Devoir Surveillé 1

La calculatrice est autorisée

18 Septembre 2021 8h30-12h30

Accordeur de guitare

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La problématique est la suivante.

— La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu.

— Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le tableau ci-dessous.

Corde	Fréquence (f_{ac})
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

— On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

Principe de l'accordeur

— Sélection de la corde à accorder (donc f_{ac} est fixée).

— Création d'un signal créneau de référence de fréquence f_{ac} avec un oscillateur.

— Enregistrement du signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence f_{co}.

— Amplification et filtrage de ce signal.

— Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.

— Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence f_{co}.

— On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives f_{ac} et f_{co}. Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{co} = f_{ac}$.

Ce principe général est schématisé sur la figure ci-dessous :

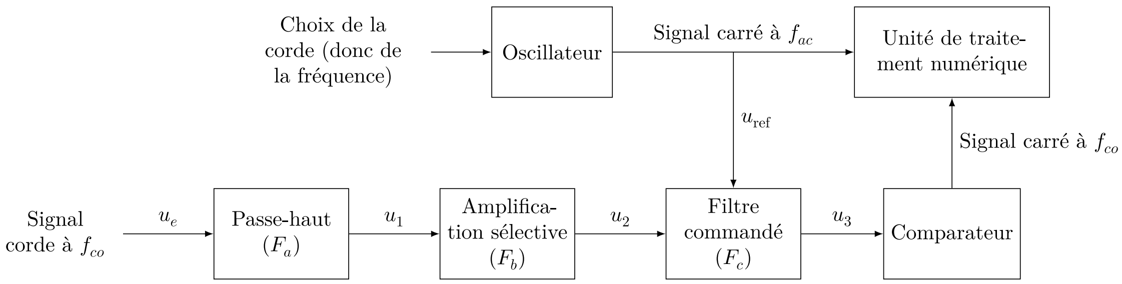
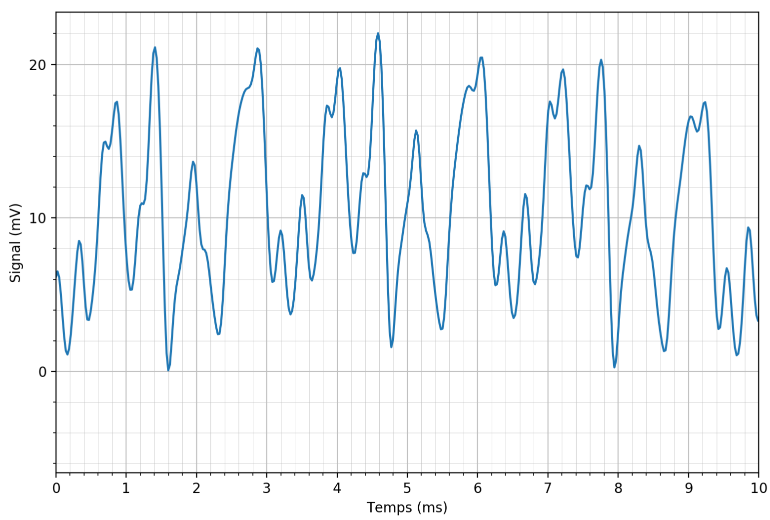


Figure Principe de fonctionnement de l'accordeur de guitare

Ce problème s'intéresse au traitement du signal venant de la corde.

Le signal

La figure ci-dessous montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.



1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
3. De quelle corde de guitare s'agit-il ?
4. La décomposition en série de Fourier de ce signal fera-t-elle apparaitre des harmoniques ? Justifier.

Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la figure suivante (filtre (F_a)).

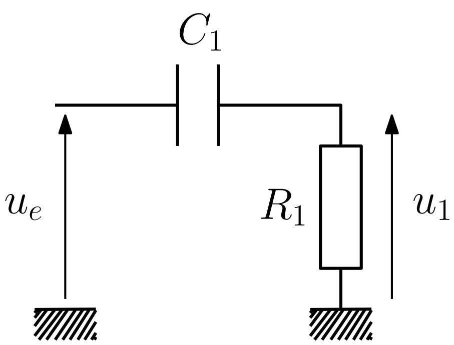
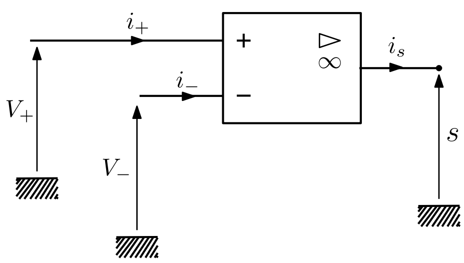


FIGURE 1 – Filtre (F_a)

5. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1, C_1 et de la pulsation ω du signal.
6. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.
7. Tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.
8. On a choisi $R_1 = 100\text{k}\Omega$ et $C_1 = 100\text{nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal précédent, quel est le rôle de ce premier filtre ?

