Chapitre 1.1.
Signaux périodiques

polycopié - Cours - élève

Motivations

Pourquoi une partie sur l'analyse de Fourier ?

On étudie souvent des signaux périodiques parmi les signaux physiques, par exemple lorsque on étudie un oscillateur ou un phénomène ondulatoire. Un signal périodique c'est un signal qui se répète identique à lui même dans toutes les périodes. Sa représentation temporelle est utile pour étudier la forme du motif qui se répète, mais le voir se répéter n'est pas toujours utile. On va donc introduire une autre représentation, une représentation fréquentielle. On va décomposer le signal en fonction périodiques de base sinusoïdales. Elles vont nous permettre d'étudier comment le signal varie et pas le fait qu'il se répète. L'analyse de Fourier c'est étudier cette représentation fréquentielle.

Pourquoi une partie sur les fonctions de transfert ?

On a décomposé les signaux périodiques en fonctions sinusoïdales, on va donc étudier la réponse du système à une fonction sinusoïdale. La fonction de transfert c'est l'outil idéal pour étudier comment réagit un système linéaire. On va donc l'étudier en détail et on va prendre comme exemple d'étude des circuits électriques.

Pourquoi une partie sur le traitement analogique du signal ?

Une fois qu'on a appris comment décomposer un signal et comment réagit un circuit électrique, on investir ces connaissances. On va concevoir des circuits électriques pour manipuler des signaux comme on le souhaite, on réalise un traitement analogique du signal. A l'inverse les signaux peuvent aussi servir à caractériser les circuits électriques. L'exemple des circuits électriques est choisi car il est facile de réaliser des systèmes linéaires en électronique, et que les autres signaux physiques sont souvent convertis en signaux électrique pour être manipulé : capteurs, des circuits de contrôle, de protection, ...

Table des matières

1 Analyse de Fourier

1.1 Fonctions périodiques

1.1.1 Définition : fonctions périodiques.

La décomposition en série de Fourier s'applique au fonctions périodiques $s(t)$ de période T, telle que par définition d'une fonction périodique :

$$\boxed{s(t+T) = s(t)} \tag{1}$$

1.1.2 Exemple : fonctions périodiques.

Fonction cosinus :
$s(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

Fonction triangle
$\tau \leq t - nT \leq \tau + \frac{T}{2},\ s(t) = \frac{2A}{T}(t-\tau)$
$\tau + \frac{T}{2} \leq t - nT \leq \tau + T,\ s(t) = -\frac{2A}{T}(t-\tau-T)$

Fonction créneau
$\tau \leq t - nT \leq \tau + \frac{T}{2},\ s(t) = A$
$\tau + \frac{T}{2} \leq t - nT \leq \tau + T,\ s(t) = -A$

Fonction arbitraire : électrocardiogramme
activité électrique du cœur

1.2 Décomposition en série de Fourier

1.2.1 Définition : décomposition en série de Fourier.

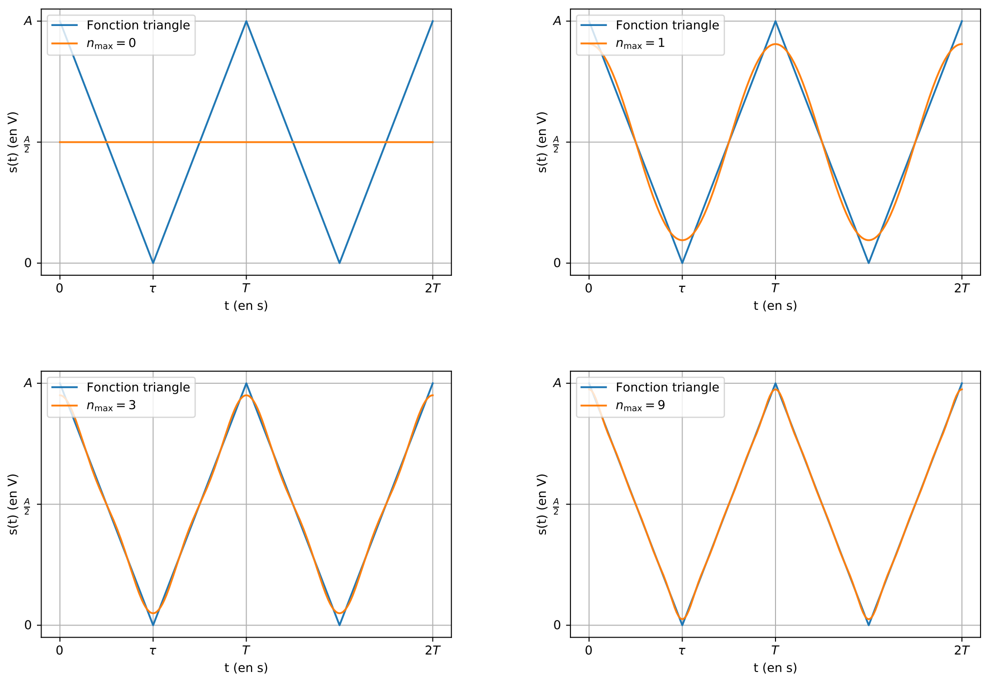
La série de Fourier est la décomposition de $s(t)$ en une somme de fonction sinusoïdales, comme un vecteur est décomposé en une somme de vecteur unitaire de base.

$$\boxed{s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f t) + b_n \sin(2\pi n f t)} \tag{2}$$

avec la fréquence **f**, appelée **fréquence fondamentale**, égale à l'inverse de la période $f = \frac{1}{T}$.

1.2.2 Exemple : reconstruction de la fonction triangle

Comparons la fonction triangle ci-dessous en bleu avec des séries de Fourier tronquées à $n_{\max}$ en rouge $a_0 + \sum_{n=1}^{\mathbf{n}_{\max}} a_n \cos(2\pi n f t) + b_n \sin(2\pi n f t)$.



A partir de ces graphes on peut commenter le rôle des différents termes dans la série de Fourier.

- • ○ ○ Le coefficient $\mathbf{a_0}$ à $n = 0$ est **la valeur moyenne** du signal.
- ○ • ○ Le terme à $\mathbf{n = 1}$ donne l'oscillation la plus lente, on l'appelle l'**harmonique fondamentale**.
- ○ ○ • Les termes pour $\mathbf{n \geq 2}$ permettent de reconstruire les variations rapides du signal comme les changements de pente de la fonction triangulaire, on les appelle **les harmoniques de rang n**.

1.2.3 Propriété : expressions des coefficients de la série de Fourier

Montrer que

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(2\pi n f t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(2\pi n f t)\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

1.2.4 Exercice : calcul des coefficients de la série de Fourier

Calculer les coefficients a_0, a_n, b_n pour la fonction triangle avec $\tau = \frac{T}{2}$.

1.2.5 Propriété : lien entre coefficient et parité

La fonction triangle étudiée dans l'exercice ci-dessus est paire et les coefficients b_n sont nuls.

●○ Montrer que pour toutes les **fonctions paires** les coefficients devant les sinus sont nuls $\mathbf{b_n = 0}$.

