Devoir Maison 8

Pour Vendredi 11 Décembre 2020

Forces d'intéraction et formule de Derjaguin

L'objectif de cet exercice est de décrire les interactions entre la pointe AFM (Microscope à Force Atomique) et un échantillon.

Données :

— Rayon de Bohr : $a_0 = 5,3.10^{-11}$ m

— Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,9.10^{-12}$ F.m^{-1} (ou kg^{-1}.m^{-3}.A^2.s^4)

— Masse de l'électron $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg

— Constante de Planck réduite $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,1.10^{-34}$ J.s

— Charge élémentaire : $e = 1,610^{-19}$ C

— Electronvolt : 1eV $= 1,610^{-19}$ J

— Nombre volumique d'atomes de silicium dans la pointe de l'AFM : $\rho = 5,0.10^{22}$ cm^{-3}

— Module d'Young du silicium : $E = 1,010^{11}$ U.S.I.

— Constante d'intéraction dipôle-dipôle : $C = 5,67.10^{-67}$ USI

On donne par ailleurs en coordonnées polaires $\overrightarrow{grad}(V) = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$

Approche qualitative

Interaction entre deux dipôles

On souhaite modéliser les interactions entre deux dipôles par le modèle suivant. On place un dipôle permanent de moment dipolaire $\vec{P}$ au centre O d'un repère.

1. Établir l'expression du potentiel électrique V créé par un dipôle.
2. Comment se simplifie l'expression obtenue précédemment dans l'approximation dipolaire ?
3. En déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}$ créé en un point $M(r, \theta)$.

Lorsqu'un morceau de matière infinitésimal est soumis à un champ électrique $\vec{E}$, il se polarise et acquiert un moment dipolaire $\vec{p} = \alpha\vec{E}$, où α est la polarisabilité. Ce morceau de matière est soumis au champ $\vec{E}$ du dipôle permanent décrit précédemment.

4. Justifier que l'énergie d'interaction entre ces deux dipôles (l'un placé en O, l'autre en M) puisse se mettre sous la forme :

$$U_{d-d} = -\frac{C}{r^6}$$

5. Cette expression dépend-elle de la direction des deux dipôles considérés ?

Intéraction dipôle-plan

Considérons maintenant un dipôle $\vec{p}$, placé en O à une distance $d = ||\overrightarrow{OH}||$ d'un demi-espace infini de dipôles induits sans interaction entre eux. Le nombre de dipôles par unité de volume est noté ρ_0. Le système est étudié en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), l'axe (Oz) étant normal au plan et dirigé vers celui-ci (figure ci-dessous).

6. Justifier, à l'aide d'un schéma clair, qu'un volume infinitésimal du demi-espace infini s'exprime $dV = dr.r.d\theta.r.\sin(\theta).d\phi = r^2\sin(\theta).dr.d\theta.d\phi$

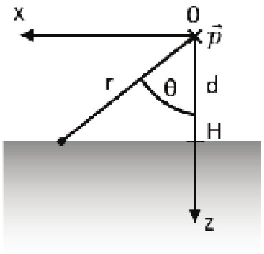

Figure . Dipôle unique p à une distance d d'un demi-espace infini de dipôles induits.

L'énergie d'interaction U_{d-e} entre le dipôle placé en O et ce demi-espace s'obtient en sommant l'énergie U_{d-d} de la question précédente sur tout le demi-espace. Cette somme s'écrit donc :

$$U_{d-e} = \iiint U_{d-d}\rho_0 dV = -\rho_0 \int_d^{+\infty} \frac{C}{r^6} r^2 \left(\int_0^{\theta_{max}} \sin(\theta) d\theta \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \right) dr$$

7. Justifier que la limite d'intégration sur θ vaille $\theta_{max} = \arccos\left(\frac{d}{r}\right)$.
8. Montrer alors que :

$$U_{d-e} = -\frac{\rho_0 \pi C}{6d^3}$$