

Devoir Surveillé 5

La calculatrice est autorisée

5 Décembre 2020 8h30-12h30

Production de chaux vive

La pierre à chaux (ou calcaire) est une roche constituée majoritairement de carbonate de calcium. Après avoir été extraite en carrière, elle est concassée puis introduite en amont d'un four (longueur : 80 à 100 m, diamètre : 5 m) tournant à faible vitesse (1 à 3 tr.min⁻¹) et faiblement incliné, conçu pour traiter de l'ordre de 10 tonnes de CaCO₃ par heure (voir figure en fin d'exercice). Un brûleur alimenté au gaz naturel réchauffe l'air frais introduit en partie aval du four et le porte à environ 1100 K dans la zone de travail. La pression totale dans le four s'élève à 1 bar. La chaux est évacuée en continu en sortie du four. Le temps de résidence du mélange réactionnel dans le four est suffisamment long pour assurer l'équilibre chimique entre le réactif et les produits, selon l'équilibre suivant :



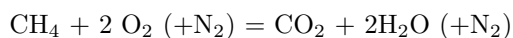
1. A l'aide des données thermodynamiques fournies en fin d'exercice, déterminer l'enthalpie standard de cette réaction à 298 K. Préciser la nature de cette réaction.

La valeur de la pression partielle p_{CO_2} à la température de 1100 K est de 0,64 bar, pour l'équilibre ci-dessus.

A la sortie du four, l'effluent gazeux possède un débit de 9,38.10³ m³ par heure ; il renferme de l'air réchauffé, des fumées liées à la combustion du gaz naturel et du gaz carbonique avec une teneur correspondant à l'équilibre et une température moyenne de 750 K.

2. Calculer, à 750 K, le débit molaire total $\frac{dn(\text{gaz})}{dt}$ du gaz de sortie du four (en mol.h⁻¹), puis les débits molaires $\frac{dn(\text{CaO})}{dt}$ et $\frac{dn(\text{CO}_2)}{dt}$ des produits formés.
3. En déduire les débits massiques $\frac{dm(\text{CaO})}{dt}$ de CaO et $\frac{dm(\text{CO}_2)}{dt}$ de CO₂ (en kg.h⁻¹).
4. A partir de la relation : $\frac{dn(\text{air})}{dt} = \frac{dn(\text{gaz})}{dt} - \frac{dn(\text{CO}_2)}{dt}$, entre les débits molaires de l'air, du gaz et du CO₂, déterminer le débit massique d'air introduit dans le four.
5. Calculer la quantité de chaleur Q₁ (en kJ.h⁻¹) nécessaire pour amener le calcaire (CaCO₃) et le courant d'air de 298 à 1100 K, sachant que les capacités calorifiques massiques de CaCO₃ et de l'air valent respectivement 0,820 et 1,00 kJ.kg⁻¹.K⁻¹ et que l'efficacité du chauffage n'excède pas 40 %.
6. Exprimer puis évaluer la quantité de chaleur Q₂ (en kJ.h⁻¹) nécessaire pour décomposer la quantité de calcaire permise par l'équilibre à 1100 K.
7. En déduire la quantité de chaleur totale Q_{TOT} (en kJ.h⁻¹) que devront délivrer les brûleurs au gaz naturel pour assurer le fonctionnement du procédé.

Le chauffage de l'air est réalisé grâce à la combustion du méthane, sous un excès d'air, selon la réaction en phase gazeuse :



pour laquelle l'enthalpie standard de réaction vaut : $\Delta_r H^\circ = -803 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