○● Montrer que pour toutes les **fonctions impaires** les coefficients devant les cosinus sont nuls $\mathbf{a_n = 0}$.

Il est parfois utile d'effectuer un changement d'origine des temps pour obtenir une propriété de parité et simplifier les calculs des coefficients de la série de Fourier.

1.2.6 Autre expression : décomposition en série de Fourier.

Une autre formulation de la série de Fourier ne fait intervenir que la fonction cosinus et pas la fonction sinus.

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(2\pi n f t + \phi_n) \tag{6}$$

avec $c_n \geq 0$ pour $n \geq 1$.

On remarque qu'il n'y a pas de phase à $n = 0$, $\cancel{\phi_0}$ de même qu'il n'y avait pas de coefficient impair à $n = 0$, $\cancel{b_0}$. En effet la notion de phase pour un signal constant dans le temps n'est pas définie. On peut aussi dire qu'il est toujours une fonction paire.

Dans cette expression $\mathbf{c_n}$ est l'**amplitude** et $\boldsymbol{\phi_n}$ est la **phase** de l'harmonique de rang n.

1.2.7 Exercice : lien entre les deux expressions de la série de Fourier

●○ Exprimer c_n en fonction de a_n et b_n.

○● Exprimer ϕ_n en fonction de a_n et b_n.

1.2.8 Autre expression : notation complexe

Un signal $s(t)$ peut être représenté à l'aide de sa notation complexe $\underline{s}(t)$, telle que par définition :

$$s(t) = \Re(\underline{s}(t)) \tag{7}$$

Cette notation est très utile pour les systèmes définis par une équation différentielle, car la dérivée d'une fonction exponentielle est une fonction exponentielle, et que la notation complexe d'un cosinus est une fonction exponentielle.

Cette notation complexe se décompose aussi en série de Fourier

$$\underline{s}(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \underline{c}_n e^{2j\pi nft} \tag{8}$$

Cette série de Fourier fait intervenir les fonctions exponentielles complexes $e^{2j\pi nft}$ pour chaque harmonique n. Chaque harmonique est caractérisée par un coefficient complexe $\underline{c}_n$.

- Exprimer $\underline{c}_n$ en fonction de c_n et ϕ_n.

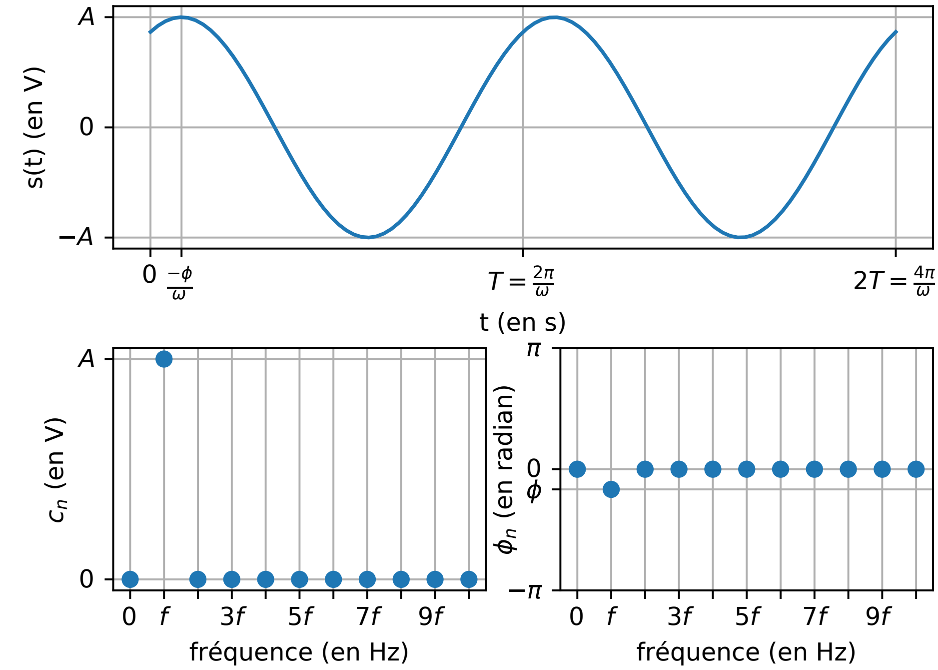
1.3 Spectres

1.3.1 Définition

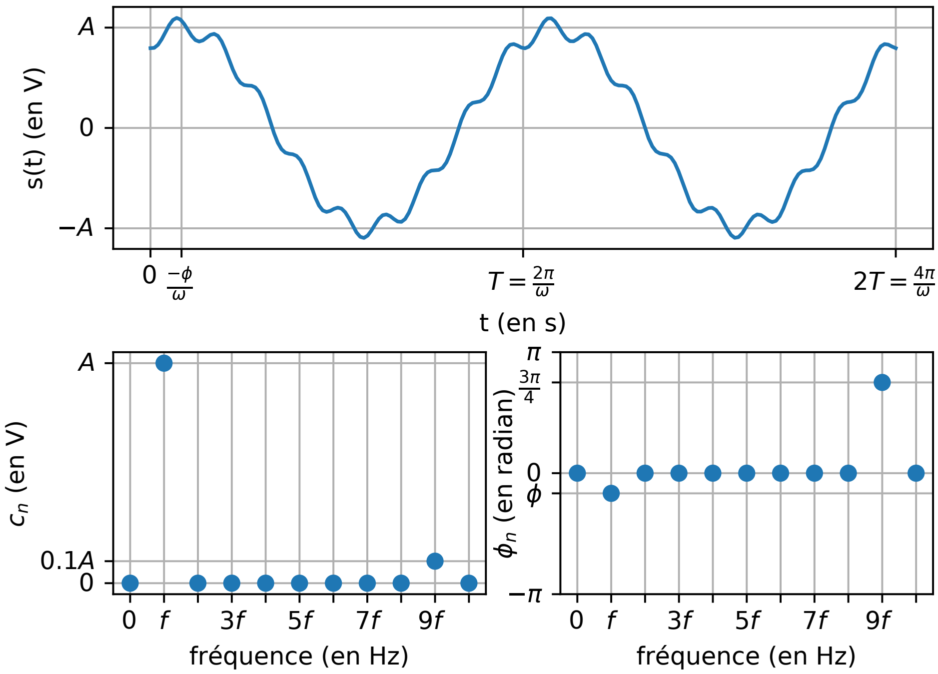
Le spectre est la représentation graphique de la décomposition en série de Fourier. En reprenant les notations utilisées au-dessus pour définir les série de Fourier, le **graphe des amplitudes** c_n **en fonction de la fréquence** nf et le **graphe des phases** ϕ_n **en fonction de la fréquence** nf constituent le spectre du signal $s(t)$.

