Particule libre sur un cercle

On donne les expressions du Laplacien en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques

$$\triangle V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \text{ et } \triangle V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Une particule de masse m est libre de se déplacer sur un cercle de rayon R. La position d'un point M est repérée par l'angle polaire θ.

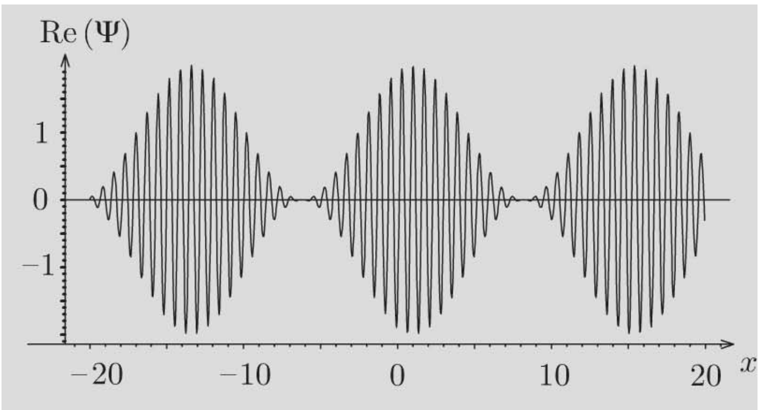
1. Par analogie avec l'équation de Schrödinger unidirectionnelle, proposer une équation indépendante du temps pour ce problème.
2. Quelle condition aux limites peut-on proposer pour une fonction d'onde stationnaire Ψ ?
3. En déduire l'ensemble des solution stationnaires $\Psi_n(\theta)$ où n est un entier de quatification.
4. Écrire la solution superposition entre l'état stationnaire $n = 0$ et $n = 1$. Est-ce un état stationnaire ? Quelle est la position moyenne de la particule au cours du temps ?

Paquets d'onde

On envisage un paquet d'ondes qui est la superposition d'ondes planes sinusoïdales de pulsations voisines de ω_0 et de vecteurs d'onde voisins de k_0. On suppose que $\Delta\omega \ll \omega_0$ et $\Delta k \ll k_0$. On représente en $x = 0$ la partie réelle de la fonction d'onde. Pour simplifier l'étude, on considère la superposition de trois ondes planes :

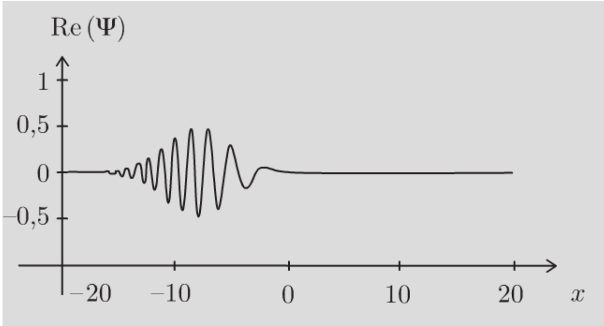
$$\Psi = B\left[e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + \frac{1}{2}e^{i((k_0+\Delta k/2)x-(\omega_0+\Delta\omega/2)t)} + \frac{1}{2}e^{i((k_0-\Delta k/2)x-(\omega_0-\Delta\omega/2)t)}\right]$$

On donne le graphe représentant la partie réelle de la fonction d'onde en fonction de x à $t = 0$. Déterminer la largeur Δx des "bouffées d'onde".



1. Montrer que $\Delta k_x \Delta x \geq 2\pi$. Retrouver l'inégalité de Heisenberg spatiale. Déterminer la vitesse de la particule.

La figure ci-dessous représente la partie réelle de la fonction d'onde d'un paquet d'ondes gaussien à $t = 0$ en fonction de l'anscisse. Ce paquet d'ondes est la superposition d'une infinité d'ondes planes de pulsations voisines de ω_0 et de vecteurs d'onde voisins de k_0.



2. Est-ce que la condition de normalisation peut être résolue ? Définir la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Comment est définie la vitesse de la particule ?
3. Le milieu est-il dispersif ? Le paquet d'onde se propage dans le sens des $x > 0$. Est-ce qu'il se déforme au cours du temps, en supposant qu'à l'avant du front d'onde à $t = 0$ se trouvent les longueurs d'onde les plus grandes ?

Equation de conservation particulaire

Une particule de fonction d'onde complexe $\Psi(x,t)$ et de densité de probabilité de présence $\rho(x,t) = \Psi(x,t).\Psi^*(x,t)$ vérifie l'équation de Schrödinger à une dimension dans le champ de potentiel $V(x)$.

1. Ecrire l'équation de Schrödinger (E) vérifiée par Ψ.
2. Ecrire l'équation (E') issue de la combinaison linéaire $(E') = \Psi^*.(E) - \Psi.(E)^*$.
3. On pose $j(x,t) = \frac{-\hbar}{2m}\left[\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\Psi^*}{\partial x}\right]$. Traduire l'équation (E') en fonction de ρ et de $j(x,t)$.
4. Justifier que pour une particule libre de pulsation ω, $j(x,t)$ coïncide avec la densité de courant donnée par le cours.