Comparaison des tris et recherche de la mediane corrige

December 20, 2020

1 Comparaison des tris

On a vu trois principales méthodes de tri: insertion, fusion, rapide. Ces trois tris effectuent la même tache à savoir trier les éléments d'une liste par ordre croissant.

On peut donc les comparer via leur complexité. L'algorithme le plus performant étant l'algorithme ayant la meilleure complexité. Faisons un tableau listant les complexités déterminées précédemment :

algorithme
meilleur des cas
pire des cas
tri par insertion
O(n)
$O(n^2)$
tri par fusion
O(nlog n)
O(nlog n)
tri rapide
O(nlog n)
$O(n^2)$

On remarque qu'il n'est pas facile de conclure, sur la base des complexités dans le meilleur et le pire des cas. En effet dans le meilleur des cas c'est le tri par insertion qui a une complexité linaire inférieure aux deux autres. Dans le pire des cas c'est le tri fusion qui a une complexité quasi-linéaire et inférieure aux deux autres.

Il nous faut plutôt la complexité moyenne des algorithmes lorsqu'on tire au hasard des listes à trier. Nous n'avons pas à notre disposition d'outil de probabilité pour calculer la complexité moyenne, mais nous pouvons l'obtenir par simulation numérique.

[1]:
```
def echange(L, i, j):
    L[i], L[j] = L[j], L[i]

def insertion(L, i):
    j = i
    while j > 0 and L[j] < L[j - 1]:
        echange(L, j - 1, j)
        j -= 1

def tri_insertion(L):
```

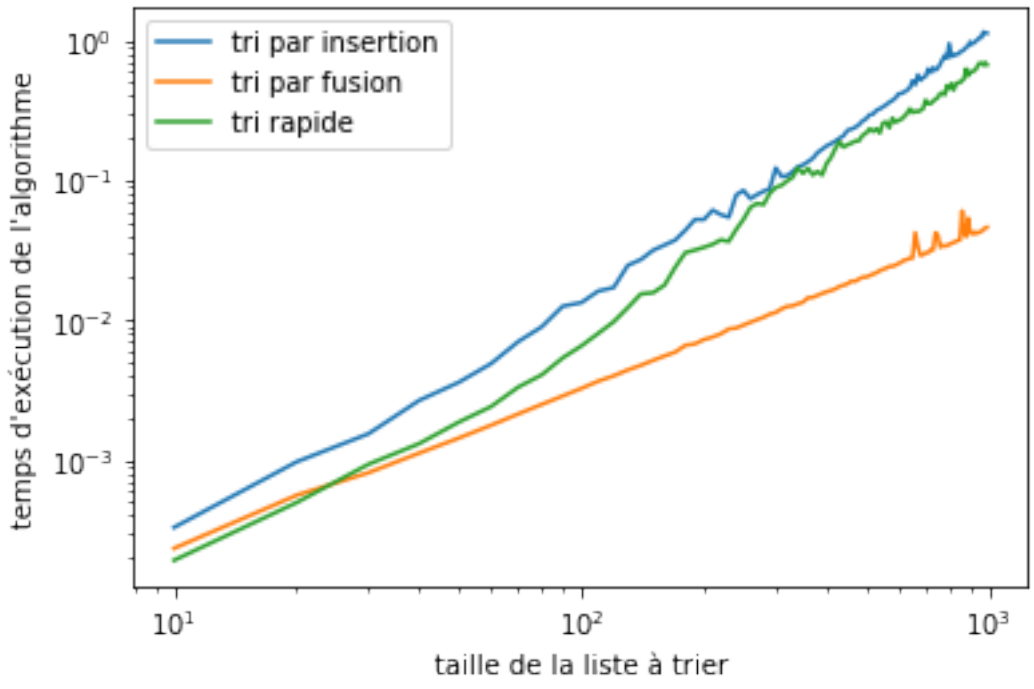
```
    L_prime = []
    L_prime.append(L[0])
    for i in range(1, len(L)):
        L_prime.append(L[i])
        insertion(L_prime, i)
    return L_prime


def diviser(L):
    n = len(L)
    milieu = n//2
    return L[:milieu], L[milieu:]

def fusion(L_1,L_2) :
    i=0
    j=0
    L = []
    while (i<len(L_1))and(j<len(L_2)):
        if L_1[i]<L_2[j] :
            L.append(L_1[i])
            i += 1
        else :
            L.append(L_2[j])
            j +=1
    if i == len(L_1) :
        L += L_2[j:]
    elif j == len(L_2) :
        L += L_1[i:]
    return L

def tri_fusion(L):
    if len(L) == 1:
        return L
    else:
        L_1,L_2 = diviser(L)
        L_1 = tri_fusion(L_1)
        L_2 = tri_fusion(L_2)
        return fusion(L_1,L_2)

def positionnement_pivot(L,debut,fin):
    p = L[debut]
    j = debut
    for i in range(debut,fin):
        if p > L[i] :
            L = L[:j]+[L[i]]+L[j:i]+L[i+1:]
            j +=1
```

```
    return j,L

def tri_rapide_rec(L,debut,fin):
    if debut+1>=fin :
        return L
    else :
        j,L = positionnement_pivot(L,debut,fin)
        debut_1 = debut
        fin_1 = j
        L = tri_rapide_rec(L,debut_1,fin_1)
        debut_2 = j+1
        fin_2 = fin
        L = tri_rapide_rec(L,debut_2,fin_2)
        return L

def tri_rapide(L) :
    L = tri_rapide_rec(L,0,len(L))
    return L
```