1.3.2 Exemples de spectres

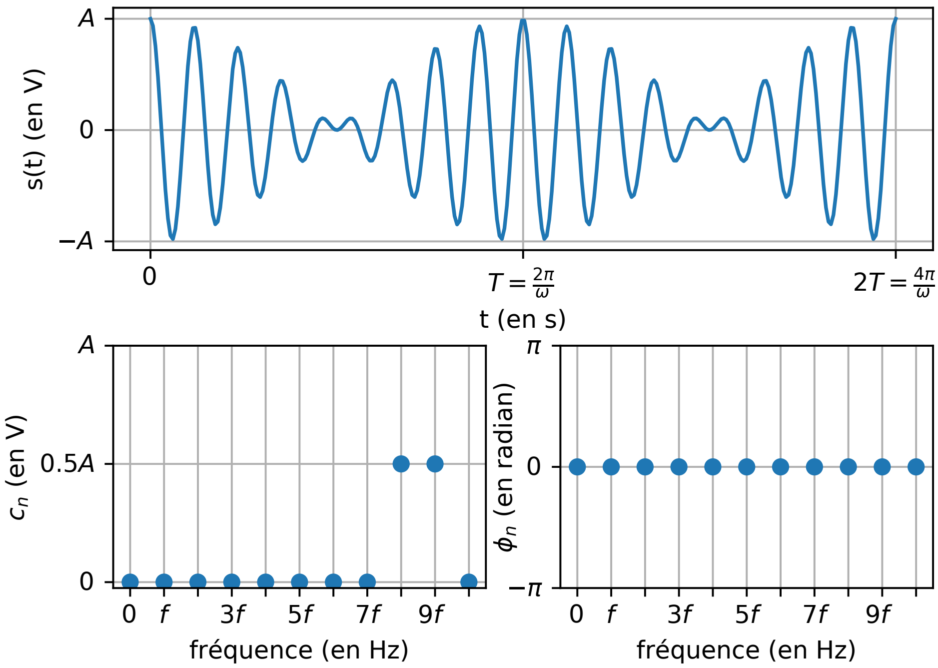
Le premier exemple de spectre est le plus simple c'est celui d'une fonction cosinus. Pour une fonction cosinus seul le coefficient de l'harmonique fondamentale est non nul.



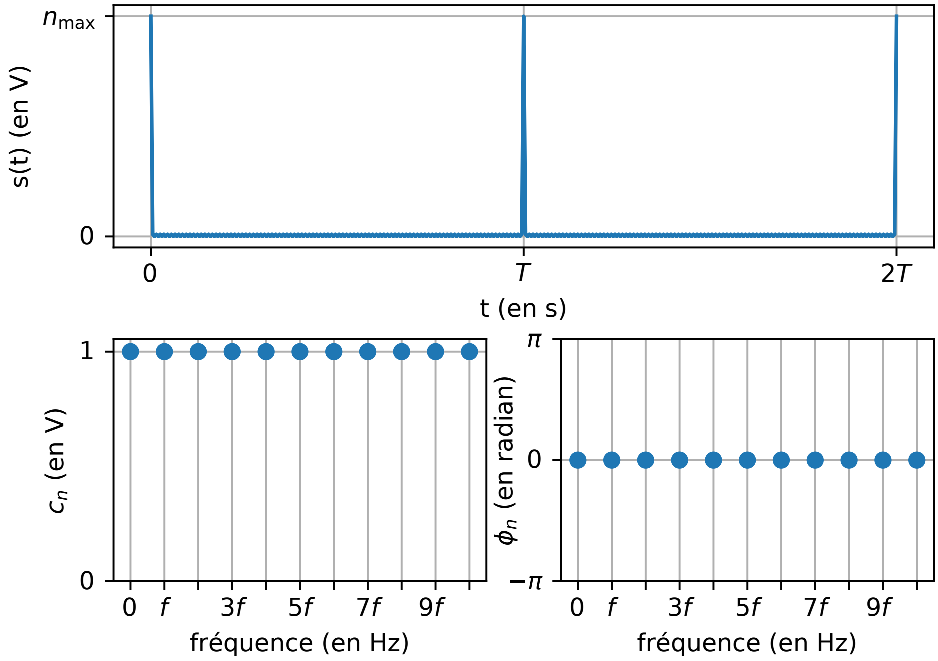
On peut ajouter à ce cosinus une deuxième harmonique de rangs élevés, une oscillation rapide s'ajoute au signal temporel. Un intérêt de l'analyse de Fourier est d'isoler ces deux contributions de fréquence lente et rapide du signal.



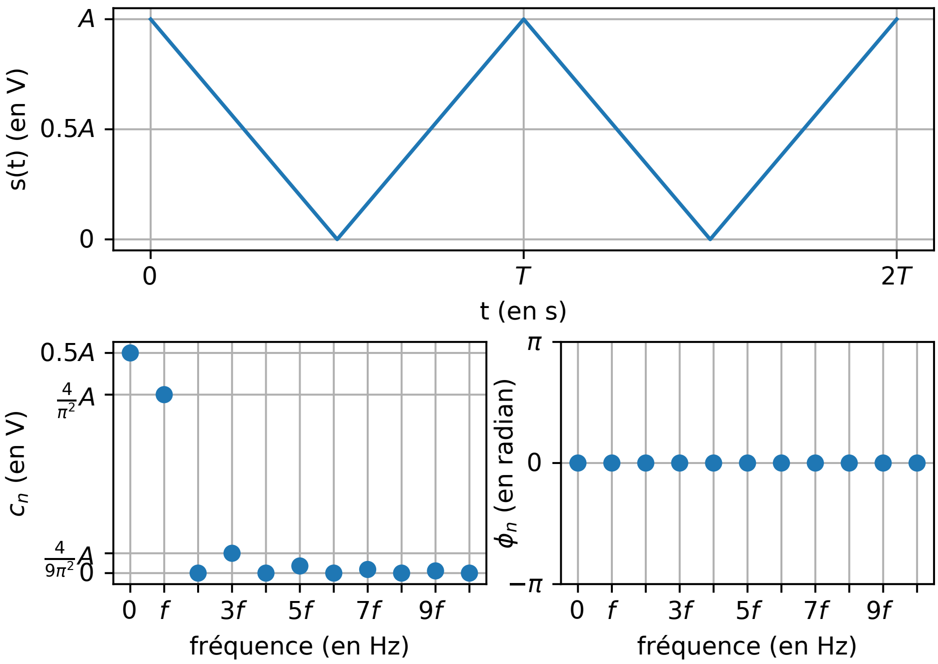
Toujours avec deux harmoniques, si elles sont de même amplitude on observe un phénomène de battement. La forme du signal est expliqué par la formule de trigonométrie $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on a observe une oscillation rapide dont l'amplitude est modulée à une période donnée par la différence de fréquence entre les harmoniques.



