Analyse semi-minimale des équations différentielles algébriques

Rémi Jaoui

University of Notre Dame

15 Décembre 2020

Introduction

Mon exposé concerne des propriétés de transcendence pour les solutions d'équations différentielles algébriques

$$(E) : F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

remontant aux travaux de Painlevé dans les *Lecons de Stockholm* (1897).

(1) Peut-on exprimer les solutions de l'équations différentielles (E) à l'aide de fonctions transcendantes classiques telles que la fonction exponentielle, les fonctions trigonométriques, les fonctions elliptiques... ?

(2) Plus généralement, à l'aide de changement de variables basés sur ces fonctions transcendantes classiques et toutes les fonctions algébriques, peut-on ramener la résolution de l'équation différentielle (E) à la résolution d'équations différentielles "plus simples" telles que des équations différentielles d'ordre un

$$F_1(y, y') = 0, \ldots, F_p(y, y') = 0.$$

Introduction

Mon exposé concerne des propriétés de transcendence pour les solutions d'équations différentielles algébriques
$$(E) : F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$
remontant aux travaux de Painlevé dans les *Lecons de Stockholm* (1897).

(1) Peut-on exprimer les solutions de l'équations différentielles (E) à l'aide de fonctions transcendantes classiques telles que la fonction exponentielle, les fonctions trigonométriques, les fonctions elliptiques... ?

(2) Plus généralement, à l'aide de changement de variables basés sur ces fonctions transcendantes classiques et toutes les fonctions algébriques, peut-on ramener la résolution de l'équation différentielle (E) à la résolution d'équations différentielles "plus simples" telles que des équations différentielles d'ordre un
$$F_1(y, y') = 0, \dots, F_p(y, y') = 0.$$

Les mathématiques constituent un contient solidement agencé, dont les pays sont reliés les uns aux autres; l'œuvre de Paul Painlevé est une île originiale et splendide dans l'océan voisin. (Poincaré)

Depuis la fin des années 70: les travaux des théoriciens des modèles (Shelah 73', Hrushovski 96', Pillay 97'+,...) autour des corps différentiels "universels" ont commencé à entrer en résonance avec certaines idées des *Leçons de Stokholm* permettant de développer une interprétation moderne et systématique des questions (1) et (2).

Sommaire

Corps différentiellement clos

Un *corps différentiel* est une paire (K, δ) où K est un corps de caractéristique 0 et $\delta : K \to K$ est une dérivation: un morphisme additif vérifiant la règle de Leibniz:

$$\delta(x.y) = x.\delta(y) + \delta(x).y$$

Définition

Un corps différentiel (K, δ) est ***différentiellement clos*** *si tout système (Σ) d'équations et d'inéquations différentielles (à paramètres dans K) qui admet une solution dans une extension différentielle (L, δ_L) de (K, δ) admet déjà une solution dans K.*

Corps différentiellement clos

Un *corps différentiel* est une paire (K, δ) où K est un corps de caractéristique 0 et $\delta : K \to K$ est une dérivation: un morphisme additif vérifiant la règle de Leibniz:

$$\delta(x.y) = x.\delta(y) + \delta(x).y$$

Définition

*Un corps différentiel (K, δ) est **différentiellement clos** si tout système (Σ) d'équations et d'inéquations différentielles (à paramètres dans K) qui admet une solution dans une extension différentielle (L, δ_L) de (K, δ) admet déjà une solution dans K.*

Corps différentiellement clos et séries de Puiseux: Si (K, δ) est un corps différentiel et $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ des indéterminées, on considère

$$K \subset K_1 = K((t_1))^{alg} \subset K_2 = K_1((t_2))^{alg} \subset \ldots \subset K_n = K_{n-1}((t_n))^{alg} \subset \ldots$$

Si L est un corps,

- Toute dérivation sur L s'étend uniquement en une dérivation sur L^{alg},
- Toute dérivation δ sur L s'étend uniquement en une dérivation sur le corps de séries de Laurent $L((t))$ continue pour la topologie t-adique et vérifiant $\delta(t) = 1$.

La limite inductive $K^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est naturellement munie d'une derivation et (K^*, δ) est un corps différentiellement clos contenant (K, δ).

Un théorème de Seidenberg

On fixe un corps différentiellement clos $(\mathcal{U}, \delta)$.

