Remarques sur le dossier de mise en perspective didactique d'un dossier de recherche

Rémi Metzdorff

Concours externe spécial de l'agrégation de physique-chimie option physique
Session 2020

1 Parcours universitaire et scientifique

2 Refroidissement vers l'état quantique fondamental

2.1 Mesure de déplacements et optomécanique

2.1.1 Les mesures de déplacements et leurs applications

Exploitation du signal GW150914

Tout est très bien expliqué à un niveau raisonnable dans la dernière référence citée dans le dossier. La relativité générale est par essence non linéaire, mais de nombreuses estimations peuvent être réalisées dans le cadre de la physique newtonienne. Trois hypothèses sont réalisées pour cette étude : masses symétriques, sans spin et orbite circulaire.

Il faut tout d'abord s'assurer que l'évènement correspond à une coalescence de deux objets massifs. L'évolution du signal en témoigne : augmentation de la fréquence et de l'amplitude jusqu'à un maximum suivi d'un ringdown. Cette forme exclue une source constituée du ringdown d'une seule masse : les oscillations d'une goutte sont isochrones et s'amortissent.

La fréquence du signal est le double de la fréquence orbitale car l'émission d'onde gravitationnelle est liée au moment quadrupolaire du système qui est invariant par rotation de π. L'évolution temporelle de la fréquence du signal avant la fusion donne une *chirp mass* d'environ $30\,\mathrm{M}_\odot$. Si le binaire est constitué de deux objets de masses comparables, chacun fait environ $35\,\mathrm{M}_\odot$.

La fréquence maximale du signal permet d'estimer la distance entre les deux objets en utilisant la troisième loi de Kepler. On trouve $\sim 320\,\mathrm{km}$, soit une source très compacte. Les seuls objets connus qui remplissent de telles conditions sur leur masse et compacité sont les trous noirs. Les étoiles à neutrons sont exclues car même si elles sont très compactes, elles n'atteignent jamais des masses supérieures à $3\,\mathrm{M}_\odot$ sans s'effondrer en trou noir.

La distance de la source est donnée par la luminosité maximale de l'évènement en la comparant à l'amplitude du signal mesuré. On trouve $d \sim 300\,\mathrm{Mpc}$. Sa localisation dans le ciel est donnée d'après l'écart temporel entre la réception du signal sur les deux interféromètres LIGO. Le raisonnement est similaire à celui du calcul des anneaux d'égale inclinaison dans le Michelson.

Ordres de grandeur de GW150914 :

- énergie équivalente à $3\,\mathrm{M}_\odot$ rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles ;
- 10^{27} fois la consommation énergétique mondiale ;
- 10^{5} fois l'énergie rayonnée par le soleil depuis sa création ;

— énergie rayonnée par toute la galaxie en 500 ans ; ;
— puissance crête : 4×10^{49} W.

2.1.2 L'optomécanique : entre limite de sensibilité...

2.1.3 ... Et contrôle d'oscillateurs mécaniques

Décohérence

Conférence de Michel Brune. Penser aux mesures non-lues : les interactions avec l'environnement sont autant de mesures qui projettent l'état du système.

2.2 Les oscillateurs mécaniques

Resonant approximation : lorentzian shape

La susceptibilité mécanique de l'oscillateur amorti s'écrit

$$\chi[\Omega] = \frac{1}{m_{\text{eff}}\left[\Omega_m^2 - \Omega^2 - i\Gamma_m\Omega\right]} = \frac{1}{m_{\text{eff}}\left[(\Omega_m + \Omega)(\Omega_m - \Omega) - i\Gamma_m\Omega\right]}. \tag{1}$$

Si $\Gamma_m \ll \Omega_m$, on peut s'intéresser à l'évolution de la susceptibilité proche de la résonance, soit pour $\Omega \approx \Omega_m$. On a alors aussi $\Omega_m + \Omega \approx 2\Omega_m$, si bien que

$$\chi[\Omega] \approx \frac{1}{m_{\text{eff}}\left[2\Omega_m(\Omega_m - \Omega) - i\Gamma_m\Omega_m\right]} = \frac{1}{m_{\text{eff}}\Gamma_m\Omega_m\left[\frac{\Omega_m - \Omega}{\frac{\Gamma_m}{2}} - i\right]}. \tag{2}$$

Pour la spectre de déplacement, on trace la densité spectrale de puissance du bruit de position, proportionnelle au carré du module de la susceptibilité mécanique

$$|\chi[\Omega]|^2 = \frac{\frac{1}{(m_{\text{eff}}\Gamma_m\Omega_m)^2}}{\left[\left(\frac{\Omega_m - \Omega}{\frac{\Gamma_m}{2}}\right)^2 + 1\right]}, \tag{3}$$

ce qui est bien une lorentzienne.

Oscillateur harmonique quantique

Refaire le calcul (TD de MQ d'Arnaud) et marquer les différences avec le puits infini rectangulaire. Différentes manifestations de la quantification :
— niveaux d'énergie discrets ;
— énergie minimale non nulle,
qui se traduisent sur la mesure :
— fluctuations de point zéro ;
— asymétrie des bandes latérales mécaniques.

