LP n° 49 **Titre** : Oscillateurs ; Portraits de phase et non linéarités

Présentée par : Guillaume Boucher **Rapport écrit par** : Bruno Naylor

Correcteur : Stéphan Fauve **Date** : 18/12/2018

Bibliographie de la leçon :

Titre	Auteurs	Éditeur	Année
Portrait de phase des oscillateurs	Gie, Sarman	BUP, Vol 82	Mai 1992
L'ordre dans le chaos	Berge, Pommeau, Vidal	Hermann	1997
Électronique : Fondements et applications	Perez	Dunod	2006
Électronique Expérimentale	Krob	Ellipses	2002

Plan détaillé :

Niveau choisi pour la leçon: Licence 3

Pré-requis: Mécanique du solide; Électronique

Notes : Les timings indique le temps où le titre correspondant a été écrit au tableau
Les choses entre guillemets correspondent à ce qui a été dit à l'oral
En noir (mais pas en guillemets), ce qu'il faisait au tableau mais un peu long a écrire sous word...
En bleu les choses notées au tableau

Intro

Def d'oscillateur «système qui a une grandeur qui croit et décroît en fonction du tps. Y'en a plein dans la vie de tous les jours. Laser. Dans le métabolisme...» Puis déroule le plan

I Décrire un oscillateur (1min)

1) Oscillateur harmonique- portrait de phase

Écrit équation différentielle de l'oscillateur harmonique (équation (1)). Donne la solution générale. Et trace deux solutions correspondant à des conditions initiales différentes.
« Notre description habituelle x(t) n'est pas pratique pour pouvoir représenter l'ensemble des trajectoires possible »

Portrait de phase : Trajectoires adoptées pour toutes les conditions initiales accessibles.

Multiplie équation (1) par la vitesse et intègre. On obtient l'équation d'un cercle dont le rayon dépend des conditions initiales.

Trace le portrait de phase de l'oscillateur harmonique pour 2 conditions initiales différentes. Explique le sens de parcours des trajectoires «dx/dt > 0 implique qu'on va vers les x croissants. On se déplace dans le sens des des aiguilles d'une montre».

Identifie les conditions initiales avec l'énergie.

Cercles -> courbes iso-énergétiques.

Harmonique (une fréquence) -> trajectoire elliptique

2) Oscillateur anharmonique (8min)

Dessine le schéma du pendule pesant.
Applique le Théorème du Moment Cinétique

« On obtient une équation différentielle non linéaire, qui est très difficile à résoudre. Faisons comme pour l'oscillateur harmonique et multiplions par la vitesse puis on intègre. »

Équations ;

Amplitude faible → On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique.

Cosinus est borné. Donne 2 régimes : Un ou la vitesse s'annule et un ou la vitesse ne s'annule pas.

Traite les 2 cas limites.
1er cas : la vitesse s'annule jamais. On a un mouvement révolutif (note : peut-être pas le bon terme en français).

2e cas : calcule le cas limite et obtient l'équation de la séparatrice

Les dessine dans l'espace des phases.

C< 1 → oscillation
C> 1 → révolutif

« On voit qu'il y a des trajectoires non elliptiques »
Grandes amplitudes oscillantes → enrichissement spectrale

Écrit la formule de borda pour la période.

Expérience docteur : Fais une mesure de la période du pendule pour une amplitude donnée. Trace la période en fonction d'amplitude au carré. Coefficient directeur et ordonnée à l'origine colle avec la théorie
T_0= 1.35 +- 0.02 s (ordonnée a l'origine)
Coeff directeur= 1/14

« Portrait de phase puissant car on a pu comprendre le mouvement d'un système non linéaire sans résoudre les équations.

Mais dans notre étude on a oublié un facteur important : l'amortissement. Nous allons donc dans la prochaine partie prendre en compte la dissipation »

3) Oscillateur amorti (23 min)

« On va rajouter un terme de frottement visqueux à l'équation de l'oscillateur harmonique »
Écrit l'équation différentielle direct.
Gamma >0

Multiplie par la vitesse et intègre. Il obtient que la variation d'énergie est la puissance dissipée à cause des forces de frottement.

« Cette équation nous dit que plus le tps s'écoule, plus la trajectoire dans l'espace des phases va se rapprocher de l'origine. »

Dessine portrait de phase (en forme de spirale) pour oscillateur amortie. Introduit la notion de point attracteur : « Quelles que soient les condition initiales, on finit au point (0,0) de l'espace des phases.

Amplification: gamma<0

Dessine portrait de phase (spirale qui sort). Introduit le concept de point répulseur.

Réversibilité : t→-t , v→-v . « Un système réversible est donc symétrique par rapport à l'axe v=0 . On voit que les systèmes amorties ne sont donc pas réversibles ».

II Entretenir un oscillateur

<u>1) Oscillateur forces (28 min)</u>

Écrit équa diff direct

« Il y a 2 régimes. Régime transitoire et régime permanent. Nous nous intéressons qu'au régime permanent. »

Dessine a nouveau le portrait de phase pour 2 condition initiales différentes (de part et d'autres du cycle limite). Dans les 2 cas on va vers un nouvel attracteur qui est un cycle limite.