Théorème (Seidenberg, 58')

Soit $K \subset \mathcal{U}$ un sous corps différentiel de $(\mathcal{U}, \delta)$ finiment engendré. Il existe un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$ et un plongement de corps différentiel

$$i : (K, \delta) \to (\mathcal{M}(U), \frac{d}{dt})$$

dans le corps différentiel $\mathcal{M}(U)$ des fonctions méromorphes sur U muni de la dérivation usuelle.

Méthodologie des corps différentiellement clos:

(1) Etant donnée une équation différentielle (E) à paramètre dans un corps différentiel classique $(\mathbb{C}, \mathbb{C}(t), ...)$, on considère:

$$(E) : P(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \to \text{ l'ensemble } \mathcal{S}(E) \text{ des solutions de (E) dans } (\mathcal{U}, \delta).$$

(2) (Théorie géométrique de la stabilité) On utilise des théorèmes structurels de décomposition pour les ensembles de la forme $\mathcal{S}(E)$.

(3) (Compacité): Toute propriété du premier ordre concernant $\mathcal{S}(E)$ ne dépend que d'un fragment fini de $(\mathcal{U}, \delta)$.

On peut ainsi vérifier ou infirmer cette propriété à partir de l'étude de solutions analytiques de l'équation différentielle (E).

Les corps différentiellement clos comme structure du premier ordre

On considère les corps différentiellement clos comme une structure du premier ordre dans le langage

$$\mathcal{L}_\delta = \{0, 1, +, -, \times, \delta\} \text{ des corps différentiels.}$$

Un ensemble définissable est un sous-ensemble de $\mathcal{U}^n$ défini par une formule du premier ordre dans le language $\mathcal{L}_\delta$. Par exemple,

$$\phi(y_1, y_2) := \exists x_1, x_2, \delta(x_1) = y_1 \wedge \delta(x_2) = y_2 \wedge (\delta(x_1))^2 = \delta(\delta(x_2)) + t$$

définit une sous-ensemble définissable de $\mathcal{U}^2$ à paramètres dans $\mathbb{Q}(t)$.

Les corps différentiellement clos comme structure du premier ordre

On considère les corps différentiellement clos comme une structure du premier ordre dans le langage

$$\mathcal{L}_\delta = \{0, 1, +, -, \times, \delta\} \text{ des corps différentiels.}$$

Un ensemble définissable est un sous-ensemble de $\mathcal{U}^n$ défini par une formule du premier ordre dans le language $\mathcal{L}_\delta$. Par exemple,

$$\phi(y_1, y_2) := \exists x_1, x_2, \delta(x_1) = y_1 \wedge \delta(x_2) = y_2 \wedge (\delta(x_1))^2 = \delta(\delta(x_2)) + t$$

définit une sous-ensemble définissable de $\mathcal{U}^2$ à paramètres dans $\mathbb{Q}(t)$.

- En particulier, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}(E)$ d'une équation différentielle algébrique (E) est un sous-ensemble définissable de $\mathcal{U}$.
- (Blum, 68') Tout sous-ensemble définissable de $\mathcal{U}$ est une combinaison booléenne d'ensembles de la forme $\mathcal{S}(E)$ (les corps différentiellement clos éliminent les quantificateurs).
- Si D_1 et D_2 sont deux ensembles définissables, une application définissable est une fonction

  $$f : D_1 \to D_2$$

  donc le graphe

  $$\Gamma(f) \subset D_1 \times D_2 \subset \mathcal{U}^N \text{ est définissable.}$$

Je travaillerai dans la catégorie $Def(\mathcal{U})$ dont les objets sont les sous-ensembles définissables et les morphismes sont les applications définissables.

Comment étudier la catégorie $Def(\mathcal{U})$?

Problème général de théorie des modèles: Etant donnée une structure du premier ordre M, comment étudier la catégorie $Def(M)$?

- Pour des structures o-minimales comme le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ dans le langage $\mathcal{L}_< = \{0, 1, +, -, \times, <\}$, on utilise un théorème de décomposition cellullaire:

  Tout ensemble définissable se décompose en une union finie de "cylindres".

- Pour l'arithmétique — $\mathbb{Z}$ dans le langage $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \times\}$ — il n'existe pas de description raisonnable de $Def(\mathbb{Z})$.

Comment étudier la catégorie $Def(\mathcal{U})$?

Problème général de théorie des modèles: Etant donnée une structure du premier ordre M, comment étudier la catégorie $Def(M)$?

