Quelques moyens de mesure du temps

- Calculatrice interdite.

  En conséquence on utilisera pour les applications numériques soit les aides aux calculs ci-dessous, soit un calcul approché à un chiffre significatif.

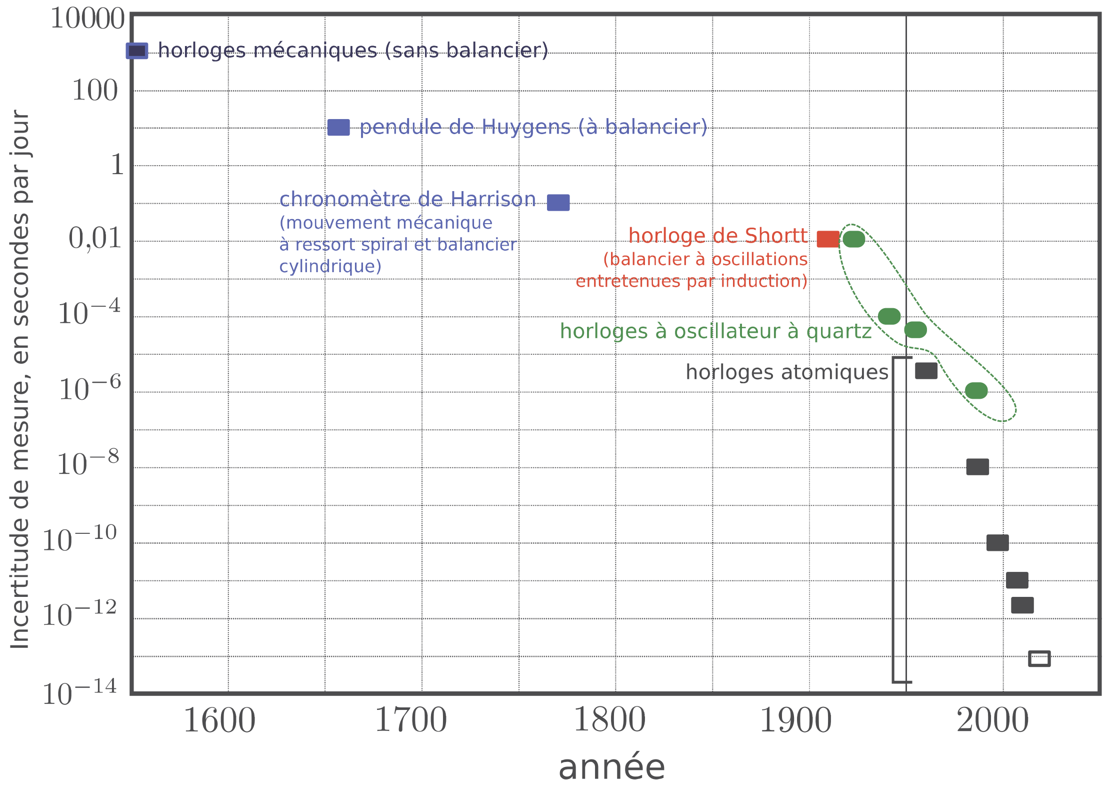
  $30^{\text{o}} = 0{,}5\,\text{rad} \qquad \dfrac{0{,}5^2}{16} \times 3600 = 62 \qquad \dfrac{4{,}3}{\sqrt{2}} = 3 \qquad 9{,}8 \simeq 0{,}99\pi^2$

  $\dfrac{47 \times 0{,}2}{4{,}3} = 2{,}2 \qquad \dfrac{47 \times 4{,}3}{0{,}2} = 1010 \qquad \dfrac{4{,}3}{47 \times 0{,}2} = 0{,}46$

- Les parties I et II sont indépendantes et d'un poids similaire dans le barème.

Introduction

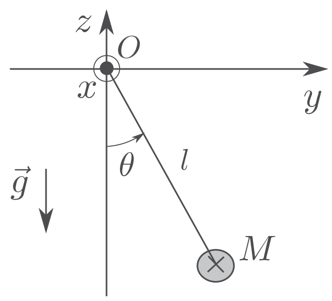
La mesure du temps s'est faite par des moyens divers au cours de l'histoire de l'humanité : cadrans solaires, sabliers, pendules, circuits électroniques... La précision de cette mesure s'est sans cesse améliorée, pour atteindre celle des horloges atomiques d'aujourd'hui (voir graphique ci-dessous).