[17]:
```
import time
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import random as rd

def complexite_moyenne(n_min,n_max,pas,nbre_moyenne,algorithme):
    duree = []
    taille = []
    i = 0
    for n in range(n_min,n_max,pas):
        taille.append(n)
        duree.append(0)
        L=list(range(n))
        for m in range(nbre_moyenne):
            rd.shuffle(L)
            depart = time.clock()
            algorithme(L)
            arrive = time.clock()
            duree[i]=duree[i]+arrive-depart
        i += 1
    return taille, duree

n_min,n_max,pas,nbre_moyenne = 10,1000,10,10

taille_insertion, duree_insertion =␣
 ↪complexite_moyenne(n_min,n_max,pas,nbre_moyenne,tri_insertion)
taille_fusion, duree_fusion =␣
 ↪complexite_moyenne(n_min,n_max,pas,nbre_moyenne,tri_fusion)
```

```
taille_rapide, duree_rapide =␣
 ↪complexite_moyenne(n_min,n_max,pas,nbre_moyenne,tri_rapide)

plt.loglog(taille_insertion,duree_insertion,'-')
plt.loglog(taille_fusion,duree_fusion,'-')
plt.loglog(taille_rapide,duree_rapide,'-')
plt.xlabel('taille de la liste à trier')
plt.ylabel("temps d'exécution de l'algorithme")
plt.legend(('tri par insertion','tri par fusion','tri rapide'), loc='upper␣
 ↪left')

plt.show()
```

```
C:\Users\remib\AppData\Local\Continuum\anaconda3\lib\site-
packages\ipykernel_launcher.py:16: DeprecationWarning: time.clock has been
deprecated in Python 3.3 and will be removed from Python 3.8: use
time.perf_counter or time.process_time instead
  app.launch_new_instance()
C:\Users\remib\AppData\Local\Continuum\anaconda3\lib\site-
packages\ipykernel_launcher.py:18: DeprecationWarning: time.clock has been
deprecated in Python 3.3 and will be removed from Python 3.8: use
time.perf_counter or time.process_time instead
```



On peut alors déterminer selon la taille de la liste quel est l'algorithme le plus performant en moyenne.

2 Recherche de la médiane

2.1 Premières méthodes

Une application du tri d'une liste est la recherche de la médiane de ses éléments.

Une première méthode directe serait de prendre après avoir trié la liste l'élément au centre de la liste. En effet on aura alors autant d'élément supérieur que inférieur à celui placé au centre, c'est la définition de la médiane.

