**LP n°** 18 **Titre** : Phénomènes de transport

**Présentée par** : Hugo Roussille **Rapport écrit par** : Julien Froustey

**Correcteur** : Stephan Fauve **Date** : 16/01/2019

| Bibliographie de la leçon : | | | |
|---|---|---|---|
| **Titre** | **Auteurs** | **Éditeur** | **Année** |
| **Thermodynamique** | **Diu** | | |
| **Thermodynamique** | **BFR** | | |
| **DUNOD PC-PC* Nouveau programme** | | | |
| **Tec&Doc Pc-PC* Ancien programme** | | | |

**Plan détaillé**

Niveau choisi pour la leçon : **CPGE**

Pré-requis : **thermodynamique à l'équilibre, hydrodynamique (viscosité), électromagnétisme (loi de Joule)**

Jusqu'à présent en thermo : équilibre. Comment se met en place l'équilibre ? On sent intuitivement qu'il y aura le transport de certaines quantités thermodynamiques, comme l'énergie.

**Exp glycérol :** il la lance.

## I- Généralités sur les phénomènes de transport

### *1) Types de transport*

Convection, rayonnement et diffusion. *(Définitions sur slide)*
En général, un des types de transport est majoritaire. Par exemple en hydrodynamique, le nombre de Reynolds compare convection et diffusion.
On va traiter en détail un exemple : la diffusion thermique.

### *2) Equilibre thermodynamique local*

Jusqu'à présent en cours, étude de l'échelle macroscopique $L \sim 1\,m$. Echelle microscopique $a \sim 10^{-10}\,m$. On définit alors l'échelle mésoscopique $a \ll \delta \ll L$, afin de pouvoir définir des champs scalaires (par moyenne sur une échelle très grande devant $a$) non uniformes.
*Slide : résumé des différentes échelles*

ETL : à chaque instant, tout sous-système mésoscopique est à l'équilibre.

<u>Bilan énergétique pour la diffusion thermique :</u>
1 dimension, $\vec{j}_{th}$ densité de flux thermique, masse volumique $\rho$, section $A$, capacité thermique massique de la phase condensée $c$.

Application du premier principe $\Longrightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial j_{th}}{\partial x}=0$. Généralisation avec terme de sources, 3D.

Pour clore le système d'équations, il manque encore une loi reliant $j_{th}$ et $T$.

*3) Réponse linéaire*

Loi phénoménologique de Fourier $\vec{j}_{th}=-\lambda \overrightarrow{grad}\,T$. ODG pour la conductivité thermique.
En utilisant le bilan énergétique, on arrive à :
$$\frac{\partial T}{\partial t}=D_{th}\Delta T$$
avec $D_{th}=\frac{\lambda}{\rho c}$. Unité + ODG.
Commentaires sur l'équation (ordre en temps, irréversibilité).

*4) Généralisation*

Raisonnement général :
- Inhomogénéité d'une grandeur intensive (ex : température)
- Transport d'une grandeur extensive (ex : énergie interne), de façon à rétablir l'homogénéité

*Slide : analogies entre phénomènes de transport (diffusion thermique, de particules, de quantité de mouvement + conduction électrique)*

On a à chaque fois une équation du type $\frac{\partial f}{\partial t}=D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Ordres de grandeur très différents pour les coefficients de diffusion.

## II- <u>Equation de diffusion</u>

*1) Irréversibilité*

Calcul du taux d'entropie volumique créée ($\delta S_c=s_c\times A dx\,dt$) pour le système mésoscopique (tranche x, x+dx) du I.

Second principe : $c\rho A dx\frac{dT}{T}=s_c A\,dx\,dt-A\,dx\,dt\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{j_{th}}{T}\right)$.

On arrive après calculs (faits au tableau) à $s_c=\lambda\times\frac{1}{T(x,t)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2\geq 0$ ce qui remontre bien que $\lambda>0$.

