Condensateur en régime transitoire

Considérons un condensateur plan d'armature en forme de disque parallèle de surface S et séparée par une épaisseur e. (indice faites des schémas)

- Sous quelle condition peut-on négliger les effets de bord et considérer les armatures comme des plans infinis ?

Dans cet hypothèse on peut aussi considérer les armatures comme uniformément chargées de charges q et $-q$.

- Donner l'expression de la densité surfacique de charge σ dans chaque armature.
- Donner les expressions des équations de Maxwell.
- Quelle équation de Maxwell relie le champ électrique à la densité de charge ? Établir sa forme intégrée sur un volume V quelconque. Quel théorème retrouve-t-on ?
- Utiliser symétries, invariances et ce théorème pour calculer l'expression du champ électrique à l'intérieur du condensateur $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_z$ avec (Oz) la direction perpendiculaire aux armatures.
- Quel terme appelle-t-on courant de déplacement dans les équations de Maxwell ? Calculer son expression à l'intérieur du condensateur.
- Calculer le flux du courant de déplacement à travers le plan médiateur du condensateur, et le relier à la charge d'une armature. Commenter.
- Quelle équation de Maxwell permet de relier le champ magnétique à la densité de courant électrique ? Donner son expression à l'intérieur du condensateur. Quelle est sa forme intégrée sur une surface quelconque ? Quel théorème est analogue à l'expression trouvée ?
- Utiliser symétries, invariances et cette forme intégrée pour calculer l'expression du champ magnétique à l'intérieur du condensateur.

Champ magnétique dans un supraconducteur

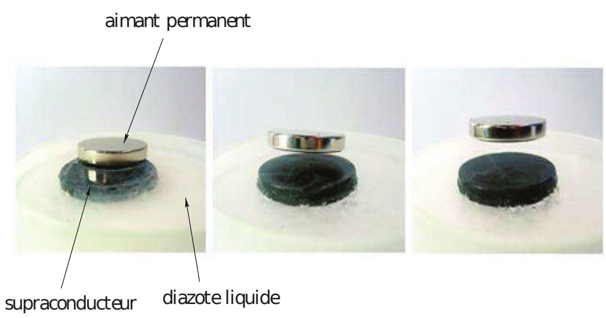
Données :

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$

Cosinus hyperbolique $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

Sinus hyperbolique $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Lorsqu'un matériau supraconducteur est soumis à un champ magnétique uniforme, le supraconducteur expulse les lignes de champ magnétique. On parle d'effet Meissner.



Pour expulser le champ magnétique, ce dernier doit être rigoureusement nul dans le supraconducteur.

Pour expliquer cet effet, les frères London (1935) ont postulé que les électrons dans un supraconducteur ne suivent pas les mêmes lois que ceux d'un conducteur parfait. Ils montrèrent que la densité volumique de courant $\vec{j}$ dans le supraconducteur s'écrit

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0\lambda^2}\vec{B}$$

avec $\vec{B}$ le champ magnétique dans le supraconducteur, λ une constante telle que $\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}}$ où m est la masse de l'électron, n la densité d'électrons supraconducteurs, e la charge de l'électron et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

— Montrer que λ est homogène à une longueur.

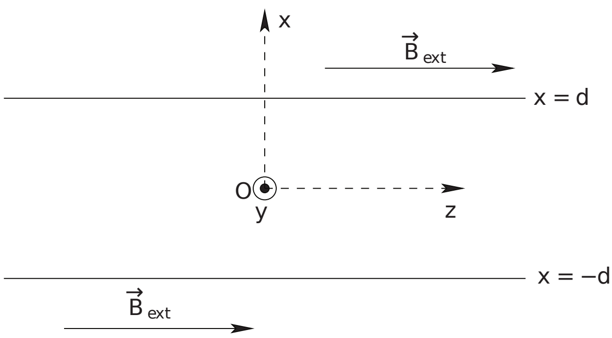
— Déterminer la valeur numérique de λ pour $n = 10^{29}$ m^{-3}.

Dans toute la suite, on se place en régime permanent.

— Montrer que l'équation différentielle vérifiée par le champ magnétique $\vec{B}$ dans le supraconducteur s'écrit alors

$$\triangle\vec{B} = \frac{1}{\lambda^2}\vec{B}$$

On s'intéresse maintenant à un supraconducteur d'épaisseur $2d$ selon la direction (Ox) et infini selon (Oy) et (Oz). On choisit l'origine du repère orthonormé direct (Oxyz) au milieu de plaque. La plaque supérieure (respectivement inférieure) se situe en $x = d$ (respectivement $x = -d$). Cette plaque est plongée dans un champ magnétique qui, en l'absence de plaque, est statique et uniforme tel que $\vec{B}_{ext} = B_{ext}\vec{e}_z$. On supposera que le champ magnétique est continu au niveau de chaque interface $x = \pm d$. Le système est représenté ci-dessous.



— Montrer que le champ magnétique dans le supraconducteur est de la forme $\vec{B} = B(x)\vec{e}_z$.

— Pour une équation différentielle du type $f'' - f = 0$, les solutions générales peuvent se mettre sous la forme $f(\xi) = A\cosh(\xi) + C\sinh(\xi)$ où cosh et sinh sont respectivement les cosinus et sinus hyperbolique. Résoudre l'équation différentielle $\triangle\vec{B} = \frac{1}{\lambda^2}\vec{B}$ et établir que

$$B(x) = B_{ext}\frac{\cosh(\alpha)}{\cosh(\beta)}$$

avec α et β des expressions à déterminer en fonction de x, d et λ.

— Tracer l'allure de $B(x)$ pour $d = \lambda$ et $d = 50\lambda$. En déduire à quelle condition sur d le champ magnétique moyen peut être considéré comme nul à l'intérieur du supraconducteur (effet Meissner).

— Calculer l'expression littérale de la densité de courant volumique $\vec{j} = j(x)\vec{e}_y$.

— Tracer $j(x)$ pour $d = \lambda$ et $d = 50\lambda$. Pour $d = 50\lambda$, comment peut-on qualifier la densité de courant dans le supraconducteur ?

— Estimer l'intensité du courant dans le supraconducteur pour un champ magnétique extérieur de 5×10^{-3} T.