

TD 7.3. Propagation et rayonnement

Épaisseur de la paroi d'un four à micro-ondes

La paroi d'un four à micro-ondes est en aluminium de conductivité $\sigma = 2.10^7 \text{ S.m}^{-1}$.

- Quelle est l'épaisseur minimum de la paroi sachant qu'il faut que l'amplitude de l'onde soit réduite d'un facteur 10^4 dans la paroi et que la fréquence de l'onde est $f = 2,5 \text{ GHz}$.

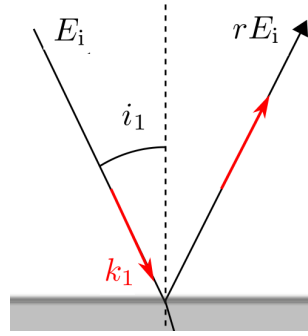
Effet de peau dans un fil conducteur

Considérons une portion de fil de cuivre soumise à une différence de potentielle sinusoïdale de pulsation ω à ces bornes. Modélisons le fil par un cylindre infini de rayon a et d'axe (Oz). Compte tenue de la symétrie de révolution autour de (Oz) et de translation suivant (Oz), la densité volumique de courant imposée par le générateur dans le cylindre est de la forme $\vec{j} = j(r) \exp(i\omega t) \vec{e}_z$. On note j_a l'amplitude de la densité volumique de courant à la périphérie du cylindre. On se place dans le cadre de l'ARQS de sorte que l'on peut négliger le courant de déplacement devant la densité volumique de courant. On lui associe donc un champ $\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{j} = E(r) \exp(i\omega t) \vec{e}_z$.

1. A quelles équations aux dérivées partielles doivent satisfaire \vec{E} et \vec{j} ?
2. On cherche la solution de l'équation satisfaite par \vec{j} sous la forme $j = j_a \exp\left(-(1+i)\frac{(a-r)}{\delta}\right) \exp(i\omega t)$, on justifiera brièvement ce choix. Quelle est la dimension de δ ? Donner, dans le cadre d'observation de l'effet de peau où $r \gg \delta$, son expression en fonction de μ_0 , ω et σ . Interpréter physiquement la forme de j et justifier le terme d'effet de peau usuellement utilisé pour décrire le phénomène observé.
3. Évaluer δ pour une fréquence de 50 Hz et de 100 MHz. Pour un fil de section 1 mm l'effet de peau est-il observable dans les deux cas? Comparer la résistance du fil à ces deux fréquences.

Réflexion sur un métal sous incidence oblique

Une onde plane monochromatique polarisée rectilignement, de pulsation ω , de vecteur d'onde \vec{k}_1 se propage dans le vide et arrive avec l'angle d'incidence $i_1 = (-\vec{e}_z, \vec{k}_1)$ sur la surface d'un métal parfaitement conducteur qui occupe le demi-espace $z < 0$. \vec{k}_1 est contenu dans le plan (Oyz).



Dans un premier temps on suppose que le champ électrique \vec{E}_i de l'onde incidente est compris dans le plan d'incidence (Oyz). On rappelle les relations de passage :

$$\vec{E}_2(M, t) - \vec{E}_1(M, t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\vec{B}_2(M, t) - \vec{B}_1(M, t) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

1. Exprimer $\vec{E}_i(M, t)$
2. Montrer qu'il doit exister une onde réfléchie. On admet qu'il s'agit d'une OPPM et que la direction de son vecteur d'onde \vec{k}_2 est donnée par la loi de Descartes de l'optique géométrique. Représenter \vec{k}_2 .
3. Montrer sans calcul que son champ électrique \vec{E}_r est tel que $\|\vec{E}_r(O, t)\| = \|\vec{E}_i(O, t)\|$. Avec O le point d'incidence.
4. Représenter \vec{E}_r et les champs magnétiques \vec{B}_i et \vec{B}_r des deux ondes tels qu'il sont en O.
5. Exprimer $\vec{E}_r(M, t)$
6. Reprendre l'exercice dans le cas où \vec{E}_i est perpendiculaire au plan d'incidence.
7. Quelles sont les composantes du champ électromagnétique qui subissent un déphasage de π à la réflexion sur le métal parfait ?

