DS1

Exercice 1.

1. Cf annexe.

2. Une lunette afocale permet de former une image agrandie à l'infini d'un objet à l'infini. L'observation pour un oeil emmétrope est alors confortable car l'oeil n'accommode pas, ce qui n'engendre pas de fatigue

3. Le grossissement est défini comme :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

α' ← angle sous lequel apparait l'image à travers la lunette = taille apparente de l'image

α : angle sous lequel est vu l'objet à l'oeil nu = taille apparente de l'objet.

Sur le tracé, on voit

$$\tan\alpha' \approx \alpha' \approx -\frac{\overline{A_1B_1}}{f'_{oc}}$$

↑ approximation des petits angles

et $\tan\alpha \approx \alpha \approx \dfrac{\overline{A_1B_1}}{f'_{obj}}$

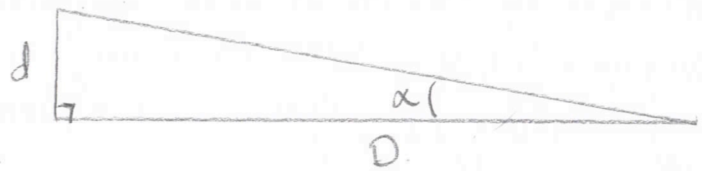
On en déduit :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} \approx -\frac{\cancel{\overline{A_1B_1}}}{f'_{oc}} \times \frac{f'_{obj}}{\cancel{\overline{A_1B_1}}}$$

d'où

$$\boxed{G = \frac{-f'_{obj}}{f'_{oc}}}$$

4.



On a $d \ll D$ d'où

$$\tan\alpha \approx \alpha \approx \frac{d}{D}.$$

$$\boxed{\alpha = \frac{d}{D}}$$

AN : $\alpha \approx 2,9 \times 10^{-5}$

5. La limite de résolution de l'oeil est $\varepsilon = 3 \times 10^{-4}$

Ici $\alpha < \varepsilon$: on ne peut pas distinguer le cratère à l'oeil nu.

6.

f'_{oc} (mm)	35	20	10
G	$-8,6$	-15	-30
$\lvert\alpha'\rvert = \lvert G\alpha\rvert$	$2,5 \times 10^{-4}$	$4,3 \times 10^{-4}$	$8,6 \times 10^{-4}$

Avec les oculaires de 20 mm et 10 mm de distance focale, la taille apparente de l'image est supérieure à la limite de résolution de l'oeil et il sera possible de voir les cratères.

7. On peut reprendre la démarche précédente, avec un objet beaucoup plus petit : une empreinte de pas.

On peut estimer la taille de cette empreinte à environ 30 cm, ce qui donne une taille apparente $\alpha_p = 7{,}8 \times 10^{-10}$ pour une observation depuis la Terre à l'oeil nu.

Avec une lunette, pour que l'on puisse voir l'image de cette empreinte, il faut que sa taille apparente $|\alpha_p'|$ soit supérieure à la limite de résolution ε :

$$|\alpha_p'| > \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |G\alpha_p| > \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |G| > \frac{\varepsilon}{\alpha_p} \quad \text{(on peut choisir } \alpha_p > 0\text{)}.$$

ou encore

$$\frac{f'_{obj}}{f'_{oc}} > \frac{\varepsilon}{\alpha_p} \quad \text{d'où} \quad f'_{obj} > f'_{oc}\frac{\varepsilon}{\alpha_p}$$

AN : $f'_{oc}\dfrac{\varepsilon}{\alpha_p} = 3{,}8$ km !

La lunette formée avec un tel objectif devrait mesurer près de 4 km de longueur : ce n'est pas réalisable !