Un premier exemple simple d'algorithme de recherche de la médiane serait donc le suivant.

[3]:
```
def mediane_rapide(L):
    L = tri_rapide(L)
    return L[len(L)//2]
```

on peut l'essayer sur plusieurs listes exemples

[4]:
```
L = [14, 1, 4, 3]
mediane_rapide(L)
```

[4]:
```
4
```

[5]:
```
L = [15,4,2,9,55,16,0,1]
mediane_rapide(L)
```

[5]:
```
9
```

on peut aussi utiliser les autres méthodes de tri à savoir par insertion et par fusion

[6]:
```
def mediane_insertion(L):
    L = tri_insertion(L)
    return L[len(L)//2]

print(mediane_insertion([14, 1, 4, 3]), mediane_insertion([15,4,2,9,55,16,0,1]))
```

```
4 9
```

[7]:
```
def mediane_fusion(L):
    L = tri_fusion(L)
    return L[len(L)//2]

print(mediane_fusion([14, 1, 4, 3]), mediane_fusion([15,4,2,9,55,16,0,1]))
```

```
4 9
```

On peut aussi profiter de la structure du tri en pivot pour accélérer la recherche de la médiane. En effet on a juste besoin de trouver l'élément au centre de la liste triée. Il n'est alors pas nécessaire de trier la liste en totalité.

On peut donc mofifier le tri rapide pour qu'il cherche plus rapidement la médiane.

Un exemple de modification est la suivante : - on prend à nouveau un élément pivot, - on le positionne correctement dans la liste, - si le pivot se trouve au centre de la liste on s'arrête, - sinon on re-applique la même procédure pour la liste qui contient l'élément au centre de la liste.

Il s'agira à nouveau d'un algorithme récursif mais avec uniquement un appel récursif dans la fonction.

[8]:
```
def positionnement_pivot(L,debut,fin):
    p = L[debut]
    j = debut
    for i in range(debut,fin):
        if p > L[i] :
            L = L[:j]+[L[i]]+L[j:i]+L[i+1:]
            j +=1

    return j,L

def mediane_rapide_deux_rec(L,debut,fin):
    if debut+1>=fin :
        return L[debut]
    else :
        j,L = positionnement_pivot(L,debut,fin)
        if j == len(L)//2 :
            m = L[j]
            return m
        elif j < len(L)//2 :
            debut_1 = j+1
            fin_1 = fin
            m = mediane_rapide_deux_rec(L,debut_1,fin_1)
            return m
        elif j  > len(L)//2 :
            debut_2 = debut
            fin_2 = j
            m = mediane_rapide_deux_rec(L,debut_2,fin_2)
            return m

def mediane_rapide_deux(L) :
    m = mediane_rapide_deux_rec(L,0,len(L))
    return m
```

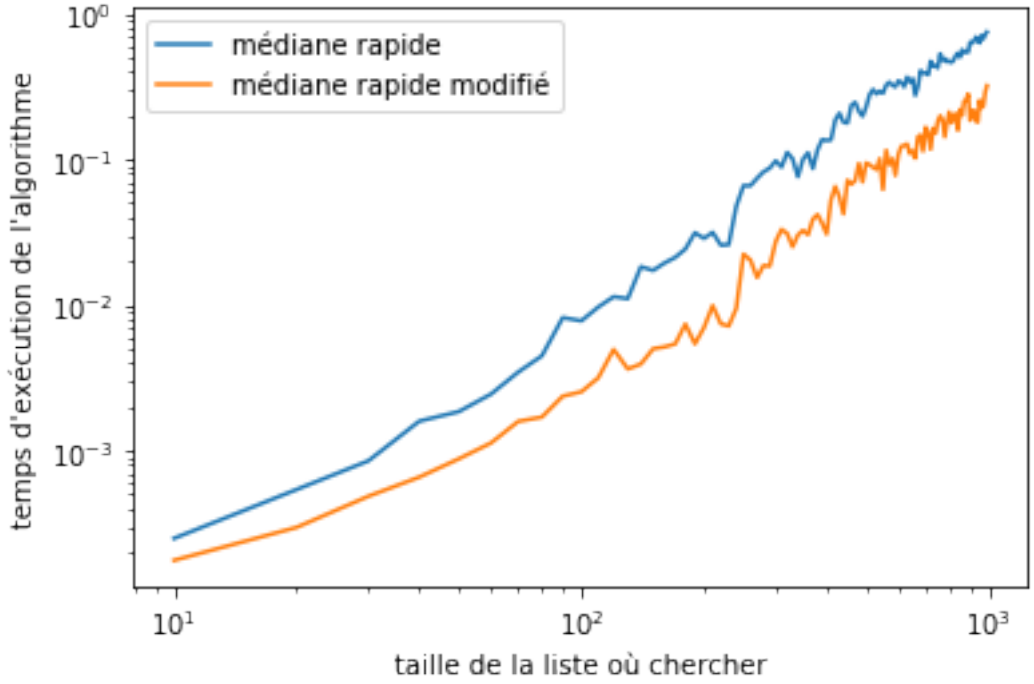
[9]:
```
L = [15,4,2,9,55,16,0,1]
mediane_rapide_deux(L)
```