Les phonons sont des bosons.

Mouvement brownien

Voir les cours de Feynman sur le mouvement brownien.

Pour justifier que la variance du mouvement brownien est l'intégrale de la densité spectrale de puissance des déplacements, il faut se rappeler du théorème de Wiener-Kintchine qui relie la DSP à la TF de la fonction d'autocorrélation. La démonstration est faite dans ce polycopié p13 mais on retiendra :
— la fonction d'autocorrélation prise en 0 donne la valeur RMS du signal. Or pour un signal de moyenne nulle, la valeur RMS est égale à la variance.
— d'autre part, la fonction d'autocorrélation prise en 0 est l'intégrale sur toutes les fréquences de la DSP.

La variance du mouvement brownien est donc bien l'intégrale de la DSP.

Fluctuation-dissipation

Voir Saulson. On retiendra que le théorème de fluctuation-dissipation donne la valeur de la densité spectrale de puissance à chaque fréquence. *Loin de la résonance,* réduire la dissipation réduit les fluctuations de position, mais ce n'est pas vrai à résonance. Il n'y a donc aucun paradoxe avec le théorème d'équipartition de l'énergie qui donne la variance du mouvement brownien (l'intégrale de la DSP). Pour réduire les fluctuations d'un système *à toutes les fréquences* il est donc nécessaire de refroidir. Pour réduire le bruit thermique loin de la résonance, on peut se contenter d'utiliser des systèmes avec une dissipation faible ce qui est la stratégie des interféromètres gravitationnels.

Fourier

Relire la partie consacrée à l'étude spectrale du cours de Jérémy Neveu. Il faut faire la différence entre série de Fourier et transformée de Fourier. La décomposition en série de Fourier s'applique aux fonctions périodiques et constitue les prémisses de l'analyse harmonique. La transformée de Fourier notée TF est une généralisation aux fonctions non périodiques. On choisi pour convention

$$\mathrm{TF}(f(t)) = \hat{f}[\omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t, \tag{4}$$

et pour la transformée inverse

$$\mathrm{TF}^{-1}(\hat{f}[\omega]) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}[\omega] e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega. \tag{5}$$

La fonction f peut être réelle ou complexe et sa TF est à priori complexe.

En électronique numérique, on comprend facilement le critère de Shanon pour éviter les repliements de spectre en considérant le signal échantillonné comme le produit d'un signal analogique et d'un peigne de Dirac. Le spectre est alors le produit de convolution des TF du signal et du peigne. La transformée de Fourier discrète est comme son nom l'indique l'équivalent discret de la transformée de Fourier et s'applique au traitement numérique du signal. La FFT est un algorithme particulier de TFD basé sur l'utilisation d'ensembles nombre d'échantillons puissance de 2 qui permet de réduire significativement le temps de calcul. L'algorithme naif se complexifie comme N^2 où N est le nombre d'échantillons alors que la FFT se complexifie en $N \log N$.

Les problèmes de fenêtrage se comprennent comme un phénomène de diffraction : une fenêtre porte fera apparaitre des sinus cardinaux dans le spectre. La mitigation de ces soucis avec l'utilisation de fenêtres particulières (Hanning, etc.) se rapproche de l'apodisation utilisée en optique pour augmenter la résolution des instruments.

La densité spectrale de puissance est le carré du module de la transformée de Fourier divisé par la largeur de la bande spectrale. Elle est utile pour caractériser la puissance du signal contenue dans une bande de fréquence et permet de caractériser les signaux aléatoires tels que les bruits. Le théorème de Wiener-Kintchine donne que c'est aussi la TF de la fonction d'autocorrélation $\gamma(\tau)$ qui caractérise la manière dont les structures que l'on peut voir dans un signal se répètent sur des échelles de temps τ. La densité spectrale d'amplitude correspond à la racine carrée de la DSP.

Au niveau des unités si l'on s'intéresse à un signal temporel d'unité X :

- le spectre donné par le module de la TF signal est en $\mathrm{X} \cdot \mathrm{Hz}^{-1}$;
- la densité spectrale de puissance s'exprime en $\mathrm{X}^2 \cdot \mathrm{Hz}^{-1}$;
- la densité spectrale d'amplitude s'exprime en $\mathrm{X} \cdot \mathrm{Hz}^{-1/2}$.

2.3 Une cavité optique pour augmenter la sensibilité

Déphasage associé à une cavité

Les calculs pour une cavité symétrique sans perte sont fait dans le Hecht p435. On obtient, avec $r = -r'$ et $tt' = 1 - r^2$

$$E_r = rE_i \frac{1 - e^{-i2kL}}{1 - r^2 e^{-i2kL}} \quad \text{et} \quad E_t = E_i \frac{1 - r^2}{1 - r^2 e^{-i2kL}}. \tag{6}$$

Dans ce cas, si la finesse est suffisamment grande et à résonance, la transmission et la réflexion en intensité valent respectivement 1 et 0. Le passage de la résonance s'accompagne d'un déphasage de π pour le faisceau réfléchi comme pour le faisceau transmis.