Deuxième filtre

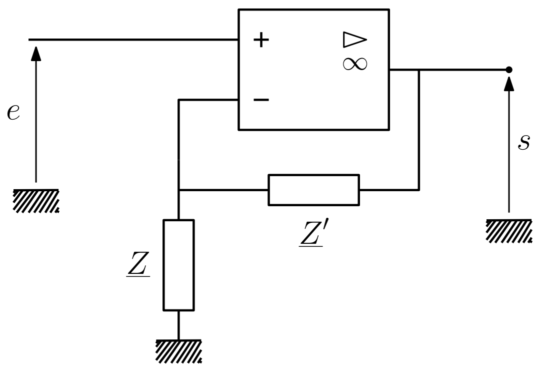
Dans cette sous-partie, les signaux sont sinusoïdaux. Les éléments représentés par le symbole ci-dessous sont des amplificateurs linéaires intégrés (ALI) qui sont supposés ici idéaux et fonctionnent en régime linéaire.



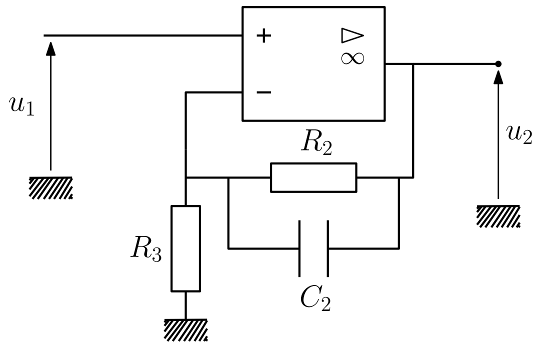
Un ALI supposé idéal et en régime linéaire a pour propriétés :
— les potentiels aux bornes + et - sont identiques $V_+ = V_-$.
— il n'y a pas de courant entrant dans les bornes + et - $i_+ = i_- = 0$.
— par contre la tension de sortie s et le courant de sortie i_s peuvent être quelconque.

Préambule

Soit le filtre (a) de la figure ci-dessous.



(a) filtre a



(b) filtre $((F_b))$

9. Exprimer sa fonction de transfert $\underline{H}$ en fonction de $\underline{Z}$ et $\underline{Z}'$.
10. Que devient $\underline{H}$ si $\underline{Z}$ et $\underline{Z}'$ sont des résistances ($\underline{Z} = R$, $\underline{Z'} = R'$) ? Que remarquez-vous de particulier pour cette fonction de transfert ? Quel est, dans ce cas, l'intérêt du montage ?

Amplification (légèrement) sélective

En sortie du filtre (Fa) le signal $u_1(t)$ est envoyé sur le filtre de la figure (b) ci-dessus (filtre (F_b)).

11. Quelle est l'impédance $\underline{Z}_{\text{eq}}$ de la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 ?
12. En déduire l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}_2$ de ce filtre en fonction de R_2, R_3 et C_2.
13. Mettre $\underline{H}_2$ sous la forme
$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}}$$
et donner les expressions de G_0 et ω_2.
14. Quelle est la limite de $|\underline{H}_2|$ en basse fréquence ? en haute fréquence ?
15. Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680\text{k}\Omega$, $R_3 = 6\text{k}\Omega$ et $C_2 = 470\text{pF}$ ainsi que son gain G_0. Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

Filtrage (très) sélectif commandé

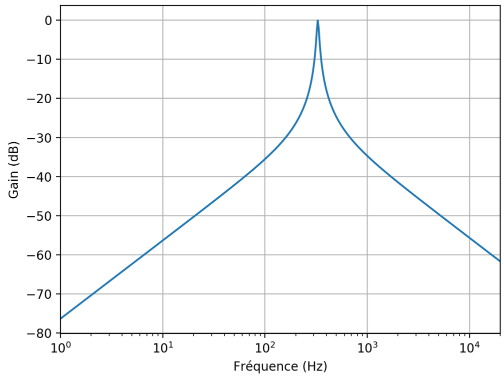
On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2, dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur (f_{ac}) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aigüe que l'on souhaite accorder.

