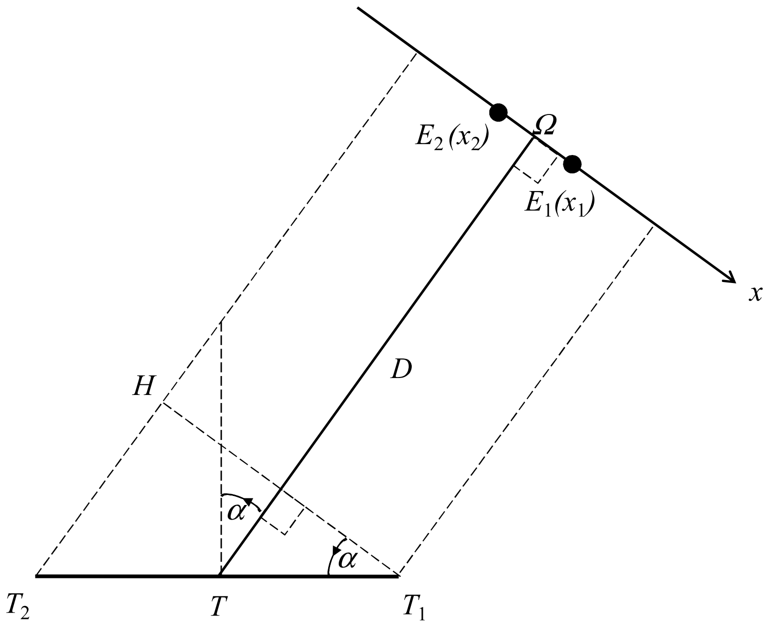

Figure 1 : montage interférométrique

Les deux télescopes T_1 et T_2 sont identiques, et le diamètre de leurs ouvertures circulaires est négligeable devant la longueur T_2T_1= b de la ligne de base (de milieu T) qui joint les deux instruments. La position moyenne Ω d'un système stellaire binaire, c'est-à-dire une étoile double symétrique avec deux contributions égales de l'éclairement I_0, est repérée par l'angle α que fait la direction $T\Omega$ avec la normale en T à la ligne de base. On pose $D = T\Omega$. Les positions x_1 et $x_2 = - x_1$ des 2 étoiles E_1 et E_2 qui constituent le système stellaire sont comptées par rapport à l'origine Ω de l'axe Ωx, ce dernier étant perpendiculaire à la direction $T\Omega$. L'ensemble des caractéristiques décrites ci-dessus est apparent sur la figure 1. En outre, un dispositif annexe, dont on discutera l'usage par la suite, permet de faire interférer les ondes optiques issues des deux foyers images en introduisant une différence de marche supplémentaire L_f sur le signal issu de T_1.

34. Exprimer les différences de marche $\delta_1 = E_1T_2 - E_1T_1$ et $\delta_2 = E_2T_2 - E_2T_1$, hors contribution L_f.
    Pour faire le calcul approché de ces deux grandeurs, on remarquera que la distance D est extrêmement grande devant les autres dimensions exprimées sur la figure 1, et qu'il est alors possible pour E_1, respectivement E_2, de poser $E_1T_2 \gg E_1H + HT_2$.
    Montrer que les phases spatiales correspondantes ϕ_k (k = 1, 2) qui prennent en compte toutes les contributions des différences de marche peuvent se mettre sous la forme :
$$\phi_k = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{Xx_k}{D} + b\sin\alpha - L_f\right)$$
    avec λ la longueur d'onde supposée monochromatique émise par les étoiles E_1 et E_2, x_k (k = 1, 2) leurs positions et X une longueur que l'on explicitera.

