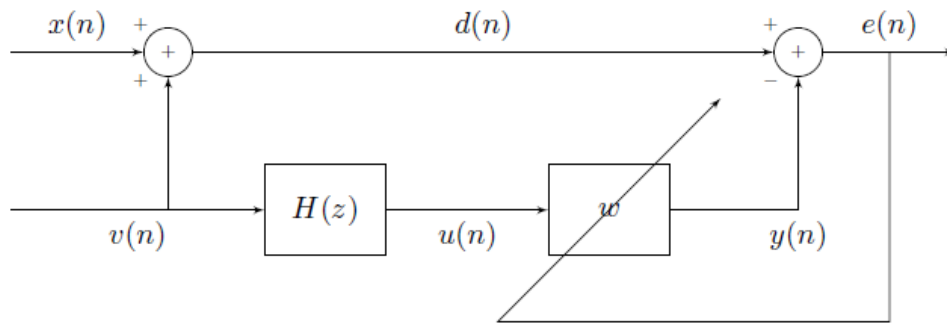


ΨΗΦΙΑΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

Εργασία I

Χρήση του αλγορίθμου steepest descent και των εξισώσεων
Wiener-Hopf για την εξουδετέρωση θορύβου με Matlab.

Μάστορας Ραφαήλ-Ευάγγελος
ΑΕΜ: 7918
23/3/2017



$$x(n) = A(n) \sin\left(\frac{\pi}{8}n + \phi\right), \phi = \frac{\pi}{6}$$

$$u(n) = 0.25u(n-1) - 0.12u(n-2) + v(n)$$

$$d(n) = x(n) + v(n)$$

Αρχικά προκειμένου η τυχαία μεταβλητή $A(n)$ να έχει διακύμανση 0.15 και μέση τιμή 0 δημιούργησα έναν πίνακα A με τιμές $\text{randn}(\text{steps}, 1) * \text{sqrt}(0.15)$ και έπειτα αφαίρεσα την μέση τιμή του πίνακα από τις τιμές αυτές. Όμοια διαδικασία χρειάστηκε και για τον λευκό θόρυβο v . Έπειτα κατασκευάστηκαν οι πίνακες των συναρτήσεων που φαίνονται παραπάνω. Καθώς οι πίνακες υπολογίστηκαν για $n=2000$ steps τα παρακάτω αποτελέσματα του Matlab είναι προσεγγιστικά, ωστόσο είναι πολύ κοντά στα αποτελέσματα που υπολογίστηκαν θεωρητικά.

Αποτελέσματα

Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης R του σήματος $u(n)$, για 3×3 σύστημα και 2000 τιμές της συνάρτησης $u(n)$, υπολογίστηκε στο matlab

$$R = \begin{bmatrix} 0.3319 & 0.0742 & -0.0280 \\ 0.0742 & 0.3319 & 0.0742 \\ -0.0280 & 0.0742 & 0.3319 \end{bmatrix} \text{ ενώ θεωρητικά } R = \begin{bmatrix} 0.3417 & 0.0763 & -0.0219 \\ 0.0763 & 0.3417 & 0.0763 \\ -0.0219 & 0.0763 & 0.3417 \end{bmatrix}$$

Καθώς όπως φαίνεται η διαφορά είναι ελάχιστη δεν θα αναφερθούν παρακάτω τα θεωρητικά αποτελέσματα. Η διαφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι στο matlab οι τιμές υπολογίστηκαν για ένα εύρος συνάρτησης 2000 τιμών.

Το διάνυσμα ετεροσυσχέτισης P του $u(n)$ και $d(n)$ υπολογίστηκε αντίστοιχα

$$P = \begin{bmatrix} 0.3087 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ενώ οι βέλτιστοι συντελεστές του φίλτρου Wiener-Hopf

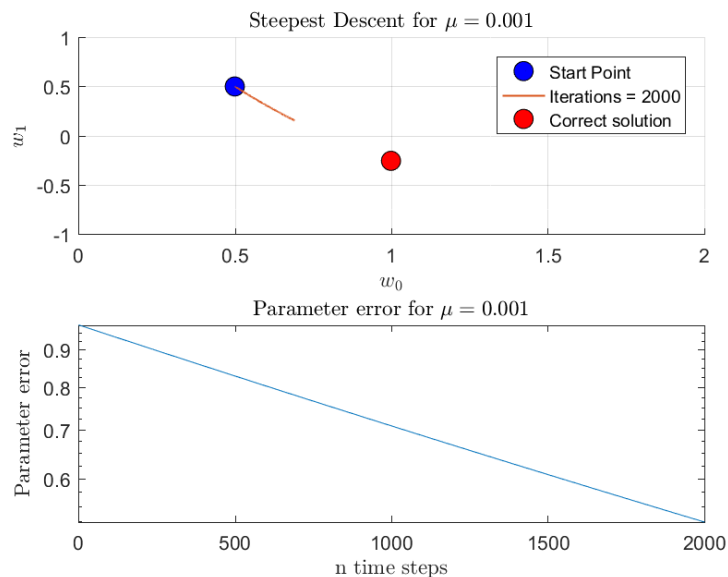
$$w_0 = \begin{bmatrix} 0.9990 \\ -0.2549 \\ 0.1411 \end{bmatrix}$$