I Mesure du temps par horloge à balancier : étude du pendule

Galilée montre vers 1610 que les oscillations d'un pendule sont isochrones : elles ne dépendent pas de l'amplitude du mouvement. Huygens exploite ceci à partir de 1657 pour concevoir une horloge dont le mouvement est régulé par les oscillations d'un pendule : la précision s'en trouve grandement améliorée. C'est ce type d'horloge que nous étudions.

On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M. Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligeable. On note l sa longueur. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On négligera tout frottement. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = g\vec{e}_z$ avec z axe vers le bas et $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$.



Période des petites oscillations : analyse dimensionnelle

1. En utilisant l'analyse dimensionnelle, donner une expression de la période T des oscillations du pendule. Cette expression sera à une constante multiplicative A près, A étant sans dimension. On ne fera pas intervenir les conditions initiales dans l'analyse.

Afin d'obtenir A, il faut mener une analyse plus poussée du problème. C'est ce que nous faisons dans la suite.

Mise en équation et résolution dans le cas des petites oscillations

On suppose que le pendule est lâché d'un angle initial $\theta_0 \ll 1\,\text{rad}$ avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0 = 0$.

2. Donner l'expression du moment cinétique en O de la masse en fonction de l, $\dot{\theta}$, m et d'un vecteur unitaire. On fera apparaître sur un schéma tout vecteur introduit pour le calcul.

3. En utilisant le théorème du moment cinétique, en déduire une équation du mouvement portant sur $\theta(t)$.

4. Faire une hypothèse qui permet de résoudre simplement cette équation. La résoudre en donnant l'expression de $\theta(t)$ en fonction de θ_0, g, l et t.

5. Donner l'expression T_0 de la période des oscillations.

6. Un peu avant la Révolution française, il a été proposé de définir l'unité "un mètre" comme la longueur du fil d'un pendule pour lequel une demi-oscillation dure une seconde (la période est donc de $2\,\text{s}$). Ce n'est finalement pas ceci qui a été retenu, mais une définition basée sur la longueur du méridien terrestre. Quelle est aujourd'hui la longueur d'un tel pendule ?

Expression de la période dans le cas des grandes oscillations

On remplace la ficelle par une tige rigide, de masse négligeable par rapport à la masse m. Ceci ne change donc rien à la mise en équation, et permet simplement au pendule de faire des mouvements de grande amplitude sans que la ficelle ne se détende (par exemple lorsque le pendule est vers $\theta = \pi$). La force exercée par la tige sur la masse ne travaille pas. On ne tiendra donc pas compte de cette tige.

7. Montrer que l'énergie mécanique E_m de la masse ponctuelle M peut s'écrire

$$E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta.$$

On suppose dans la suite que le pendule n'effectue <u>pas</u> de tour complet, et qu'il est lâché d'un angle θ_0 avec une vitesse angulaire initiale nulle.

8. Justifier qu'au cours du mouvement, $E_m = -mgl\cos\theta_0$.

9. En déduire une expression de l'angle infinitésimal $\mathrm{d}\theta$ parcouru par le pendule pendant un temps $\mathrm{d}t$.

10. En déduire que la période des oscillations du pendule s'écrit

$$T = T_0 \times \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}, \quad \text{avec} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{1}$$

Cette expression montre que la période du pendule dépend en réalité de l'amplitude θ_0 des oscillations, contrairement à ce qui a été trouvé dans la partie précédente où seules les petites oscillations étaient considérées. Ceci pose un problème majeur dans la conception d'horloges dont la régularité est basée sur les oscillations d'une masse, et il est souhaitable d'évaluer l'expression de cette période.

