TD5 – Circuits du deuxième ordre

Exercice 1 – Caractéristiques de signaux sinusoïdaux

Un signal sinusoïdal peut s'écrire sous la forme :

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

où A est l'amplitude du signal, ω sa pulsation et φ sa phase. Dans l'exercice le terme *phase initiale* fait référence à φ quand le signal est écrit sous cette forme, avec $A > 0$ et $\omega > 0$.

1. Donner l'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale des signaux suivants.

- $s_1(t) = 15\cos(100\pi t + 0{,}5)$;
- $s_2(t) = 5\sin(7{,}854 \times 10^6 t)$;
- $s_3(t) = 2\sin(-120\pi t - \frac{\pi}{4})$;
- $s_4(t) = 15\cos(200\pi t) - 5\sin(200\pi t)$.

Donnée : $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.

2. Donner la phase initiale d'un signal sinusoïdal de période T qui, à l'instant $t = \frac{T}{4}$, vaut la moitié de sa valeur maximale et est croissant.

Exercice 2 – Résolution d'équation différentielles

L'une des grandeurs électriques $x(t)$ d'un circuit vérifie l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 sans second membre.

1. Donner l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

2. La résoudre dans les cas suivants :

2.a. $x(0) = x_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$;

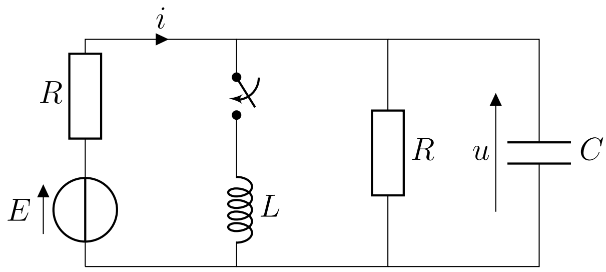
2.b. $x(0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$;

2.c. $x(0) = x_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$.

3. Faire de même dans le cas où l'équation différentielle possède un second membre $\omega_0^2 X_0$.

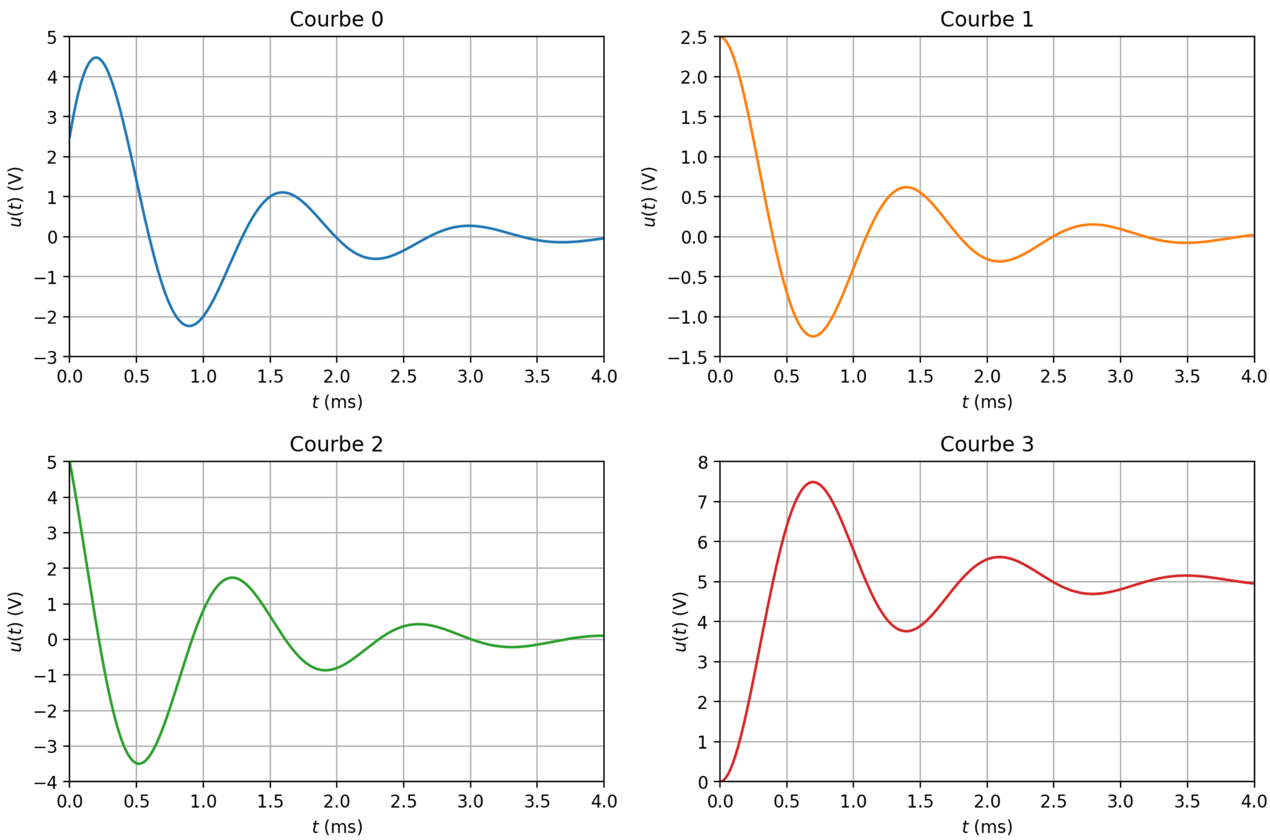
Exercice 3 – Connexion d'une bobine à un circuit RC parallèle