- Pour des structures o-minimales comme le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ dans le langage $\mathcal{L}_< = \{0, 1, +, -, \times, <\}$, on utilise un théorème de décomposition cellullaire:

  Tout ensemble définissable se décompose en une union finie de "cylindres".

- Pour l'arithmétique — $\mathbb{Z}$ dans le langage $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \times\}$ — il n'existe pas de description raisonnable de $Def(\mathbb{Z})$.

Pendant les années 70, Shelah développe des méthodes générales pour étudier la catégorie $Def(M)$ pour toutes les structures M vérifiant une propriété de modération appelée *stabilité*:

Une structure est stable s'il n'existe pas de formule $\phi(x, y)$ et d'éléments $(a_i, b_j, i, j \in \mathbb{N})$ tels que

$$M \models \phi(a_i, b_j) \text{ si et seulement si } i < j.$$

Exemple: Les structure o-minimales ne sont jamais stables. Les corps différentiellement clos vérifient une forme forte de la stabilité appelée ω-stabilité.

Principe (Un principe de Shelah)

Dans un corps différentiellement clos $(\mathcal{U}, \delta)$, la catégorie $Def(\mathcal{U})$ est entièrement "contrôlée" par une sous-catégorie (pleine) dont les objets sont ensembles définissables ***fortement minimaux.***

Les ensembles fortement minimaux

Les ensembles fortement minimaux sont les ensembles définissables qui sont indécomposables:

Definition

Une équation différentielle (E) est *fortement minimale* si tout sous-ensemble définissable $\mathcal{S}(E)$ est soit fini soit cofini.

Exemples:

- (Shelah 73' - Rosenlicht 74') Toute équation différentielle d'ordre un de la forme

$$F(y, y') = 0$$

  où la courbe plane $F(X, Y) = 0$ est irréducible est fortement minimale.

- (Pillay-Nagloo 11') La première équation de Painlevé

$$y'' = 6y^2 + t$$

  est fortement minimale.

- (Freitag-Scanlon 14') L'équation différentielle d'ordre 3 vérifiée par la fonction j:

$$\left(\frac{y''}{y'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{y'}{y}\right)^2 + (y')^2\frac{y^2 - 1968y + 2654208}{2y^2(y-1728)^2} = 0$$

Un théorème de structure naïf?

Soit (E) une équation différentielle algébrique. Sur le modèle de la décomposition cellulaire, on pourrait espérer que:

> on peut toujours décomposer $\mathcal{S}(E)$ en une union finie de sous-ensembles définissables D qui peuvent être "dévissés" sous la forme:

$$D \to \mathcal{S}(E_1) \to \mathcal{S}(E_2) \to \ldots \to S(E_r)$$

- où chaque application $\pi_i : \mathcal{S}(E_i) \to \mathcal{S}(E_j)$ est définissable
- l'équation (E_r) est fortement minimale et pour tout $i \leq r$, les fibres de π_i sont fortement minimales.

Un théorème de structure naïf?

Soit (E) une équation différentielle algébrique. Sur le modèle de la décomposition cellulaire, on pourrait espérer que:

on peut toujours décomposer $\mathcal{S}(E)$ en une union finie de sous-ensembles définissables D qui peuvent être "dévissés" sous la forme:

$$D \to \mathcal{S}(E_1) \to \mathcal{S}(E_2) \to \ldots \to S(E_r)$$

- où chaque application $\pi_i : \mathcal{S}(E_i) \to \mathcal{S}(E_j)$ est définissable
- l'équation (E_r) est fortement minimale et pour tout $i \leq r$, les fibres de π_i sont fortement minimales.

Mais ce n'est pas le cas...: considérons une équation différentielle *linéaire*

$$Y' = A.Y \text{ où } A \in \mathcal{M}_n(K) \text{ à paramètres dans un corps différentiel } (K, \delta).$$

Si $\mathcal{S}(E)$ peut être décomposé sous la forme (2) alors on obtient une décomposition du groupe de Galois G de l'équation différentielle linéaire (E) de la forme:

$$G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G$$

tel que chaque quotient G_{i+1}/G_i est soit fini, soit isomorphe à un sous-groupe algébrique de PSL_2.

Sommaire

La théorie de Galois de Kolchin

Pour obtenir un théorème de structure, il faut prendre en compte les équations différentielles qui admettent une théorie de Galois au sense de Kolchin:

Notation: On fixe un corps différentiellement clos $(\mathcal{U}, \delta)$ une fois pour toute et on dénote par $\mathcal{C}$ le corps de constantes.