$$E_2T_2 = \sqrt{(D+\frac{b}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{b}{2}\cos\alpha - x_2)^2} \simeq D\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{b\sin\alpha}{D} + (\frac{b}{2D}\sin\alpha)^2 + (\frac{b}{2D}\cos\alpha - \frac{x_2}{D})^2\right)\right)$$

$$E_2T_2 \simeq D\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{b\sin\alpha}{D}+(\frac{b}{2D})^2+\frac{bx_2}{D^2}\cos\alpha+(\frac{x_2}{D})^2\right)\right)$$

de même

$$E_2T_1 \simeq D\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{-b\sin\alpha}{D}+(\frac{-b}{2D})^2+\frac{-bx_2}{D^2}\cos\alpha+(\frac{x_2}{D})^2\right)\right)$$

donc

$$\delta_2 = E_2T_2 - E_2T_1 \simeq D\frac{b\sin\alpha}{D} + D\frac{bx_2}{D^2}\cos\alpha = b\sin\alpha + \frac{bx_2\cos\alpha}{D}$$

de même

$$\delta_1 = E_1T_2 - E_1T_1 \simeq b\sin\alpha + \frac{bx_1\cos\alpha}{D}$$

$$\phi_k = \frac{2\pi}{\lambda}(\delta_k - L_f) = \frac{2\pi}{\lambda}(b\sin\alpha + \frac{bx_k\cos\alpha}{D} - L_f)$$

35. La contribution à l'intensité I_k est due, pour une étoile E_k donnée, au système interférentiel qui résulte des phases spatiales ϕ_k. Il est aisé de l'exprimer par la relation $I_k = I_0(1+\cos\phi_k)$ Donner l'intensité totale I en fonction de I_0, ϕ_1 et ϕ_2. Mettre cette intensité totale sous la forme :

$$I = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{\pi X}{\lambda}\frac{(x_2-x_1)}{D}\right)\cos\left(2\pi\frac{b\sin\alpha - L_f}{\lambda}\right)\right)$$

Les deux étoiles sont des sources incohérentes donc

$$I = I_1 + I_2 = 2I_0(1+\frac{1}{2}(\cos\phi_1+\cos\phi_2)) = 2I_0(1+\cos((\phi_2-\phi_1)/2)\cos((\phi_1+\phi_2)/2))$$

$$I = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{\pi b\cos\alpha}{\lambda}\frac{(x_2-x_1)}{D}\right)\cos\left(2\pi\frac{b\sin\alpha - L_f}{\lambda}\right)\right)$$

36. La distance entre les télescopes Antu et Kueyen est b = 57,000 m. Le système binaire est à la position moyenne $\alpha = 45°$ et les deux étoiles E_1 et E_2 sont supposées émettre à la même longueur d'onde de 600 nm.
Trouver la plus petite distance angulaire $\theta = (x_2 - x_1)/D$ détectable, exprimée en radians, pour obtenir un éclairement uniforme.

L'éclairement est uniforme et égal à $2I_0$ si $\cos\left(\frac{\pi b\cos\alpha}{\lambda}\theta\right)$ est nul, ceci est réalisé pour

$$\theta \equiv \frac{\lambda}{2b\cos\alpha}[\pi]$$

La plus petite valeur absolue de θ annulant le contraste est donc

$$\theta_{min} = \frac{\lambda}{2b\cos\alpha} = 8.10^{-9} \text{ rad}$$

37. Calculer le contraste γ donné par $\gamma = \dfrac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}}$

La variable est θ on en déduit

$$I_{max} = 2I_0\left(1+\left|\cos\left(2\pi\frac{b\sin\alpha - L_f}{\lambda}\right)\right|\right)$$

$$I_{min} = 2I_0\left(1-\left|\cos\left(2\pi\frac{b\sin\alpha - L_f}{\lambda}\right)\right|\right)$$

$$\gamma = \left|\cos\left(2\pi\frac{b\sin\alpha - L_f}{\lambda}\right)\right|$$

38. On s'arrange généralement, via l'utilisation d'une ligne à retard, pour que L_f, différence de marche supplémentaire mentionnée en introduction, soit égale à ($b\sin\alpha$). Quelle en est la raison ?

Ceci a pour effet d'avoir $\gamma = 1$ un contraste maximal.