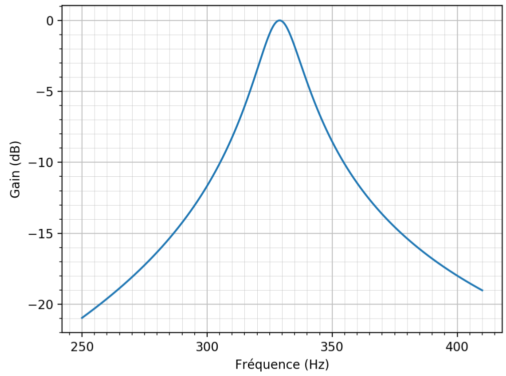
Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac}. Ce type de commande (à capacité commutée) sera précisé dans la dernière sous partie du sujet.

Diagramme de Bode

La figure ci-dessous représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

(a) (b)





16. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?
17. Donner une estimation de sa bande-passante à -3dB.
18. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315\text{Hz}$, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

Analyse spectrale

La figure ci-dessous correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté en début de sujet.

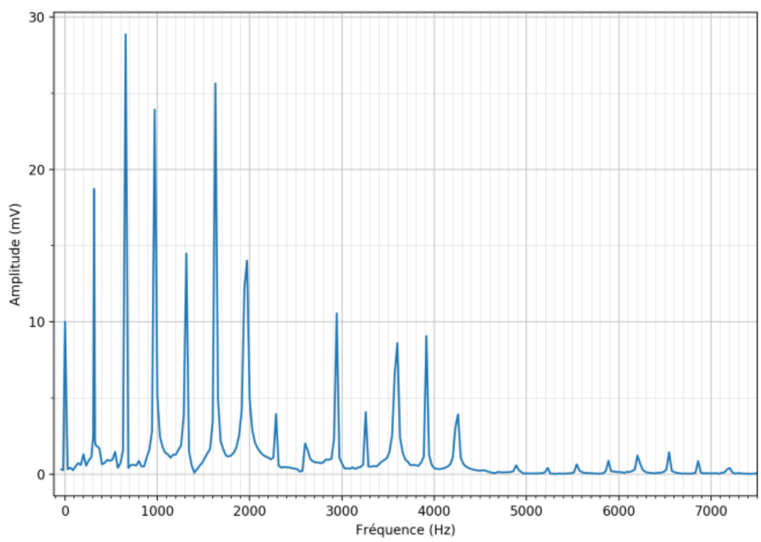
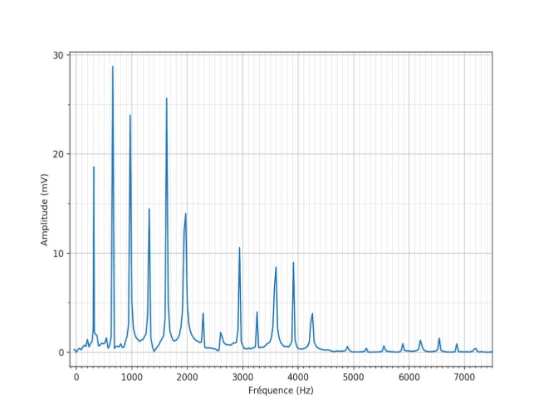