Definition (Kolchin, Kovacic)

Pour tout groupe algébrique G défini au dessus de $\mathcal{C}$, il existe une application définissable:

$$\mathrm{dlog}_G : G(\mathcal{U}) \to LG(\mathcal{U}) \text{ où } LG \text{ désigne l'algèbre de Lie de } G,$$

appelée **dérivée logarithmique** vérifiant

(1)

$$\mathrm{dlog}_G(xy) = \mathrm{dlog}_G(x) + ad_x(\mathrm{dlog}_G(y))$$

(2) Si $y \in LG(\mathcal{M}(U))$ est à valeur dans un corps de fonctions meromorphes $\mathcal{M}(U)$ alors

$$x = exp_G(\int y) \text{ vérifie } dlog_G(x) = y \text{ où } \int y \text{ désigne une primitive de } y.$$

Une équation différentielle de la forme

$$\mathrm{dlog}_G(x) = y \text{ avec } y \in LG(\mathcal{U})$$

sera appelée une équation différentielle G-logarithmique

Quelques exemples

- Si $G = \mathbb{G}_m$, les équations différentielles G-logarithmiques sont de la forme
$$x' = xy \text{ où } y \in \mathcal{U}$$
dont les solution sont de la forme $Cexp(\int y)$.
- Si $G = \mathbb{G}_a$, les équations différentielles G-logarithmiques sont de la forme
$$x' = y \text{ où } y \in \mathcal{U}$$
dont les solution sont de la forme $\int y + C$.
- Si $G = E$, les équations différentielles G-logarithmiques sont de la forme
$$x' = (x^3 + g_2 x + g_3)y \text{ où } g_2, g_2 \in \mathcal{C} \text{ et } y \in \mathcal{U}$$
dont les solution sont de la forme $\rho_E(\int y + C)$.
- Si $G = GL_n$, les équations différentielles G-logarithmiques sont de la forme
$$X' = A.X \text{ où } A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{U})$$

Un sous-corps différentiel $K \subset \mathcal{M}(U)$ est un corps de **fonctions classiques** si on peut atteindre K à partir du corps $\mathbb{C}(t)$ des fonctions rationnelles en résolvant uniquement des équations différentielles logarithmiques et des équations algébriques.

Soit $(E) : F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ une équation différentielle à paramètres dans un sous-corps différentiel K de $\mathcal{U}$.

Théorème (Hrushovski 96', Pillay 97',)

L'équation différentielle (E) est résoluble dans une tour de corps différentiels de la forme:

$$K \subset K_1 \subset \ldots \subset K_i \subset K_{i+1} \subset \ldots \subset K_n$$

où chaque extension élémentaire $K_i \subset K_{i+1}$ est obtenue à partir d'une des opérations suivantes:

(0) $K_{i+1} = K_i(c)$ *est une pure extension par une constante,*

(1) $K_{i+1} = K_i(\xi)$ *est engendré par un élément $\xi \in K_i^{alg}$ i.e.:*

$$\xi^r + f_{r-1}\xi^{r-1} + \ldots f_1\xi + f_0 = 0 \text{ où } f_1, \ldots, f_{r-1} \in K_i$$

(2) $K_{i+1} = K_i\langle\xi\rangle$ *est engendré par une solution d'une équation différentielle logarithmique:*

$$dlog_G(\xi) = y \text{ où } y \in LG(K_i).$$

(3) $K_{i+1} = K_i\langle\xi\rangle$ *est engendré par une solution ξ d'une équation différentielle (E_i)* ***(fortement) minimale*** *à paramètres dans K_i.*

Résoluble: le corps différentiel K_n contient une solution générique (en particulier non triviale) de l'équation différentielle (E), i.e. une solution y de (E) vérifiant:

$$trdeg(K(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})/K) = n$$

Une version effective du principe de Shelah

- Deux opérations fondamentales: (2) et (3)

(2)

Résoudre une équation différentielle logarithmique

$$\partial \log_G (x) = y$$

(3)

Résoudre une équation différentielle fortement minimale

- Deux opérations auxiliaires: (0) et (1)

(0)

Ajouter une constante

(1)