Thermodynamique

Le moteur de Stirling

Le moteur de Stirling est constitué de deux chambres, une chaude, une froide, reliées par un régénérateur de volume constant pouvant être constitué de fils de cuivre tressés. Le gaz, en circuit fermé, reçoit un transfert thermique d'une source chaude et cède un transfert thermique à la source froide. Le rôle du régénérateur, base de l'invention de Stirling, est fondamental pour obtenir une bonne efficacité. Dans son brevet original de 1816, Stirling explique que le gaz chaud entre dans la partie chaude du régénérateur et est progressivement refroidi durant son parcours pour ressortir par l'autre extrémité à une température presque identique à la température de la source froide. Dans le parcours inverse, le gaz est progressivement réchauffé. Cette astuce technologique permet d'avoir une partie des échanges thermiques internes au moteur.

Constantes du problème : Constante des gaz parfaits : R = 8,314 J.mol^{-1}.K^{-1}

Données sur le dihydrogène (H_2) Masse molaire : M_{H_2} = 2,00.10^3 kg.mol^{-1}
Rapport des capacités thermiques $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v} = 1,40$

Données sur le cuivre Masse volumique : ρ = 8913 kg.m^{-3}
Chaleur spécifique massique : c = 387 J.kg^{-1}.K^{-1}
Conductivité thermique : λ = 362 W.m^{-1}.K^{-1}

Données sur le sodium Masse molaire : M_{Na} = 22,96.10^{-3} kg.mol^{-1}
Masse volumique : ρ = 968 kg.m^{-3}
Capacité thermique massique du liquide : c = 1230 J.kg^{-1}.K^{-1}
Température de vaporisation à pression atmosphérique : Tv = 1156 K
Enthalpie molaire de vaporisation à pression atmosphérique : $\Delta H_{m,vap}$ = 99,2 kJ.mol^{-1}

Description du cycle de Stirling Le cycle associé à un moteur de Stirling est constitué de 2 isothermes et de 2 isochores. Il est décrit comme suit :

1→2 : compression isotherme à $T_f = 313$ K

2→3 : transformation isochore de la température $T_f = 313$ K à la température $T_C = 1173$ K

3→4 : détente isotherme à $T_C = 1173$ K

4→1 : transformation isochore de la température $T_C = 1173$ K à la température $T_f = 313$ K

Ce cycle est représenté figure 1 :

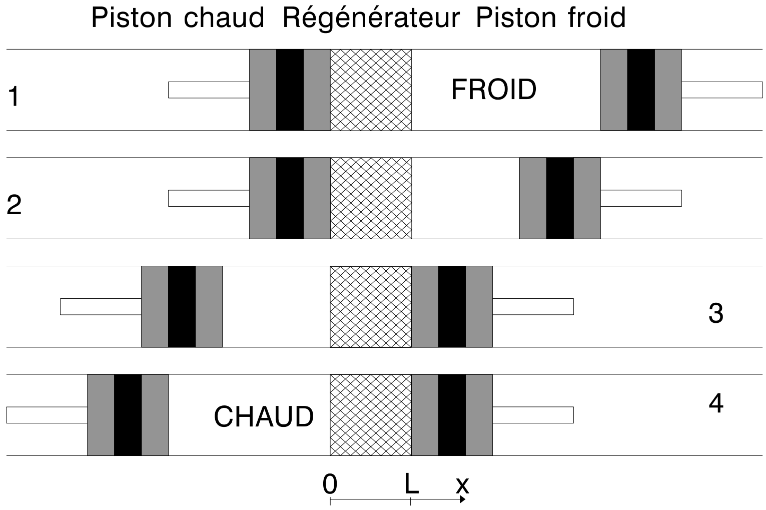

Figure 1 : déplacement des pistons

Caractéristiques du moteur de Stirling retenu Température de la source chaude : 1173 K

Température de la source froide : 313 K

Volume minimum du gaz libre (uniquement chambre chaude et/ou froide) : $V_m = 1{,}0$ L

Volume maximum du gaz libre (uniquement chambre chaude et/ou froide) : $V_M = 2{,}0$ L

Volume du régénérateur accessible au gaz quand il est pris en compte : $V_r = 0{,}2$ L

Volume du régénérateur occupé par du cuivre : 0,6 L

Masse de dihydrogène, traitée comme un gaz parfait, contenue dans le moteur : 0,01 kg.

