Composition de physique – Décembre 2020

1 Oscillateur harmonique – oscillateur amorti

Dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, on considère un système formé d'une masse ponctuelle m accrochée à une extrémité d'un ressort de constante de raideur k et longueur à vide l_0. La masse est astreinte à se déplacer sans frottement sur l'axe x horizontal. On repère la position de la masse par la coordonnée x, avec $x = 0$ au repos.

1. Faire un schéma.
2. En considérant le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, faire un bilan des forces.
3. Établir l'équation du mouvement et exprimer la pulsation caractéristique Ω_m en fonction de m et k.
4. Pour tenir compte des phénomènes dissipatifs, on suppose qu'une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$ s'exerce sur m. Établir la nouvelle équation du mouvement
5. La mettre sous la forme
$$\ddot{x} + \Gamma_m \dot{x} + \Omega_m^2 x = 0, \tag{1}$$
et exprimer Γ_m en fonction de α et m.
6. On suppose que le facteur de qualité $Q = \Omega_m/\Gamma_m$ de l'oscillateur vérifie $Q > \frac{1}{2}$. Résoudre l'équation obtenue en supposant qu'à l'instant initial la masse se trouve en x_0 et qu'on la lâche sans vitesse initiale.

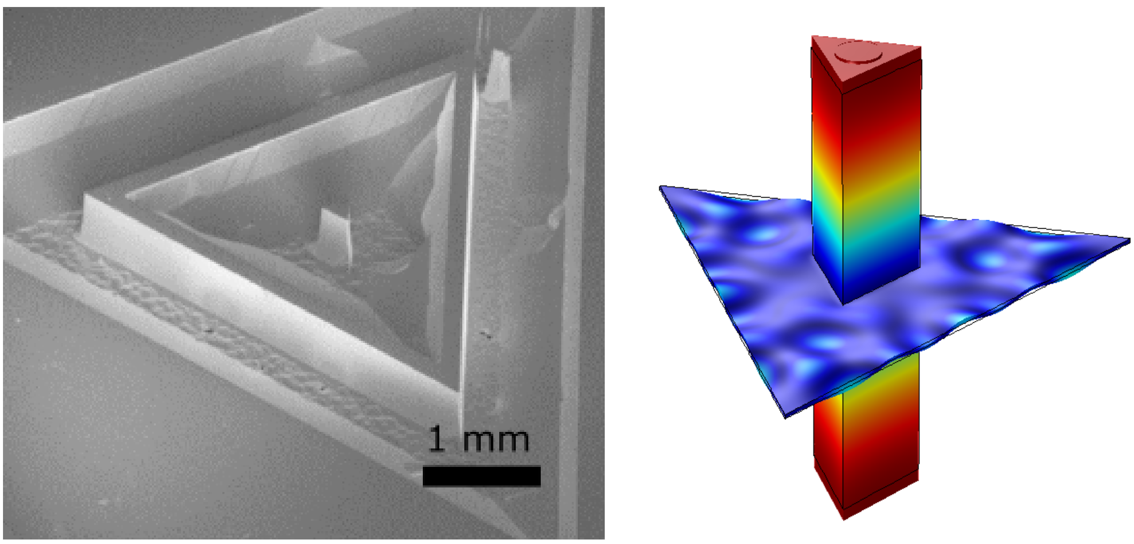

FIGURE 1 – Image obtenue par microscopie électronique d'un micro-pilier en quartz. Seul le déplacement des extrémités du pilier triangulaire au centre est étudié ici. Le déplacement associé au mode de compression étudié ici peut-être simulé. La figure de droite montre les résultats d'une telle simulation : les déplacements importants sont indiqués en rouge.