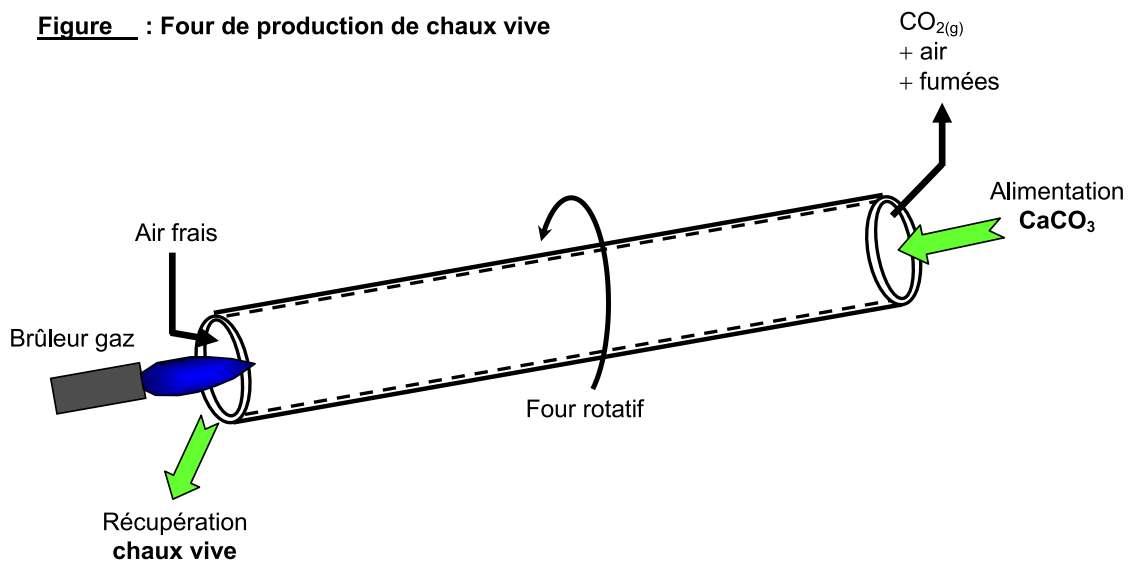
8. Expliquer pourquoi la combustion est réalisée avec un excès d'air.
9. Déterminer la consommation en gaz naturel (en $\text{m}^3.\text{h}^{-1}$), puis la production horaire totale de dioxyde de carbone (en kg.h^{-1}) de l'installation.

Données Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

Volume molaire gazeux : V_m (à 298K) = $24,4.10^{-3} \text{ m}^3.\text{mol}^{-1}$ et V_m (à 750K) = $61,5.10^{-3} \text{ m}^3.\text{mol}^{-1}$

| Élément ou composé | Masse molaire M (g/mol) | Enthalpie standard de formation à 298 K, $\Delta_f H^\circ$ (kJ/mol) | Entropie molaire standard à 298 K, S° (J.K ⁻¹ .mol ⁻¹) | Température de fusion T_f (K) |
|-----------------------|-------------------------------|--|--|---------------------------------------|
| CaCO ₃ (s) | 100 | -1207 | 92,9 | 1612 |
| CaO (s) | 56,1 | -635,1 | 39,7 | 2853 |
| CO ₂ (g) | 44,0 | -393,5 | 214 | |
| CH ₄ (g) | 16,0 | -74,8 | 186 | |
| air | 29,0 | | | |

Figure : Four de production de chaux vive



Onde thermique

L'objet de cette partie est d'étudier l'amortissement dans le sol des variations quotidiennes et annuelles de température, en vue de l'enfouissement d'une canalisation.

On se place en repère cartésien. La surface du sol, supposée plane et d'extension infinie, coïncide avec le plan (Oxy). La température au niveau de cette surface, notée $T(0, t)$, varie sinusoïdalement en fonction du temps t avec la pulsation ω autour d'une moyenne T_0 : $T(0, t) = T_0 + \alpha \cos(\omega t)$, où α est une constante. Soit un point M dans le sol repéré par ses coordonnées (x, y, z) , avec $z \geq 0$. On cherche à déterminer le champ de température en M, noté $T(M, t)$.

