# Devoir Surveillé 6 complément

La calculatrice est autorisée

9 Janvier 2021 8h30-12h30

## Modèle autodynamo et fluctuations du champ

Un modèle possible pour la circulation des courants électriques dans le noyau méetallique liquide de la Terre, couplée à la rotation de la Terre, est le modèle autodynamo (voir figure ci-dessous). Le système comporte N spires (circulaires de rayon a, de centre O et d'axe (Oz), qui créent le champ géomagnétique). Il comporte aussi un disque central de rayon b < a, qui peut tourner autour de l'axe (Oz) avec la vitesse angulaire $\omega$(t) et le moment d'inertie I (il modélise les interactions mécaniques avec la rotation de la Terre). Ce disque, conducteur, est parcouru par le même courant i(t) que les spires ; il est aussi entraîné par la rotation de la Terre avec un couple moteur $\vec{\Gamma} = \Gamma_0 \vec{e}_z$. Enfin, la résistance électrique totale du circuit est notée R.

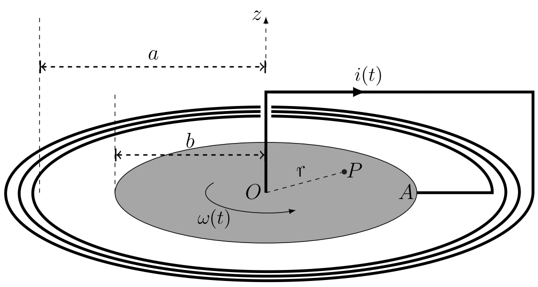


Figure – Le modèle autodynamo pour le champ géomagnétique

On note $\vec{B}$ (P) le champ magnétique créé par ce dispositif en un point P du disque tournant, avec r = OP ; on supposera N $\gg$ 1. Si i(t) $\neq$ 0, on note $M_{r_{max}} = -\dfrac{1}{i(t)}\int_0^{r_{max}} r\vec{e}_z.\vec{B}(P)dr$ ; en particulier on pourra utiliser dans ce qui suit les intégrales M$_a$ et M$_b$ pour $r_{max}$ = a ou b respectivement.

1. Quelle est la direction de $\vec{B}(P)$ ? Quels sont les signes de $M_a$ et $M_b$ ? Comparer $M_a$ et $M_b$. Expliciter l'inductance propre L du circuit électrique de la figure ci-dessus en fonction notamment d'une de ces intégrales.
2. On suppose d'abord que le courant i(t) traverse le disque uniquement en ligne droite du point A de sa périphérie à O. Exprimer la force de Laplace $d\vec{F}_L$ s'exerçant sur un élément de longueur du segment AO. Exprimer alors le moment $\Gamma_L = \vec{\Gamma}.\vec{e}_z$ des forces de Laplace exercées sur ce disque en fonction de i(t) et $M_b$. Même si le courant se répartit de manière arbitraire sur ce disque de A à O, on peut montrer, et on admettra, que l'expression établie ici du moment des forces de Laplace reste inchangée.

3. En faisant l'hypothèse de la conservation de la puissance lors de la conversion électromécanique, relier la force électro-motrice e(t) induite par les mouvements de rotation du disque à $M_b$, i(t) et $\omega(t)$.
4. Établir les équations régissant les évolutions du courant dans le noyau et de sa vitesse de rotation sous la forme d'un système différentiel couplé

$$\frac{di}{dt} = i(t)\left[\alpha\omega(t) - \beta\right]$$
$$\frac{d\omega}{dt} = \gamma - \delta i^2(t)$$

On exprimera les constantes positives $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, et $\delta$ en fonction de R, L, $M_b$, I et $\Gamma_0$.

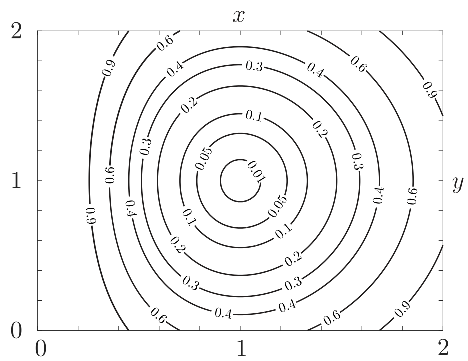


FIGURE – Courbes de valeurs constante définies par la fonction $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \ln(x) - y = c$. Les valeurs de $c$ sont indiquées sur les courbes.

Soit $i_0$ un courant constant arbitraire, on considère la fonction

$$H(\omega, i) = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Li^2 - \frac{L\Gamma_0}{M_b}\ln\left|\frac{i}{i_0}\right| - \frac{IR}{M_b}\omega$$

5. Calculer $\frac{dH}{dt}$ et simplifier son expression. Comment peut on interpréter la fonction H ? Déterminer les points du plan (i,$\omega$) pour lesquels le gradient de H s'annule. Comment s'interprètent ces points ?
6. Décrire la stabilité des équilibres du champ géomagnétique associés à la portion du plan de phase représenté sur la figure ci-dessus.