[9]:
```
9
```

[10]:
```
import time
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import random as rd

def complexite_moyenne(n_min,n_max,pas,nbre_moyenne,algorithme):
    duree = []
    taille = []
    i = 0
    for n in range(n_min,n_max,pas):
```

```
        taille.append(n)
        duree.append(0)
        L=list(range(n))
        for m in range(nbre_moyenne):
            rd.shuffle(L)
            depart = time.clock()
            algorithme(L)
            arrive = time.clock()
            duree[i]=duree[i]+arrive-depart
        i += 1
    return taille, duree

n_min,n_max,pas,nbre_moyenne = 10,1000,10,10

taille_rapide, duree_rapide =␣
 ↪complexite_moyenne(n_min,n_max,pas,nbre_moyenne,mediane_rapide)
taille_rapide_deux, duree_rapide_deux =␣
 ↪complexite_moyenne(n_min,n_max,pas,nbre_moyenne,mediane_rapide_deux)

plt.loglog(taille_rapide,duree_rapide,'-')
plt.loglog(taille_rapide_deux,duree_rapide_deux,'-')
plt.xlabel('taille de la liste où chercher')
plt.ylabel("temps d'exécution de l'algorithme")
plt.legend(('médiane rapide','médiane rapide modifié'), loc='upper left')

plt.show()
```

```
C:\Users\remib\AppData\Local\Continuum\anaconda3\lib\site-
packages\ipykernel_launcher.py:16: DeprecationWarning: time.clock has been
deprecated in Python 3.3 and will be removed from Python 3.8: use
time.perf_counter or time.process_time instead
  app.launch_new_instance()
C:\Users\remib\AppData\Local\Continuum\anaconda3\lib\site-
packages\ipykernel_launcher.py:18: DeprecationWarning: time.clock has been
deprecated in Python 3.3 and will be removed from Python 3.8: use
time.perf_counter or time.process_time instead
```



2.2 Exercice:

L'algorithme que l'on écrit ici permet de déterminer la médiane, et même plus généralement le k-ième élément d'un tableau, sans le trier intégralement. Il est linéaire dans le pire des cas.

- Écrire une fonction qui prend en argument un tableau de cinq éléments et calcule sa médiane.

[11]:
```
def mediane_de_5(L):
    L = tri_insertion(L)
    return L[len(L)//2]

L = [14, 1, 4, 3, 55]
mediane_de_5(L)
```

[11]: 4

- Écrire une fonction qui prend en argument un tableau quelconque, le divise en groupes de cinq éléments et construit le tableau des médianes de chaque groupe de cinq.