Guide d'onde rectangulaire

On considère un champ de la forme $\vec{E} = A(z) \exp(i(\omega t - kx)) \vec{e}_y$ se propageant dans le vide entre quatre plans conducteurs parfaits localisés en $z = 0$, $z = a$, $y = 0$ et $y = b$, infinis dans la direction (Ox). Cette configuration constitue ce qu'on appelle un guide d'onde rectangulaire. On donne $a = 2,29$ cm, $b = 1,02$ cm.

1. Dédire des relations de passage (voir cour ou exo précédent) deux conditions sur la fonction $A(z)$.
2. Montrer que $A(z)$ satisfait à l'équation différentielle du second ordre suivante : $(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2)A(z) + A''(z) = 0$. En discutant, en fonction des valeurs prises par k , la comptabilité des solutions de cette équation avec les conditions aux limites, en déduire que $A(z)$ est nécessairement une fonction périodique dont on posera l'amplitude égale à E_0 et dont on exprimera la période spatiale en fonction de k , ω et c .
3. Quelle est ainsi la nature de l'onde se propageant dans le guide. Justifier la terminologie utilisée de guide d'onde pour un tel dispositif.

4. Etablir la relation de dispersion dans le guide. Montrer que les valeurs de k sont discrètes. A une valeur k_n donnée on associe un mode propre d'ordre n du guide d'onde. Montrer que dans chaque mode la propagation est dispersive. Que devient la relation de dispersion lorsque dans un mode d'ordre n donné, la longueur d'onde λ est très inférieure à a ? Ce résultat est-il prévisible?
5. Montrer que dans chaque mode propre du guide, l'onde ne peut se propager que si sa pulsation ω est supérieure à une pulsation de coupure caractéristique de ce mode ω_c que l'on exprimera en fonction de n , c et a . Calculer la fréquence de coupure $\nu_{c,1}$ dans le mode $n = 1$. Tracer l'allure du champ électrique correspondant aux deux premiers mode de propagation guidée.
6. Tracer l'allure des courbes $k_n = f(\omega)$ correspondant aux trois premiers modes propres.
7. Exprimer la vitesse de phase $v_{\phi_n} = \frac{\omega}{k_n}$ et la vitesse de groupe $v_{g_n} = \frac{d\omega}{dk_n}$ en fonction de c , ω et ω_{c_n} et tracer leur allure en fonction de ω pour une valeur de n donnée, commenter.
8. Etudier la forme du champ magnétique \vec{B} associé à \vec{E} . On posera $B_{x_0} = \frac{n\pi E_0}{\omega a} \cos(\frac{n\pi}{a}z)$ et $B_{z_0} = \frac{kE_0}{\omega} \sin(\frac{n\pi}{a}z)$ les amplitudes respectives des composantes de \vec{B} suivant (Ox) et (Oz). L'onde électromagnétique se propageant dans le guide est-elle transverse? \vec{B} est-il en phase avec \vec{E} ? Ceci est-il en accord avec la structure de l'onde étudiée? Dans quelle mesure peut-on parler de polarisation elliptique pour \vec{B} ?
9. Etudier qualitativement la conséquence des conditions aux limites imposées aux champs pour les parois du guide, en terme de charges et de courants surfaciques.

Validité du modèle classique de l'atome

On cherche à montrer que l'existence d'un rayonnement émis par une charge décrivant une orbite circulaire invalide le modèle classique de l'atome dans lequel un électron est en orbite circulaire stable autour du noyau, dans un état lié. On considère l'atome d'hydrogène dans lequel un électron non relativiste, de charge $-e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C et de masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, est en orbite circulaire de rayon initial $r_0 \approx 0,5 \cdot 10^{-10}$ m autour d'un proton supposé fixe au centre O du référentiel d'étude. Il est soumis de la part du proton à la force $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, devant laquelle le poids est négligeable.

1. Montrer par un raisonnement qualitatif que le rayon de l'orbite de l'électron devrait se réduire jusqu'à effondrement de l'édifice.
2. Évaluer l'énergie mécanique en eV, et la période de révolution de l'électron autour du proton.
3. Évaluer le temps au bout duquel le rayon tend vers zéro et conclure sur la validité du modèle classique de l'atome.