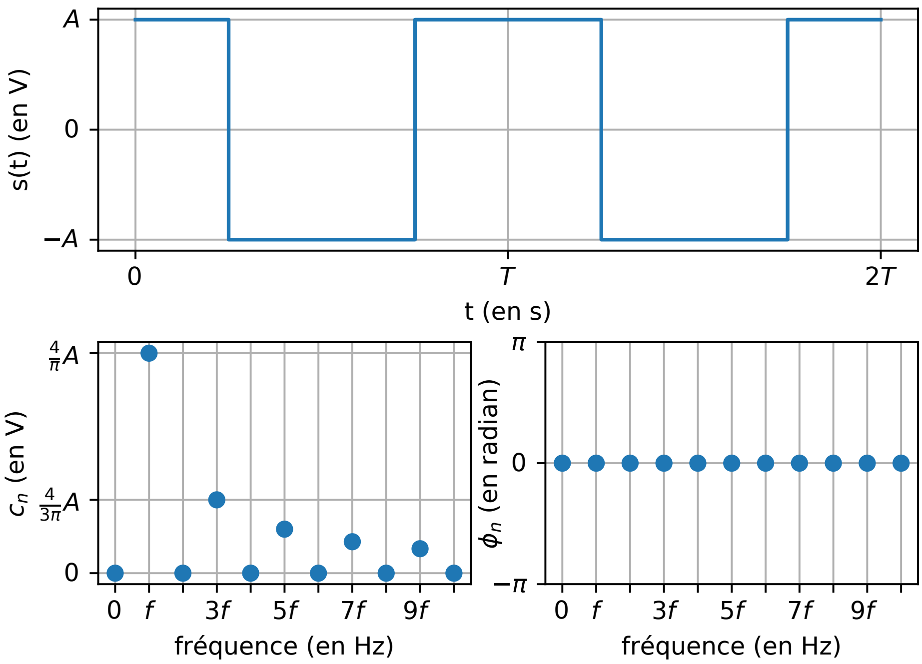
Si on ajoute toutes les harmoniques avec la même amplitude et la même phase jusqu'à un rang très élevé $n_{\max}$, ci-dessous $n_{\max} = 100$, on obtient des pics d'amplitude $n_{\max}$ et de largeur $\frac{T}{n_{\max}}$ à chaque période $t = 0$, T, $2T$, ... Lorsque $n_{\max}$ tends vers l'infini on appelle ces pics des fonctions de Dirac, et cette fonction un peigne de Dirac. Pour expliquer la forme de cette série de Fourier, on peut remarquer que pour les valeurs $t = 0$, T, $2T$, ... toutes les harmoniques valent 1, $\forall n, \forall k, \cos(2n\pi f \times kT) = 1$ donc toutes les harmoniques s'ajoutent pour former un pic. Pour les autres valeurs de t les harmoniques prennent des valeurs différentes entre 1 et -1, ainsi leur somme tend vers 0.



Parmi les exemples de fonction périodique classique on trouve la fonction triangle. On a déjà remarqué que avec 3 harmoniques la fonction était bien reconstruite, on voit aussi sur le spectre que l'amplitude des harmoniques non nulles décroient vite avec la fréquence nf en $\frac{1}{n^2}$.



Un autre exemple est la fonction créneau. Comparé à la fonction triangle elle présente des variation plus rapide aux discontinuités, ceci implique pour son spectre que l'amplitude des harmoniques non nulles décroient moins vite avec la fréquence que pour le triangle, en effet l'amplitude décroit en $\frac{1}{n}$



1.3.3 Valeur efficace

Une grandeur facilement accessible d'un signal périodique $s(t)$ à partir de son spectre est sa valeur efficace S_{eff}. La valeur efficace d'un signal est définie par la valeur moyenne du carré du signal telle que :

$$S_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)^2 \,\mathrm{d}t \tag{9}$$

Et elle correspond à l'amplitude d'un signal continu de même puissance moyenne sur une période. Dans une série de Fourier toutes les harmoniques contribuent indépendamment à la puissance totale du signal, donc la valeur efficace est simplement obtenue à partir du spectre via la somme des carrés des amplitudes de chaque harmonique telle que :

$$S_{\text{eff}}^2 = c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} c_n^2 \tag{10}$$

1.3.4 Taux de distorsion harmonique

Cette notion de valeur efficace permet de définir le taux de distortion harmonique (TDH) qui quantifie l'écart d'un signal à une fonction ne comportant que son harmonique fondamentale, soit l'écart du signal à une fonction sinusoïdale. Pour cela on compare l'amplitude de l'harmonique fondamentale à la valeur efficace de toutes les harmoniques de rang plus élevé, en faisant le rapport des deux selon l'équation suivante :

$$\mathrm{TDH} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{n\geq 2} c_n^2}}{c_1} \tag{11}$$

Plus la fonction est modifié par rapport à une fonction sinusoïdale, plus le TDH est grand. Par exemple il vaut 0 pour une fonction cosinus, TDH~ 0.12 pour une fonction triangle, TDH$\to +\infty$ pour une fonction créneau.

1.3.5 Fonctions non-périodiques

On remarque que si on considère une période T du signal infinie, $T \to +\infty$, alors on considère le cas de fonctions non-périodiques. Dans cette situation on parle de transformée de Fourier et non plus de série de Fourier. La notion de fréquence fondamentale disparait car $f \to 0$ et tout les éléments discrets sont remplacés par des éléments continus : les sommes $\sum\limits_n$ par des intégrales $\int \mathrm{d}f$, les coefficients c_n et ϕ_n par des fonctions $c(f)$ et $\phi(f)$, les spectres deviennent des graphes de fonctions définies pour toutes les fréquences.

2 Fonctions de transfert

Nous avons vu dans la partie précédente qu'un signal quelconque peut se décomposer en une somme d'harmonique. Dans cette partie nous allons étudier l'effet d'un circuit électrique sur une seule harmonique d'un signal. On va donc étudier la réponse d'un circuit à une excitation sinusoïdale.

2.1 Notation complexe et équation différentielle

2.1.1 Intérêt de la notation complexe

La notation complexe représente les fonction sinusoïdales par une exponentielle complexe.

$$s(t) = A\cos(\omega t + \phi) \Rightarrow \underline{s}(t) = \underline{A}e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{A} = Ae^{j\phi} \tag{12}$$

Cette notation est très utile pour décrire les systèmes définis par une équation différentielle, car pour une exponentielle complexe une dérivée est équivalente à une simple multiplication.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{j\omega t}\right) = j\omega e^{j\omega t} \tag{13}$$

2.1.2 Application aux dipôles élémentaire électrique

- ● ○ ○ ○ ○ Donner la caractéristique courant-tension d'un **interrupteur ouvert** en notation réelle et en notation complexe.
- ○ ● ○ ○ ○ Donner la caractéristique courant-tension d'un **interrupteur fermé** en notation réelle et en notation complexe.
- ○ ○ ● ○ ○ Donner la caractéristique courant-tension d'une **résistance** en notation réelle et en notation complexe.

○ ○ ○ ● ○ Donner la caractéristique courant-tension d'une **bobine** en notation réelle et en notation complexe. Que remarquez vous à basse fréquence lorsque $\omega \to 0$? et à haute fréquence lorsque $\omega \to +\infty$?

○ ○ ○ ○ ● Donner la caractéristique courant-tension d'un **condensateur** en notation réelle et en notation complexe. Que remarquez vous à basse fréquence lorsque $\omega \to 0$? et à haute fréquence lorsque $\omega \to +\infty$?

2.1.3 Association de dipôles

Le rapport complexe entre la tension et le courant est l'impédance complexe. Elle se manipule comme l'impédance réelle d'un dipôle. On peut s'en servir pour retrouver l'équation différentielle qui décrit un système. Les deux représentations temporelle avec l'équation différentielle, et fréquentielle avec la notation complexe, sont équivalentes.

