

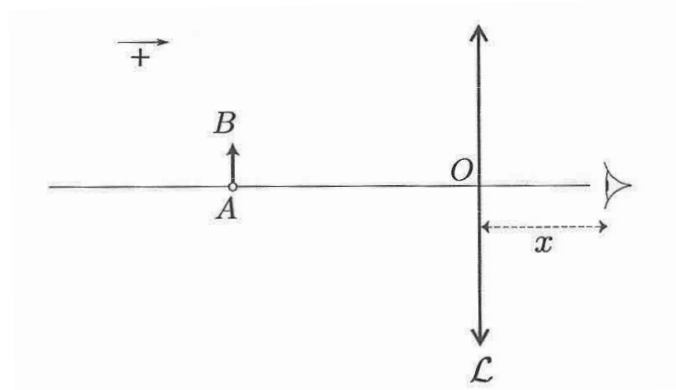
Devoir Maison 1

Toute aide est autorisée,
si vous rédigez vous même les solutions

à rendre d'ici au 31 juillet 2021
à remi.bisognin@lyc-stex.eu

Optique géométrique

Une loupe, assimilée à une lentille mince \mathcal{L} de distance focale image $f' > 0$ et de centre optique O , est utilisée pour observer un objet AB situé dans un plan de front. L'ensemble est placé dans l'air dont on supposera l'indice de réfraction égal à l'unité. L'œil de l'observateur est situé à une distance $x > 0$ en arrière de la lentille (Fig. ci-après). On modélise cet œil, que l'on supposera sans défaut (œil emmétrope), comme l'association d'une lentille mince \mathcal{L}' de vergence variable et d'un capteur fixe (la rétine). On note la distance entre l'œil et son punctum proximum, c'est-à-dire, la distance minimale de vision nette : $d_m = 25$ cm. Dans tout l'exercice, on admet que les conditions de Gauss sont satisfaites.



On définit le grossissement G de la loupe par le rapport θ'/θ de l'angle θ' sous lequel l'objet est vu à travers \mathcal{L} sur l'angle θ sous lequel on voit l'objet directement (sans la loupe) lorsqu'il est placé au punctum proximum. Dans cette définition, la valeur de G dépend de la position de l'objet et de la position de l'œil. On cherche les conditions d'observation qui maximise le grossissement.

On donne la relation de conjugaison de Descartes, celle de Newton et le grandissement transversal G_t pour une lentille mince de distance focale image f_i :

$$-\frac{1}{p_o} + \frac{1}{p_i} = \frac{1}{f_i}$$

$$\sigma_o \sigma_i = -f_i^2$$

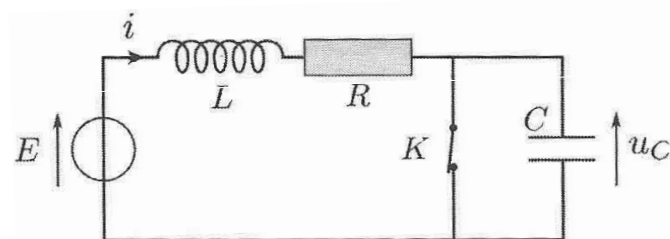
$$G_t = \frac{p_i}{p_o} = -\frac{\sigma_i}{f_i}$$

où p_o et p_i sont respectivement les distances algébriques de l'objet et de son image au centre de la lentille. En outre, σ_o et σ_i , sont les distances algébriques respectives de l'objet au foyer principal objet et de l'image au foyer principal image.