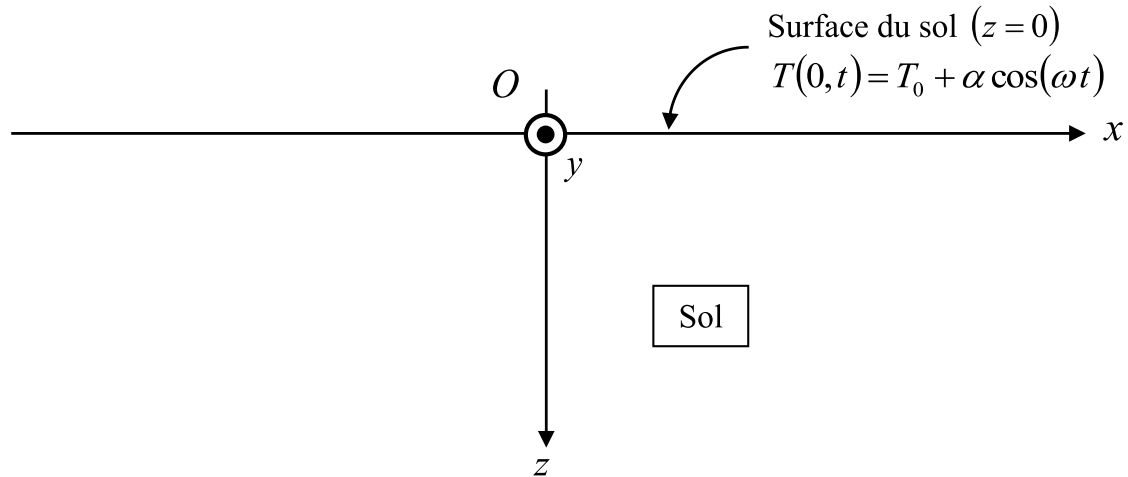


Figure : repérage adopté pour l'étude de l'onde thermique

10. Justifier que $T(M, t)$ ne dépend ni de x ni de y . On notera dans la suite : $T(M, t) = T(z, t)$
11. Donner l'expression de la loi de Fourier relative à la conduction thermique, en rappelant les grandeurs intervenant dans cette loi, ainsi que leurs unités. On notera λ la conductivité thermique du sol, supposée constante.

On travaille avec l'écart de température par rapport à T_0 en posant $\theta(z, t) = T(z, t) - T_0$. Tout autre phénomène que la conduction thermique est négligé.

On donne, dans le cadre de notre modèle, l'équation de la chaleur : $\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$, où ρ et c désignent respectivement la masse volumique et la capacité thermique massique du sol. Ces deux paramètres sont supposés constants.

On cherche la solution de l'équation de la chaleur en régime sinusoïdal permanent. A cet effet, on introduit la variable complexe : $\underline{\theta}(z, t) = f(z)e^{j\omega t}$, avec $j^2 = -1$ et $f(z)$ une fonction de z . L'inconnue $\theta(z, t)$ est alors donnée par : $\theta(z, t) = \Re(\underline{\theta}(z, t))$, où \Re désigne la partie réelle.

12. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f(z)$. On fera intervenir la diffusivité du sol donné par : $D = \frac{\lambda}{\rho c}$
13. Exprimer la solution générale de cette équation, en faisant intervenir deux constantes d'intégration notées A et B. Par un argument physique à préciser, montrer que l'une de ces constantes est nulle.

14. Montrer que $\theta(z, t)$ se met sous la forme : $\theta(z, t) = \alpha e^{-z/\delta} \times e^{j(\omega t - z/\delta)}$, où δ est une grandeur à exprimer en fonction de ω et de D .
15. Exprimer $T(z, t)$ à l'aide des paramètres : $T_0, \delta, \alpha, \omega$ et des variables z et t . Interpréter l'expression obtenue. Interpréter le paramètre δ .
16. Exprimer la profondeur L_{10} pour laquelle l'amplitude des variations de température dans le sol est atténuée d'un facteur 10 par rapport à celle de la surface du sol.
17. On donne pour un sol humide : $D = 0,257 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer numériquement L_{10} dans les deux cas suivants :
 - Cas 1 : variation quotidienne de température
 - Cas 2 : variation annuelle de température
 À quelle profondeur préconiseriez-vous d'enfouir une canalisation ?
18. Calculer littéralement puis numériquement le décalage temporel Δt entre $T(z = L_{10}, t + \Delta t) = \frac{T_1}{10}$ et $T(0, t) = T_1$ dans les deux cas de la question précédente.

Étude thermique d'un objet torique

Un tore de section carrée $a \times a$ et de rayon intérieur a (donc de rayon extérieur $2a$) est fabriqué dans un matériau de masse volumique μ , de capacité calorifique massique c et de conductivité thermique λ . Le profil des températures possède la symétrie cylindrique : T ne dépend que du rayon r et du temps t soit $T(r, t)$. La face intérieure ($r = a, \theta \in [0, 2\pi[$, $z \in [0, a]$) et la face extérieure ($r = 2a, \theta \in [0, 2\pi[$, $z \in [0, a]$) sont placées dans le vide. Sur les faces parallèles ($z = 0$ ou $z = a$), on pose deux disques parfaitement isolants thermiquement et de surface parfaitement réfléchissantes.