● ○ ○ A partir des impédances complexes, donner la relation courant tension en notation complexe d'une résistance en série avec une bobine. En déduire l'équation différentielle qui relie courant et tension.

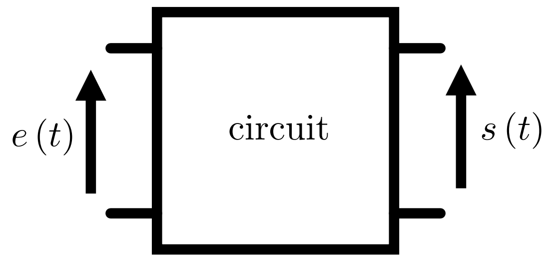
○ ● ○ A partir des impédances complexes, donner la relation courant tension en notation complexe d'une résistance en série avec un condensateur. En déduire l'équation différentielle qui relie courant et tension.

○ ○ ● A partir des impédances complexes, donner la relation courant tension en notation complexe d'une bobine en parallèle avec un condensateur. En déduire l'équation différentielle qui relie courant et tension.

2.2 Quadripôles et Filtres

2.2.1 Définition : quadripôles et filtres linéaire

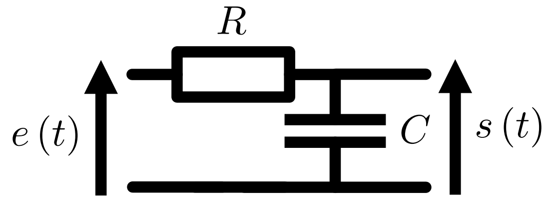
Les dipôles sont souvent associés pour former un circuit électrique qui relie deux tensions électriques. On parle généralement de tension d'entrée, $e(t)$ et de tension de sortie $s(t)$.



Ce circuit possède **quatre pôles**, on l'appelle un **quadripôle**. Lorsque qu'on peut relier les tensions d'entrée et de sortie par une **équation différentielle linéaire**, on appelle ce quadripôle un **filtre linéaire**.

2.2.2 Exemple : le filtre RC

- Déterminer l'équation différentielle qui relie les tensions d'entrée et de sortie d'un filtre RC.



2.2.3 Définition : équation différentielle et fonction de transfert

Un filtre linéaire est complètement défini par l'équation différentielle linéaire comme ci-dessous qui relie les tensions d'entrée et de sortie.

$$\boxed{a_0 e\left(t\right) + a_1 \frac{\mathrm{d}e\left(t\right)}{\mathrm{d}t} + a_2 \frac{\mathrm{d}^2 e\left(t\right)}{\mathrm{d}t^2} + ... = b_0 s\left(t\right) + b_1 \frac{\mathrm{d}s\left(t\right)}{\mathrm{d}t} + b_2 \frac{\mathrm{d}^2 s\left(t\right)}{\mathrm{d}t^2} + ...} \tag{14}$$

En notation complexe cette équation différentielle est équivalente à la relation entre $\underline{e}\left(t\right)$, $\underline{s}\left(t\right)$ et $j\omega$:

$$\left(a_0 + a_1 j\omega + a_2 \left(j\omega\right)^2 + ...\right) \underline{e}\left(t\right) = \left(b_0 + b_1 j\omega + b_2 \left(j\omega\right)^2 + ...\right) \underline{s}\left(t\right) \tag{15}$$

$\underline{s}\left(t\right) = \underline{S} e^{j\omega t}$ et $\underline{e}\left(t\right) = \underline{E} e^{j\omega t}$ on la même dépendance temporelle, donc le rapport entre les amplitudes complexes $\underline{s}$ et $\underline{e}$ décrit complètement le système. On appelle ce rapport la **fonction de transfert** du filtre, noté $\underline{H}$.

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{s}\left(t\right)}{\underline{e}\left(t\right)} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 \left(j\omega\right)^2 + ...}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 \left(j\omega\right)^2 + ...}} \tag{16}$$

- Donner la fonction de transfert d'un filtre RC.

2.2.4 Propriétés : fonction de transfert

- ● ○ ○ L'**ordre** d'un filtre est la **puissance la plus élevé** des polynômes en $j\omega$ de la fonction de transfert. De manière équivalente en représentation temporelle c'est la **dérivée de plus haut niveau** intervenant dans l'équation différentielle. Quel est l'ordre d'un filtre RC ?
- ○ ● ○ Le **gain** G d'un filtre est la fonction de $j\omega$ définie par le **module de sa fonction de transfert**. En représentation temporelle c'est le rapport entre les amplitudes des tensions de sortie et d'entrée. Calculer le gain d'un filtre RC.

$$\boxed{G = \left|\underline{H}\right|} \tag{17}$$

- ○ ○ ● La **phase** Φ d'un filtre est la fonction de $j\omega$ définie par l'**argument de sa fonction de transfert**. En représentation temporelle c'est le déphasage entre les tensions de sortie et d'entrée. Calculer la phase d'un filtre RC.

$$\boxed{\Phi = \arg\left(\underline{H}\right)} \tag{18}$$

2.2.5 Représentations : échelles et diagramme de Bode

Le **diagramme de Bode** d'un filtre est constitué de deux graphes : le **gain** en fonction de la pulsation, et la **phase** en fonction de la pulsation.

La pulsation. La pulsation ω d'un signal électrique peut varier sur plusieurs ordre de grandeurs. Pour représenter l'axe des pulsations on utilise une échelle logarithmique avec laquelle on compare la pulsation à une pulsation de référence du système étudié. Les valeurs sur l'axe des abscisses sont donnée par

$$\boxed{\text{abscisses} = \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \tag{19}$$

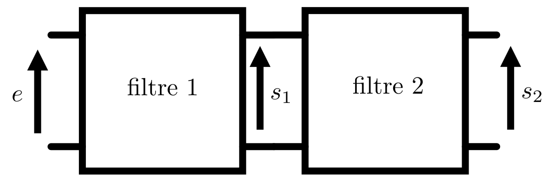
avec ω_0 la pulsation de référence.

- Donner la pulsation de référence pour un filtre RC.

Le gain. Le gain G est représenté en échelle logarithmique en décibel, donné par la formule

$$\boxed{G_{\text{dB}} = 20\log_{10}(G) = 20\log_{10}(|\underline{H}|)} \tag{20}$$

Cette échelle logarithme est utile pour le gain car elle transforme les multiplications en addition. Si on place deux filtres en cascade comme sur le schéma ci-dessous



leur fonction de transfert se multiplient donc leur gain aussi.
$\bullet \circ \circ$ Montrer que $\underline{H} = \underline{H}_2 \times \underline{H}_1$. En déduire que $G = G_2 \times G_1$
En décibel les gains de chaque filtres s'ajoutent pour obtenir le gain total.
$\circ \bullet \circ$ Montrer que $G_{\text{dB}} = G_{1,\text{dB}} + G_{2,\text{dB}}$
Le facteur 20 devant les logarithmes décimal est choisi telle que pour la puissance +10 dB correspondent à la multiplication par un facteur 10. En effet pour la puissance l'échelle en décibel est définie comme $P_{\text{dB}} = 10\log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right)$ donc $P_{\text{dB}} + 10\text{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{10\times P}{P_0}\right)$.
$\circ \circ \bullet$ Sachant que la puissance d'un signal est proportionnel au carré de sa valeur efficace $P \propto V_{\text{eff}}^2$ et que la valeur efficace de la tension d'entrée est multiplié par le gain du filtre pour obtenir celle de sortie $V_{s,\text{eff}} = G \times V_{e,\text{eff}}$. Montrer avec les définitions de l'échelle en décibel de la puissance et du gain que $P_{s,\text{dB}} = G_{\text{dB}} + P_{e,\text{dB}}$.

