

FIGURE 3.1: Puissance de bruit pour un oscillateur harmonique à $T=300\text{K}$, avec $\Omega_0/2\pi = 1\text{ MHz}$ et $M = 100\text{ }\mu\text{g}$.

3.2 Une démonstration élémentaire du théorème fluctuations-dissipation

On considère le bruit thermique de position du mode pendulaire d'une masse macroscopique suspendue dans un milieu dilué (qu'on considèrera d'une seule espèce atomique ou moléculaire, de masse m , mais la généralisation ne pose aucun problème).

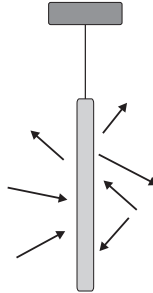


FIGURE 3.2: Effet des collisions moléculaires sur le bruit de position d'une masse suspendue.

La pression $p = nk_B T$ est supposée suffisamment faible pour que le libre parcours moyen l (distance moyenne parcourue par une molécule entre deux collisions) soit beaucoup plus grande que les dimensions de la masse suspendue, si bien que seuls les événements à une molécule doivent être pris en compte. On note A la surface d'une des faces de la masse.

Les échanges de quantité de mouvement entre les molécules et la masse macroscopique lors des chocs successifs donnent naissance à une force, nulle en moyenne si la masse est au repos (par isotropie de la distribution des vitesses). Mais même dans ce cas, le nombre de

collisions à droite et à gauche fluctue, ce qui donne lieu à des fluctuations de la force globale exercée par le gaz.

On va ébaucher ici le calcul du spectre de bruit de la force de Langevin, dans un modèle très simple, à une dimension et où on considèrera que toutes les molécules ont la vitesse quadratique moyenne v_{rms} :

- Taux de collisions (sur un côté) : $R = n v_{\text{rms}} A$ (un modèle 2D et la prise en compte de la distribution des vitesses apporte un facteur $\frac{1}{4}$ supplémentaire)
- Force subie par la masse : $F = 2m v_{\text{rms}} (R_+ - R_-)$ (échange d'impulsion lors d'une collision \times différence des taux de collision à droite et à gauche)
- Pendant un temps τ , on a alors :

$$\Delta F^2 = \frac{4m^2 v_{\text{rms}}^2}{\tau^2} \Delta (N_+ - N_-)^2 \quad (3.15)$$

$$\Delta F^2 = \frac{4m^2 v_{\text{rms}}^2}{\tau^2} (\Delta N_+^2 + \Delta N_-^2) \quad (3.16)$$

$$\Delta F^2 = \frac{4m^2 v_{\text{rms}}^2}{\tau^2} \times (< N_+ > + < N_- >) \quad (3.17)$$

$$\Delta F^2 = 8m^2 v_{\text{rms}}^2 R \times 1/\tau \quad (3.18)$$

On trouve donc un spectre de bruit de la force de Langevin $S_F = 8m^2 v_{\text{rms}}^2 R$.

La force de frottement est : $F_f = -\frac{1}{4} n A m v_{\text{rms}} v_M$. S_f se met donc sous la forme :

$$S_F = \frac{16}{\pi} m n v_{\text{rms}} A k_B T, \quad (3.19)$$

sous la forme d'un coefficient proportionnel au coefficient de frottement multiplié par l'énergie thermique.

Un dernier exemple consiste en le mouvement Brownien d'une particule libre, tel que celui observé dès 1827 par Robert Brown : mouvements sans fin de petites particules de poussière sous l'effet des particules microscopiques (et donc invisibles, même au microscope) qui composent le milieu.

Mouvement à 2D caractérisé par un coefficient de diffusion D tel que :

$$< x^2 + y^2 > = 2Dt. \quad (3.20)$$

L'analyse d'Einstein (en 1905) a permis d'établir l'expression de ce coefficient de diffusion :

$$D = \frac{k_B T}{6\pi a \eta}, \quad (3.21)$$

où η est la viscosité du fluide et a le rayon (moyen) d'un grain (supposé sphérique).