[12]:
```
def tableau_des_medianes(L):
    n = len(L)
    k = n//5
    L_mediane = []
    for i in range(k):
```

```
        mediane = mediane_de_5(L[i*5:(i+1)*5])
        L_mediane.append(mediane)
    L_mediane = L_mediane + [mediane_de_5(L[5*(n//5):])]
    return L_mediane

import random as rd
L = list(range(53))
rd.shuffle(L)
tableau_des_medianes(L)
```

[12]: `[37, 39, 32, 23, 19, 44, 16, 9, 14, 18, 28]`

- Modifier la fonction précédente pour qu'elle s'appelle récursivement sur le ń tableau des médianes ż construit.

[13]:
```
def tableau_des_medianes_rec(L):
    n = len(L)
    k = n//5
    if k == 0:
        return [mediane_de_5(L)]
    else :
        L_mediane = []
        for i in range(k):
            mediane = mediane_de_5(L[i*5:(i+1)*5])
            L_mediane.append(mediane)
        if not(n == k*5):
            L_mediane = L_mediane + [mediane_de_5(L[5*(n//5):])]
        L_mediane = tableau_des_medianes_rec(L_mediane)
        return L_mediane

import random as rd
L = list(range(50))
rd.shuffle(L)
tableau_des_medianes_rec(L)
```

[13]: `[25]`

- Enfin, écrire une fonction qui effectue une partition du tableau de départ avec pour pivot la ń médiane des médianes ż calculée précédemment.

[14]:
```
def mediane_des_medianes(L):
    resultat_liste = tableau_des_medianes_rec(L)
    return resultat_liste[0]

def positionnement_pivot_mediane(L,debut,fin):
    p = mediane_des_medianes(L[debut:fin])
    L_prime = [p]
    est_ce_pivot = True
```

```
    j = debut
    for i in range(debut,fin):
        if p > L[i] :
            L_prime = [L[i]]+L_prime
            j += 1
        elif p < L[i] :
            L_prime.append(L[i])
        elif p == L[i] :
            if est_ce_pivot:
                est_ce_pivot = False
            else :
                L_prime.append(L[i])
    L[debut:fin] = L_prime
    return j,L

import random as rd
L = list(range(10))
rd.shuffle(L)
positionnement_pivot_mediane(L,0,len(L))
```

[14]: `(5, [3, 1, 4, 2, 0, 5, 9, 8, 7, 6])`

- Pour trouver le k-ième élément du tableau, où doit-on le chercher en fonction des tailles des deux sous-tableaux délimités par la partition ? Programmer l'appel récursif correspondant.

[15]:
```
def recherche_k_ieme_rec(L,debut,fin,k):
    if debut+1>=fin :
        return L[debut]
    else :
        j,L = positionnement_pivot_mediane(L,debut,fin)
        if j == k :
            m = L[j]
            return m
        elif j < k :
            debut_1 = j+1
            fin_1 = fin
            m = recherche_k_ieme_rec(L,debut_1,fin_1,k)
            return m
        elif j  > k :
            debut_2 = debut
            fin_2 = j
            m = recherche_k_ieme_rec(L,debut_2,fin_2,k)
            return m

def recherche_k_ieme(L,k) :
    m = recherche_k_ieme_rec(L,0,len(L),k)
    return m
```