Parmi les valeurs remarquables de gain à retenir en échelle décibel, on a dans le tableau suivant

G_{dB}	$\frac{P_s}{P_e}$	$\frac{\lvert\underline{s}\rvert}{\lvert\underline{e}\rvert}$
-20 dB	0.01	0.1
-10 dB	0.1	0.3
-6 dB	0.25	0.5
-3 dB	0.5	0.7
0 dB	1	1
3 dB	2	1.4
6 dB	4	2
10 dB	10	3
20 dB	100	10

La phase. Pour la phase une échelle linéaire suffit, elle varie par palier de $\frac{pi}{2}$, car la fonction de transfert est une fonction rationnelle de $j\omega$ constituée de monome de la forme $a_n\left(j\omega\right)^n$.

- Donner la phase du monome $a_n\left(j\omega\right)^n$.

Le diagramme de Bode. Avant de calculer la fonction de transfert d'un filtre linéaire on peut tout de suite déterminer son comportement en remplaçant bobine et condensateur par leur dipôle équivalent (interrupteur ouvert ou fermé) à basse et haute fréquence.

● ○ ○ ○ ○ Tracer les circuits équivalents du filtre RC à basse et haute fréquence. En déduire les limites de la fonction de transfert, en $\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$. Que peut on en déduire sur le filtre RC ?

A partir des limites de la fonction de transfert on peut en déduire la nature du filtre

$\underline{H}\left(\omega\right) \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} ?$	$\underline{H}\left(\omega\right) \underset{\omega\to +\infty}{\longrightarrow} ?$	filtre
1	0	passe bas
0	1	passe haut
0	0	passe bande
1	1	passe tout déphaseur, réjecteur de bande, isolateur

Après avoir obtenue la fonction de transfert du filtre et introduit les pulsations de référence ω_0, ω_1, ... , on peut déterminer son comportement asymptotique, en comparant la pulsation aux pulsations de référence.

— Pour les basses fréquences $\omega \ll \omega_0 \ll \omega_1$: on ne garde que les termes d'exposant k les plus petits en $\left(j\omega\right)^k$ dans la fonction de transfert, en effet ... $\ll \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \ll j\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \ll -j\frac{\omega_0}{\omega}$.

— Pour les fréquences intermédiaires $\omega_0 \ll \omega \ll \omega_1$: on ne garde que les termes d'exposant k les plus grands en $\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^k$ et les plus petits en $\left(j\frac{\omega}{\omega_1}\right)^{k'}$ dans la fonction de transfert.

— Pour les hautes fréquences $\omega_0 \ll \omega_1 \ll \omega$: on ne garde que les termes d'exposant k les plus grands en $\left(j\omega\right)^k$ dans la fonction de transfert.

On obtient pour chaque plage de pulsation (basses, intermédiaires, hautes, fréquences) une loi de puissance pour la fonction de transfert de la forme $H \propto \left(j\omega\right)^k$.

○ ● ○ ○ ○ Montrer que lorsque $H \propto \left(j\omega\right)^k$, le gain en décibel en fonction de la pulsation en échelle logarithmique suit une droite de pente $k \times 20$ dB/décade.

○ ● ○ ○ ○ Montrer que lorsque $H \propto \left(j\omega\right)^k$, la phase est constante égale à $k \times \frac{\pi}{2}$.

○ ○ ● ○ ○ Déterminer les asymptotes du filtre RC.

Pour un filtre passe bas, la pente à haute fréquence du gain correspond à l'ordre du filtre, -20dB/décade pour un filtre d'ordre 1, -40dB/décade pour un filtre d'ordre 2, ...

Pour un filtre passe haut, c'est la pente à basse fréquence du gain qui correspond à l'ordre du filtre, +20dB/décade pour un filtre d'ordre 1, +40dB/décade pour un filtre d'ordre 2, ...

Pour le tracer il est aussi utile de déterminer la valeur du gain et de la phase aux pulsations de référence.

○ ○ ○ ● ○ Déterminer les valeurs de $G_{\mathrm{dB}}\left(\omega_0\right)$ et $\Phi\left(\omega_0\right)$ du filtre RC.

Pour le filtre RC on parle de bande passante à -3dB entre 0 Hz et $\frac{\omega_0}{2\pi}$ Hz.

Le choix des échelles, des pulsations de référence, la détermination des valeurs limites à basse fréquences et haute fréquences, la détermination des asymptotes entre les valeurs de référence, la détermination des valeurs aux pulsations de référence, est la démarche à suivre pour tracer un diagramme de Bode. Le diagramme de Bode permet de lire rapidement toutes ces informations sur un seul graphe.

○ ○ ○ ○ • Tracer le diagramme de Bode pour un filtre RC.

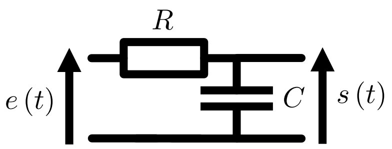
2.3 Exemples de filtres courant

- Pour chaque filtre tracer le diagramme de Bode.

2.3.1 Passe bas

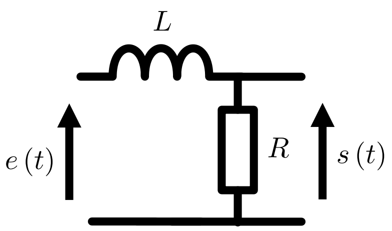
Ordre 1.

filtre RC



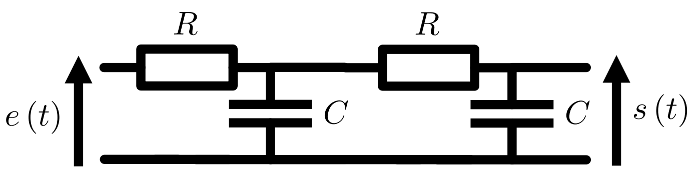
On l'a étudié en exemple plus haut.

filtre LR

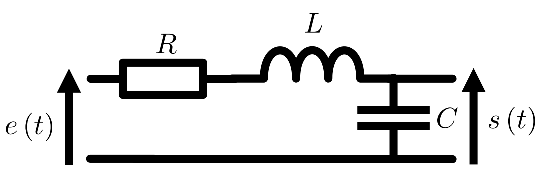


Ordre 2.

