La pression de radiation en acoustique

par P. TANGUY et D. THOUROUDE,
Laboratoire de Théorie des Systèmes Physiques
Université de Rennes I - Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex.

I. INTRODUCTION.

La notion de pression de radiation en électromagnétisme est une notion familière aux étudiants et les professeurs ne manquent pas de moyens pour exposer un calcul cohérent de sa valeur ; le moyen le plus simple étant sans doute celui qui fait appel à la notion de photon. Par contre, en ce qui concerne la propagation des ondes en mécanique, la plupart des manuels d'enseignement sont particulièrement discrets sur ce sujet. A notre connaissance la notion de pression de radiation en acoustique n'est évoquée que dans le livre de J.-P. PEREZ [1] (*) mais l'auteur n'en donne que la valeur (qu'il demande d'admettre) ; les quelques lignes de commentaires suivant le résultat n'ayant rien de convaincant.

Si la notion de pression de radiation en acoustique n'apparaît pas évidente, cela est dû aux approximations faites lorsqu'on établit l'équation de propagation. Dans cette note, nous nous proposons de montrer que la notion de pression de radiation peut être introduite de différentes manières tout en restant dans le cadre classique de l'étude de la propagation des ondes en mécanique. Ce faisant, nous désirons mettre en lumière deux faits :

a) Comme nous l'avons dit précédemment, ce sont bien les approximations de l'acoustique qui font disparaître la notion de pression de radiation.

b) Si l'étude de la propagation des ondes transversales en mécanique ne présente pas de difficulté, par contre l'étude de la propagation des ondes longitudinales requiert un soin particulier.

(*) A une exception près ; nous le verrons par la suite.

II. ONDES TRANSVERSALES SUR LES CORDES. « FORCE DE RADIATION » ET CONSEQUENCE.

1. Force de radiation : définition.

Considérons (fig. 1) une corde vibrante fixée à son extrémité $x = 0$.

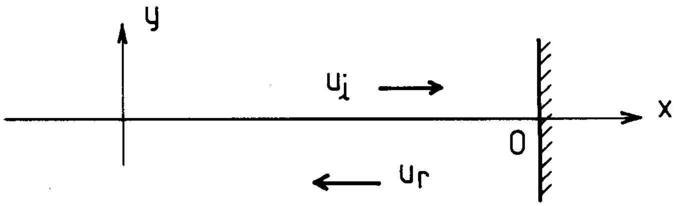

Fig. 1

Lorsqu'une onde incidente arrive au point fixe O situé en $x = 0$, celle-ci doit donner naissance à une onde réfléchie u_r car le point fixe O ne peut absorber l'énergie transportée par l'onde incidente. A cause du passage de l'onde, le point O doit exercer sur la corde une force $-\vec{F}$ qui fait se réfléchir l'onde. D'après le principe de l'action et de la réaction, le passage de l'onde fait que la corde exerce sur O une force $+\vec{F}$ dont la moyenne temporelle est ce que nous appelons force de radiation.

2. Calcul de la « force de radiation ».

a) CAS GÉNÉRAL.

Pour calculer la force de radiation, considérons une corde vibrante dans laquelle la tension est σ et imaginons le montage schématisé sur la fig. 2.

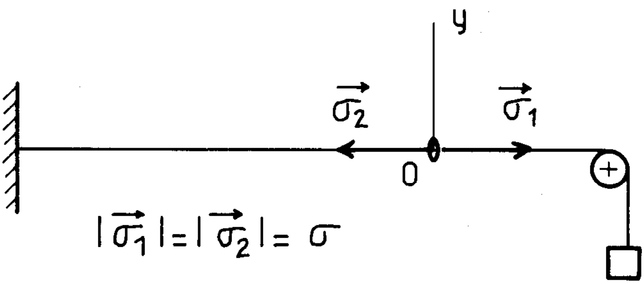

Fig. 2

Le point de fixation de la corde est un petit anneau dont le diamètre intérieur est juste égal au diamètre de la corde. Cet anneau peut glisser sans frottement sur la corde mais est maintenu dans une position fixe par un opérateur de sorte qu'il sert de point où se réfléchissent les ondes [3]. Si la tension de la corde est suffisamment grande, en l'absence de tout mouvement, l'anneau ne provoque pas de flexion de la corde et sa masse peut être négligée. Dans ces conditions, la force exercée par la corde sur l'anneau est nulle (fig. 2). Lorsqu'une onde transversale polarisée selon Oy se propage le long de la corde, celle-ci exerce sur l'anneau des forces représentées sur la fig. 3.