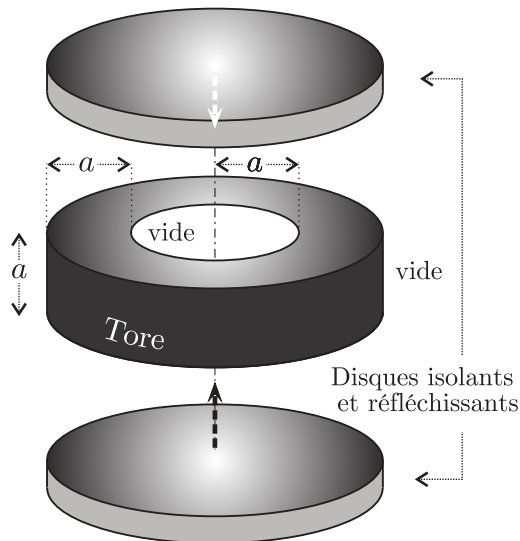


FIGURE – Vue éclatée du système.
L'axe (O, z) est celui du tore

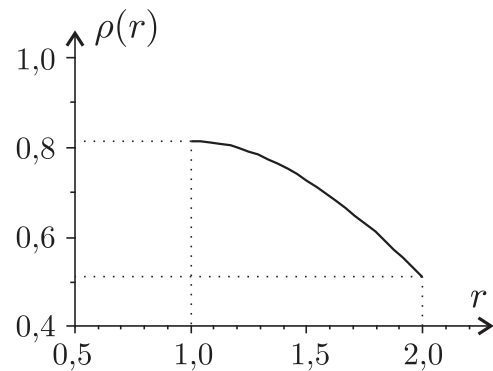


FIGURE – La fonction $\rho(r)$

19. En effectuant un bilan thermique sur la portion torique définie par l'intervalle $[r, r + dr]$, montrer que le champ des températures vérifie l'équation

$$\xi r \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial r}$$

où l'on exprimera ξ en fonction des grandeurs caractéristiques du matériau et l'on précisera son unité.

20. On cherche, pour cette équation, une solution stationnaire à variables séparées sous la forme $T(r, t) = \rho(r)\eta(t)$. Établir les deux équations différentielles vérifiées respectivement par $\rho(r)$ et $\eta(t)$ en faisant apparaître une constante χ commune à ces deux équations.
21. Déterminer l'expression de $\eta(t)$ sans chercher à caractériser la ou les constantes d'intégration. Quel est le signe de χ ?
22. Pour la fonction $\rho(r)$, on cherche une solution développable en série entière sous la forme $\rho(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$. Déterminer les expressions des a_{2p} et des a_{2p+1} pour tout entier p positif ou nul.
23. En examinant tous les transferts thermiques possibles sur la face interne, justifier le fait que $\left. \frac{d\rho}{dr} \right|_{r=a} = 0$.

La fonction $\rho(r)$ qui admet le développement en série déterminé plus haut et qui vérifie la condition aux limites imposée s'exprime en utilisant les fonctions de Bessel de première (J) et de deuxième (Y) espèces. Elle s'écrit

$$\rho(r) = K \left[J_0(r) - \frac{J_1(a)}{Y_1(a)} Y_0(r) \right]$$

où K est une constante d'intégration. La courbe représentative de cette fonction sur le domaine d'étude et pour $K = 1$ et $a = 1$ est représentée sur la figure en début d'exercice.

24. Décrire l'évolution de la température dans le tore au cours du temps en traçant sur un même graphique les profils des températures à diverses dates. Justifier en particulier le fait que T tend uniformément vers zéro.

Capteur capacitif

Les capteurs ont évolué et utilisent de plus en plus l'effet capacitif. Un élément chauffant intégré au capteur permet de le maintenir sec en vaporisant l'eau tombée. Ceci évite les fausses communications dues au brouillard ou à des phénomènes de condensation (rosée du matin). Le capteur est une platine sur substrat céramique, son principe de fonctionnement repose sur une détection de type capacitive. Ainsi l'accumulation de pluie sur la surface de la plaque aura pour conséquence de modifier la valeur de sa capacité, ainsi que les lignes du champ électrique.