filtre RC-RC



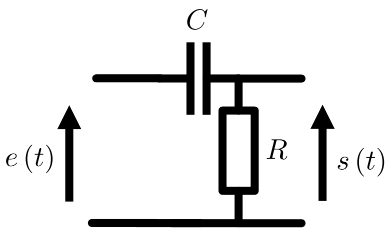
filtre LC



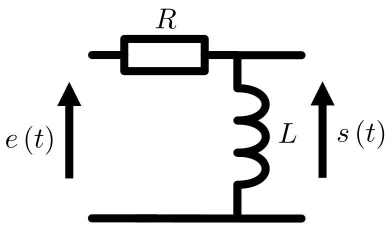
2.3.2 Passe haut

Ordre 1.

filtre CR

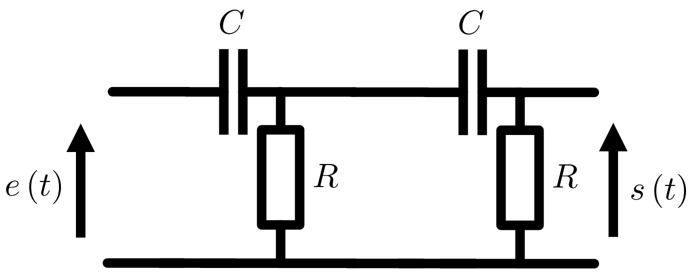


filtre RL

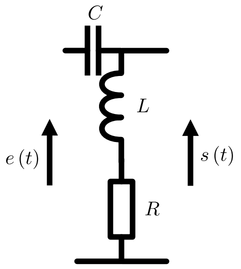


Ordre 2.

filtre CR-CR

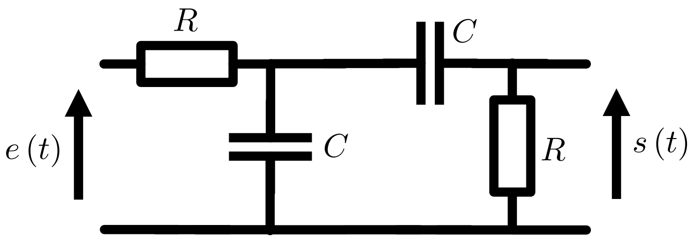


filtre CL

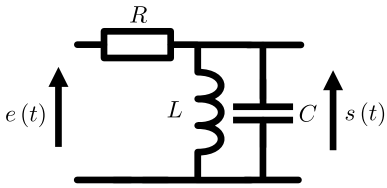


2.3.3 Passe bande

RC-CR

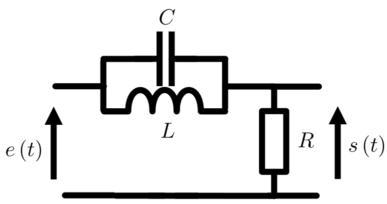


RLC



2.3.4 Coupe bande

LCR



3 Traitement analogique du signal

Nous avons étudié comment décomposer un signal périodique quelconque en fonctions sinusoïdales à l'aide de la série de Fourier. Nous avons étudié comment prévoir la réponse d'un filtre linéaire à une excitation sinusoïdale quelconque à l'aide de la fonction de transfert. Nous allons exploiter c'est deux connaissances pour prévoir la réponse d'un filtre linéaire à n'importe quelles excitations périodiques, et concevoir des filtres pour réaliser la réponse voulue à une excitation périodique quelconque.

3.1 Théorème de superposition

3.1.1 Énoncé : théorème de superposition

Le théorème de superposition indique que la réponse totale $s(t)$ d'un filtre linéaire à la somme de deux excitations $e(t) = e_1(t) + e_2(t)$, est égale à la somme des réponses $s_1(t)$, $s_2(t)$ du filtre à chaque excitations prises séparément.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} e_1(t) \underset{\text{filtre}}{\longrightarrow} s_1(t) \\ e_2(t) \underset{\text{filtre}}{\longrightarrow} s_2(t) \\ e(t) = e_1(t) + e_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow e(t) \underset{\text{filtre}}{\longrightarrow} s(t) = s_1(t) + s_2(t)} \tag{21}$$

- Démontrer ce théorème à l'aide de la fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre en montrant que $\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2$.

3.1.2 Application : série de Fourier

La série de Fourier décompose un signal périodique $e(t)$ en une somme de fonctions sinusoïdales, on peut donc lui appliquer le théorème de superposition pour obtenir la tension de sortie $s(t)$ du filtre au signal périodique :

$$\underline{s}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{H}(n\omega)\, \underline{E}_n e^{jn\omega t} \tag{22}$$

Le spectre de la tension de sortie est alors simplement obtenu par la multiplication du spectre de la tension d'entrée avec la fonction de transfert. En utilisant la notation complexe, la décomposition en série de Fourier, et la fonction de transfert, nous avons montré une méthode pour résoudre, dans le domaine fréquentiel, l'équation différentielle qui décrit un filtre.

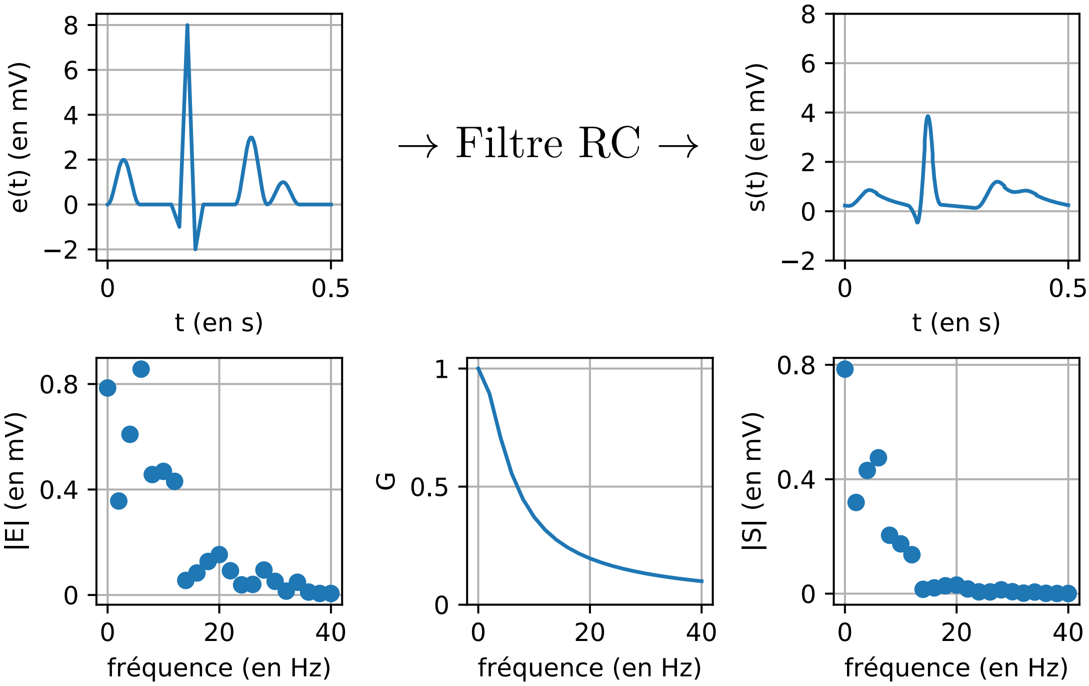
Représentation temporelle

$$\begin{tikzcd}
e(t) \arrow[r, "\text{équation}", "\text{différentielle}"'] \arrow[d, "\text{Fourier}"'] & s(t) \\
\underline{E}_n \arrow[r, "\text{fonction de}", "\text{transfert}"'] & \underline{S}_n \arrow[u, "\text{Fourier}"']
\end{tikzcd}$$

Représentation fréquentielle

3.1.3 Exemple : un électrocardiogramme filtré

On peut calculer comme exemple l'effet d'un filtre RC de fréquence de coupure $f_c = 4$ Hz, sur un électrocardiogramme.