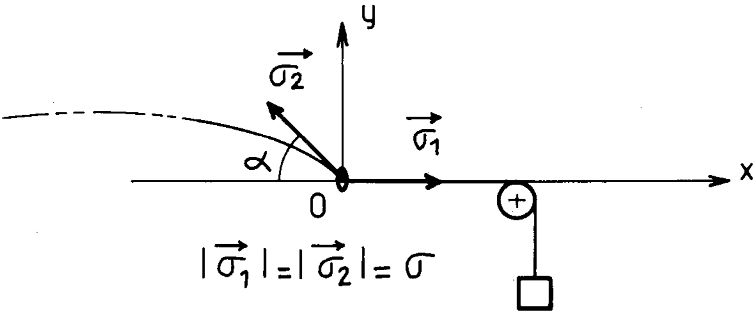

Fig. 3

Avec les notations de la fig. 3, on a :

$$F_y = \sigma \sin \alpha \tag{1}$$

$$F_x = \sigma\,(1 - \cos \alpha). \tag{2}$$

Or, dans le cadre de l'approximation des mouvements de faible amplitude, nous avons (toujours avec les notations de la fig. 3) :

$$\sin \alpha \cong \alpha \cong \mathrm{tg}\,\alpha = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} \tag{3}$$

Avec ces approximations, les formules (1) et (2) deviennent :

$$F_y \cong -\sigma \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} \tag{4}$$

$$F_x \cong \frac{\sigma}{2} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}\right]^2 . \tag{5}$$

Soit un ébranlement incident quelconque $y_i = f\left(t - \dfrac{x}{C}\right)$ (C désigne la célérité de propagation le long de la corde) qui met le temps τ pour passer un point d'abscisse fixe quelconque de la corde ; cet ébranlement mettra aussi le temps τ pour se réfléchir sur l'anneau en donnant naissance à l'ébranlement réfléchi $y_r = -f\left(t + \dfrac{x}{C}\right)$. A l'aplomb de l'anneau pendant le temps τ, on a :

$$y(0,t) = y_i + y_r = 0 \tag{6}$$

et :

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{2}{C}\,\frac{\partial f}{\partial t}(t,0). \tag{7}$$

En prenant pour origine des temps l'instant où l'ébranlement incident arrive sur l'anneau, on trouve que les valeurs moyennes de F_y et F_x valent :

$$< F_y > = -\frac{2\sigma}{C}\cdot\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\partial f}{\partial t}(t,0)\,dt,$$

soit :

$$< F_y > = -\frac{2\sigma}{C\tau}\,[f(\tau,0) - f(0,0)] = 0\,; \tag{8}$$

car par définition d'un ébranlement quelconque, en un point donné de la corde y n'est non nul que pendant le temps de passage de cet ébranlement. Par contre, pour $< F_x >$ on trouve :

$$< F_x > = +\frac{2\sigma}{C^2}\cdot\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,0)\right]^2 dt\,; \tag{9}$$

cette quantité n'est jamais nulle : c'est la « force de radiation » qui accompagne l'ébranlement mais qu'on ne peut mettre en évidence (et éventuellement mesurer) que si on fait se réfléchir l'onde sur un obstacle tel que notre petit anneau.

b) CAS DES ONDES SINUSOÏDALES.

Avant d'effectuer le calcul de $< F_x >$ dans le cas des ondes sinusoïdales, rappelons que l'équation de propagation sur une corde tendue selon Ox et vibrant selon Oy est [4] :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \tag{10}$$

La célérité de propagation des ondes sur la corde est :

$$C = \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, \tag{11}$$

σ étant la tension de la corde et μ sa masse par unité de longueur. D'autre part, nous avons établi [2] que l'expression générale de la densité d'énergie dans la corde est donnée par :

$$\mathrm{E}(x, t) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2. \qquad (12)$$