Το πεδίο τιμών για το οποίο ο αλγόριθμος steepest descent συγκλίνει το $0 < \mu < 4.719469$ και το ελάχιστο τετραγωνικό σφάλμα **Jmin= 0.075160**.

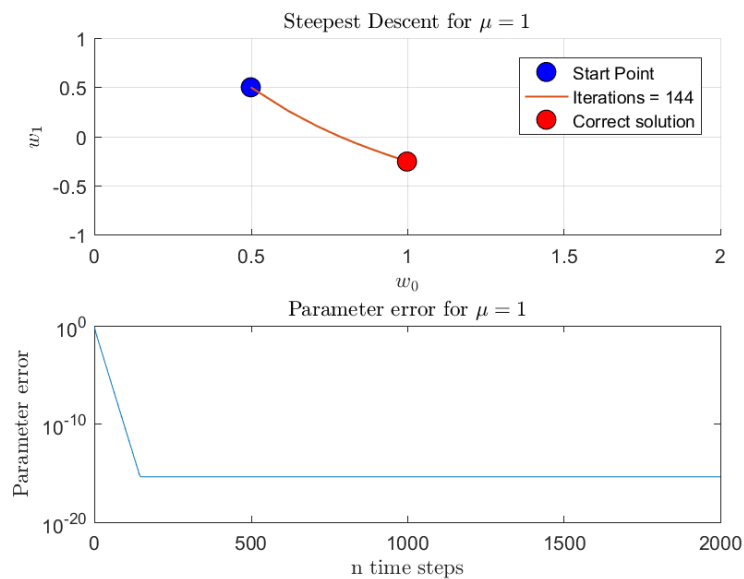
Steepest Descent

Δοκιμάζοντας διάφορες τιμές για το μ στον αλγόριθμο steepest descent παρατηρήθηκε το αναμενόμενο, δηλαδή ότι για τιμές ανάμεσα στο παραπάνω όριο τιμών συγκλίνει ενώ για τιμές έξω από αυτό αποκλίνει. Τα παρακάτω διαγράμματα υπολογίσθηκαν για αρχικό πίνακα $w=[0.5; 0.5; 0.5]$.

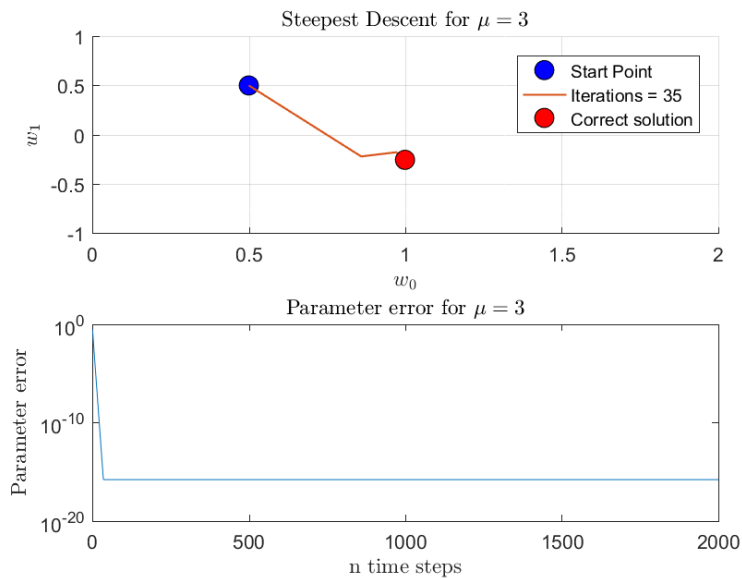
Μερικά ενδεικτικά διαγράμματα:



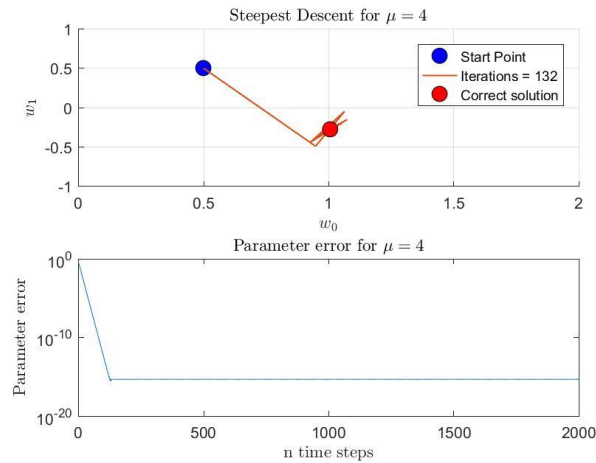
Βλέπουμε πως για $\mu=0.001$ ο αλγόριθμος φαίνεται να συγκλίνει, ωστόσο χρειάζεται πολλές παραπάνω επαναλήψεις από 2000.