Régénérateur non idéal

Le régénérateur peut être constitué d'un empilement de disques de fils de cuivre tressés. On suppose que la température dans le régénérateur varie linéairement avec l'abscisse selon la loi : $T(x) = T_C + \dfrac{x}{L}(T_f - T_C)$. On prendra pour origine des abscisses la frontière chambre chaude/régénérateur. L représente la longueur du régénérateur. On ne tiendra nullement compte des aspects dynamiques. Il n'y a pas d'échange thermique entre les tranches élémentaires de fluide. Le volume accessible au gaz dans le régénérateur V_r est aussi appelé volume mort.

Influence du volume mort du régénérateur

Dans le régénérateur, le gradient de température conduit à une distribution de densité moléculaire (ou concentration molaire $c(x) = \dfrac{dn}{dV}$) en fonction des abscisses.

Il est donc intéressant de remplacer cette distribution $(c(x),T(x))$ liée au gradient de température par un système équivalent d'un point de vue mécanique : le régénérateur sera alors supposé occupé par $n_r = \int_0^L c(x)dV$ moles de dihydrogène à la température effective T_r, quelle que soit l'abscisse. Le volume mort du régénérateur vaut $V_r = 0{,}2$ L.

39. Dans le régénérateur, en considérant que la pression p est homogène et en utilisant la loi des gaz parfait locale ($p = c(x)RT(x)$) et globale ($p = \frac{n_r}{V_r}RT_r$), montrer que la température effective moyenne T_r s'exprime selon :

$$T_r = \frac{T_C - T_f}{\ln\left(\frac{T_C}{T_f}\right)}$$

$$n_r = \int_0^L c(x)dV = \int_0^L c(x)Sdx = \int_0^L \frac{pS}{R}\frac{dx}{T(x)} = \frac{pSL}{R}\int_0^1 \frac{d(x/L)}{T}$$

$$T_r = \frac{pV_r}{n_rR} = \frac{1}{\int_0^1 \frac{d(x/L)}{T}}$$

Or $T(x) = T_C + \frac{x}{L}(T_f - T_C)$ donc $dT = \frac{dx}{L}(T_f - T_C)$ donc

$$T_r = \frac{T_f - T_C}{\int_{T_C}^{T_f} \frac{d(T)}{T}}$$

$$T_r = \frac{T_C - T_f}{\ln\left(\frac{T_C}{T_f}\right)}$$

40. Calculer numériquement T_r.

$T_r = 691$ K

Pour les questions 41 à 44, toutes les molécules présentes dans le régénérateur seront supposées être à la température T_r.

41. À partir d'un bilan de matière, exprimer la pression p en fonction de n, R, des températures T_r, T_C, T_f et des volumes V_r, V_C et V_f, volumes associés au régénérateur, au piston chaud et au piston froid (voir figure 3). On considérera la pression identique dans le régénérateur et les deux chambres.

Pour les trois compartiments on a $pV_i = n_iRT_i$ car ils sont à la même pression p.
La quantité de matière totale :

$$n = n_C + n_r + n_f$$

$$n = \frac{pV_C}{RT_C} + \frac{pV_r}{RT_r} + \frac{pV_f}{RT_f}$$

$$n = \frac{p}{R}\left(\frac{V_C}{T_C} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_f}{T_f}\right)$$

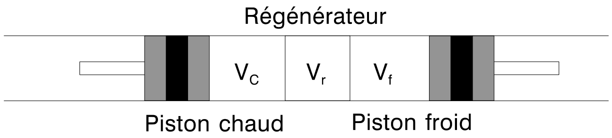

Figure 3 : différents volumes pris en compte

42. Exprimer littéralement le travail $W_{1\to 2}$ puis effectuer l'application numérique.

$$W_{1\to 2} = -\int_{1\to 2} pdV_C - \int_{1\to 2} pdV_r - \int_{1\to 2} pdV_f = 0 - 0 - \int_{1\to 2} pdV_f = -\int_{V_M}^{V_m} pdV_f$$