Parle des oscillateurs paramétriques. Met en mouvement une pendule en l'excitant par des oscillations verticales à une fréquence 2 omega_0

2) Oscillateurs auto-entretenus (32 min)

« Les dissipations tuent. Apporter de l'énergie fait que le système s'emballe. On a besoin que le coefficient du terme de vitesse dépende de la position. Van der Pol, ingénieur des années 20, a proposé une solution :

gamma = f(x) = - gamma_0 $(1-(x/x\_l)^2)$

Montre schéma du montage Van der pol avec power point. Montre qu'il y a un intégrateur un inverseur, et un autre intégrateur. (C'est ce qui fait qu'on a l'equa diff de l'oscillateur harmonique).
Ensuite il passe au montage van der pol.

Part d'une grande résistance R' et la diminue. On passe d'un régime quasi sinusoïdal à un régime de relaxation.

Une partie ou la non-linéarité et motrice puis dissipative.

Conclusion :

Récapitule tout, portrait de phase permet de comprendre plein de trucs. Attracteurs. Le rôle des non-linéarités, enrichissement spectrale. Oscillateur auto entretenu. Applications, laser à verrouillage de modes. Les non-linéarités peuvent rendre le système chaotique.

Questions posées par l'enseignant

Orange = question
Violet = commentaire du prof

Pourquoi l'oscillateur harmonique est une situation très courante dans la physique ?
→ Dvpt limite autour d'un point d'équilibre

Pourquoi il faut 2 conditions initiales pour l'équation de l'oscillateur harmonique ? Qu'est ce qui fixe le nombre de conditions initiales ?
On peut se ramener pour l'oscillateur harmonique à un jeu de 2 équations différentielles ordinaires d'ordre 1.

Pourquoi le pendule pesant est un problème non-linéaire ? C'est quoi la définition d'un problème non-linéaire ? Une définition générale ?

->Lorsque le théorème de superposition n'est plus valable.
Le problème est linéaire : si A et B sont 2 solutions alors A+B solutions.

Tu connais domaine de la physique qui sont linéaires ?
→ Electromag dans le vide (équations de maxwell sont linéaires). Bcp de lois d'unicité viennent du fait que c'est linéaire.
→ meca q (schrodinger est linéaire) (Notes de Bruno : attention la meca q n'est pas forcement un domaine linéaire, des qu'on prend en compte les interactions c'est plus du tout linéaire...)

définition physique de la non linéarité ? Si je force un système alors ....

système si la réponse est une fonction linéaire de la sollicitation.
Oscillateur : élongation est une fonction linéaire → réponse linéaires
élongation n'est pas une fonction linéaire → réponse non linéaires

En meca fluide, on considère une sphère dans un écoulement de vitesse V. Cet écoulement applique une force sur la sphère. Dans quel cas cette force est-elle linéaire?
C'est la force de traînée.

C'est quoi la formule de stokes ?
Quel est la condition pour que la force de stokes soit valide ? Petit nombre de reynolds
C'est quoi nombre de reynolds ?
Pour un grand nombre de reynolds, la force est en quoi ? → force en v^2
Pourquoi c'est en v^2 ? Analyse dimensionnelle ?
Y a des systèmes qui même à petites amplitudes sont non-linéaires. 2 solides en contact. Et c'est à cause de leur géométrie.

L'équation de la séparatrice du pendule pesant (celle ou C=1). Elle s'intègre cette équation ? On pourrait pas avoir x(t)?
→ Calcul assez compliqué, il faut des tables d'intégrales je crois

Ça prend un tps infini d'arriver au point séparateur

« Quand on trace un diagramme de phase c'est très bien de tracer l'énergie potentielle en fonction de x juste a cote. » Fais le pour le pendule. Ainsi que l'énergie totale pour la séparatrice.

Pour un x donné, c'est quoi la différence entre l'énergie totale et V(x) ? Ec

- Une des caractéristiques les plus importantes des non linéarités est que la fréquence change en fonction de l'amplitude.

-L'effet du terme suivant (après celui de borda) c'est quoi ? Puissance de l'amplitude et signe ?

système ralentit pour les grandes amplitudes → période augmente.

Pourquoi y a pas de termes linéaire en amplitude ? Symétrie. Période dépendrait de la phase.

Faites le dessin du pendule pesant amorti.

Qu'est ce qu'on peut dire de l'espace des phases autour de Pi ? Pendule non amorti.
C'est quoi ces courbes ? Hyperboles
Pouvez vous le montrer en une ligne mathématiquement ? DL autour de Pi. Fait qu'on passe d'un réseau d'ellipses a un réseau d'hyperboles.

-Oscillations forcées. C'est ambiguë de dire qu'on a un espace des phases 2D. Comment définir espace des phases ? Prenons un pendule, lui applique un couple constant. Et il est infiniment amorti. Du coup je néglige inertie. C'est quoi l'espace des phase de ce système ?
→ C'est juste l'axe theta. Si j ai un système d'equa diff, il faut mettre sous forme d'un système d'équations couplées du 1er ordre en temps.