Pour une onde sinusoïdale progressive :

$$y_i = \mathrm{A}\sin\omega\left(t - \frac{x}{\mathrm{C}}\right), \qquad (13)$$

la moyenne spatiale de E est donnée par :

$$<\mathrm{E}_i> = \frac{1}{\lambda}\int_x^{x+\lambda} \mathrm{E}(x, t)\,dx = \frac{1}{2}\mu\mathrm{A}^2\omega^2. \qquad (14)$$

Lorsque l'onde y_i se réfléchit sur un obstacle que nous supposons, comme précédemment, situé en $x = 0$ pour donner naissance à une onde réfléchie :

$$y_r = -\mathrm{A}\sin\omega\left(t + \frac{x}{\mathrm{C}}\right) \qquad (15)$$

la corde est alors le siège d'une onde stationnaire :

$$y = y_i + y_r = -2\,\mathrm{A}\sin\frac{\omega x}{\mathrm{C}}\cos\omega t. \qquad (16)$$

La densité linéique d'énergie dans la corde est en moyenne :

$$<\mathrm{E}> = \frac{1}{\lambda}\int_x^{x+\lambda} \mathrm{E}(x, t)\,dx = \mu\mathrm{A}^2\omega^2 = 2<\mathrm{E}_i>. \qquad (17)$$

D'après la formule (5), la force de radiation a pour expression dans ce cas :

$$<\mathrm{F}_x> = \frac{\sigma}{2}\int_0^{\mathrm{T}=2\pi/(\omega)} \frac{4\,\mathrm{A}^2\omega^2}{\mathrm{C}^2}\cos^2\omega t\,dt = \frac{\sigma\mathrm{A}^2\omega^2}{\mathrm{C}^2}. \qquad (18)$$

Comme $\dfrac{\sigma}{\mathrm{C}^2} = \mu$ on trouve que, dans ce cas, la « force de radiation » est liée très simplement à la densité linéique moyenne d'énergie dans la corde (où à la densité linéique moyenne d'énergie dans l'onde incidente) par :

$$\boxed{<\mathrm{F}_x> = <\mathrm{E}> = 2<\mathrm{E}_i>.} \qquad (19)$$

Ce résultat très simple va nous permettre d'établir dans un cas particulier le théorème des invariants adiabatiques de EHRENFEST que nous utiliserons par la suite.

3. Conséquence : le théorème des invariants adiabatiques de Ehrenfest.

Considérons la corde de la fig. 4 ; cette corde de longueur l vibre selon le mode propre n° k ($k = 2$ sur la fig. 4). Ce sys-

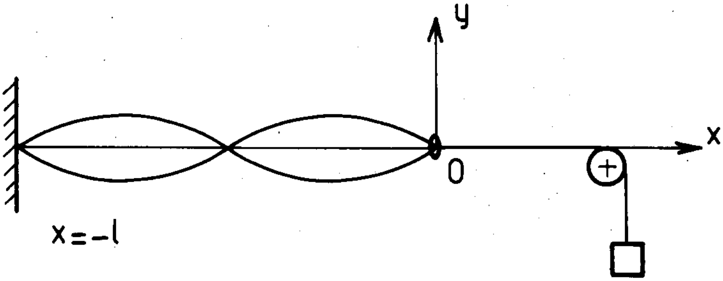

Fig. 4

tème est entièrement décrit en fonction de l par sa pulsation propre ω_k et l'énergie totale stockée :

$$E = l < E >. \tag{20}$$

Imaginons de déplacer l'anneau d'une quantité infiniment petite dl de façon infiniment lente ($\dot{l} \cong 0$) de sorte que le mode de vibration ne soit pas changé. La transformation envisagée, adiabatique réversible n'aura pour effet que de changer légèrement la pulsation ω du mode envisagé et de modifier l'énergie totale de la corde puisque l'opérateur doit exercer sur l'anneau une force $- < F_x >$ pour raccourcir la corde de dl ($dl < 0$). Puisqu'on ne change pas le mode de vibration de la corde, on a :

$$l = k \frac{\lambda}{2}$$

d'où :

$$\frac{dl}{l} = \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{d\nu}{\nu} = -\frac{d\omega}{\omega}. \tag{21}$$

