LP n° 24 **Titre** : Ondes progressives, ondes stationnaires.

Présentée par : Hugo Roussille **Rapport écrit par** : Julien Froustey

Correcteur : F. Debbasch **Date** : 14/09/18

Bibliographie de la leçon :			
Titre	**Auteurs**	**Éditeur**	**Année**
Toute la Physique PC-PC*	M-N. Sanz	Dunod	2014
Ondes 2e année PC-PC* PSI-PSI*	Jean-Marie Brébec	H-Prépa	1997
Physique des Ondes	Christian Frère	Ellipses	
Cours de Physique de Berkeley ; tome 3 : Ondes.		Berkeley	1972

Plan détaillé

1) Ondes progressives et équation de d'Alembert

1.1 – Définition et modélisation

1.2 – Propriétés des solutions

1.3 – Impédance et énergie

2) Base particulière : les ondes stationnaires

2.1 – Découplage du temps et de l'espace

2.2 – Modes propres de la corde vibrante

Niveau choisi pour la leçon : CPGE

Pré-requis :
- Mécanique de première année
- Equations différentielles et aux dérivées partielles

Détail et minutage

Intro : Ondes phénomène fréquent en physique (lumière, ondes sonores lorsqu'on parle). D'abord : propagation d'onde mécanique dans un système très simple (corde vibrante), puis une gamme de solutions particulières, les ondes stationnaires.
(1 min)

1) Ondes progressives et équation de d'Alembert

(22 min)

Vidéo : corde tendue entre deux opérateurs, propagation d'une perturbation.

https://www.youtube.com/watch?v=klN2-bCzJb4

-> modélisation de cette situation

1.1 – Définition et modélisation

Corde vibrante (longueur L, masse linéique μ, tension T_0 e_x).

Schéma : corde entre x et x+dx, angles et tension de la corde

Approximations : petites perturbations et déformations faibles.

PFD : - projection suivant $\overrightarrow{e_x}$ donne $T\cos(\alpha) = T_0 = cste$.

- projection suivant la verticale donne l'**équation de d'Alembert**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

On cherche à déterminer les solutions : passage aux variables u = x-ct et v = x+ct pour trouver que la solution s'écrit de façon générale f(x-ct) + g(x+ct), décrivant respectivement une propagation vers les x croissants / décroissants. Retour rapide sur la vidéo pour montrer la fonction f

Définition : une onde progressive correspond à une propagation d'énergie, sans transfert de matière, dans une direction donnée.

1.2 – Propriétés des solutions

- Cas d'application de l'équation de d'Alembert plus vastes que la simple corde vibrante : câble coaxial (tension u(x,t)), onde sonore p(x,t).

- Equation *réversible* : t -> -t

- Equation *linéaire* : on peut donc réaliser une analyse de Fourier, et se restreindre aux solutions harmoniques -> ondes progressives harmoniques

$$\underline{y}(x,t) = \underline{y_0}e^{j(\omega t - kx)}$$

D'où la **relation de dispersion** : k^2 = w^2 / c^2.

Vitesse pour la corde vibrante : $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$, rapport entre une grandeur de **rappel** et une d'**inertie**. C'est quelque chose de général : impédance.

1.3 – Impédance et énergie

Grandeur de rappel et grandeur d'inertie, ici -T_y(x,t) et v(x,t), couplées dans un système d'équations :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial(-T_y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(-T_y)}{\partial t} = -T_0\frac{\partial v}{\partial x}$$

La variation spatiale d'une de ces grandeurs entraîne la variation temporelle de l'autre, et réciproquement.

Définition : l'impédance d'une onde progressive est Z = rappel/inertie.

En réinjectant une solution harmonique dans le système d'équations, on obtient $Z = \sqrt{T_0\mu}$.

Energie : on donne dE_c et dE_p (sans démonstration), d'où

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = Zv^2(x,t)$$

Ainsi l'énergie linéique, proportionnelle à v^2(x,t), se **propage**, comme annoncé dans la définition introductive.

Transition *(1 min)* : il faut considérer les conditions aux limites. On le verra sur l'expérience de la corde de Melde où la corde est fixée sur chaque extrémité, des solutions particulières apparaissent (les ondes stationnaires).

2) Base particulière : les ondes stationnaires *(16 min)*

2.1 – Découplage du temps et de l'espace

Expérience (corde de Melde) :

masse linéique de la corde µ = 0,8 g/m, sous tension d'une masse M = 100 g.