Le circuit représenté ci-contre est alimenté depuis très longtemps par un générateur de tension continu de f.é.m. E et de résistance interne R. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur et on suit à l'oscilloscope l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du circuit RLC parallèle ainsi obtenu. On donne quelques valeurs : $E = 5\,\mathrm{V}$, $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 100\,\mathrm{nF}$.



1. Donner la valeur de $u(t = 0^+)$. Justifier.

2. Donner la valeur vers laquelle doit tendre $u(t)$ en régime permanent. Justifier.
3. Montrer que $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$.
4. Établir, l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ après la fermeture de l'interrupteur. L'écrire sous sa forme canonique et donner l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.
5. Établir une inégalité vérifiée par R, L et C pour que l'on observe un régime pseudo-périodique. On suppose cette inégalité vérifiée pour la suite.
6. Parmi les courbes représentées ci-dessous, identifier celle qui convient. Justifier.



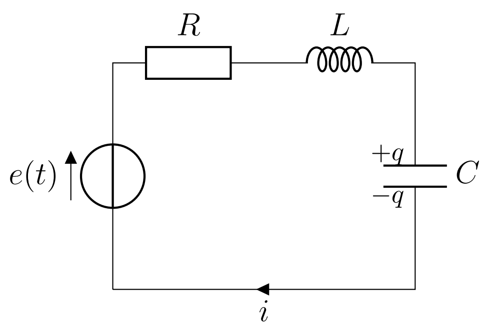
7. Représenter l'allure de $i(t)$, sans établir ni résoudre d'équation différentielle.
8. Proposer une estimation de la valeur de l'inductance L.
9. Résoudre l'équation différentielle pour donner l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$.

Exercice 4 – Régime pseudo-périodique

On considère un circuit composé d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C. Ces dipôles sont montés en séries et on soumet le circuit à un échelon de tension tel que :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0; \\ E & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

On pose $\gamma = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

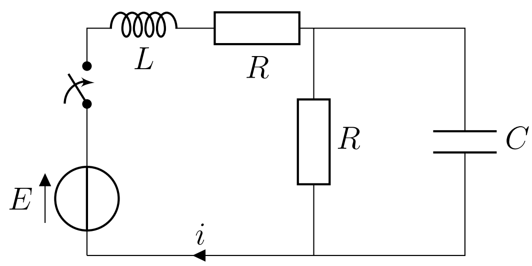


1. Justifier qu'à $t = 0^-$, la charge q et l'intensité i sont nulles.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur pour $t > 0$.
3. Donner les valeurs de $q(0^+)$ et de sa dérivée $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0^+)$. Justifier.
4. Donner la condition portant sur ω_0 et γ pour laquelle on observe un régime transitoire pseudo-périodique. On supposera cette condition vérifiée pour la suite.
5. Montrer que l'expression de la charge pour $t > 0$ peut se mettre sous la forme

$$q(t) = (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))e^{-\gamma t} + D,$$

   où on exprimera ω, A, B et D en fonction de C, E, ω_0 et γ.
6. Exprimer l'intensité $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$ en fonction de C, E, ω_0 et γ.
7. Représenter graphiquement $q(t)$ et $i(t)$. Quelles sont les valeurs atteintes après le régime transitoire ? Justifier par des considérations simples.
8. Déterminer l'énergie totale $\mathcal{E}_g$ fournie par le générateur ainsi que l'énergie $\mathcal{E}_{LC}$ emmagasinée dans la bobine et le condensateur après le régime transitoire en fonction de C et E. En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance. Ces résultats dépendent-ils du régime dans lequel se trouve le circuit ? Interpréter le résultat paradoxal qui apparait dans le cas limite $R \to 0$.

Exercice 5 – Réponse d'un circuit RLC



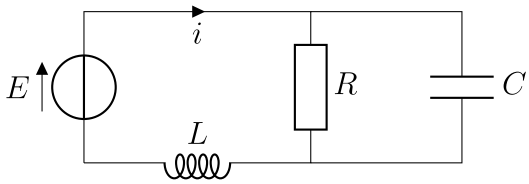
Le circuit représenté ci-contre est alimenté par un générateur de tension continu de f.é.m. E. On suppose que l'interrupteur est ouvert depuis très longtemps. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

On suppose que $RC = \dfrac{L}{R} = \tau$.