D'autre part, l'énergie fournie à la corde par l'opérateur est, d'après (19) :

$$dE = - < F_x > dl = - < E > dl. \tag{22}$$

On obtient ainsi, compte tenu de (20), (22) puis (21) :

$$\frac{d\mathrm{E}}{\mathrm{E}} = \frac{-<\mathrm{E}>dl}{l<\mathrm{E}>} = -\frac{dl}{l} = \frac{d\omega}{\omega}. \qquad (23)$$

La relation (23) s'intègre pour donner :

$$\frac{\mathrm{E}}{\omega} = \mathrm{Cte} \qquad (24)$$

ou encore :

$$\mathrm{E}(l)\ \mathrm{T}(l) = \mathrm{Cte} \qquad (25)$$

$\mathrm{T}(l)$ et $\mathrm{E}(l)$ désignant la période et l'énergie du système en fonction du paramètre indépendant l. Nous utiliserons ce résultat pour calculer la pression de radiation en acoustique.

Le théorème des invariants adiabatiques est complètement passé sous silence dans le livre de GOLDSTEIN [5] et il est simplement évoqué dans le livre de CORBEN et STEHLE [6]. Seuls les livres russes : LANDAU et LIFCHITZ [7] et ARNOLD [8] en donnent une démonstration générale mais leurs démonstrations ne sont pas simples. Notons pour terminer que ce théorème a eu, comme bien d'autres notions de mécanique classique, une influence dans l'élaboration de la mécanique quantique [5] [6].

III. LA PRESSION DE RADIATION EN ACOUSTIQUE.

1. Introduction.

Pour simplifier notre exposé, limitons-nous à la propagation par ondes planes dans un tuyau de section S disposé selon Ox et adoptons les notations habituelles (fig. 5).

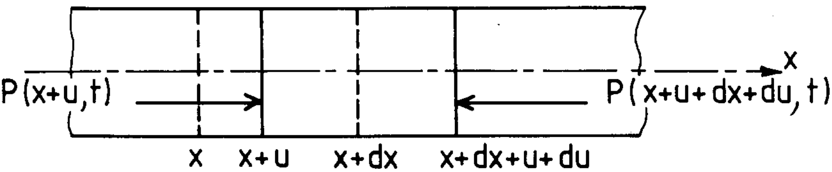

Fig. 5

$u(x, t)$ désigne le déplacement des tranches de fluide,

$v(x, t)$ est la vitesse des tranches de fluide,

$\mathrm{P} = \mathrm{P}_0 + p(x, t)$ est la pression dans le fluide,

$p(x, t) \ll \mathrm{P}_0$ est la pression acoustique,

$\varrho(x, t)$ est la masse volumique du fluide reliée à la dilatation des tranches : $\vartheta = \dfrac{dV}{V_0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ par $\rho = \dfrac{\rho_0}{1+\vartheta}$, ρ_0 étant la masse volumique du fluide au repos.

Avec ces notations, l'étude de la dynamique du fluide dans le tuyau requiert les équations suivantes [9] :

a) Equation fondamentale de la dynamique :

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

soit :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (26)$$

b) Equation de continuité (qui exprime la conservation de la masse) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

soit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \qquad (27)$$

c) Equation physique du milieu (ou d'état du fluide) :

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_s \qquad \text{soit} \quad p(x,t) = -\frac{\vartheta}{\chi_S}. \qquad (28)$$

L'étude du mouvement du fluide dans le tuyau doit être effectuée en résolvant (26), (27) et (28) sans faire d'approximations. Dans ces conditions, plusieurs auteurs (Brillouin en particulier), dans une série d'articles présentés au Colloque International sur la pression de radiation à Marseille en 1956 [10] mettent naturellement en évidence cet effet. Ici notre but n'est pas de développer de façon plus détaillée le contenu de ces articles. Nous souhaitons rappeler : *a*) les approximations qui font que la pression de radiation passe inaperçue en acoustique classique et *b*) indiquer comment, tout en restant dans le cadre classique, cette notion peut être réintroduite.

Les approximations de l'acoustique classique consistent essentiellement à remplacer l'équation (26) par :

$$\varrho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (29)$$

ce qui, comme l'a très justement remarqué M. SOUTIF [9], constitue une approximation à la limite de l'erreur physique au sens strict. L'équation de continuité est remplacée par :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad (30)$$

et l'équation (28) est déjà linéarisée, χ_S étant considérée comme constante.