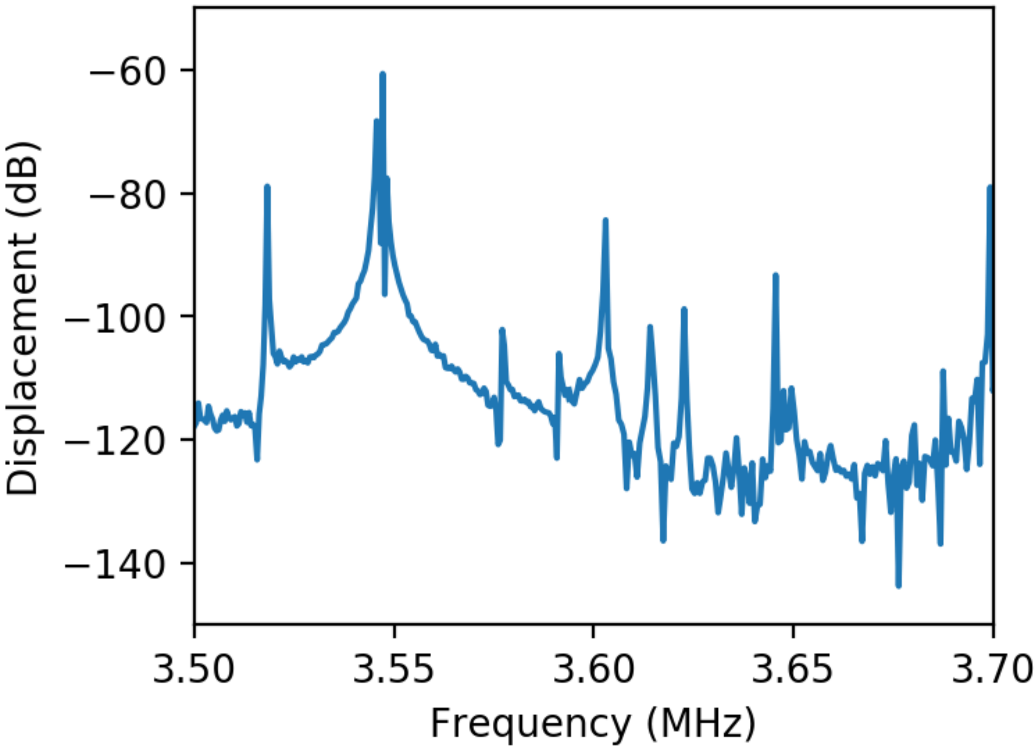

Figure 2 – Mesure du déplacement des extrémités du pilier en fonction du temps en régime libre, obtenue après arrêt soudain d'une excitation résonante.

7. Tracer l'évolution temporelle de $x(t)$ en faisant apparaitre les deux temps caractéristiques $T = 2\pi/\Omega_m$ et $\tau = 2\pi/\Gamma_m$.
8. À quelles conditions sur Ω_m et Γ_m peut on supposer $\mathcal{R}$ galiléen.

2 Le micro-pilier : influence de la masse

On s'intéresse à un micro-pilier en quartz suspendu en son centre par une fine membrane (Fig. 1). Les extrémités du pilier se déplacent faiblement symétriquement de part et d'autre de la membrane en raison de l'élasticité du matériau.

1. En assimilant le pilier à un cylindre de hauteur $h = 1\,\mathrm{mm}$ et de section circulaire de rayon $r = 90\,\mu\mathrm{m}$, donner l'expression de la masse du pilier m_p en fonction de la masse volumique du quartz ρ_q.
   Faire l'application numérique avec $\rho_q = 2{,}6\,\mathrm{kg/m^3}$.
2. Déduire de la Fig. 2 la période propre et donner la valeur numérique de Ω_m dans le cas du micro-pilier.
3. Les déplacements des extrémités du pilier sont bien décrits par l'équation (1), en remplaçant la masse m par $m_p/2$ en raison de la forme du mode de vibration du pilier. En déduire la constante de raideur k_p.
4. Qualitativement, quelle est l'influence d'une augmentation de la masse du système sur la pulsation propre du système ? Exprimer la variation $\delta\Omega$ due à une augmentation $2\delta m$ de la masse du pilier.
5. On mesure les déplacements du pilier par interférométrie optique ce qui nécessite de déposer un miroir sur l'une des extrémités du pilier. Pour simplifier, on suppose qu'on ajoute une