*2) Propriétés d'échelles*

Exemple de la diffusion de particules. En ODG,
$$\frac{\partial n}{\partial t}=D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\longrightarrow\frac{\tilde{n}}{\tau}\sim D\frac{\tilde{n}}{l_n^2}\Longrightarrow l_n=\sqrt{D\tau}$$

**Exp :** diffusion du glycérol dans l'eau, explication de l'expérience.

Estimation de $D$ en ordres de grandeur. Angle de déviation $\alpha \sim \frac{d}{l_n}$ où $d$ est l'épaisseur de la cuve.

On mesure $\alpha$ sur l'expérience, et déduire $D \sim \frac{d^2}{\alpha^2 \tau} \simeq 2.10^{-6}$.

Puissance du raisonnement en ordre de grandeur pour estimer des résultats sans résoudre l'équation aux dérivées partielles. On va enfin voir la toute-puissance de l'analogie.

### III- Régime stationnaire

Barre avec température $T_1$ et $T_2$ aux extrémités. En régime stationnaire, flux
$\Phi = \frac{\lambda A}{L}\left(T_1 - T_2\right)$
Résistance thermique ! L'analogie devient exacte avec la conduction électrique.
*Slide : analogies entre phénomènes de transport en régime stationnaire, résistances*

Application au simple vitrage ($R_{th} = \frac{1}{\lambda}\frac{e}{A}$) / double vitrage par association de résistances en série.

**Conclusion :** transport de quantité extensive à cause d'une inhomogénéité de grandeur intensive. On peut en faire généraliser cela, et les différents phénomènes (par exemple conduction électrique et thermique) sont reliés : effets Peltier, Seebeck…

| **Questions posées par l'enseignant** |
|---|

**- Dans l'ETL, il n'y aurait pas une hypothèse en plus des échelles spatiales ?**
Il faut des hypothèses sur les temps aussi : temps de relaxation très petit devant le temps d'évolution macroscopique.

**- Autre façon, plus pragmatique, de définir $\vec{j}_{th}$ ?**
Rappeler la définition de ce que c'est un flux plutôt que de juste dire « c'est un flux ».

**- Hypothèses supplémentaires pour arriver à la loi de Fourier ?**
On a en fait supposé que $j_{th}$ ne dépendait que de la température (pas de la pression par exemple), et ensuite c'est un peu du Taylor.
**Mais il n'y aurait pas d'autres façons d'avoir une dépendance linéaire ? On pourrait avoir une relation matricielle avec le gradient…**
Hypothèses d'isotropie, et de « localité dans le temps » (pas d'effets de mémoire). *(En bref c'est exactement les mêmes hypothèses que ce qu'on fait dans un DLHI)*

**- On peut justifier les ordres de grandeur de $\lambda$ ?**
On peut faire des modèles microscopiques un peu simplistes qui donnent l'ordre de grandeur. Même en ODG, on obtient $D \sim l_{pm} u$ où $u$ est la vitesse quadratique moyenne.
**Alors ça ça marche bien pour un gaz. Comment on en déduit $\lambda$ ?**
On évalue $c$ avec l'équipartition (Dulong et Petit pour un solide, $\frac{3R}{2}$ pour un gaz, tout ça tout ça).
$\rho$ on peut utiliser la loi des GP ; pour des phases condensées simples on peut dire que c'est en

gros $\frac{m}{a_0^3}$ avec $a_0$ le rayon de Bohr et $m$ la masse d'une particule.
Pour un liquide, on dit que le libre parcours moyen est de l'ordre de l'angström (les particules se touchent).

**- Dans un liquide, diffusion de particules bien plus lente que diffusion thermique. ODG ?**
C'est faisable en utilisant la loi de Stokes et le théorème de fluctuation-dissipation.

**- Pour évaluer $\delta S_e$, tu as écrit $\delta S_e = \frac{\delta Q_{rev}}{T}$?**
Non, pour le calcul on considère qu'il y avait deux thermostats de chaque côté, un à $T(x,t)$ et un à $T(x+dx,t)$. Mais ça reste discutable.