Avec ces approximations, si on désigne par ψ toute grandeur caractéristique de la propagation ($\psi = u, v, p, \vartheta$), on trouve que toute l'acoustique classique se résume à chercher les solutions de l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 ; \qquad C^2 = \frac{1}{\varrho_0 \chi_S} \qquad (31)$$

qui obéissent à certaines conditions données. Notons tout de suite que des considérations purement mécaniques montrent qu'une onde acoustique caractérisée par le déplacement $u(x, t)$ transporte de l'énergie dont la moyenne spatiale est donnée par [2].

$$< E > = \frac{1}{l} \int_x^{x+l} \left[\frac{1}{2} \varrho_0 S \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \frac{1}{2} \frac{S}{\chi_S} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \qquad (32)$$

En fait, comme nous le montrons dans un article intitulé « A propos de la propagation de l'énergie en acoustique » et publié dans le B.U.P., la densité linéique d'énergie dans un tuyau est, en toute rigueur [11] :

$$E = -P_0 S \vartheta + \frac{1}{2} \varrho_0 S \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{S}{\chi_S} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 .$$

Cependant, la moyenne spatiale de E est toujours donnée par (32).

Pour une onde progressive sinusoïdale $u_i = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$ on trouve en faisant $l = \lambda$ dans (32) :

$$< E_i > = \frac{1}{2} \varrho_0 S A^2 \omega^2 \qquad (33)$$

la densité volumique moyenne d'énergie valant :

$$\overline{E}_i = \frac{<E_i>}{S} = \frac{1}{2}\varrho_0 A^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\varrho_0 v^2_{Max}. \qquad (34)$$

Par contre, dans le cas d'une onde stationnaire, les valeurs précédentes sont, comme dans le cas d'une corde vibrante, doublées c'est-à-dire qu'on a :

$$\overline{E} = 2\,\overline{E}_i = \varrho_0 A^2 \omega^2. \qquad (35)$$

Maintenant, montrons que tout en restant dans le cadre de l'acoustique classique, on peut réintroduire la notion de pression de radiation en introduisant des notions physiques autres que celles qui ont servi à établir l'équation de propagation. On ne fera les calculs que pour des ondes sinusoïdales planes rencontrant dans un tuyau, de section S et d'axe Ox, une paroi soit totalement absorbante, soit totalement réfléchissante, placée perpendiculairement à la direction de propagation.

2. **Calcul de la pression de radiation.**

a) Généralités.

La notion de pression de radiation en acoustique est imposée par les faits expérimentaux [12] [13] : un écran placé perpendiculairement à la direction de propagation d'une onde plane se propageant dans un tuyau de section S est soumis de la part de l'onde à une force proportionnelle à la surface S et dont la valeur moyenne n'est pas nulle, quelle que soit la nature de l'écran : l'écran parfaitement absorbant dont l'impédance est égale à l'impédance caractéristique du tuyau et l'écran parfaitement réfléchissant dont l'impédance est infinie.

Considérons alors une onde progressive :

$$u = A \cos \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

se propageant dans un tuyau sonore de section S et d'axe Ox (fig. 6).

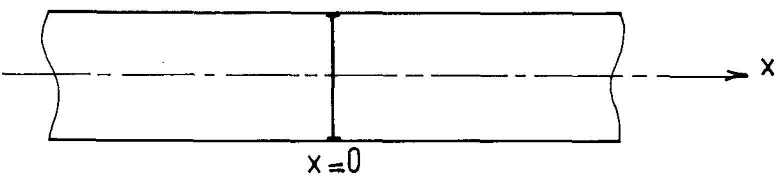

Fig. 6

La pression acoustique dans l'onde est :

$$p(x, t) = -\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{A\omega}{C\chi_S}\sin\omega\left(t - \frac{x}{C}\right). \quad (36)$$

Si en $x = 0$ l'onde rencontre une paroi fixe complètement absorbante, la pression acoustique à l'aplomb de la paroi est :

$$p(0, t) = -\frac{A\omega}{C\chi_S}\sin\omega t \quad (37)$$

et sa valeur moyenne est nulle. De même, si la paroi fixe est parfaitement réfléchissante, on aura dans la partie $x < 0$ du tuyau des ondes stationnaires et au niveau de la paroi la pression sera encore fonction sinusoïdale du temps et sa valeur moyenne sera aussi nulle. La pression acoustique est donc une notion insuffisante pour expliquer le phénomène de pression de radiation.

b) Calcul de la pression de radiation sur une paroi parfaitement absorbante [14].

