

LP n°39 **Titre :** Aspect ondulatoire de la matière. Notion de fonction d'onde.

Présentée par : Alexandra d'ARCO

Rapport écrit par : Jules F & Gloria B.

Correcteur : Jean Hare

Date : 06/02/2019

Bibliographie de la leçon :

Titre	Auteurs	Éditeur	Année
Méca Q tome 1	Cohen-Tannoudji		
Tout en un PC/PC*, nouv. prog.		Dunod	
Supermanuel de Physique	J. Majou et S. Komilikis	Bréal	

Plan détaillé

Niveau choisi pour la leçon : CPGE

Prérequis :

- Aspect corpusculaire
- diffraction
- paquet d'onde
- structure cristalline

Intro : Leçon précédente : aspect corpusculaire de la lumière avec la notion de photon. Réciproquement, est-ce que la matière possède un aspect ondulatoire ?

Postulat de de Broglie " les corpuscules matériels, tout comme les photons, peuvent avoir un aspect ondulatoire "

1min

I. Onde associée à une particule

1. Relation de de Broglie

on doit associer à la matière une longueur d'onde. On fait le parallèle avec la loi de Wien pour laquelle on tentait d'exprimer la longueur d'onde du rayonnement en fonction des constantes fondamentales. Avec k , T et c on ne peut se débarrasser de la masse : il faut introduire la constante de Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js. on peut alors résoudre le problème et exprimer $L = hc/k_B T \rightarrow$ la constante de Planck permet de trouver la longueur d'onde du rayonnement.

Même raisonnement appliqué à une particule : L doit dépendre de m , v et h ... on résout à nouveau pour obtenir la relation de de Broglie : $\lambda = h/mv$.

4min45

Particule décrite par les mêmes caractéristique que le photon : $E = \hbar \cdot \omega$ et $p = \hbar \cdot k$

Slide : longueur d'onde de de Broglie pour différents corps des domaines macroscopiques ou microscopique. On ne peut imaginer observer l'aspect ondulatoire de la matière que pour des corps microscopique : idéalement des particules.

7min15

2. Mise en évidence expérimentale

Faisceau d'électron envoyé sur une poudre, observation de la diffraction des électrons

On augmente la tension d'accélération jusqu'à 5kV pour voir apparaître les anneaux de diffraction. Observation : deux cercles d'anneaux correspondant au 2 plans du graphite. Mesure du rayon des anneaux. On a les relations :

- Diffraction de Bragg : $2d\sin(\theta) = \lambda$
- Géométriquement : $\tan(2\theta) = r/l$
- de Broglie : $\lambda = h/mv$

On peut donc remonter expérimentalement à la longueur de de Broglie : $1,8 \cdot 10^{-11} \text{m}$, en théorie on prévoyait $\lambda = 1,8 \cdot 10^{-11} \text{m}$.

12min45

Expérience réalisée en 1927 par Davisson et Germer : faisceau d'électrons sur un cristal de Nickel diffractant, observation de maximum et minimum → aspect ondulatoire. Depuis d'autres expériences 1960 et 1992 fente d'Young, 1974 interféromètre type Mach Zehnder et récemment 2012 interférence de grosse molécules.

14min30

II. Formalisme de l'onde de matière

1. Notion de fonction d'onde

L'état quantique est caractérisé par une fonction d'onde qui contient toutes les informations sur le corpuscule. Elle est continue, infiniment dérivable et de carré sommable.

Amplitude de probabilité de présence : probabilité de détecter une particule : $|\psi|^2$

17min15

2. Interprétation probabiliste

$dP(M,t)$ représente la probabilité que la particule puisse être détectée au voisinage point M à l'instant t où la mesure est effectuée.

Notion de mesure importante : répétabilité de la mesure.

Slide : Interprétation hydrodynamique de la fonction d'onde.

Comment décrire l'évolution temporelle et spatiale de la position d'une particule ?

19min30

III. Dynamique de la fonction d'onde

1. Equation de Schrödinger

On considère une particule de masse m, au point M dans un référentiel R en interaction avec différents systèmes physiques résultant en un potentiel local $V(M,t)$.

Equation de Schrödinger (1925) 1D dans le cadre du programme. Commentaires :

- On retrouve la constante de Planck : c'est une équation quantique.
- On peut écrire $p = i\hbar \cdot d/dx$, on fait apparaître le terme d'énergie cinétique
- 1^{er} ordre en temps si ψ connu à t elle est connue à tout instant t ultérieur
- Le potentiel est défini à une constante près : l'ajoute d'un potentiel V_0 ne modifie la

solution Ψ que par un terme de phase qui ne change pas le module de Ψ^2 : la densité de probabilité de présence est donc inchangée (seul caractère physique)

- Equation linéaire en Ψ : il existe un théorème de superposition pour les corpuscules matériels.