Présentation du dispositif. Vibration de la corde au mode (pré enregistré) 4.

Description du comportement particulier : trois points où l'amplitude reste nulle, on ne voit plus de phénomène propagatif.

Observation : pas de propagation apparente. *(Il arrête le vibreur, bonne idée vu le bruit)*

Définition : une onde stationnaire est une onde pour laquelle le temps et l'espace sont découplés.

-> ansatz particulier de solution : y(x,t) = f(x)*g(t).

On appelle les points où l'amplitude de l'onde est nulle des **nœuds** (f(x) = 0), et les points d'amplitude maximale des **ventres** (f'(x) = 0).

L'utilisation de cet ansatz dans d'Alembert mène à $\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = c^2\frac{f''}{f}(x) = cste \equiv \omega^2$. Erreur ici, c'est – w^2

D'où la solution $y(x,t) = y_0\cos(\omega t)\cos(kx+\varphi)$ (pas de phase temporelle, on peut l'éliminer en redéfinissant l'origine des temps). En rajoutant les conditions aux limites y(0,t) = y(L,t) = 0, on a finalement :

$$y(x,t) = y_0\cos(\omega_n t)\sin(k_n x)\ ; k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Formules de trigo -> superposition de deux ondes progressives de même amplitude, en sens inverse, déphasées de π.

2.2 – Modes propres de la corde vibrante

Etudions en détail les modes caractérisés par les indices n.
Dans l'expérience, c = 35 m/s.
Fréquences propres f_n = nc/2L.

Mode fondamental à f = 14,6 Hz.
Schéma et observation des différents modes (n = 1, 2, 3).

Ce type de phénomène est utile en musique.

Conclusion :
- rappel des acquis du cours : onde progressives dans la corde + ondes stationnaires
- ces deux solutions sont reliées
- L'équation d'onde est bien plus générale. Par exemple d'Alembert exacte pour les EM dans le vide.

Questions posées par l'enseignant

<u>Sur la manip</u>

Les calculs présentés sont-ils la théorie de la manip présentée ?

Généralement oui, mais quelques différences. Par exemple la corde n'est pas exactement fixée au niveau du vibreur (nœud réel un petit peu après). Le L du calcul n'est donc pas le L de l'expérience.

Quel calcul faire pour correspondre à la manip ? Les calculs ne disent rien sur la manip. Comment mettre en équation le problème physique la manip ?

Mesurer la longueur effective L_0, dire que y(L_0, t) = a cos(w t) à la place de y(L,t) = 0. On cherche toujours y(x,t) = f(x) g(t) = A cos(wt + phi) cos(kx + phi').
y(0,t) = 0 donc phi' = - pi/2.
Puis a cos(wt) = A cos(wt + phi) sin(kL_0).

Point physiquement important là-dedans ? A quoi sert le générateur ?

Il impose la fréquence. Dire le mot « oscillation forcée ».

Il y a un cours sur les oscillations forcées. Comment sont-elles modélisées ? Quelle équation ?

On met une force dans le second membre, ce qui n'est pas le cas ici. *Subtil*.
En fait c'est pareil, sauf qu'ici on impose que la corde suit l'objet qui vibre. In fine il faudrait appliquer le PFD au vibreur, et on retombe sur nos pattes.

Hypothèse d'inélasticité : le poids de la masse se transmet. C'est tout comme hypothèse ?

Il faut faire attention à ce qui se passe au niveau de la poulie. **Que faut-il écrire comme équation ?**
Il faudrait écrire l'équation du mouvement. S'il y a une poulie il suffit de dire « poulie sans masse ». *Il faut penser à le dire et l'expliquer*.

Il signale l'erreur de signe dans f''/f = w^2.

Expliquer encore pourquoi on obtient une onde stationnaire.

Une première onde progressive se déplace à la vitesse c, est réfléchie là où le poids est attaché.
Quelle discussion n'est pas faite concernant la réflexion, dans les termes du programme ?

Notion d'impédance. Il faut bien justifier le choix de ne pas évoquer l'impédance avec la réflexion.

Confusion de langage : « il n'y a pas de points qui se déplace dans le sens des x ». Est-ce que ça veut dire que pour une onde progressive il y a des points qui font ça ?

Non, erreur de langage !

On suppose que les mouvements de la corde sont uniquement verticaux. Expliquez mieux.