Le spectre de l'électrocardiogramme est une série qui comporte beaucoup d'harmonique non nulle, sur le graphe les harmoniques sont représentées jusqu'à une fréquence de 40 Hz, or la fréquence du fondamental est de 2 Hz, donc les amplitudes des harmoniques sont représentées jusqu'au rang 20.

Le gain filtre RC vaut 1 à fréquence nulle et décroit proportionnellement à une fonction en $\frac{1}{f}$ pour les fréquences supérieures à la fréquence de coupure de 4 Hz.

Parmi les harmoniques de la tension de sortie, on remarque que la valeur moyenne prend la même valeur que celle de la tension d'entrée. Le fondamental est peu atténué car sa fréquence 2 Hz est inférieure à la fréquence de coupure 4 Hz. Les harmoniques de rang plus élevé sont d'autant plus atténué que leur rang est élevé, notamment après 10 Hz toutes les harmoniques sont quasiment supprimées.

Sur le signal de sortie on remarque que l'amplitude des pics sont atténués, en effet ils sont généré à l'aide des harmoniques de rang élevés dont l'amplitude est atténué par le filtre. On remarque aussi un étalement des impulsions, ce qui est cohérent avec un atténuation plus importante pour les harmoniques de rang plus élevés, donc les variations rapides sont supprimées, il ne reste que les harmoniques de rang faible qui sont responsables des variations lentes. Enfin on remarque que les pics s'étalent vers les temps positifs, pour comprendre cet effet il faut regarder la phase du filtre qui est négative donc les harmoniques prennent du retard de phase, elles se décalent vers les temps positifs. Si $\phi \leq 0$ alors $n\omega t_1 = n\omega t_2 + \phi \Rightarrow t_1 \leq t_2$, il faut attendre un instant t_2 plus tard que t_1 pour que l'harmonique n prennent la même valeur $\cos(n\omega t_1) = \cos(n\omega t_2 + \phi)$.

3.1.4 Propriété : caractère non linéaire et apparition d'harmonique

A partir de la fonction de transfert on en déduit que la tension de sortie d'un filtre comporte les mêmes harmoniques que la tension d'entrée.

●○ Montrer que pour un filtre linéaire $|\underline{E}_n| = 0 \Rightarrow |\underline{S}_n| = 0$

On en déduit que l'apparition de nouvelles harmoniques entre la tension d'entrée et la tension de sortie est le signe que le filtre est non linéaire.

○● Montrer qu'un filtre réalisant l'opération $s(t) = k \times e(t)^2$ est non linéaire.

3.2 Sélection de fréquences

On a vu sur l'exemple de l'électrocardiogramme qu'un filtre linéaire déforme un signal, on peut s'en servir pour agir sur une harmonique précisément qui compose le signal.

3.2.1 analyse fréquentielle

A partir d'un signal quelconque on peut vouloir isoler une seule harmonique pour la mesurer précisément. C'est la fonction que réalise un analyseur de spectre analogique.

- Quel filtre linéaire réalise la même fonction d'isoler une seule harmonique ? Quelle condition doit il remplir pour bien isoler une seule harmonique ?

3.2.2 rejet de fréquences parasites

On peut vouloir aussi supprimer un signal parasite qui vient s'ajouter au signal voulu. Un exemple de signal parasite est le signal à 50 Hz du secteur électrique.

- Quel filtre linéaire peut servir à éliminer ce signal parasite ?

3.3 Fonction analogique

On peut réaliser des fonctions mathématiques à l'aide de circuits électriques afin d'obtenir le signal voulu.

3.3.1 comportement moyenneur

Une première fonction est le calcul de la valeur moyenne d'un signal. Cette fonction est implémentée dans des sources de tension appelées alimentation à découpage. L'objectif d'une alimentation à découpage est de générer une tension continue réglable. Le premier étage de l'alimentation génère un signal créneau positif avec un rapport cyclique α réglable à une période de 10 µs. Le signal créneau varie entre 0 V et 12 V. Le rapport cyclique est le rapport entre, la durée pendant laquelle le signal est égal à 12 V, sur la durée pendant laquelle le signal est égal à 0 V. Le deuxième étage filtre ce signal pour obtenir sa valeur moyenne.

●○ Tracer le signal créneau et sa valeur moyenne. En déduire qu'on peut régler la valeur moyenne du signal avec le rapport cyclique.

○● Comment doit on modifier le spectre du signal créneau pour obtenir le signal de sortie ? Quel type de filtre réalise cette fonction ? Quelles doivent être ses caractéristiques ?

3.3.2 comportement intégrateur

Une autre fonction est le calcul de l'intégrale d'un signal. Si l'on veut obtenir une vitesse de déplacement à partir d'un accéléromètre, il est par exemple utile d'intégrer à l'aide d'un filtre la tension délivrée par l'accéléromètre. On cherche donc un filtre tel que tension d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ soient reliés par l'équation différentielle : $\tau \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = e$.

●○ Tracer le diagramme de Bode de ce filtre idéal.

○● Quel type de filtre peut réaliser cette fonction ? Quels sont ses limites d'utilisation ?

3.3.3 comportement dérivateur

En opposition d'une fonction intégration, on peut réaliser une fonction dérivation. Ce genre de fonction est utile pour accélérer des asservissements, afin d'avoir un système qui réagit plus vite car il réagit à la dérivée du signal de commande. On cherche donc un filtre tel que tension d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ soient reliés par l'équation différentielle : $\frac{1}{\tau}s = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$.

- •○ Tracer le diagramme de Bode de ce filtre idéal. Quel type de filtre peut réaliser cette fonction ? Quels sont ses limites d'utilisation ?
- ○• Prévoir l'action d'un filtre dérivateur sur un signal triangle. En déduire le spectre d'un signal créneau.

Références

Ce cours a été préparé à l'aide de :

— Dunod - MP|MP* - Physique tout-en-un - 3ieme édition - B.Salamito, M.-N.Sanz, F.Vandenbrouck, M.Tuloup
— Ellipses - MP|MP* - Physique - L.Vidal, R.Bourdin, L.Menguy, E.Van Brackel, S.Zanier
— Vuibert - MP|MP* - Physique Chimie - F.Bruneau, M.Cavelier, E.Jahier, C.Jorssen, Y.Lozier, M.Marchand-Hartog, Ph.Ribière
— Documents de A.Sirieys