Résoudre une équation algébrique

Systèmes hamiltonien à un degré de liberté

Considérons un système hamiltonien $H = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$ décrivant le mouvement d'une particule soumise à un potentiel $V(q) \in \mathbb{C}[q]$:

$$(H) : \dot{q} = p \text{ and } \dot{p} = -V'(q).$$

- Le hamiltonien H est toujours une intégrable première du mouvement et on est ramené à l'étude d'une équation différentielle d'ordre un:

$$(E_h) : \frac{1}{2}(\frac{dq}{dt})^2 + V(q) = h.$$

  à niveau d'énergie fixé $H = h$.
- Le système est complètement (analytiquement) intégrable: pour résoudre (E_h), on utilise la méthode de séparation des variables et on écrit:

$$(*) : dt = \frac{dq}{\sqrt{2h - 2V(q)}}$$

La solution générale de (E_h) est alors donnée par $q = F_h^{-1}(t + C)$ où F_h est une primitive du membre de droite de $(*)$.

Analyse des équations hamiltoniennes à un degré de liberté

Le système hamiltonien (H) peut toujours être résolu dans une extension de la forme

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{C}(h) \subset K_2$$

où $\mathbb{C}(h)$ est engendré par une constante h et K_2 par une solution générique de l'équation (E_h).

- Si $deg(V) = 3$, après un changement de coordonnées, on peut écrire

$$(*) : t = \int \frac{dq}{\sqrt{q^3 + g_2 q + g_3}} \text{ une intégrale elliptique.}$$

La fonction inverse d'une intégrale elliptique vérifie une équation différentielle elliptique donc l'équation hamiltonienne est résoluble à l'aide des opérations (0) et (2).

- Si $deg(V) \geq 5$, en général (lorsque les coefficients de V sont suffisament génériques), l'intégration ne peut être ramenée à une intégrale elliptique ou à une intégrale rationnelle.

L'équation hamiltonienne n'est pas résoluble à partir des opérations (0) et (2) mais résoluble à partir des opérations (0) et (3).

Des exemples académiques

On considère l'équation différentielles

$$(E_1) : y''y + y'y - (y')^2 = 0.$$

- Un calcul immédiat: en posant $z = y'/y$ pour une solution y non nulle de (E_1), on obtient que

$$z' = z \text{ et } y' = y.z.$$

L'équation (E_1) est résoluble en appliquant **deux fois** l'opération (2) mais ne peut être résolue en appliquant (2) une seule fois (Jin-Moosa, 19').

Des exemples académiques

On considère l'équation différentielles

$$(E_1) : y''y + y'y - (y')^2 = 0.$$

- Un calcul immédiat: en posant $z = y'/y$ pour une solution y non nulle de (E_1), on obtient que

$$z' = z \text{ et } y' = y.z.$$

L'équation (E_1) est résoluble en appliquant **deux fois** l'opération (2) mais ne peut être résolue en appliquant (2) une seule fois (Jin-Moosa, 19').

- Il existe des équations différentielles d'ordre deux qui sont résoluble en appliquant l'opération (3) puis l'opération (2) mais qui ne sont pas résolubles en appliquant d'abord l'opération (2) puis l'opération (3). (J-Jimenez-Pillay, 20')
- En général, une équation $(E) : F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ d'ordre n peut toujours être résolue en appliquant au plus n fois les opérations (2) et (3).

Conjecture: Pour tout $n \geq 2$ et toute suite ordonnée $\omega \in \{2,3\}^n$, il existe une équation différentielle algébrique d'ordre n résoluble en appliquant les opérations

$$\omega(1), \ldots, \omega(n) \text{ dans l'ordre}$$

et qui pour tout $\omega' \in \{2,3\}^{n-1}$ n'est pas résoluble en appliquant les opérations de ω'.

Un exemple de Painlevé

Considérons la première équation de Painlevé:

$$(E) : y'' = 6y^2 + t \text{ définie au dessus de } \mathbb{C}(t).$$

Painlevé: "Les solutions de (E) sont de nouvelles fonctions transcendantes".

Théorème (Umemura 90', Nagloo-Pillay 11')

L'équation différentielle (E) est fortement minimale: elle n'est pas résoluble en utilisant les opérations (0),(1),(2) et

(3)' : l'extension $K_i \subset K_{i+1}$ est engendrée par des solutions d'une ***équation différentielle du premier ordre*** *à paramètres dans K_i.*

Plus généralement, une équation différentielle $(E) : F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ d'ordre n est **minimale** s'il n'est pas résoluble en utilisant les opérations (0),(1),(2) et

(3)' : l'extension $K_i \subset K_{i+1}$ est engendrée par des solutions d'une **équation différentielle d'ordre** $<$ **n** à paramètres dans K_i.