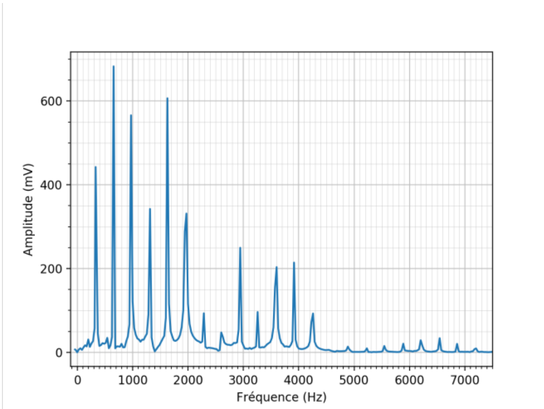
Figure Spectre du signal d'entrée

19. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal en début de sujet

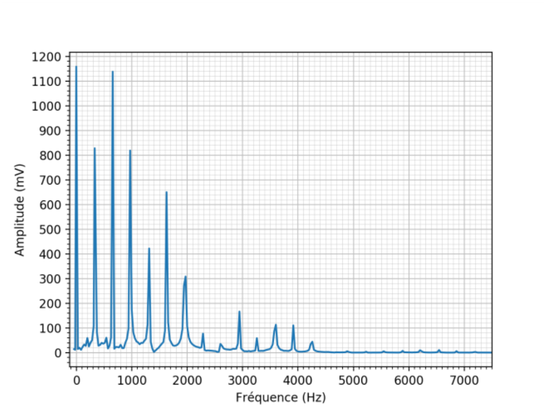
20. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la figure ci-dessous correspond à la sortie du premier filtre (F_a).
21. Même question, pour la sortie du filtre (F_b).
22. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.



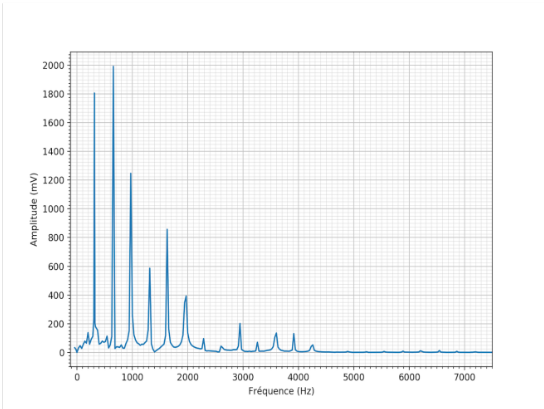
(a)



(b)



(c)

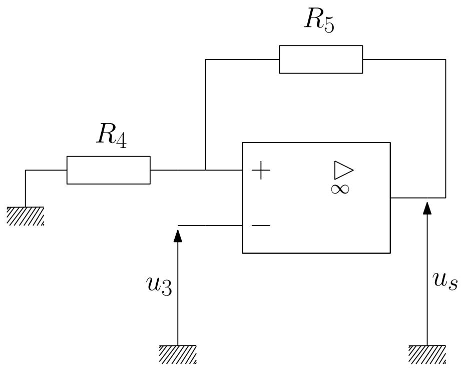


(d)

Figure Spectres

Mise en forme

À la sortie de l'étage précédent, le signal est donc proche d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} et d'amplitude dépendant de la force avec laquelle on a gratté la corde, mais de l'ordre du volt. Pour effectuer un traitement numérique qui permettra de comparer f_{co} à la fréquence théorique f_{ac} on souhaite fabriquer à partir du signal précédent un signal créneau de fréquence f_{co}. Pour cela, on utilise un comparateur à hystérésis, représenté ci-dessous.



Dans cette sous partie l'ALI ne fonctionne pas en régime linéaire, mais ce comporte comme un comparateur.

Dans ce régime les propriétés de l'ALI changent :

— Les potentiels aux bornes + et - peuvent être différent $V_+ \neq V_-$.

— Si $V_+ > V_-$, alors $u_s = +U_{sat}$.

— Si $V_+ < V_-$, alors $u_s = -U_{sat}$.

— Il n'y a toujours pas de courant entrant dans les bornes + et - $i_+ = i_- = 0$.

— Le courant de sortie peut toujours être quelconque.

On appelle tension de saturation de l'ALI la tension U_{sat}. Le signal u_3 est sinusoïdal alternatif d'amplitude 1V et de fréquence f_{co} (c'est le signal sortant du filtre sélectif (F_c)).

23. Exprimer V_+ le potentiel de la borne + de l'ALI en fonction de R_4, R_5 et u_s. En déduire l'expression de $\epsilon = V_+ - V_-$.
24. Comment varie ϵ quand u_3 varie (u_s étant fixé) ?

Supposons que u_3 soit suffisamment faible pour que $\epsilon > 0$.

25. Quelle est la valeur de u_s ? À partir de cette situation, u_3 augmente : exprimer en fonction des données la valeur U_{seuil} de u_3 pour laquelle on observera le basculement de u_s. Quelle est alors la nouvelle expression de ϵ ?
26. À partir de cette nouvelle situation, traiter le cas où u_3 diminue.
27. Représenter finalement le graphe $u_s = f(u_3)$ appelé cycle d'hystérésis de ce montage.