Expression approchée de la période dans le cas des oscillations pas trop grandes

L'équation (1) contient une intégrale difficile à exprimer analytiquement. Nous proposons ici d'obtenir une expression approchée de la période T sans passer par ce calcul d'intégrale.
On part de l'équation du mouvement $\ddot{\theta}+\omega_0^2 \sin\theta = 0$, avec $\omega_0^2 = g/l$, et on effectue les étapes suivantes :

- On utilise cette fois le développement de $\sin\theta$ à l'ordre supérieur : $\sin\theta \simeq \theta - \dfrac{\theta^3}{6}$.
- L'équation différentielle obtenue n'est alors plus linéaire. On continue toutefois de chercher une solution sous la forme $\theta(t) = \theta_0 \sin\omega t$.
- Pour exprimer le terme en θ^3, on utilise une formule trigonométrique :

$$\sin^3(\omega t) = \frac{3}{4}\sin\omega t - \frac{1}{4}\sin 3\omega t.$$

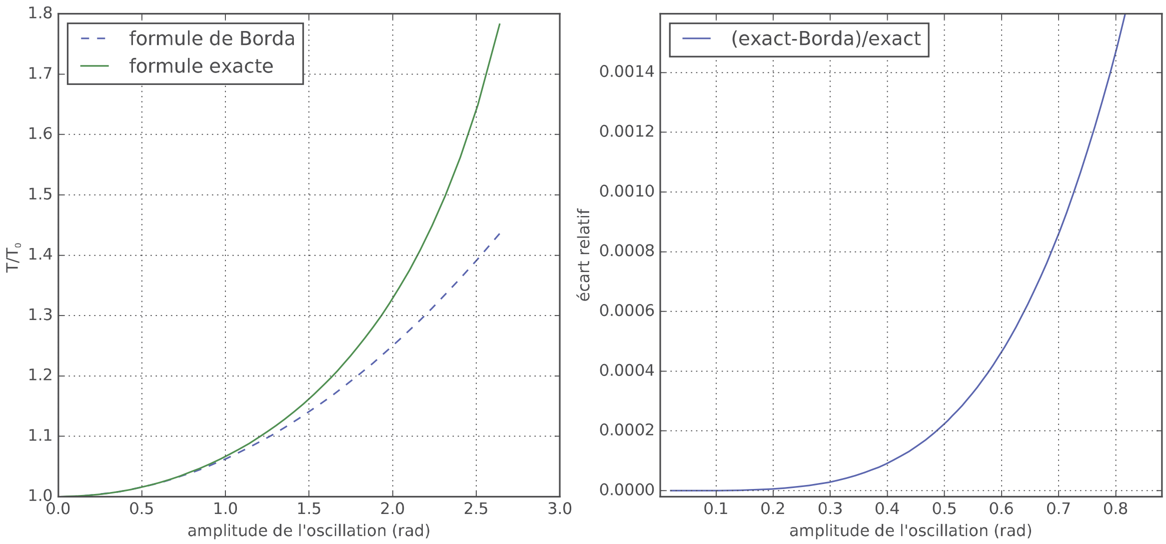
- On néglige le terme en $\sin 3\omega t$.

11. En suivant les indications ci-dessus, montrer qu'on aboutit à l'expression $\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \dfrac{\theta_0^2}{8}\right)$.

12. En déduire qu'à l'ordre le plus bas en θ_0, on a l'expression suivante de la période des oscillations :

$$T = T_0 \times \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right), \quad \text{avec} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{2}$$

Cette formule est appelée formule de Borda. Le graphique ci-dessous montre la comparaison entre T donnée par la formule exacte (relation (1)) et T donnée par la formule de Borda (relation (2)).



On prend $\theta_0 = 30^\circ$ et $T_0 = 1\,\mathrm{s}$.

13. En utilisant la formule de Borda, quel pourcentage d'erreur sur la période réelle commet-on ?

14. On utilise la formule de Borda. Si on compte 3600 oscillations du pendule (soit donc une heure pour un pendule de période 1 s), quelle durée s'est-elle écoulée ?

    D'après le graphique donné en début d'énoncé, peut-on dire que Huygens avait pris en compte la dépendance en θ_0 pour réaliser ses horloges ?

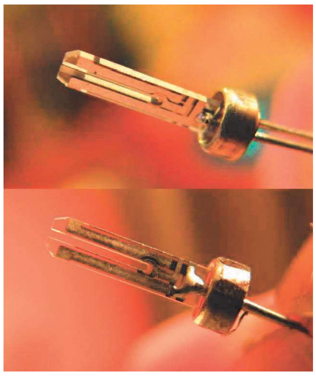
II La révolution de l'horloge à quartz

II.1 Étude d'un circuit à quartz

La première horloge à quartz est conçue en 1927 par les laboratoires Bell. La première montre-bracelet est commercialisée en 1969.

