1 LP14 Ondes acoustiques

Niveau : CPGE
Prérequis :

— Mécanique des fluides ;

— Thermodynamique ;

— Ondes électromagnétiques ;

Objectif de la leçon : Décrire les ondes acoustiques dans différents milieux, leur propagation et ainsi expliquer le principe de fonctionnement de plusieurs instruments de musique.

1.1 Introduction

Montrer l'extrait de la vidéo [?]. Dans cette vidéo, on a vu de nombreux exemples qui montrent le caractère vibratoire des ondes acoustiques et leur lien avec le son, la musique. L'objectif de cette leçon va être de décrire les ondes acoustiques, principalement dans les fluides et de voir comment leur manipulation peut conduire à la fabrication d'instruments, mais aussi à la compréhension du comportement de nombreux objets.

1.2 Description d'une onde acoustique

Les ondes acoustiques sont des ondes mécaniques. Elles correspondent à la propagation d'une déformation dans un milieu matériel. Insister sur la nécessité d'un milieu matériel, qui peut être fluide ou solide. Ici on va principalement s'intéresser aux ondes acoustiques dans l'air.

1.2.1 Approximation acoustique

Les ondes acoustiques résultent d'un couplage entre des variations de pression et le déplacement des particules de fluide. On va donc s'intéresser à ces deux grandeurs principalement. Cependant, le fluide est compressible et il va aussi y avoir des variations de volume donc de masse volumique. D'autres grandeurs (température, etc.) sont également amenées à varier ce qui va conduire à effectuer certaine hypothèse, que l'on pourra vérifier ensuite.

Dans un premier temps, on s'intéresse à un fluide au repos :

— de vitesse moyenne nulle ;

— de pression moyenne P_0 ;

— de masse volumique moyenne μ_0.

L'onde sonore correspond à une faible perturbation du fluide par rapport à cet état de repos :

— $\vec{v}(M,t) = \vec{v_1}(M,t)$, petite devant un vitesse caractéristique que l'on déterminera ;

— $P(M,t) = P_0 + p_1(M,t)$, où $p_1(M,t) \ll P_0$;

— $\mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t)$ où $\mu_1(M,t) \ll \mu_0$;

et sera traité comme tel. On négligera ainsi tous les termes d'ordre deux dans les équations. C'est l'approximation acoustique.

Dans le cadre de cette leçon, on considère l'écoulement comme parfait en négligeant la viscosité du fluide. Ceci conduit à une déformation élastique rapide du fluide, c'est à dire réversible, ce qui nous permettra de formuler une hypothèse thermodynamique.

On vient de définir le cadre de l'étude des ondes acoustiques dans un fluide. On peut maintenant déterminer l'équation qui régit l'évolution de ces ondes en exploitant les outils de la mécanique des fluides et de la thermodynamique.

1.2.2 Équation de propagation

On peut tout d'abord utiliser l'équation de la conservation locale de la masse :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathrm{div}(\mu \overrightarrow{v}) = 0,$$

qui conduit après linéarisation à

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \mathrm{div} \overrightarrow{v_1} = 0.$$

Cette équation fait apparaitre un premier lien entre μ_1 et $\overrightarrow{v_1}$ alors qu'on préfèrerai un lien entre p_1 et $\overrightarrow{v_1}$.

On peut faire ce lien à travers un coefficient thermodynamique. La transformation associée au passage de l'onde est rapide donc on la supposera adiabatique et réversible, c'est à dire isentropique. Dans ce cas on utilise le coefficient de compressibilité isentropique χ_S

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_S.$$

Un développement de Taylor donne ainsi la relation $\mu_1 = \chi_S \mu_0 p_1$. En l'injectant dans l'équation de conservation de la masse, on obtient après linéarisation

$$\chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathrm{div} \overrightarrow{v_1} = 0. \tag{1}$$

L'écoulement étant parfait, on utilise l'équation d'Euler en négligeant la gravité :

$$\mu \left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \overrightarrow{\mathrm{grad}} \right) \overrightarrow{v} \right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} P.$$

L'hypothèse v_1 petite conduit à négliger le terme non linéaire de l'équation d'Euler

$$\left|\left| \left(\overrightarrow{v} \overrightarrow{\mathrm{grad}} \right) \overrightarrow{v} \right|\right| \ll \left|\left| \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} \right|\right|$$

ce qui est vrai si $||v_1|| \ll c$, où $c = \lambda \nu$ est la vitesse de l'onde acoustique. Cette condition peut être vérifiée à posteriori. Avec ces hypothèses, on aboutit à l'équation linéarisée

$$\mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} p_1. \tag{2}$$

En dérivant l'équation de conservation de la masse 1 par rapport au temps et en prenant la divergence de l'équation d'Euler 2, on obtient l'équation de d'Alembert pour la surpression p_1

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \Delta p_1 = 0, \tag{3}$$

où $c = \sqrt{\chi_S \mu_0}$ est la vitesse de l'onde acoustique. De même, en dérivant Euler par rapport au temps et en prenant le gradient de la conservation de la masse, on obtient l'équation de d'Alembert pour la vitesse $\overrightarrow{v_1}$

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{v_1}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \Delta \overrightarrow{v_1} = 0. \tag{4}$$

Pour l'équation de d'Alembert sur la vitesse, il faut de plus supposer l'écoulement irrotationnel, ce qui est raisonnable dans l'hypothèse d'un écoulement parfait et en appliquant le théorème de Kelvin.

Pour établir ces équations de propagation, on a fait plusieurs hypothèses qu'il faut vérifier.

1.2.3 Retour sur les hypothèses

Quelques ordres de grandeur. L'intensité sera définie proprement ensuite. Même pour des sons très intenses, les hypothèses de perturbations faibles sont vérifiées, donc l'approximation acoustique est valide.

La deuxième hypothèse réalisée est celle d'une transformation adiabatique réversible. Pour une évolution isentropique du fluide, on utilise la loi de Laplace $PV^\gamma = \text{cte}$, où $\gamma = c_p/c_v$ est le rapport des capacité calorifique à pression et volume constant. On trouve ainsi $\chi_S = 1/\gamma P_0$ et donc

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}}.$$

Si le fluide peut-être considéré comme un gaz parfait, on obtient finalement en utilisant l'équation d'état des gaz parfaits

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}. \tag{5}$$

On peut vérifier expérimentalement cette relation en mesurant la vitesse du son dans l'air.

Mesure de la vitesse du son dans l'air avec une onde ultra-sonore. On pourrait remonter à cette vitesse en mesurant le temps de vol d'une impulsion brève entre un émetteur et un récepteur ultra-sonore mais cette mesure est sujette à une incertitude importante car on ne connait pas exactement leur géométrie. Je préfère ici mesurer la longueur d'onde en déplaçant de plusieurs longueur d'onde le récepteur devant l'émetteur sur un banc optique.

Pour une transformation isotherme, on utilise le coefficient de compressibilité isotherme χ_T et on trouve

$$c = \sqrt{\frac{R T_0}{M}},$$

ce qui n'est pas en accord avec les observations expérimentales.

1.3 Aspects énergétiques

1.3.1 Impédance acoustique

1.3.2 Conservation de l'énergie

1.3.3 Intensité d'une onde acoustique

1.4 Quelques instruments de musique

1.4.1 L'orgue

1.4.2 Plaque vibrante

Trop de la bombe