**- « Le signe – dans la loi de Fourier conduit à une irréversibilité de l'équation de diffusion ». Ah bon, ça aurait fait quoi un signe + ?**
Non, ce signe – dit juste qu'on cherche à rétablir l'homogénéité. Un signe + ferait de l'anti-diffusion, qui diverge exponentiellement. Le « problème » c'est que c'est une dérivée première en temps.

**- Equation de Schrödinger pour une particule libre 1D ?**
$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$
**C'est une équation de diffusion non ?**
Non. Le $i$ change tout ! C'est une équation réversible par $(t \to -t, \psi \to \psi^{\text{¿}})$. On peut voir que c'est une équation d'onde (deux équations couplées pour $\psi$, $\psi^{\text{¿}}$), ou alors faire la transformation de Madelung ($\psi = r e^{i\theta}$) pour tomber sur l'hydrodynamique.

**- Equation de diffusion en électromagnétisme ? (Indice : écrire l'équation sur $\vec{B}$ en ARQP)**
En fait c'est l'effet de peau, qui est bien une équation de diffusion.

**- Montrer, à partir de l'équation de diffusion, que les fluctuations de $T^2$ ont tendance à être annulées ?**
Argument rapide sur un graphe, convexité (une bosse donne $\frac{\partial T}{\partial t}$<0).
**Etape 1 : montrer que $\acute{T} = cste$.**
$$\acute{T} = \frac{1}{L}\int_0^L T(x,t)\,dx \Longrightarrow \frac{\partial \acute{T}}{\partial t} = \frac{D}{L}\int_0^L \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx = \frac{D}{L}\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]_0^L = 0$$
si pas de flux aux bords.
**Etape 2 : évolution de $\acute{T^2}$ ?**
$$\frac{\partial \acute{T^2}}{\partial t} = \frac{2D}{L}\int_0^L T\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx = \frac{2D}{L}\left(\left[T\frac{\partial T}{\partial x}\right]_0^L - \int_0^L \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dx\right) = \frac{-2D}{L}\int_0^L \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dx < 0$$
Donc $\acute{T^2}$ décroît tant qu'il y a des gradients. Or $\acute{T}$ est constant et $\acute{T^2} \geq \acute{T}^2$. On voit donc que l'état final correspond à une absence de gradient, où la variance est nulle.

## Commentaires donnés par l'enseignant

C'est finalement une leçon sur la diffusion… Problème c'est qu'en prépa on n'a pas trop le choix, et on a que 40 min.

Exemple intéressant : diffusion par un champ de vitesses uniquement turbulent (diffusivité de Taylor), qui ramène encore de la convection à de la diffusion.

## Partie réservée au correcteur

**Avis sur le plan présenté**

Plan correct mais il faudra pouvoir justifier pourquoi le choix a été fait de ne traiter que la diffusion en ne faisant que mentionner l'existence de la convection et du rayonnement.

**Concepts clés de la leçon**

Notion d'équilibre thermodynamique local. Le phénomène de diffusion résulte d'une loi de conservation (pour des quantités telles que l'énergie ou la masse) et d'une loi empirique reliant le flux au gradient de la grandeur qui le crée en faisant l'hypothèse de faible gradient.

**Concepts secondaires mais intéressants**

Justification microscopique de l'équation de diffusion. Discuter quelques ordres de grandeur de diffusivité et de conductivité.

**Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur)**

L'expérience proposée convient. On peut essayer de mettre en évidence des effets de convection en imposant un petit gradient de température.

**Points délicats dans la leçon**

Le bilan d'entropie pour la couche entre x et x+dx laisse supposer que, soit l'entropie est échangée de façon réversible (l'irréversibilité pouvant être prise en compte par l'entropie créée) soit que la couche est située entre deux couches se comportant comme des thermostats. On retrouve le même type de problème quand on écrit la relation entre flux d'entropie et flux de chaleur (cf DGLR).

**Bibliographie conseillée**

DGLR, Thermodynamique, Hermann
Callen, Thermodynamics, Wiley