Donner l'expression de l'intensité du courant $i(t)$ pour $t > 0$.

Exercice 6 – Encore un RLC – Oral CCP

On considère le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant i.
2. L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.
3. Justifier qualitativement l'expression du facteur de qualité.
4. Donner la valeur de l'intensité i et de sa dérivée à l'instant initial. Justifier.
5. En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

python Exercice 7 – Résolution numérique d'une équation du deuxième ordre

Pour résoudre numériquement une équation d'ordre n, l'idée est de se ramener à un système de n équations différentielles du premier ordre, portant sur la grandeur à calculer et ses dérivées successives. Par exemple, l'équation vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur d'un circuit LC sans source s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = 0.$$

En posant $x(t) = u(t)$ et $y(t) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$, cette équation peut s'écrire sous la forme d'un système de deux équations couplées du premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = y(t); \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = -\omega_0^2 x(t), \end{cases}$$

ou, sous forme vectorielle avec $V(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ \\ -\omega_0^2 x(t) \end{pmatrix} = F(V, t).$$

La résolution numérique passe par une discrétisation du temps : l'instant t devient l'instant $t_k = k\Delta t$, où Δt est le pas de temps utilisé, et on note $x_k = x(t_k)$ et $y_k = y(t_k)$. On peut alors calculer numériquement les valeurs de x_k et y_k en procédant par itération avec la méthode d'Euler explicite par exemple. On peut aussi utiliser la fonction `odeint` [1] de la bibliothèque `scipy.integrate`, dédiée à la résolution d'équations différentielles.

Le programme `td5_mwe_odeint.py` donne un exemple de résolution du système précédent.

1. La fonction `odeint` a vocation à être remplacée par la fonction `solve_ivp`, plus flexible, mais aussi plus lourde a implémenter. Par ailleurs seule la fonction `odeint` est au programme.

On s'intéresse à un circuit RLC série sans source, caractérisé par sa pulsation propre ω_0 et son facteur de qualité Q.

1. Donner l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.
2. Réécrire cette équation sous la forme de deux équations différentielles du premier ordre couplées portant sur $x(t) = u(t)$ et $y(t) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$.
3. Écrire la fonction `oa_sans_source(V,t)` associée à ce système, où V est le vecteur défini précédemment.
4. Résoudre numériquement ce système afin d'obtenir l'évolution temporelle de $u(t)$ pour $\omega_0 = 2\pi \times 10\,\mathrm{Hz}$ et $Q = 30$. On prendra $u(0) = 1\,\mathrm{V}$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.
5. Représenter graphiquement l'évolution de $u(t)$.

Le circuit est maintenant alimenté par une source idéale de tension de f.é.m. $e(t)$.

6. Reprendre les questions précédentes dans le cas où $e(t) = E\sin(\omega t)$, avec $E = 0{,}5\,\mathrm{V}$ et $\omega = 1{,}25\omega_0$. Commenter l'allure de $u(t)$.
7. Mesurer la fréquence du signal en régime permanent. Commenter.
8. Les conditions initiales ont-elles un effet sur l'amplitude du signal en régime permanent ?

`scipy.integrate.odeint(F, V0, t) :` intègre un système d'équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = F(V,t).$$

Paramètres :

`F` : fonction qui calcule la dérivée de V en t ;

`V0` : conditions initiales sur V ;

`t` : liste des instants auxquels calculer V.

Renvoie :

`V` : tableau contenant `len(t)` vecteurs V, calculés au instants de `t`.

```python
"""td5_mwe_odeint.py"""
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

############################
# PARAMÈTRES DE LA RÉSOLUTION
############################
t0 = 0                   # bornes de l'intervalle de résolution
tf = 5                   # en secondes
dt = 1e-3                # pas de temps en secondes
n  = int((tf-t0)/dt + 1) # nombre de points
t = np.linspace(t0,tf,n) # temps en secondes
X0 = [1,0]               # conditions initiales : [u(0), du(0)/dt]
omega0 = 2 * np.pi * 1   # pulsation propre en s^-1

###############################################
# FONCTION ASSOCIÉE À L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE
###############################################
def F(V, t):
    x, y = V         # vecteur V : v[0] = u, v[1] = du/dt
    dx = y           # dx/dt
    dy = -omega0 ** 2 * x # dy/dt
    dV = [dx, dy]    # vecteur dV/dt : dV[0] = du/dt, dV[1] = d2u/dt2
    return dV

########################################
# RÉSOLUTION ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE
########################################
X = odeint(F, X0, t) # résolution
u = X[:,0]           # récupération des données
plt.plot(t, u)
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Tension (V)")
```