Cas d'une particule libre : $V = V_0 = 0$

Solution de cette équation est une onde plane pour laquelle on peut donner la relation de dispersion : $\hbar \omega = \hbar^2 k^2 / 2m$: l'énergie issue de la relation énergie impulsion est égale à l'énergie mécanique (restreinte à l'énergie cinétique ici car l'énergie potentielle est prise nulle par hypothèse).

$|\Psi|^2 = \text{cste}^2 \rightarrow$ uniforme : position inconnue et problème de sommabilité : cette onde n'a aucune réalité physique !!

$p = \hbar k \rightarrow$ impulsion connue

28min30

2. Paquet d'onde

Calcul usuel du paquet d'onde en somme d'onde plane. On injecte la relation de dispersion dont on fait un DL autour du ω_0 d'intérêt. On factorise par la porteuse et on fait apparaître vitesse de groupe et vitesse de phase.

$\text{Re}(\Psi)$ en fonction de x : on visualise la localisation de la particule et de son mouvement.

32min

Interprétation du paquet d'onde en somme d'ondes planes : on localise la particule de mieux en mieux, mais au prix de disperser les valeurs d'impulsion.

33min30

3. Principe d'indétermination quantique

Slide : Heisenberg (1927) : on définit valeur moyenne, écart-type. Principe d'indétermination quantique traduit par l'inégalité de Heisenberg : $\Delta x \Delta p > \hbar/2$.

Interprétation de la diffraction et respect de l'inégalité d'Heisenberg . Schema

Critère de validité de la mécanique quantique en terme d'action : comparer l'action à \hbar

$\hbar \gg S$ effet quantique

$\hbar \ll S$ effet classique

39min

Conclusion : on a vu le caractère ondulatoire de la matière de manière réciproque à l'aspect corpusculaire du rayonnement.

Questions posées par l'enseignant

- Le raisonnement de de Broglie était dû à la réciprocité de la lumière et des corpuscules, Einstein avait-il prédit quelque chose à propos de la dualité onde-corpuscule ? Quelle était l'idée générale de réciprocité qu'Einstein imaginait entre lumière et matière ?
- Pourquoi dans la relation de de Broglie vous ne mettez pas la célérité de la lumière ?

On sait que les particules ne vont pas à c mais à v .

- Pourtant la thèse de de Broglie est entièrement relativiste... Relation de de Broglie limitée au cas classique ou existe dans le domaine relativiste ? Dans l'expérience sur la table on est dans quel cas ?

Existe dans le cas relativiste. Sur l'expérience présentée il faut comparer l'énergie de masse de l'électron et l'énergie de masse des électrons dans l'expérience.

- Tableau sur les longueurs d'onde de de Broglie, on peut en conclure quoi ?

A notre échelle humaine on n'a aucune chance d'observer l'aspect ondulatoire de la matière.

- Pourquoi des électrons à $c/10$? C'est quoi l'échelle de la vitesse d'un électron dans un atome ?

Dans un atome c'est $\alpha \cdot c$ (constante de structure fine) donc $c/100$ plutôt... on trouve que la longueur d'onde associée à cet électron est de l'ordre du rayon atomique.

- Proposer une vision ondulatoire du modèle de Bohr.

Le moment cinétique doit être un multiple entier de \hbar . L'onde est forcément stationnaire : la longueur d'onde est un sous-multiple entier du rayon de l'orbite.

- Pourquoi Ψ est complexe ?

Ça permet d'introduire deux degrés de liberté : c'est plus riche qu'une fonction réelle, de la même manière qu'il faut E et B , p et v , si on veut une information sur x et p il faut nécessairement deux fonctions : $\text{Re}(\Psi)$ et $\text{Im}(\Psi)$!

- Comment Schrodinger a trouvé l'équation ?
- Généraliser Schrödinger en présence d'un champ magnétique (il faut écrire le hamiltonien d'une particule dans un champ électromagnétique : p^2 devient $(p - qA)^2$).
- Est-ce qu'on aurait pas pu prolonger le calcul du paquet d'onde ? Pour en tirer quoi ?

On prolonge le DL à l'ordre 2 pour exprimer l'étalement du paquet d'onde au cours du temps.

- Est-ce qu'on peut étayer le critère de validité de la mécanique classique sur l'action ?

Interprétation en terme de trajectoire.