Si nous voulons que l'onde $u = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{C}\right)$ précédemment considérée rencontre la paroi située en $x = 0$ et que le mouvement du fluide situé dans la partie $x < 0$ du tuyau ne soit pas modifié, il faut donner à la paroi un mouvement :

$$u = A\cos\omega t \quad (38)$$

coïncidant exactement avec celui de la tranche de fluide située en $x = 0$. La pression acoustique dont l'expression générale est :

$$p(x, t) = -\frac{A\omega}{C\chi_S}\sin\omega\left(t - \frac{x}{C}\right) \quad (39)$$

aura pour expression à l'abscisse u de la paroi :

$$p = -\frac{A\omega}{C\chi_S}\sin\omega\left(t - \frac{u}{C}\right) = \dots$$

$$\dots -\frac{A\omega}{C\chi_S}\sin\quad\omega\left(t - \frac{A\cos\omega t}{C}\right) \quad (40)$$

soit :

$$p = -\frac{A\omega}{C\chi_S}\sin\omega t\cos\left(\frac{A\omega}{C}\cos\omega t\right) + \dots$$

$$\dots\frac{A\omega}{C\chi_S}\cos\omega t\sin\left(\frac{A\omega}{C}\cos\omega t\right). \quad (41)$$

Or, dans le cadre de l'approximation des petits mouvements, nous avons :

$$\frac{A\omega}{C} = \frac{2\pi A}{\lambda} \ll 1 \tag{42}$$

nous pouvons donc écrire, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 3 :

$$p \cong -\frac{A\omega}{C\chi_S}\sin\omega t + \frac{A^2\omega^2}{C^2\chi_S}\cos^2\omega t. \tag{43}$$

La pression de radiation est la moyenne temporelle de (43), elle vaut :

$$p_r = \overline{p} = \frac{A^2\omega^2}{2\,C^2\chi_S} = \frac{1}{2}\varrho_0 A^2\omega^2 = \overline{E}_i. \tag{44}$$

On voit bien sur cet exemple que la pression de radiation est un effet du second ordre et, comme nous l'avons annoncé, l'acoustique classique la fait passer sous silence.

REMARQUES :

Le résultat (44) est exact, cependant le résultat (43) établi par LUCAS [14] est contesté par ROCARD qui, dans son livre « Dynamique générale des vibrations » [15] (l'exception que nous avons mentionnée en introduction) consacre un chapitre entier à la pression de radiation. Dans ce chapitre, on y trouve toute une série de calculs assez déconcertants. Ces calculs ont le mérite de montrer combien il est difficile de réintroduire des termes quadratiques dans l'expression de la pression dès que les équations du mouvement ont été linéarisées [16]. Ce que ROCARD conteste dans (43) c'est la phase du terme quadratique : d'après lui, ce terme devrait être en $\sin^2\omega t$ (comme le carré de la vitesse) et non en $\cos^2\omega t$. Nous allons tenter ici d'expliquer ce désaccord.

La première remarque qui vient à l'esprit est que la pression de radiation ne peut être mise en évidence que si l'onde acoustique rencontre un obstacle. Un calcul rigoureux de cette pression doit faire intervenir la nature physique exacte de l'interaction entre l'onde et l'obstacle. A notre avis, cette interaction n'est sans doute pas aussi simple que celle postulée par ROCARD [15] (formule 1 p. 407) formule qui fait dire à ROCARD que la pression de radiation doit être en phase avec la vitesse. Il nous semble que si la loi d'interaction onde paroi était aussi simple que celle postulée par ROCARD et PEREZ [1] (p. 147), le problème du calcul de cette pression serait réglé depuis longtemps. A titre de justification, on peut remarquer que nous n'avons eu aucun mal à définir puis à calculer la force de radiation dans le cas des ondes transversales car le mécanisme d'interaction entre l'onde sur la corde et l'obstacle est très simple. Enfin il nous semble que dans tous les problèmes où intervient la notion de pression de radiation, on ne s'intéresse qu'à sa valeur moyenne et non à sa valeur instantanée. Pour terminer ces remarques, signalons que le débat sur ce sujet n'est sans doute pas clos et que les collègues qui voudraient bien revoir cette question seraient bien vivement remerciés.