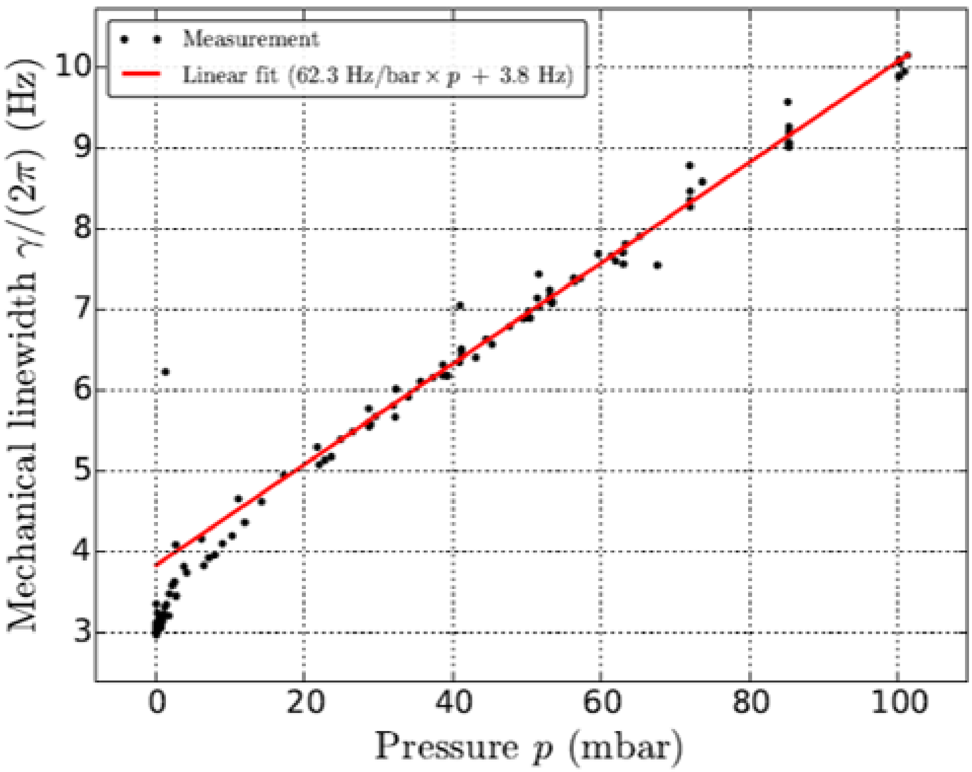

FIGURE 3 – Évolution de la dissipation mécanique *totale* Γ_m en fonction de la pression du gaz environnant. Les mesures sont réalisées à 300 K.

dépôt diélectrique réfléchissant de masse $\delta m = 50\,\mathrm{ng}$ sur chacune des extrémités du pilier. Calculer numériquement le déplacement $\delta\Omega$.

6. Sachant qu'on peut facilement mesurer un déplacement de la pulsation propre de l'oscillateur si $\delta\omega > \Gamma_m$, donner l'expression de la plus petite masse δ_m qui donne une déplacement en fréquence mesurable.
7. Faire l'application numérique pour le micro-pilier et justifier que ce type de système puisse être utilisé pour réaliser une balance pour la mesure de masses très faibles.

3 Le micro-pilier : influence de la pression

Dans le cas du micro-pilier, on suppose que le taux d'amortissement Γ_m s'exprime comme la somme de deux termes associés à des processus dissipatifs distincts :

— dissipation intrinsèque Γ_0 associées aux pertes dues aux déformations du quartz : elles ne dépendent que du matériau et de la forme du mode ;

— dissipation acoustique $\Gamma_a(P)$: les extrémités du pilier mettent en mouvement les particules de fluide du gaz environnant et se comportent comme un minuscule haut-parleur.

Le premier est constant mais le deuxième dépend de la pression du gaz dans lequel est placé l'oscillateur. On suppose $\Gamma_a(P)$ de la forme

$$\Gamma_a(P) = \beta \frac{\rho_g(P)}{\rho_q}, \tag{2}$$

où β est une constante, $\rho_g(P)$ la masse volumique du gaz et ρ_q la masse volumique du quartz donnée dans la partie précédente.

1. Sous quelle forme l'énergie est-elle perdue dans le cas de la dissipation acoustique ?

2. En supposant l'air composé uniquement de diazote de masse molaire $M = 28\,\text{g/mol}$ et assimilé à un gaz parfait, exprimer sa masse volumique $\rho_a(P)$ en fonction de P.
3. D'après les résultats de l'ajustement linéaire de la Fig. 3, déduire les valeurs numériques de Γ_0 et β.
4. En déduire la pression P_l pour laquelle $\Gamma_a(P_l) = \Gamma_0$. Faire l'application numérique
5. Justifier que ce type de système puisse être utilisé comme capteur de pression. En exploitant le résultat de la question précédente, quel est l'intérêt d'utiliser un oscillateur avec un grand facteur de qualité ?