Dans le cadre de l'accordeur de guitare, $R_4 = 1\text{k}\Omega$, $R_5 = 10\text{k}\Omega$ et $U_{sat} = 5\text{V}$.

28. Tracer sur le document réponse l'allure du signal de sortie $u_s(t)$ correspondant aux deux exemples de signal $u_3(t)$ proposés.
29. Que peut-il se passer si la corde est vraiment trop désaccordée ?

Retour sur le filtre sélectif commandé

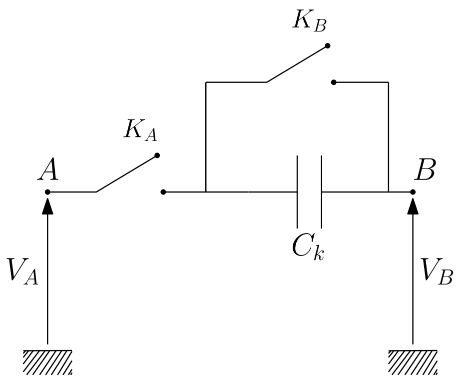
Regardons plus en détails la manière de fabriquer le filtre (F_c) dont la fréquence centrale est commandée par un signal carré externe. On utilise pour cela un filtre à capacité commutée.

Capacité commutée

Soit un condensateur de capacité C aux bornes duquel on applique une tension u_C.

30. Rappeler l'expression de la charge q transférée au condensateur en fonction de C et u_c. On précisera, à l'aide d'un schéma, les conventions utilisées.

On monte maintenant le condensateur de capacité C_k entre deux interrupteurs commandés notés K_A et K_B, comme l'indique la figure ci-dessous.



On fait les hypothèses suivantes.

— Les interrupteurs sont idéaux (d'impédance infinie quand ils sont ouverts et nulle quand ils sont fermés).

— Ils sont toujours dans des états complémentaires : si K_A est ouvert, alors K_B est fermé et inversement.

— Ils sont commandés de manière périodique par un signal extérieur (signal u_{ref} carré périodique de fréquence f_k (période T_k)) de telle sorte que :

  — sur l'intervalle $[0, T_k/2]$: K_A est fermé et K_B ouvert ;

  — sur l'intervalle $[T_k/2, T_k]$: K_A est ouvert et K_B fermé.

— Les condensateurs ont le temps de se charger/décharger sur chaque intervalle de temps.

— La période T_k est faible devant tous les autres temps caractéristiques.

31. Donner les expressions de q_1 et q_2, les charges portées par l'armature du condensateur reliée directement au point B respectivement sur l'intervalle $[0, T_k/2]$ et $[T_k/2, T_k]$. On précisera les conventions utilisées.

    On en déduit $\delta q = q_2 - q_1$ la charge transférée de l'entrée vers la sortie en une période.

32. À quoi est alors égale la charge totale Q transférée de l'entrée vers la sortie en un temps $t \gg T_k$?