Or $V_C = 0$ donc $n = \dfrac{p}{R}\left(\dfrac{V_r}{T_r} + \dfrac{V_f}{T_f}\right)$

$$W_{1\to 2} = -\int_{V_M}^{V_m} \frac{nRdV_f}{\dfrac{V_r}{T_r} + \dfrac{V_f}{T_f}} = -nRT_f \int_{V_M}^{V_m} \frac{dV_f}{\dfrac{T_f V_r}{T_r} + V_f} = -nRT_f \ln\left(\frac{\dfrac{T_f V_r}{T_r} + V_m}{\dfrac{T_f V_r}{T_r} + V_M}\right)$$

Application numérique : avec $n = \dfrac{m(H_2)}{M_{H_2}}$, $W_{1\to 2} = 8,43$ kJ

43. Exprimer littéralement le travail $W_{3\to 4}$ puis effectuer l'application numérique.

même calcul avec cette fois-ci T_C, $V_f = 0$ et une détente de V_m à V_M

$$W_{3\to 4} = -nRT_C \ln\left(\frac{\dfrac{T_C V_r}{T_r} + V_M}{\dfrac{T_C V_r}{T_r} + V_m}\right)$$

Application numérique : $W_{3\to 4} = -26,9$ kJ

44. Comparer la valeur numérique du travail sur le cycle avec un volume mort de régénérateur de V_r = 0,2 L ($W_{V_r \neq 0}$) à sa valeur obtenue sans volume mort ($W_{V_r = 0}$). Commenter.

Les transformation $2 \to 3$ et $4 \to 1$ sont isochores avec une pression uniforme donc $W_{2\to 3} = W_{4\to 1} = 0$.

Donc le travail sur un cycle $W = W_{1\to 2} + 0 + W_{3\to 4} + 0$

et $W_{V_r \neq 0} = -18,4$ kJ

$W_{V_r = 0} = nR(T_c - T_f)\ln\left(\dfrac{V_m}{V_M}\right) = -24,7$ kJ

Avec un volume mort, il y a un volume supplémentaire qui n'est pas compressé, donc il ne contribue pas au travail donc on a bien $|W_{V_r \neq 0}| < |W_{V_r = 0}|$

Pour les transferts thermiques, il est impératif de considérer le gradient de température dans le régénérateur.

45. En discrétisant l'ensemble du système en fines tranches, chaque tranche de gaz est toujours à la température du thermostat local aussi bien dans les chambres que dans le régénérateur. Y a-t-il création d'entropie au cours d'un cycle ? En déduire l'efficacité.

Puisqu'on fait l'hypothèse d'une absence de toute différence de température entre gaz et sources de chaleur, l'évolution est partout thermiquement réversible . Elle est aussi mécaniquement réversible (isobare) donc il n'y a pas de création d'entropie et l'efficacité est celle d'un cycle de Carnot : $e = 1 - \dfrac{T_f}{T_C} = 0,733$

Perte thermique dans le régénérateur

Soit x la fraction de chaleur non échangée dans le régénérateur par le gaz lors de la transformation isochore (x varie de 0 à 1). Cette fraction est supposée identique dans les 2 sens de passage. Dans cette partie, le volume mort est supposé nul ($V_r = 0$).

46. Donner une raison qui pourrait expliquer que le transfert thermique n'est pas idéal.

Le transfert est idéal si le régénérateur permet seulement les transferts thermiques entre les deux compartiments ; toute fuite thermique , vers l'extérieur ou toute discontinuité de température entre le cuivre du régénérateur et le gaz, rend le transfert non idéal.

47. Exprimer l'efficacité sous la forme :

$$e = \frac{1 - \dfrac{T_f}{T_C}}{1 + C_2\left(1 - \dfrac{T_f}{T_C}\right)}$$

C_2 étant une constante à exprimer en fonction de x, γ, V_M et V_m.

L'efficacité est $e = \dfrac{-W}{Q_C}$. On a calculé W précédemment.