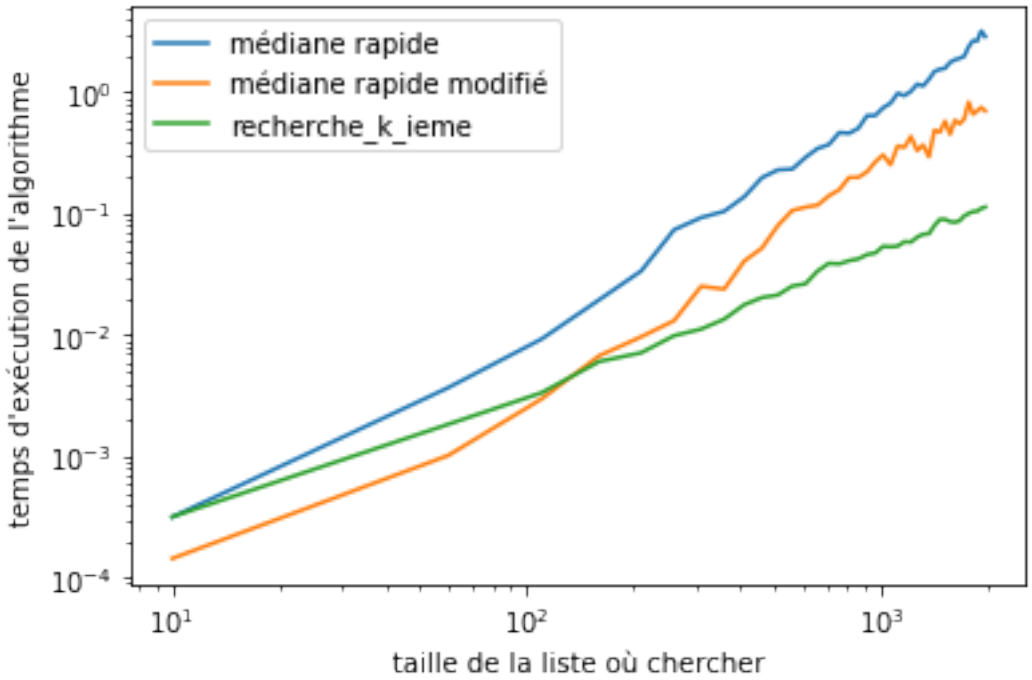
```
L = [15,4,2,9,55,16,0,1]
recherche_k_ieme(L,len(L)//2)
```

[15]: 9

[16]:
```
def mediane_recherche_k_ieme(L) :
    return recherche_k_ieme(L,len(L)//2)

import time
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import random as rd

def complexite_moyenne(n_min,n_max,pas,nbre_moyenne,algorithme):
    duree = []
    taille = []
    i = 0
    for n in range(n_min,n_max,pas):
        taille.append(n)
        duree.append(0)
        L=list(range(n))
        for m in range(nbre_moyenne):
            rd.shuffle(L)
            depart = time.clock()
            algorithme(L)
            arrive = time.clock()
            duree[i]=duree[i]+arrive-depart
        i += 1
    return taille, duree

n_min,n_max,pas,nbre_moyenne = 10,2000,50,10

taille_rapide, duree_rapide =␣
 ↪complexite_moyenne(n_min,n_max,pas,nbre_moyenne,mediane_rapide)
taille_rapide_deux, duree_rapide_deux =␣
 ↪complexite_moyenne(n_min,n_max,pas,nbre_moyenne,mediane_rapide_deux)
taille_recherche_k_ieme, duree_recherche_k_ieme =␣
 ↪complexite_moyenne(n_min,n_max,pas,nbre_moyenne,mediane_recherche_k_ieme)

plt.loglog(taille_rapide,duree_rapide,'-')
plt.loglog(taille_rapide_deux,duree_rapide_deux,'-')
plt.loglog(taille_recherche_k_ieme,duree_recherche_k_ieme,'-')

plt.xlabel('taille de la liste où chercher')
plt.ylabel("temps d'exécution de l'algorithme")
plt.legend(('médiane rapide','médiane rapide modifié','recherche_k_ieme'),␣
 ↪loc='upper left')
```

```
plt.show()
```

```
C:\Users\remib\AppData\Local\Continuum\anaconda3\lib\site-
packages\ipykernel_launcher.py:19: DeprecationWarning: time.clock has been
deprecated in Python 3.3 and will be removed from Python 3.8: use
time.perf_counter or time.process_time instead
C:\Users\remib\AppData\Local\Continuum\anaconda3\lib\site-
packages\ipykernel_launcher.py:21: DeprecationWarning: time.clock has been
deprecated in Python 3.3 and will be removed from Python 3.8: use
time.perf_counter or time.process_time instead
```



En choisissant de manière plus précise le pivot on accèle l'algorithme de recherche de la médiane pour les grandes listes à trier.

Il faut néanmoins faire attention à la façon dont on extrait les listes de taille 5, de manière à éviter d'avoir une complexité spatialle trop grande. Il vaut mieux privilégier les méthodes de tri en place.