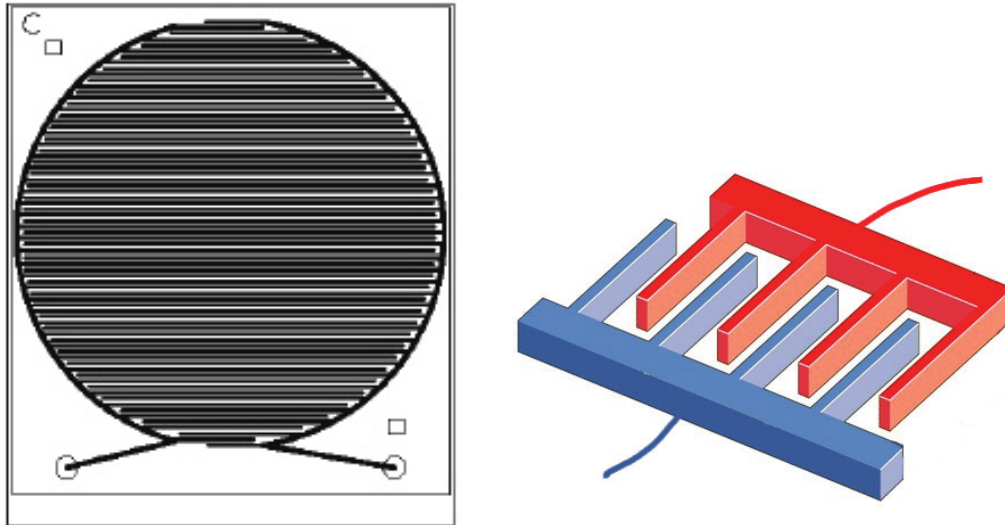


FIGURE - Cellule capacitive et schéma de principe de sa géométrie

25. Justifier que ce capteur puisse se modéliser par l'association de condensateurs en parallèle et établir l'expression de la capacité équivalente de N condensateurs en parallèle.
26. On s'intéresse au champ électrique créé par un plan infini (Oxy) de densité surfacique σ , plongé dans le vide. Montrer, par l'étude des symétries et des invariances que celui-ci s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= A\vec{e}_z \text{ si } z > 0 \\ \vec{E} &= -A\vec{e}_z \text{ si } z < 0\end{aligned}$$

27. Établir alors l'expression de A en fonction de σ et ϵ_0 par application du théorème de Gauss.
28. En admettant que le résultat précédent reste valable pour un plan fini, établir l'expression de la capacité C_0 d'un condensateur plan dont le diélectrique est assimilé à du vide, constitué de deux armatures planes identiques de surface S , distantes de e et portant des charges opposées $+q$ et $-q$.
29. La cellule capacitive est assimilée à une association de 40 condensateurs. La capacité totale de l'ensemble vaut $C_{tot} = 2 \text{ pF}$. On suppose l'épaisseur des armatures négligeable, et la surface d'une armature vaut $S = 0,5 \text{ mm}^2$. On rappelle la permittivité électrique du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ SI}$. Évaluer l'épaisseur e entre les armatures d'un condensateur.
30. Montrer que l'unité de la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 peut s'écrire sous la forme $\text{F}^\alpha \cdot \text{m}^\beta$ avec α et β des coefficients à déterminer.

Dans la pratique le condensateur utilisé dans le capteur capacitif est intégré dans le feuilletage des vitres. À l'approche d'une couche d'eau, les lignes du champ électrique sont modifiées (il s'agit du même principe utilisé pour les écrans tactiles capacitifs). Les lignes de champ sur un tel capteur sont les suivantes :

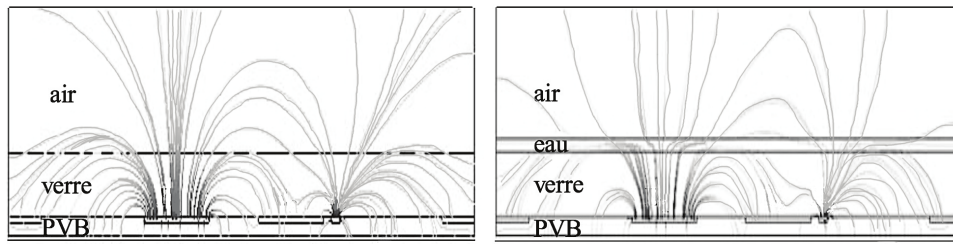


FIGURE — Lignes du champ électrique sur la surface du capteur en absence d'eau, et déformation de ces lignes en présence de gouttes d'eau. PVB représente la plaque du capteur.

31. Préciser la zone où la norme du champ électrique est la plus grande.