Ce sont celles qui définissent de nouvelles fonctions transcendantes au sens de Painlevé!

Sommaire

Equations différentielles autonomes du deuxième ordre

Dans cette partie, je vais considérer uniquement des équations différentielles **complexes autonomes d'ordre 2**. Deux présentations pour ces équations:

(1) Présentation *syntaxique*:

$$(E) : F(y, y', y'') = 0 \text{ avec } F(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z].$$

On supposera de plus que (E) est vraiment une équation d'ordre 2: $\frac{\partial F}{\partial z}$ n'est pas identiquement nul.

(2) Présentation *géométrique*:

$$(E) : (X, v) \text{ où } X \text{ est une surface alg. complexe munie d'un champ de vecteurs } v.$$

Equations différentielles autonomes du deuxième ordre

Dans cette partie, je vais considérer uniquement des équations différentielles **complexes autonomes d'ordre 2**. Deux présentations pour ces équations:

(1) Présentation *syntaxique*:

$$(E) : F(y, y', y'') = 0 \text{ avec } F(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z].$$

On supposera de plus que (E) est vraiment une équation d'ordre 2: $\frac{\partial F}{\partial z}$ n'est pas identiquement nul.

(2) Présentation *géométrique*:

$$(E) : (X, v) \text{ où } X \text{ est une surface alg. complexe munie d'un champ de vecteurs } v.$$

- $(1) \rightarrow (2)$ On considère X la variété algebrique quasi affine définie par

$$F(x, y, z) = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

  Il existe un champ de vecteur v sur X telle que les solutions (non ramifiées) de (E) correspondent aux courbes analytiques sur X tangentes au champ de vecteurs v.

- Comme on s'interesse aux solutions génériques, on s'autorisera à remplacer (X, v) par un autre modèle birationnel (X', v') i.e.

$$(X, v) \sim (X', v') \text{ si } \exists \phi : X \dashrightarrow X' \text{ birationnel avec } d\phi(v) = v'.$$

Feuilletages algébriques sur X

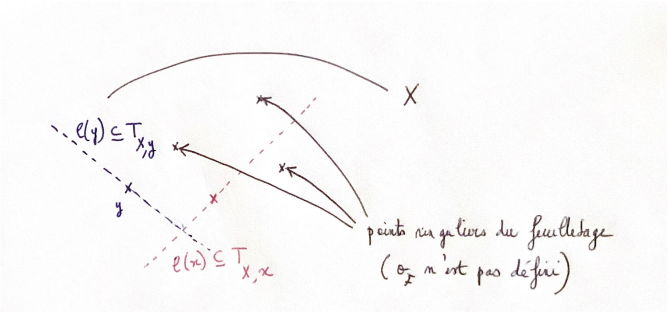
Soit X une surface algébrique. On considère le diagramme:

$$\begin{tikzcd} T_X \setminus \{0-\text{section}\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}(T_X) \arrow[dl, "\pi"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Un **feuilletage** (possiblement singulier) sur X est une section rationnelle

$$\sigma_{\mathcal{F}} : X \dashrightarrow \mathbb{P}(T_X)$$

de la projection canonique $\pi : \mathbb{P}(T_X) \to X$.

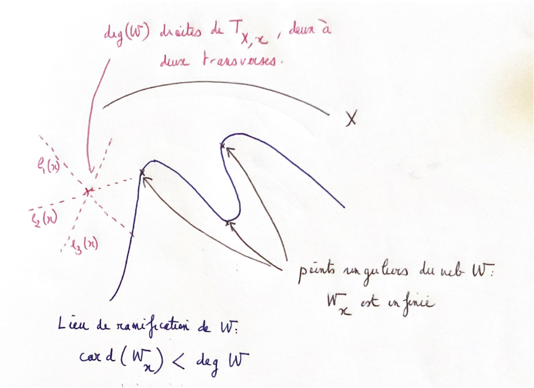


Tissu (ou web) algébrique sur X

Un **tissu irréductible** de degré $d \geq 1$ sur X est une hypersurface irréductible W de $\mathbb{P}(T_X)$ tel que:

- la restriction $\pi_{|W} : W \to X$ de la projection canonique à W est surjective.
- pour $x \in X$ générique, la fibre:

$$W_x = \pi_{|W}^{-1}(x) \text{ a cardinal } d$$



On identifie les feuilletages sur X avec les tissus de degré $d = 1$.