1. Calculer la limite de résolution angulaire d'un œil normal.
2. Un ballon sphérique de 20 cm de diamètre placé à une distance de 100m est-il vu sous un angle supérieur à la limite de résolution angulaire ?
3. Un œil emmétrope peut-il observer un objet à l'infini ?
4. Peut-on observer nettement un objet virtuel ?
5. AB est placé dans le plan focal objet de \mathcal{L} et la position de l'œil, derrière la lentille est quelconque. L'œil voit nettement l'image de AB à travers \mathcal{L} . Déterminer θ' et G en fonction de AB , d_m , f' .
6. L'objet AB n'est plus dans le plan focal de \mathcal{L} . L'œil est placé à proximité de la loupe ($x \approx 0$) et accommode de sorte qu'il observe l'image de l'objet à travers \mathcal{L} à son punctum proximum. Calculer la position $p_1 = \overline{OA}$ où l'objet est placé et le grossissement G_1 de la loupe dans ces conditions d'observation, en fonction de d_m et f' .
7. L'œil est désormais placé à une position quelconque dans l'intervalle $0 < x \leq d_m$. On note A_∞ la position de A qui permet à l'œil d'observer l'image de l'objet donnée par \mathcal{L} sans accommodation et A_m la position de A qui oblige l'œil à accommoder au punctum proximum. On introduit les distances algébriques $p_\infty = \overline{OA_\infty}$ et $p_m = \overline{OA_m}$. Exprimer ces dernières en fonctions de x , f' , d_m .
8. On note $p = \overline{OA}$ la position de A telle que $p_\infty \leq p \leq p_m$. Calculer le grossissement $G(x, p)$ de la loupe pour ces positions x de l'œil et p de l'objet.
9. On note A' l'image de A par \mathcal{L} et $p' = \overline{OA'}$. Pour quelle position x de l'œil et quelle valeur de p' le grossissement est-il maximum ?

Régime transitoire

Le condensateur d'un circuit RLC série, de capacité $C = 20 \mu\text{F}$, est mis en court-circuit par un interrupteur K depuis une durée suffisamment longue pour que le régime soit établi (permanent). Le circuit est alimenté par une source de tension stationnaire idéale de force électromotrice E . On ouvre K à un instant pris comme origine temporelle. La bobine du circuit possède une inductance $L = 50 \text{ mH}$. On note R la résistance du résistor, i l'intensité du courant électrique qui traverse la bobine, et u_C , la tension aux bornes du condensateur (Fig. ci-après).



Lorsque K est ouvert, le facteur de qualité du circuit vaut $Q = 10$. On note ω_0 la pulsation propre du circuit.

10. Calculer numériquement R .
11. Calculer une valeur approchée de la pseudo-pulsation ω_a , en fonction de ω_0 et Q .
12. Que valent $i(0^+)$ et la tension $u_C(0^+)$ à l'instant $t = 0^+$ succédant immédiatement à l'ouverture de K ?
13. La tension aux bornes du condensateur évolue selon :

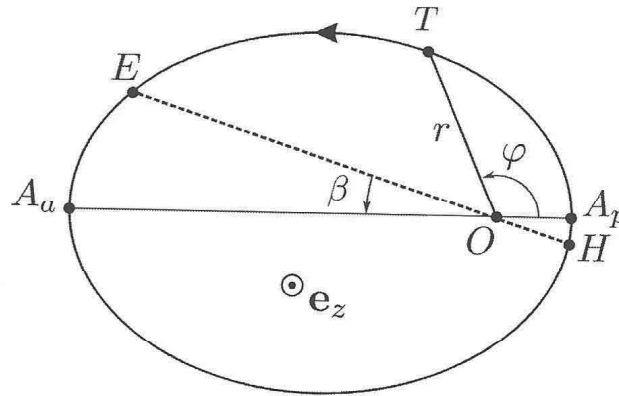
$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{t}{2\tau_e}\right) [A \cos(\omega_a t) + B \sin(\omega_a t)]$$

A , B et τ_e étant des constantes temporelles. Exprimer A en fonction de E .

14. De même exprimer B .
15. On attend suffisamment longtemps que le régime s'établisse puis, à un instant pris comme nouvelle origine temporelle, on ferme K . On retiendra par convention, comme durée du régime transitoire, la durée nécessaire pour que i atteignent 95% de sa valeur finale (on indique que $\ln 20 \approx 3$). Déterminer la durée τ_{rt} du régime transitoire succédant à la fermeture de K .

Mécanique

La Terre assimilée à un corpuscule T de masse M_T , possède une orbite elliptique dans le référentiel héliocentrique. Ce dernier, supposé galiléen, est centré sur le Soleil de masse M_S , placé en O . On note A_p et A_a les positions orbitales extrêmes de T : la périhélie A_p et l'aphélie A_a . On repère la position de T à l'aide du système de coordonnées polaires de centre O : $r = OT$ et $\phi = \widehat{A_p OT}$. Les angles sont orientés dans le sens de parcours de la trajectoire, le vecteur \vec{e}_z étant orthogonal au plan orbital (Fig. ci-après).