Le quartz est un cristal piézoélectrique : lorsqu'il est soumis à une différence de potentiel il se déforme, et inversement s'il est contraint mécaniquement alors une différence de potentiel apparaît entre ses faces.

Un cristal de quartz taillé en diapason – comme sur la figure ci-contre – vibre mécaniquement à une fréquence bien précise. Il est inséré dans un circuit électronique, avec une électrode métallisée sur chacune de ses faces. Cette précision dans la fréquence de vibration, associée au couplage électrique par l'effet piézoélectrique, permet d'obtenir des circuits électroniques résonants avec des facteurs de qualité très élevés, et donc des oscillateurs très précis.

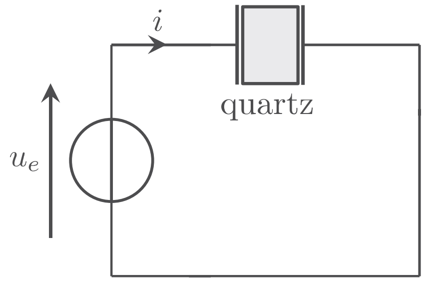


Quartz servant dans une montre.
source : https://en.wikipedia.org/wiki/Quartz_clock

Étude du quartz

Pour étudier la résonance très sélective du quartz, on le place dans le montage ci-contre.

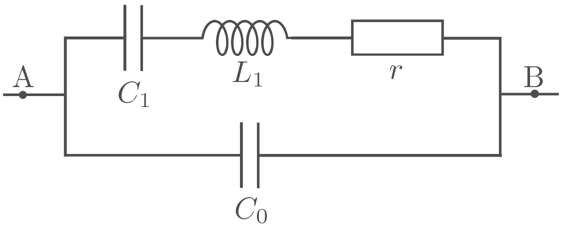
On dispose également d'un dispositif, non représenté, qui délivre une tension U_s égale à l'amplitude du courant i multipliée par une résistance $R = 47\,\mathrm{k}\Omega$: si $i(t) = i_0\cos(\omega t + \varphi)$, alors $U_s = Ri_0$.



L'étude se fait en régime sinusoïdal forcé, et on utilise le formalisme complexe. On note les grandeurs complexes en les soulignant. Par exemple $i(t) = i_0\cos(\omega t+\varphi)$ est représenté par $\underline{i}(t) = i_0\exp\{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)\}$.

15. Justifier que $\underline{i} = \dfrac{\underline{u_e}}{\underline{Z_q}}$, où $\underline{Z_q}$ est l'impédance électrique du quartz.

Électriquement, le comportement du quartz peut être modélisé par un condensateur C_0 (capacité des électrodes séparées par un diélectrique et des fils de liaisons) en parallèle avec un circuit série r, L_1 et C_1 qui correspond aux grandeurs motionnelles. Ce circuit série r, L_1, C_1 représente le couplage électromécanique lié à l'effet piézoélectrique.



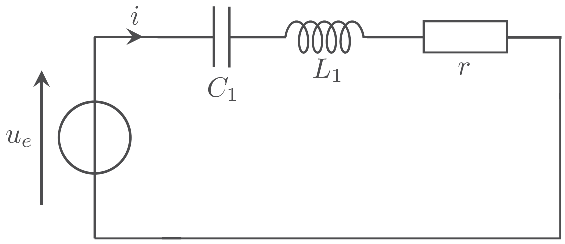
On étudie les résonances, donc la recherche des pulsations ω telles que l'amplitude de i soit importante, donc telles que $1/|\underline{Z_q}|$ tende vers des valeurs importantes.

Pour repérer la résonance, on néglige d'abord tout effet dissipatif : dans les deux questions qui suivent, $r = 0$.

16. Montrer que l'impédance $\underline{Z_q}$ équivalente au dipôle A-B vérifie $\dfrac{1}{\underline{Z_q}} = \mathrm{j}C_{\text{éq}}\omega\dfrac{1-\omega^2/\omega_2^2}{1-\omega^2/\omega_1^2}$, avec $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1C_1}$ et ω_2 et $C_{\text{éq}}$ dont on donnera les expressions en fonction de C_0, C_1 et L_1.