Feuilletages et tissus invariants

Considérons maintenant (X, v) une équation différentielle autonome d'ordre deux présentée géométriquement. Pour $x \in X$, on considère le flot analytique local:

$$\phi_t : U \to X^{an}$$

du champ de vecteurs v défini pour de petits temps t sur un voisinage analytique U de x.

Definition

On dit qu'un tissu W (resp. un feuilletage $\mathcal{F}$ sur X) est un **tissu invariant** (resp. un feuilletage invariant) de (X, v) si pour tout $x \in X$ générique,

$$d\phi_t(W_x) \subset W_{\phi_t(x)}(\text{ resp. } d\phi_t(\mathcal{F}_x) \subset \mathcal{F}_{\phi_t(x)}.)$$

Feuilletages et tissus invariants

Considérons maintenant (X, v) une équation différentielle autonome d'ordre deux présentée géométriquement. Pour $x \in X$, on considère le flot analytique local:

$$\phi_t : U \to X^{an}$$

du champ de vecteurs v défini pour de petits temps t sur un voisinage analytique U de x.

Definition

On dit qu'un tissu W (resp. un feuilletage $\mathcal{F}$ sur X) est un **tissu invariant** (resp. un feuilletage invariant) de (X, v) si pour tout $x \in X$ générique,

$$d\phi_t(W_x) \subset W_{\phi_t(x)}(\text{ resp. } d\phi_t(\mathcal{F}_x) \subset \mathcal{F}_{\phi_t(x)}.)$$

Observations géométriques:

- Le feuilletage $\mathcal{F}(v)$ tangent au champ de vecteurs v est toujours un feuilletage invariant de (X, v).
- Si l'ensemble $\mathcal{S}(X, v)$ se décompose de façon non-triviale comme:

$$\mathcal{S}(X, v) \to \mathcal{S}(E_0)$$

alors il existe **un autre tissu invariant** $W \neq \mathcal{F}(v)$ pour (X, v).

Observation algébrique: Les tissus invariants correspondent aux solutions algébriques d'une équation de Ricatti que l'on peut écrire explicitement.

Une équation de Ricatti

Soit $(E) : F(y, y', y'') = 0$ une équation différentielle d'ordre deux. On suppose que la variété algébrique définie par $F(x, y, z) = 0$ est irréductible.

Théorème (J., 19')

Considérons l'équation de Ricatti:

$$(R) : \xi' = \frac{F_x(y, y', y'')}{F_z(y, y', y'')}(\xi)^2 + \frac{F_y(y, y', y'')}{F_z(y, y', y'')}\xi + 1$$

à paramètres dans le corps différentiel $\mathbb{C}(y, y', y'')$ engendré par une solution générique y de (E).

(1) *Le groupe de Galois G de (R) est toujours un sous groupe de $Aff_2(\mathbb{C})$.*

(2) *De plus, si $G = Aff_2(\mathbb{C})$ alors l'équation (E) peut être résolue:*

   (a) *soit en appliquant une seule fois l'opération (2) et éventuellement l'opération (1). En particulier, (E) est **résoluble à l'aide de fonctions classiques**.*

   (b) *soit en appliquant une seule fois l'opération (3). Dans ce cas, l'équation différentielle (E) est **fortement minimale**.*

En combinant ce théorème (et des variantes en dimension supérieure) avec:

- des résultats permettant de calculer le groupe de Galois de l'équation de Ricatti (R),
- des propriétés permettant d'assurer qu'une équation différentielle n'est pas résoluble en utilisant des fonctions classiques,

on obtient de nombreux exemples d'équations différentielles fortement minimales.

Sommaire

Champs de vecteurs planaires génériques

On considère la famille $\mathcal{V}_d$ formées par les champs de vecteurs sur le plan complexe $\mathbb{C}^2$ de degré $\leq d$,

$$v(x,y) = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

où $f(x,y), g(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ sont des polynomes de degré $\leq d$.

Théorème (J., 19')

Soit $d \geq 3$. Pour presque tout champ de vecteurs $v \in \mathcal{V}_d$ au sens de la mesure de Lebesgue, l'équation différentielle

$$(\mathbb{A}^2, v) \text{ est fortement minimale (et désintégrée).}$$

En d'autre termes, cette équation différentielle n'est pas résoluble en appliquant les opérations (0),(1),(2) et

(3)' : l'extension $K_i \subset K_{i+1}$ est engendrée par des solutions d'une **équation différentielle du premier ordre** à paramètres dans K_i.