La valeur de la pression de radiation sur une paroi absorbante peut être obtenue également à l'aide de considérations énergétiques [17].

c) Cas d'une paroi parfaitement réfléchissante.

Ici nous montrons que le résultat peut être obtenu très simplement par application du théorème d'Erhenfest alors que la méthode précédente n'est évidemment plus applicable.

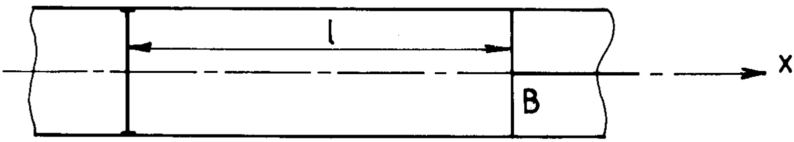

Fig. 7

Considérons (fig. 7) un tuyau sonore d'axe Ox et de section S muni de deux parois rigides distantes de l et supposons que le fluide compris entre les parois vibre selon le mode propre n° k :

$$l = k \frac{\lambda}{2} = \frac{k \pi C}{\omega}. \qquad (45)$$

L'état du fluide considéré est entièrement caractérisé par ω donné par (45) et par l'énergie totale stockée qui vaut (voir III.1.) :

$$E = l S \overline{E} = l \, S \rho_0 A^2 \omega^2. \qquad (46)$$

Si l'onde exerce une force moyenne $\overline{F} = \overline{p} S$ sur le piston B, pour faire se déplacer ce piston de $dl < 0$, de façon réversible, l'opérateur doit exercer sur lui la force $-\overline{F} = -\overline{p} S$ et fournir ainsi au fluide une énergie :

$$dE = -\overline{p} S \, dl. \qquad (47)$$

La transformation adiabatique réversible n'affectant pas le mode de vibration du fluide, elle n'affecte que sa fréquence et on a d'après (45) :

$$\frac{dl}{l} = -\frac{d\omega}{\omega}. \tag{48}$$

Appliquons le théorème d'EHRENFEST : $\dfrac{d\mathrm{E}}{\mathrm{E}} = \dfrac{d\omega}{\omega}$ on a, d'après (46) et (47) :

$$\frac{-\overline{p}\,\mathrm{S}\,dl}{l\,\mathrm{S}\,\overline{\mathrm{E}}} = -\frac{dl}{l} = \frac{d\omega}{\omega}, \tag{49}$$

on obtient immédiatement :

$$\overline{p} = \overline{\mathrm{E}} = 2\,\overline{\mathrm{E}}_i = \varrho_0\,\mathrm{A}^2\,\omega^2. \tag{50}$$

L'application du théorème d'EHRENFEST donne, ici, une solution élégante du problème posé. Le théorème n'est pas applicable dans le cas de la paroi absorbante : un mouvement lent de la paroi absorbante ne saurait modifier la fréquence de l'onde incidente qui est toujours absorbée, quelle que soit la position de la paroi.

3. **Remarques.**

a) La pression de radiation est une grandeur nettement plus petite que la pression acoustique ; l'exemple numérique pris par J. PEREZ [1] est significatif : dans l'eau pour une fréquence $\nu = 10^5$ Hz et un déplacement maximum $\mathrm{A} = 10^{-5}$ cm, on trouve pour la pression acoustique $p = 8{,}5\ 10^5$ baryes alors que la pression de radiation ne vaut que $\overline{p} = 18$ baryes.

b) Nous n'avons envisagé ici que des obstacles perpendiculaires à la direction de propagation, il faut cependant noter que la pression de radiation est une grandeur directive de telle sorte que le terme « tension de radiation » est plus correct cependant nous n'avons pas fait appel au calcul tensoriel pour ne pas dépasser le cadre d'un enseignement classique de l'acoustique [18].