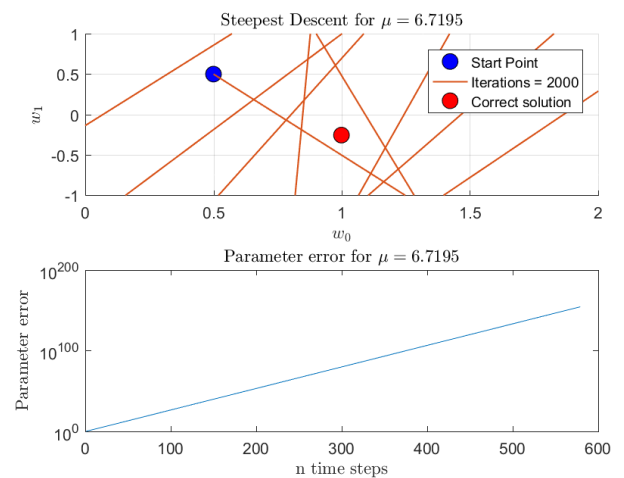
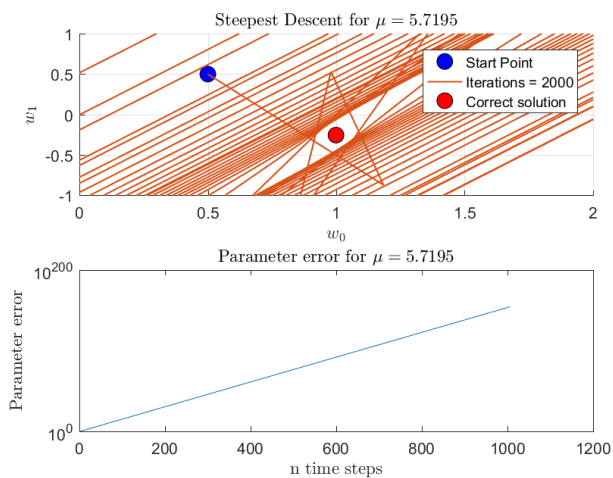
Για $\mu=1$ η ταχύτητα του αλγορίθμου έχει βελτιωθεί σημαντικά με μόνο 144 επαναλήψεις.



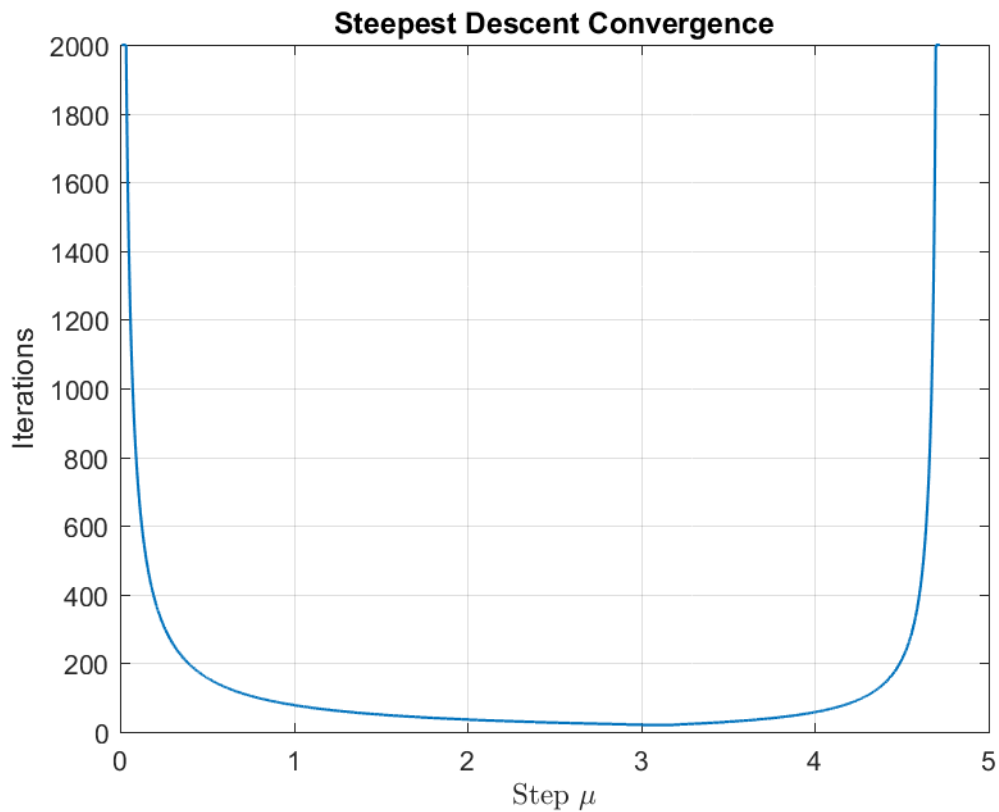
Μάλιστα για τιμές κοντά στο 3 προσεγγίζει πολύ γρήγορα τις τιμές του βέλτιστου φίλτρου Wiener-Hopf, κάνοντας μόνο 35 επαναλήψεις.