Dans le dossier MEPD, on suppose le miroir de fond de la cavité parfaitement réfléchissant. Dans ce cas, le champ réfléchi est donné par

$$E_r = E_i \frac{r - e^{-i2kL}}{1 - re^{-i2kL}}, \tag{7}$$

et il n'y a pas de champ transmis. Lors du passage de la résonance, la réflexion s'accompagne seulement d'un déphasage égal à 2π cette fois.

2.4 Couplage optomécanique et refroidissement

Friction « chaude »

Pour un système thermodynamique à l'équilibre constitué d'un grand nombre de particules N, les fluctuations ΔX d'une variable X de moyenne $\tilde{X}$ sont données par

$$\frac{\Delta X}{\tilde{X}} = \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{8}$$

Si l'on s'intéresse à la force de pression F_p exercée sur une surface S par un gaz parfait de densité particulaire n, on a

$$F_p = S \times nk_B T. \tag{9}$$

On exprime les variations de cette force par la variance ΔF_p^2 qui vérifie compte tenu des deux résultats précédents :

$$\Delta F_p^2 \propto n. \tag{10}$$

Pour la dissipation associée au contact de l'oscillateur avec l'air environnant, il faut considérer la puissance acoustique $\mathcal{P}_a$ rayonnée par la surface de l'oscillateur. Les calculs sont fait dans les thèses de T. Briant p145 et de L. Neuhaus p94 ainsi que dans le Landau & Lifchitz de mécanique des fluides dans le paragraphe sur l'émission du son. On montre $\mathcal{P}_a = c\rho v^2$ où c est la vitesse du son dans l'air, ρ sans masse volumique et v la vitesse de la surface émétrice. Dans le cas du micro-pilier de hauteur h, ceci revient à associer à l'oscillateur un coefficient d'amortissement dû au couplage avec l'air

$$\Gamma = \frac{4c}{h} \frac{\rho}{\rho_{\text{quartz}}}. \tag{11}$$

On trouve donc également que la dissipation est proportionnelle à n. [1]

1. Le raisonnement ne tient pas si l'on suppose une force de frottement liée à la viscosité de l'air. Dans ce cas, en utilisant la formule de Stokes et le modèle de la viscosité des gaz dilués basé sur la diffusion de quantité de mouvement [?] p95 ou [?] p424, on trouve que la viscosité dynamique η et donc la force de frottement est indépendante de la pression. Les approximations du modèle ne sont pas valables à faible et à basse pression [?] p49. En comparant les ordres de grandeurs, on trouve que l'amortissement acoustique est 500 fois plus important que l'amortissement visqueux à pression ambiante.

Ceci montre qu'il est impossible de refroidir un oscillateur avec un amortissement mécanique bruité comme celui causé par l'air : augmenter la pression du gaz augmente l'amortissement mais aussi les fluctuations de la force de pression. Au final, les fluctuations de position de l'oscillateur sont inchangées. Il faut donc utiliser un processus qui n'ajoute pas de bruit pour obtenir la friction froide et le refroidissement.

Approche thermodynamique du self-cooling
Voir Aspelmeyer 2014, Fig. 14. Attention : le cycle de gauche, côté red-detuned, est parcouru dans le sens trigonométrique contrairement à ce qui est indiqué sur le schéma de l'article. On s'en convainc en raisonnant comme suit pour le côté red-detuned :

— la force de pression de radiation est retardée par rapport aux déplacements ;
— en allant dans le sens des x croissants, on reste donc en dessous de la lorentzienne ;
— en allant dans le sens des x décroissants, on reste au dessus de la lorentzienne.

Le travail de la force de pression de radiation est donc bien négatif du côté red-detuned et positif du côté blue-detuned.

Approche quantique : processus Stokes et anti-Stokes
Voir Aspelmeyer 2014.

2.5 Principaux résultats obtenus

2.6 Vers des mesures sous la limite quantique standard

3 Enseignement, diffusion et vulgarisation

3.1 Valorisation des travaux de recherche

Transferts thermiques

3.1.1 Filtrage, micro-contrôleurs et asservissements

Super-atténuateurs de Virgo
Il s'agit d'un système complexe composé de sept oscillateurs couplés. Il faut relire l'article *The seismic Superattenuators of the Virgo gravitational waves interferometer*, section 3. La cascade de pendules permet d'avoir une dépendance forte de la réponse en déplacement u miroir final avec la fréquence. Au delà de la plus haute des fréquences de résonance f_n associées aux modes propres du système, la réponse d'un pendule composé de N étages est donnée par

$$\frac{C}{f^{2N}}, \tag{12}$$

où $C = \prod_{n=1}^{N} f_n^2$. Le résultat est similaire dans le cas des lames utilisées pour l'isolation dans la direction verticale.

Dans le cas des pendules, le couplage est inertiel. Dans le cas des lames, le couplage est élastique.

3.1.2 Un interféromètre de Michelson imprimé en 3D

3.2 Enseignements

3.3 Vulgarisation : résonance et ondes gravitationnelles

Bibliographie

— Lumineuses pousées, Pour la science, 1999.