33. En déduire l'expression de l'intensité moyenne I_m associée à ce transfert en fonction de V_A, V_B, C_k et f_k.

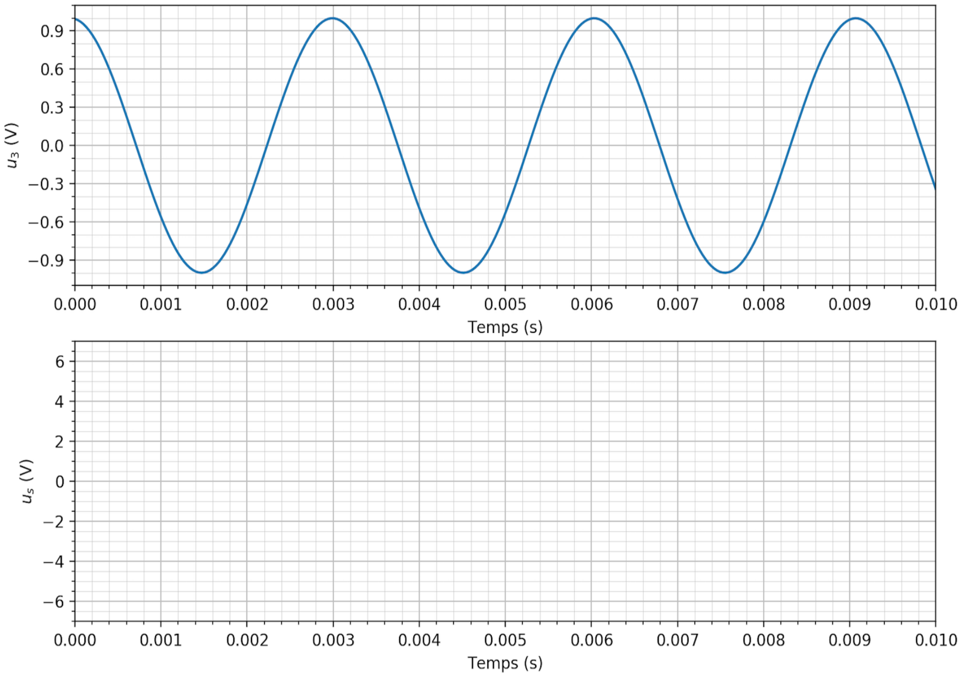
34. Pourquoi peut-on en conclure que ce dipôle AB se comporte comme une résistance R_k ? Donner l'expression de cette résistance en fonction de f_k et C_k.

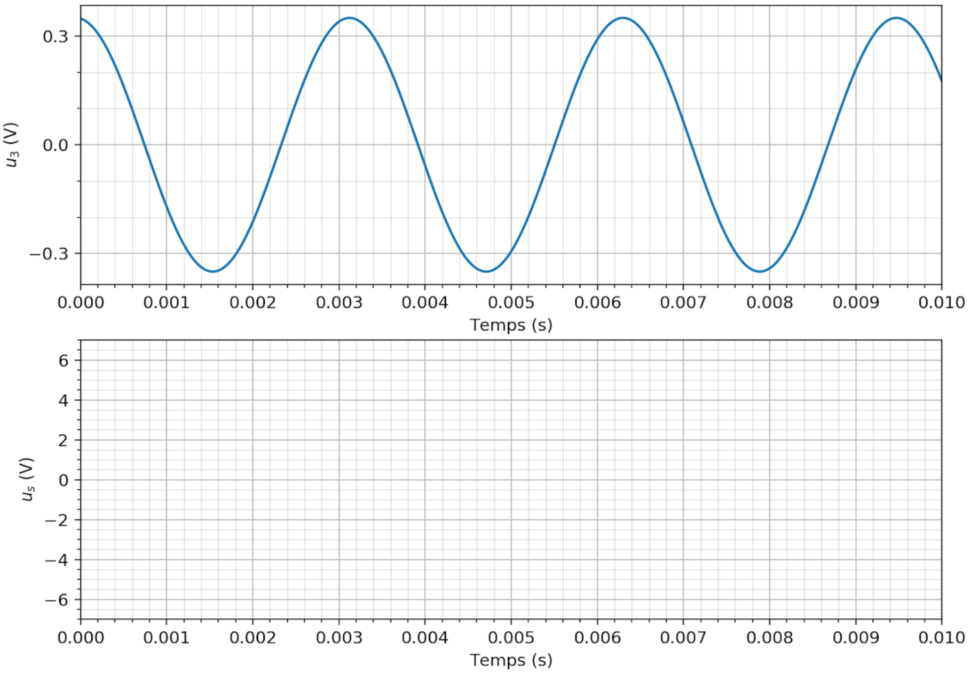
La capacité commutée se comporte donc comme une résistance R_k dont la valeur est commandée par un signal extérieur et plus exactement par la fréquence f_k de ce signal.

Filtre à capacité commutée

35. Expliquer qualitativement comment utiliser cette capacité commutée pour créer des filtres dont la fréquence caractéristique est réglée par le signal de référence u_{ref} et, en particulier, un filtre du type recherché pour (F_c).

Document réponse




0.3
0.0
−0.3
u_3 (V)
0.000
0.001
0.002
0.003
0.004
0.005
0.006
0.007
0.008
0.009
0.010
Temps (s)
6
4
2
0
−2
−4
−6
u_s (V)
0.000
0.001
0.002
0.003
0.004
0.005
0.006
0.007
0.008
0.009
0.010
Temps (s)