Q_C est reçut par le gaz lorsqu'il passe de T_f à T_C et lorsqu'il est en contact avec la source chaude, donc pour la transformation $2 \rightarrow 3$ et $3 \rightarrow 4$.

On a donc $Q_C = Q_{2\rightarrow 3} + Q_{3\rightarrow 4}$

$3 \rightarrow 4$ détente isotherme donc $\Delta U = 0$ donc $Q_{3\rightarrow 4} = -W_{3\rightarrow 4} = nRT_C \ln\left(\dfrac{V_M}{V_m}\right)$.

$2 \rightarrow 3$ isochore donc $W_{2\rightarrow 3} = 0$ donc $\Delta U = Q_{2\rightarrow 3} + Q_{regenerateur}$. Le régénérateur est là pour fournir l'énergie de cette étape, en le stockant lors de l'étape $4 \rightarrow 1$, mais l'énoncé précise qu'il en perd une fraction x donc $x\Delta U = Q_{2\rightarrow 3}$ donc $Q_{2\rightarrow 3} = xnc_V(T_C - T_f) = x\dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_C - T_f)$.

Et $-W = -W_{V_r=0} = nR(T_c - T_f)\ln\left(\dfrac{V_M}{V_m}\right)$.

$$e = \frac{nR(T_c - T_f)\ln\left(\dfrac{V_M}{V_m}\right)}{nRT_C\ln\left(\dfrac{V_M}{V_m}\right) + x\dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_C - T_f)}$$

$$e = \frac{1 - \dfrac{T_f}{T_C}}{1 + \dfrac{x}{(\gamma - 1)\ln\left(\dfrac{V_M}{V_m}\right)}\left(1 - \dfrac{T_f}{T_C}\right)}$$

48. Calculer numériquement C_2 et l'efficacité qui en résulte, en considérant un transfert non idéal correspondant à x = 0,1.

49. Le volume de cuivre nécessaire à la construction du régénérateur vaut 0,6 L. Estimer la variation de température du cuivre induite par le passage du gaz du piston froid au piston chaud (2→3) dans le cas non idéal x = 0,1.

Application numérique : $C_2 = 0,361$ et $e = 0,58$

Conduction thermique dans le régénérateur

Considérons une barre calorifugée en cuivre de longueur $\mathrm{L} = 2\mathrm{R}_{Cu}$ et de section $\mathrm{A} = \pi \mathrm{R}_{Cu}^2$ entre 2 thermostats de température T_C et T_f. On se place dans l'approximation d'un régime stationnaire.

50. Écrire la loi de Fourier.

$$\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

51. Calculer le flux de conduction thermique Φ^c dans le cas d'un volume V = AL = 0,6 L.

En régime stationnaire $\dfrac{\partial h}{\partial t} = -\dfrac{\partial \Phi^c}{\partial x}$ devient $\dfrac{\partial \Phi^c}{\partial x} = 0$ donc $\Phi^c = \text{cte}$

$$\Phi^c = \iint_A \vec{j}.d\vec{S}$$

$$\Phi^c = jA$$

$$\Phi^c = -\lambda A \frac{dT}{dx} = \text{cte}$$

$$\Phi^c = \lambda A \frac{T_C - T_f}{L}$$

$$\Phi^c = \lambda \frac{\pi R_{Cu}}{2}(T_C - T_f)$$

$$\Phi^c = \lambda \frac{\pi^{2/3} V^{1/3}}{2^{4/3}}(T_C - T_f)$$

52. Déterminer numériquement R_{Cu} et Φ^c.

Application numérique : $\Phi^c = 22,4$ kW et $R_{Cu} = \left(\dfrac{V}{2\pi}\right)^{1/3} = 4,57$ cm

53. Dans une réalisation technologique d'un régénérateur, on utilise un empilement de disques de fils de cuivre en treillis. La conduction thermique est donc bonne dans le plan des disques et moyenne selon l'axe x. Commenter.

Le régénérateur ainsi constitué permet l'homogénéisation de température de chaque disque mais assure un gradient thermique longitudinal (le long de l'axe x) permettant l'établissement des transferts thermiques efficaces entre le gaz et le régénérateur le long de son axe.