Oscillateur forcé. Pas une équation autonome : le tps intervient explicitement. Il faut rajouter une 3e équation Theta point = omega_e avec omega_e la pulsation du système excitateur.

Oscillation paramétrique c'était bien. Mais l'opérateur ne fait pas nécessairement un mouvement verticale. Faudrait un montage plus propre.
C'est quoi la formule générale de la fréquence d'excitation pour l'oscillateur paramétrique ?
N'existe-t-il pas une autre fréquence qui peut exciter le système ?
→ n * fréquence de l'excitateur = 2 omega_0
n=1 est celle qui dissipe le moins.
Exemple de la balançoire.

Cette formule ne te fait pas penser a une formule de physique des ondes ?
Bragg.

Et le problème physique se ressemble!

Van der Pol. Montrer que le cycle limite devient de plus en plus petit et que ça ne cycle plus.
Pourquoi est ce que ça devient oscillateur à relaxation ? Limite gamma$_0$ infinie correspond à la relaxation.

Est ce que ça ne surprend pas l'équation de l'oscillateur de l'harmonique ? (Elle ne dépend pas de l'origine des temps)
l'exemple très simple de symétries brisées. Une solution de problème de physique n'est pas suppose avoir les symétries du problème. Invariance par translation ds tps. L'ensemble des solutions ne brisent pas la symétrie. Mais une solution particulière peut briser la symétrie. Principe de curie. On retrouve ça dans van der pol à la transition entre non oscillant et oscillant.
C'est assez général quand on a des instabilités.

Effet important : création d'harmonique et chgt de fréquence en fonction de l'amplitude. Tu connais des applications de ces 2 phénomènes ?

Optique non linéaire (génération de seconde harmonique)...
En physique des solides ? La dilation des cristaux.

Commentaires donnés par l'enseignant

Point singulier est un point fixe, là ou la dérivée s'annule
Frottements solide. Ça introduit des discontinuités.
Manquait quelques généralités sur l'espace des phases.
Pourrait dire que le point (0,0) de van der pol devient instable. Point de bifurcation.

Partie réservée au correcteur

Avis sur le plan présenté

Plan correct dans l'ensemble mais il n'est probablement pas nécessaire de traiter l'oscillateur forcé additivement. Le caractère non linéaire de l'oscillateur paramétrique est discutable (il faut pouvoir correctement le justifier en cas de question). Ne pas traiter ces deux cas aurait permis de développer plus l'oscillateur de van der Pol et en particulier de montrer les deux régimes : quasi-sinusoidal et de relaxation. Il faut aussi insister plus sur les effets importants des non-linéarités: changement de fréquence avec l'amplitude, création d'harmoniques, existence de solutions qualitativement différentes (différentes propriétés de symétrie)

Concepts clés de la leçon

L'espace des phases permet de décrire qualitativement les comportements dynamiques d'un oscillateur (ou d'un système d'équations différentielles) sans résoudre explicitement les équations. Les non-linéarités d'un oscillateur entraînent l'existence de solutions qualitatives différentes. Deux autres effets importants des non-linéarités sont : la dépendance de la fréquence avec l'amplitude et la création d'harmoniques.

Concepts secondaires mais intéressants

La création d'harmoniques permet des applications utiles (en électronique et en optique). Elle permet également d'expliquer la dilatation des cristaux (qui est nulle dans l'approximation harmonique). La transition entre solutions oscillantes et solutions à vitesse moyenne non nulle pour une valeur critique de l'énergie mécanique d'un pendule pesant, comporte de nombreuses analogies avec les transitions de phase (symétrie brisée, quantités qui divergent à la transition).

Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur)

- Mesure de la fréquence d'un pendule en fonction de son amplitude initiale. Montrer l'augmentation du taux d'harmoniques avec la croissance de l'amplitude si la mesure de l'angle en fonction du temps est possible.
- Oscillateur de van der Pol : montrer l'existence d'un seuil d'oscillation, éventuellement la loi de croissance de l'amplitude d'oscillation au voisinage du seuil ; montrer la transition entre oscillations quasi-sinusoidales et oscillations de relaxation.

Points délicats dans la leçon

Il faut savoir donner une définition générale de l'espace des phases pour un système décrit par un ensemble d'équations différentielles couplées. Une définition précise que ce que l'on entend par « non-linéaire » manque souvent (définition math. ou réponse non proportionnelle à la sollicitation). Il faut savoir tracer les trajectoires dans l'espace des phases de façon qualitative à l'aide de l'analyse autour des points d'équilibre (stables : ellipses ; instables : hyperboles) et de l'expression de l'énergie potentielle (quand elle existe). L'effet de la dissipation sur la modification des séparatrices dans l'espace des phases du pendule n'est en général pas maîtrisée.

Bibliographie conseillée

Soutif, Vibrations, propagation, diffusion (Dunod)
Rocard, Dynamique générale des vibrations (Masson)
Jordan and Smith, Nonlinear ordinary differential equations (Oxford)