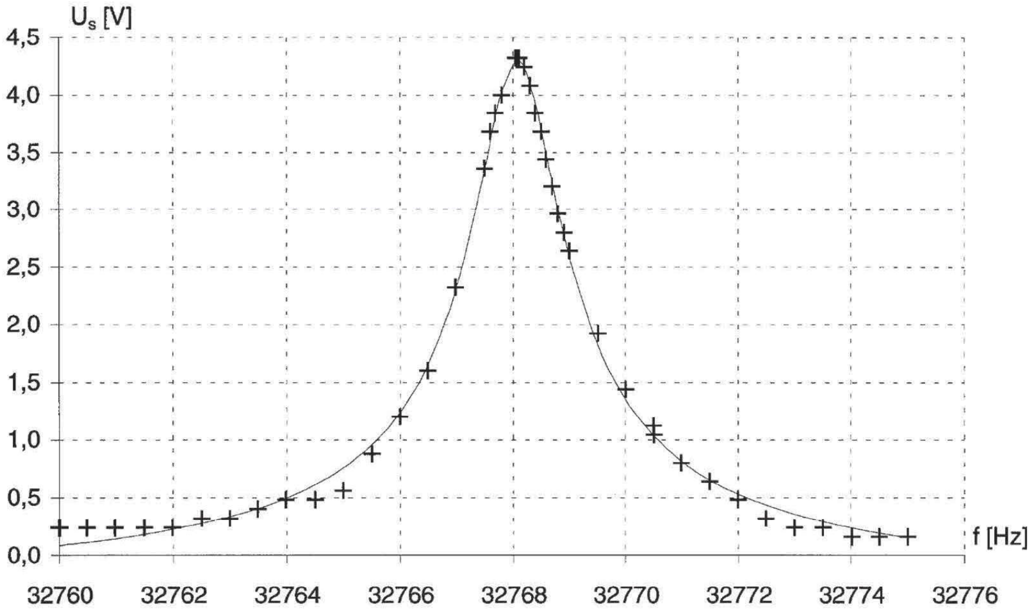
17. En déduire l'expression de la fréquence f_1 de résonance en intensité du circuit d'étude du quartz.

Les questions qui précèdent montrent que c'est la branche L_1, C_1, r qui est responsable de la résonance. Pour simplifier, on étudie donc le quartz en enlevant dans le modèle la capacité C_0. On obtient alors le circuit ci-contre.



18. Montrer que $\underline{i} = \dfrac{\underline{u}_e/r}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right)}$ avec $Q = \dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}$ et $\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$.

La courbe ci-dessous donne, pour chaque point, la valeur de U_s pour une fréquence f donnée du signal $u_e(t)$. On rappelle que $U_s = R \times i_0$. L'amplitude du signal u_e est $u_0 = 0{,}20\,\mathrm{V}$.



source : Deiber et al., Bull. U. Phys. 799, 1997

On donne également l'expression de l'acuité d'une résonance dans le cas étudié ici : $Q = \dfrac{f_r}{\Delta f}$, où Q est le facteur de qualité, f_r est la fréquence de résonance et Δf la largeur de la bande passante. Cette dernière est définie comme $\Delta f = |f_2 - f_1|$, avec f_2 et f_1 les deux fréquences telles que l'amplitude de sortie soit égale à l'amplitude de sortie maximale divisée par $\sqrt{2}$.

19. En exploitant ce graphique, donner une valeur de la résistance r.

20. Donner également une valeur du facteur de qualité Q.

On retiendra les valeurs approchées $r = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $Q = 20\,000$ et $\omega_1 = 2 \times 10^5\,\mathrm{rad/s}$.

21. Donner les expressions de L_1 et C_1 en fonction de Q, r et ω_1.

22. En déduire la valeur de L_1. Commentaire ?

Utilisation dans une montre

Le quartz permet ainsi de concevoir un circuit filtre passe-bande avec un facteur de qualité très élevé.

23. Si on laisse le circuit précédent osciller de façon libre, donner une estimation du temps pendant lequel les oscillations perdurent. Ceci est-il raisonnable pour fabriquer une horloge ?

Le quartz est en réalité inséré dans un circuit dit "oscillateur", qui entretient ses oscillations. Le facteur de qualité élevé permet d'avoir un signal quasi-harmonique dont la fréquence est précisément contrôlée et vaut, dans le cas présent, 32 768 Hz.

24. On peut remarquer que $32\,768 = 2^{15}$. Quelle peut-être la raison d'un tel choix pour la fabrication d'une montre ?