Champs de vecteurs planaires génériques

On considère la famille $\mathcal{V}_d$ formées par les champs de vecteurs sur le plan complexe $\mathbb{C}^2$ de degré $\leq d$,

$$v(x,y) = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

où $f(x,y), g(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ sont des polynomes de degré $\leq d$.

Théorème (J., 19')

Soit $d \geq 3$. Pour presque tout champ de vecteurs $v \in \mathcal{V}_d$ au sens de la mesure de Lebesgue, l'équation différentielle

$$(\mathbb{A}^2, v) \text{ est fortement minimale (et désintégrée).}$$

En d'autre termes, cette équation différentielle n'est pas résoluble en appliquant les opérations (0),(1),(2) et

(3)' : l'extension $K_i \subset K_{i+1}$ est engendrée par des solutions d'une **équation différentielle du premier ordre** à paramètres dans K_i.

Pour montrer ce théorème, on montre indépendamment que:

- l'ensemble des champs de vecteurs pour laquelle l'équation de Ricatti associée à un groupe de Galois $\neq \mathit{Aff}_2(\mathbb{C})$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue.
- l'ensemble des champs de vecteurs pour laquelle l'équation est résoluble à l'aide de fonctions classiques est négligeable pour la mesure de Lebesgue.

Équations différentielles géodésiques

Soit Σ un sous-ensemble algébrique irréductible **de dimension deux** de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$.

- On considère l'équation différentielle $Geo(\Sigma)$ décrivant les géodésiques de Σ pour la métrique induite sur Σ par la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^N$.
- Les solutions de $Geo(\Sigma)$ sont donc les trajectoires de particules contraintes à se déplacer sans frottement le long de Σ.

L'équation $Geo(\Sigma)$ est une équation différentielle hamiltonienne avec $(2+2)$-degrés de liberté. dont le hamiltonien H est algébrique.

- Comme pour les systèmes hamiltoniens H à $(1+1)$-degrés de liberté, on considérera donc l'équation "réduite"
$$Geo(\Sigma) \text{ et } H = c$$
décrivant les géodésiques pour un niveau d'énergie fixé $H = c$.

L'équation différentielle réduite
$$Geo(\Sigma) \text{ et } H = c$$
est **une équation différentielle autonome à trois degrés de liberté**.

Analyse semi-minimale des équations géodésiques en dimension deux.

- Si $\Sigma = \mathbb{S}^2$ est la sphère euclidienne, une simple inspection des solutions montre que $Geo(\Sigma)$ peut-être résolue en appliquant les opérations (0) et (2).
- Si Σ est un ellipsoïde Euclidien, Jacobi a montré que l'équation $Geo(\Sigma)$ peut aussi être résolue en appliquant les opérations (0) et (2) (dans ce cas, ce sont des fonctions θ qui apparaissent)

En revanche, lorsque Σ a courbure strictement négative, j'ai montré que:

Analyse semi-minimale des équations géodésiques en dimension deux.

- Si $\Sigma = \mathbb{S}^2$ est la sphère euclidienne, une simple inspection des solutions montre que $Geo(\Sigma)$ peut-être résolue en appliquant les opérations (0) et (2).
- Si Σ est un ellipsoïde Euclidien, Jacobi a montré que l'équation $Geo(\Sigma)$ peut aussi être résolue en appliquant les opérations (0) et (2) (dans ce cas, ce sont des fonctions θ qui apparaissent)

En revanche, lorsque Σ a courbure strictement négative, j'ai montré que:

Théorème (J., 2020)

Si Σ admet une composante connexe qui est compacte et à courbure strictement négative alors l'ensemble des solutions de

$$Geo(\Sigma) \text{ et } H = c$$

est minimale (et désintégrée).

Cela signifie que cette équation ne peut être résolue en appliquant les opérations (0),(1),(2) et:

(3)' : l'extension $K_i \subset K_{i+1}$ est engendrée par des solutions d'une **équation différentielle du premier ordre ou du second ordre** à paramètres dans K_i.

Les fonctions nécessaires pour décrire les géodésiques d'une surface riemannienne compacte à courbure strictement négative sont donc de nouvelles fonctions transcendantes du troisième degré au sens de Painlevé.

Merci pour votre attention