Ενώ για τιμές μεγαλύτερες από το $\mu=4.719469$ ο αλγόριθμος συνεχώς αποκλίνει.



Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η γενικότερη συμπεριφορά του αλγορίθμου ανάμεσα στο πεδίο σύγκλισής του. Επίσης φαίνεται ότι για τιμές κοντά στο $\mu=3$ ο αλγόριθμος Steepest Descent συγκλίνει γρηγορότερα στην βέλτιστη λύση.



Τα παραπάνω διαγράμματα είναι δύο διαστάσεων (το *Starting Point* και το *Correct Solution* απεικονίζουν το $w(1), w(2)$ και $w_0(1), w_0(2)$ αντίστοιχα) καθώς δεν κατάφερα να απεικονίσω σωστά τις τιμές στον τρισδιάστατο χώρο. Παρόλα αυτά δίνουν ακριβή εικόνα της συμπεριφοράς του αλγορίθμου.

Αποθορυβοποίηση του τραγουδιού

Για την αποθορυβοποίηση του κομματιού χρησιμοποιήθηκε πάλι ο Steepest Descent αλγόριθμος.

Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης R του σήματος $u(n)$ βρέθηκε

$$R = \begin{bmatrix} 6.6319 & 6.2561 & 5.9892 \\ 6.2561 & 6.6319 & 6.2561 \\ 5.9892 & 6.2561 & 6.6319 \end{bmatrix}$$

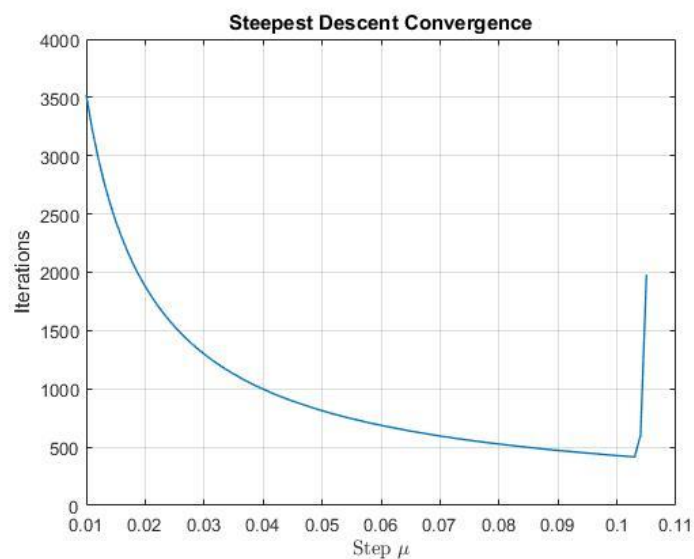
Το διάνυσμα ετεροσυσχέτισης P του $u(n)$ και $d(n)$ υπολογίσθηκε

$$P = \begin{bmatrix} 0.7205 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ενώ οι βέλτιστοι συντελεστές του φίλτρου Wiener-Hopf

$$w_0 = \begin{bmatrix} 1.0010 \\ -0.8310 \\ -0.1201 \end{bmatrix}$$

Το πεδίο τιμών για το οποίο ο αλγόριθμος steepest descent συγκλίνει το $0 < \mu < 0.105446$. Και η συμπεριφορά του Steepest Descent για το πεδίο αυτό φαίνεται παρακάτω.



Τέλος το τραγούδι μετά την εφαρμογή του παραπάνω φίλτρου ακούγεται χωρίς να υπάρχει καθόλου θόρυβος. Το μουσικό κομμάτι που κρυβόταν απο τον θόρυβο είναι το **Mack The Knife του Bobby Darin**.