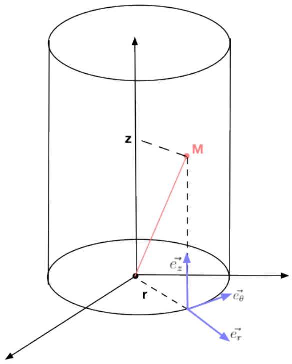
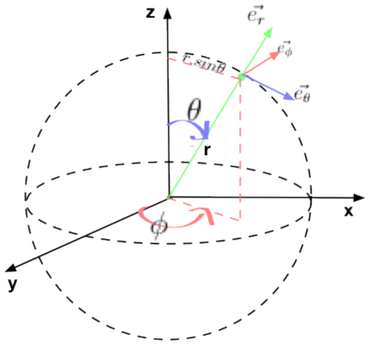
Opérateurs vectoriels

Systèmes de coordonnées





— cartésiennes : $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$
— cylindriques : $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$
— sphériques : $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\phi})$

Champ scalaire

— $U(x, y, z)$
— $U(r, \theta, z)$
— $U(r, \theta, \phi)$

Champ vectoriel

$$\overrightarrow{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\overrightarrow{e_x} + A_y(x, y, z)\overrightarrow{e_y} + A_z(x, y, z)\overrightarrow{e_z}$$
$$\overrightarrow{A}(r, \theta, z) = A_r(r, \theta, z)\overrightarrow{e_r} + A_\theta(r, \theta, z)\overrightarrow{e_\theta} + A_z(r, \theta, z)\overrightarrow{e_z}$$
$$\overrightarrow{A}(r, \theta, \phi) = A_r(r, \theta, \phi)\overrightarrow{e_r} + A_\theta(r, \theta, \phi)\overrightarrow{e_\theta} + A_z(r, \theta, \phi)\overrightarrow{e_\phi}$$

Gradient $\overrightarrow{\text{grad}}$

Il s'applique à un champ scalaire et est défini par

$$\mathrm{d}U = \overrightarrow{\text{grad}}U.\overrightarrow{\mathrm{d}l}.$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \overrightarrow{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial U}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial U}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial U}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}\overrightarrow{e_\phi}$$

Remarque : Si $\overrightarrow{A} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}U$, le vecteur $\overrightarrow{A}$ dérive du potentiel U et est à circulation conservative.

Divergence div

L'opérateur divergence opère sur des champs scalaires.
En coordonnées cartésiennes :

$$\mathrm{div}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\mathrm{div}\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

En coordonnées sphériques :

$$\mathrm{div}\overrightarrow{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Si $\mathrm{div}\overrightarrow{A} = 0$, le champ $\overrightarrow{A}$ est à flux conservatif et peut s'écrire comme un rotationnel $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F}$ car $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}) = 0$.

Rotationnel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$