En réalité, il y a des mouvements horizontaux. **La variable x dépend-elle du temps ? Comment définissez-vous x ?**
x est défini sur la position au repos. **Quand on prend en compte le mouvement horizontal, x varie donc ?** On applique le PFD : le système élément de corde a une position verticale et une horizontale, il faut tout paramétrer par rapport à la position au repos (comme en hydro !). Il y a donc en réalité deux x.

« Les conditions aux limites vont changer la base adaptée aux solutions du problème ». Qu'est-ce qu'une base adaptée (on pourrait poser ça). Base, base ? Dans quel espace ?

C'est un espace de Sobolev ? **De quoi dépend-il ? Allez-y !**
Il dépend de T_0, µ **et ?** des conditions aux limites.

Vous avez prononcé le mot « Fourier ». Dans quel espace êtes-vous ? À quel moment êtes-vous dans quel espace ?
Dans L^2. Mais en réalité Fourier sur L^2 ne fonctionne pas. Donc ce n'est pas vraiment une base.

Méthode bas de gamme : « on cherche des solutions sous la forme… »
Méthode un peu au-dessus, peut-être au programme de spé (mais revoir ses maths) : Fourier sur le tore/cercle : <u>fonctions périodiques</u>.
La bonne manière de s'en sortir : espaces de Hilbert imbriqués, parce que ces solutions contiennent des distributions, etc. **Ne pas parler de ça à l'agreg !!**

Qu'est-ce qu'une onde harmonique ?

Une onde avec une seule fréquence.
Mieux dit : une onde avec une seule composante temporelle de Fourier.
Ou, si on a la représentation complexe : une onde qui vérifie dg/dt = +- i w g.

c, c'est la vitesse ?

Il faut dire célérité.

Pourquoi w^2 = k^2 / c^2 s'appelle relation de dispersion ?

Considérer w^2 < 0 ça donne pas la dispersion, c'est de la destruction. *C'est le lance-flammes de Rambo. Rambo il disperse pas ses ennemis, il les détruit.*
Concept de vitesse de phase, vitesse de groupe.

Retour sur la définition de l'onde. Comment est définie la matière dans « sans transport de matière » ? Comment ça marche pour une onde EM ?

Le <u>milieu</u> dans lequel l'onde se propage ne se déplace pas.

Grande question méchante : qu'est-ce qu'une onde ?

<u>À méditer.</u>
Pas de bonne définition. La moins mauvaise : « solution d'une équation qui admet des solutions

progressives ».

Relation sur l'énergie potentielle dE_p = ½ T_0 (dy/dx)^2. Preuve ?

Cf. H-Prépa par exemple.
Subtilité : T . dl où dl est le « déplacement élémentaire ». Mais ici dl = ds – dx, ce n'est pas vraiment le déplacement !
Cela pourrait être mieux écrit.

Commentaires donnés par l'enseignant

<u>Attention à ce qu'on dit : il faut donner ce qu'on vous demande, pas moins, pas plus.</u>

Si vous donnez trop, ça va se terminer d'une façon ou d'une autre de façon un peu sanglante.
Dans le jury : un s'en fout, un aime bien, le troisième votre leçon c'est son dada (fantasme).
Là, vous avez donné des verges pour être battu.

Ne PAS dire « notre corde », « mon expérience ».

Leçon bien faite, un peu speedée mais pour 40 min ça va.
Les conditions aux limites qui ne correspondent pas à celle de la manip, ça va énerver le jury.
- Dire « ce ne sont pas les conditions de la manip mais bon » avec transparent de réponse.
- Ou directement la théorie des conditions réalisées dans la manip.

Ils embêteront quoi qu'il arrive sur le point où le poids s'applique à la corde.

Attention au langage : « célérité », « vitesse ». Très bonne leçon pour un début d'année (sinon, bonne leçon).
Il manque fondamentalement une discussion avec l'impédance (réflexion, etc.), mais en 40 min c'est compliqué. Préparer donc un transparent sur impédance et réflexion des ondes.

Partie réservée au correcteur

Avis sur le plan présenté

Bon plan.

Concepts clés de la leçon

Concepts évoqués dans le titre + tout ce qui touche à la corde vibrante

Concepts secondaires mais intéressants

Analyse de Fourier + conditions aux limites etc…

Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur)

Corde vibrante + coax. (?)

Points délicats dans la leçon

Modéliser correctement la vraie manip. Corde vibrante présentée.

Bibliographie conseillée

Livres de sup et spes, rien de particulier.