- Quelle est la relation entre la fonction d'onde et l'action ?

$\Psi = \text{Exp}(iS/\hbar)$ donc si S grand Ψ tourne très vite et on tue x et p par interférence destructive. On peut aussi le voir en termes de phase stationnaire.

Commentaires donnés par l'enseignant

Partie I

L'introduction de la relation de de Broglie en termes d'analyse dimensionnelle est fort peu convaincante, d'autant plus que

- (i) la loi de Wien introduit la température mais n'a rien de quantique (il faudrait peut-être plutôt parler de la loi de Planck
- (ii) pour la particule matérielle on n'a aucune raison d'introduire la température
- (iii) si on introduit la constante $K=e^2/4\pi\epsilon_0$ on peut bel et bien former la longueur $R_c=K/mc^2$ (rayon classique de l'électron $\sim 10^{-15}$ m)

Le raisonnement d'Einstein pour introduire le photon était de chercher une description corpusculaire de la lumière par symétrie avec la description de matière qui était foncièrement corpusculaire. On peut alors voir l'idée de de Broglie comme une forme de réciproque : si la lumière a les deux aspects, la matière devrait aussi.

Manque de chance, ce 'est pas l'approche historique (*si on ne connaît pas l'histoire, autant éviter d'aller sur ce terrain*).

En fait de Broglie se place dans le cadre de la relativité (restreinte) : si l'énergie E est liée à une oscillation temporelle de fréquence $\nu=E/h$, il devrait y avoir un équivalent spatial entre l'impulsion et une oscillation spatiale qu'il appelle « onde de phase » sans proposer d'interprétation physique.

En termes modernes, on peut résumer son raisonnement comme suit : le couple (E, \mathbf{p}) forme un quadrivecteur, de même que le gradient de la phase (ω, \mathbf{k}) ; alors on pose $E=\hbar \omega$ ne sera cohérent avec la relativité que si on a la même relation entre les parties spatiales, soit $\mathbf{p}=\hbar \mathbf{k}$.

La suite du plan est plutôt bien vue avec quelques amendements possibles :

- l'interprétation probabiliste du II) est un peu suspendue en l'air : c'est je pense le bon endroit pour parler des fentes d'Young (et pourquoi pas montrer la vidéo de Shimizu sur les atomes de néon ?)
- si on a mis l'effet dispersif sur u paquet d'onde dans les prérequis, il n'est pas forcément utile de le refaire in extenso. Ou alors en profiter pour aller au second ordre pour montrer l'élargissement
- l'introduction de $\mathbf{p}=-i\hbar \partial/\partial \mathbf{x}$ (attention au signe) permet d'expliquer le laplacien=énergie cinétique mieux qu'en disant que c'est $E-V$
- l'introduction de l'équation de Schrödinger à partir de l'équation de D'Alembert est une façon simple, à considérer.
- La justification de la relation de Heisenberg avec un simple analogue avec la diffraction n'est pas très convaincante, ou il faudrait y passer plus de temps. Mais après tout c'est aussi une simple propriété mathématique de la TF...
- Ne pas parler ici de l'action si vous n'en avez pas davantage sous la pédale.

Partie réservée au correcteur

Avis sur le plan présenté

Plan globalement équilibré, les notions essentielles sont présentes et plutôt bien faites et avec une progression satisfaisante, modulo les observations faites au paragraphe précédent.

Concepts clés de la leçon

Relation de de Broglie : origine relativiste
Interprétation de Born (probabilités)
Ordre de grandeurs et vérifications expérimentales
Eq de Schrödinger et exemple minimal (OPP)
Relations de Heisenberg et limite classique.

Concepts secondaires mais intéressants

Origine de l'éq de Schrödinger
Lien entre ψ et l'action (pas satisfaisant dans la leçon présentée), lien avec la quantification de Bohr-Wilson-Sommerfeld)
Dualité onde corpuscule et complémentarité

Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur)

Diffraction des électrons dans une poudre de graphite (il faut savoir expliquer la relation de Bragg) Expérience quantitative mais peu précise.
LP39 pas au programme de l'agrégation docteurs.

Points délicats dans la leçon

Ne pas se précipiter sur l'équation de Schrödinger, mais faire un maximum de physique avant de l'introduire. Notamment on peut postuler des ondes planes à partir de de Broglie seulement.
Les approches physiques de la relation d'indétermination de Heisenberg demandent pas mal de temps.

Bibliographie conseillée

Rien à redire sur la biblio proposée
On peut avec profit relire le cours de Feynman
On peut aussi s'appuyer sur le Le Bellac.