c) Pour des raisons pédagogiques, nous avons voulu adopter ici, un point de vue différent de celui de BRILLOUIN [10] et LUCAS [10] : le calcul de la pression de radiation dans deux cas particuliers permet d'arriver à la conclusion qu'une onde acoustique qui propage à la célérité C une densité volumique d'énergie $\overline{\mathrm{E}}$ transporte aussi une densité moyenne de quantité de mouvement $\dfrac{\overline{\mathrm{E}}}{\mathrm{C}}$ à la même célérité, bien qu'il n'y ait pas transport de matière. A l'aide de cette nouvelle notion, on peut reprendre le calcul de la pression de radiation suggéré par ROCARD [15] et obtenir la valeur correcte de cette pression qui s'exerce sur un écran de nature quelconque.

IV. CONCLUSION.

Dans cet article, nous avons voulu montrer que la notion de pression de radiation qui échappe à l'acoustique classique et qui est restée jusqu'à maintenant dans le domaine des spécialistes de la dynamique des fluides ou de l'acoustique sous-marine peut être introduite dans un cours classique de dynamique des vibrations et des phénomènes de propagation. Cela peut être fait sans difficulté si la notion de « force de radiation » est introduite dès l'étude des cordes vibrantes car du fait de la transversalité des ondes on ne rencontre pas de problème particulier. Pour les ondes acoustiques, le problème est plus délicat. Cependant en exposant le calcul de $\overline{p}$ dans le cas de la paroi absorbante, on peut mettre en relief que la pression de radiation est un effet du second ordre et en profiter pour revenir sur les approximations de l'acoustique classique. Par contre, le calcul effectué pour la paroi parfaitement réfléchissante peut permettre de mettre en relief l'utilité du théorème de EHRENFEST si peu connu en dynaque des vibrations.

REMERCIEMENTS.

Nous remercions bien vivement Monsieur le Professeur BARRAT (Université de Caen) qui a examiné en détail notre manuscrit original et qui a accepté d'en faire une critique détaillée et constructive. Nous le remercions aussi pour les conversations passionnées et passionnantes que nous avons eues avec lui sur ce sujet délicat. D'autre part, Monsieur le Professeur LEROUX (Université de Rennes I), que le sujet intéresse vivement, se propose d'éclaircir certains points de notre travail dans un prochain article sans en faire disparaître les aspects physiques essentiels derrière un formalisme mathématique trop sophistiqué ; nous l'en remercions par avance.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. PEREZ, *Mécanique Physique*, p. 147, Masson (1961).

[2] P. TANGUY et D. THOUROUDE, B.U.P. n° 617, p. 49-58 (octobre 1979).

[3] *Agrégation de Sciences Physiques*, Epreuve A (1976).

[4] J. P. BARRAT, B.U.P. n° 662, p. 771 (mars 1984).

[5] H. GOLDSTEIN, *Mécanique classique*, P.U.F. Paris (1964).

[6] H. C. CORBEN et P. STEHLE, *Classical Mechanics*, Whiley (1960).

[7] LANDAU et LIFCHITZ, *Mécanique*, MIR, Moscou (1960).

[8] V. ARNOLD, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, MIR, Moscou (1976).

[9] M. SOUTIF, *Vibrations, Propagation, Diffusion*, Dunod (1970).

[10] Articles issus du Colloque International sur la pression de radiation, Marseille (1956). Journal de Physique et Le Radium, t. 17, p. 379-412 (mai 1956).

[11] P. TANGUY et D. THOUROUDE, B.U.P.

[12] RAYLEIGH, *Phil. Mag.* 1902, 3, 338 ; *Phil. Mag.* 1905, 10, 364.

[13] P. LANGEVIN et C. CHILOWSKY, *Brevet Français* n° 502913 (29 mai 1946).

[14] R. LUCAS, *Les tensions de radiation en acoustique*. Journal de Physique et Le Radium, t. 17, p. 395 (1956).

[15] Y. ROCARD, *Dynamique générale des vibrations*, p. 407-415. Masson (1960).

[16] J. P. BARRAT, Professeur, Université de Caen (communication privée).

[17] P. TANGUY et D. THOUROUDE, *Cours de C.A.P.E.S.*, Université de Rennes I.

[18] E. LE ROUX, Professeur, Université de Rennes I (communication privée).