On pose $r_p = OA_p$ et $r_a = OA_a$ et on note G la constante de Newton (dite de gravitation universelle). On introduit v_p et v_a les vitesses de T respectivement en A_p et A_a . Sur la figure précédente, on a représenté la position H occupée par la Terre au début de l'hiver (solstice d'hiver), ainsi que la position E occupée par la Terre au début de l'été (solstice d'été) à l'aide de l'angle $\beta = \widehat{EOA_a} = \widehat{HOA_p} = 12,2^\circ$.

L'origine (ou référence) de l'énergie potentielle gravitationnelle est prise à l'infini et on note \mathcal{E}_m l'énergie mécanique de T dans le référentiel héliocentrique.

On note \vec{L}_O le moment cinétique de T en O et on introduit $L_z = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_z$

16. Établir une relation entre r_p , v_p , r_a , v_a .
17. A-t-on la même énergie mécanique \mathcal{E}_m aux points A_p et A_a ?
18. Exprimer v_a en fonction de G , M_S , M_T , r_a , r_p
19. Exprimer L_z en fonction de G , M_S , M_T , r_a , r_p
20. L'équation polaire de la trajectoire de la Terre est la suivante :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi}$$

où e et p sont deux constantes temporelles indépendantes de r et ϕ . Sachant que $e \ll 1$, donner une expression approchée de $\frac{L_z}{M_T}$ en fonction de p , e , et ϕ .

21. On rappelle l'égalité suivante, dans laquelle $g'(\phi)$ désigne la dérivée d'une fonction $g(\phi)$ par rapport à ϕ :

$$g'(\phi)\dot{\phi} = \frac{d}{dt} [g(\phi)]$$

ainsi que la relation :

$$\int_0^{\tau_1} dt = \tau_1$$

En déduire une expression approchée de la durée τ_1 nécessaire pour que T passe de H à E , c'est-à-dire, la durée qui s'écoule entre le solstice d'hiver et le solstice d'été. On exprimera τ_1 en fonction de p , M_T , L_z , β .

22. De même exprimer la durée τ_2 nécessaire pour que T passe de E à H , c'est-à-dire, la durée qui s'écoule entre le solstice d'été et d'hiver.

Thermodynamique

Un moteur thermique à air fonctionne en cycle fermé au cours duquel n moles d'air, assimilés à un gaz parfait subissent entre quatre états E_1 , E_2 , E_3 et E_4 les transformations réversibles suivantes :

- $E_1 \rightarrow E_2$ une compression isentropique ;
- $E_2 \rightarrow E_3$ une compression isochore ;
- $E_3 \rightarrow E_4$ une détente isentropique ;
- $E_4 \rightarrow E_1$ une détente isochore.

On désigne par p_k , V_k et T_k les pressions, volumes et températures des états E_k , où $k = 1, 2, 3$ ou 4 . On pose $V_M = V_1 = V_4$ et $V_m = V_2 = V_3$ et on introduit le facteur de compression $a = V_M/V_m$. On note R la constante des gaz parfaits et $\gamma = C_{pm}/C_{vm}$, le rapport de la capacité thermique molaire à pression constante sur la capacité thermique molaire à volume constant. On note respectivement Q et W le transfert thermique et le travail algébriquement reçu par le gaz au cours d'un cycle et Q_{ij} et W_{ij} respectivement le transfert thermique et le travail algébriquement reçu par le gaz lors de la transformation menant de l'état E_i à l'état E_j .

23. On note Q_c le transfert thermique échangée avec la source chaude. Identifier le Q_{ij} correspondant à Q_c .

24. Exprimer Q_c en fonction d'une capacité thermique molaire et d'une différence de température.
25. On note Q_f le transfert thermique échangée avec la source froide. Identifier le Q_{ij} correspondant à Q_f .
26. Exprimer Q_f en fonction d'une capacité thermique molaire et d'une différence de température.
27. Exprimer l'efficacité η de cette machine, rapport du transfert d'énergie utile, sur le transfert d'énergie nécessaire pour la faire fonctionner. On exprimera η en fonction des Q_{ij} .
28. Déterminer les températures T_1 et T_3 en fonction des températures T_2 , T_4 , et a .
29. Exprimer η en fonction des températures T_k .