8. Cf annexe.

9. On utilise la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{O_{oc}O_{co}}} - \frac{1}{\overline{O_{oc}O_{obj}}} = \frac{1}{f'_{oc}}$$

où O_{co} est le centre du cercle oculaire.

$$\frac{1}{\overline{O_{oc}O_{co}}} = \frac{1}{\overline{O_{oc}O_{obj}}} + \frac{1}{f'_{oc}}$$

$$\overline{O_{oc}O_{co}} = \frac{f'_{oc}\,\overline{O_{oc}O_{obj}}}{f'_{oc} + \overline{O_{oc}O_{obj}}}$$

Or $\overline{O_{oc}O_{obj}} = -(f'_{obj} + f'_{oc})$ d'où

$$\overline{O_{oc}O_{co}} = -\frac{f'_{oc}(f'_{obj} + f'_{oc})}{\cancel{f'_{oc}} - f'_{obj} - \cancel{f'_{oc}}} = +\frac{f'_{oc}(f'_{obj} + f'_{oc})}{f'_{obj}}$$

En utilisant la relation de grandissement de Descartes :

$$-\frac{d_{co}}{D_{obj}} = \frac{\overline{O_{oc}O_{co}}}{\overline{O_{oc}O_{obj}}} = \frac{f'_{oc}\,\cancel{(f'_{obj}+f'_{oc})}}{f'_{obj}} \times \frac{1}{-\cancel{(f'_{obj}+f'_{oc})}}$$ (5)

Finalement :

$$\boxed{d_{co} = D_{obj} \times \frac{f_{oc}}{f'_{obj}} = \frac{D_{obj}}{-G}}$$

AN : $d_{co} = 2{,}3\ \text{mm}$

Exercice 2. (6)

1. Les angles i et r sont liés par la loi de Snell Descartes relative à la réfraction :

$$n_{air} \sin i = n \sin r$$

Or $n_{air} \approx 1$ d'où :

$$\boxed{\sin i = n \sin r}$$

2. Dans le triangle isocèle OIJ, on a

$$\alpha = -r$$

La deuxième loi de Snell Descartes en J donne :

$$\beta = -\alpha = r$$

puis, dans le triangle isocèle OJK :

$$\gamma = -\beta = -r$$

En utilisant la troisième loi de Snell-Descartes en K, on trouve finalement

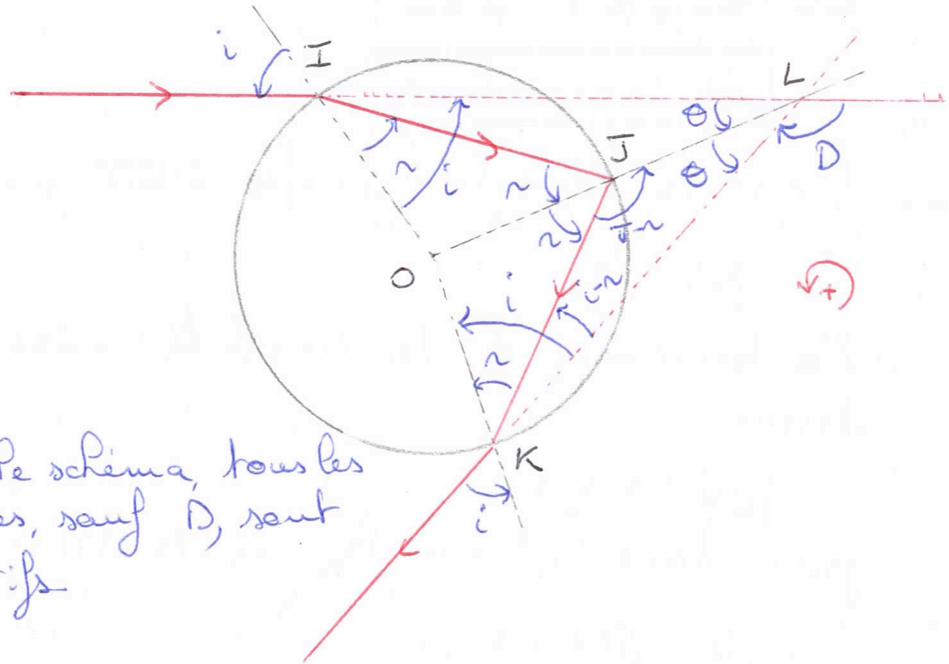
$$\delta = -i$$

3. Puisque $\alpha = -r$ la troisième loi de Snell-Decartes en J donne, pour l'angle réfracté en J i' :

$$n \sin \alpha = \sin i'$$
$$-n \sin r = \sin i'$$
$$-\sin i = \sin i'$$

On a donc $i = -i'$: la reflexion ne peut être totale. Au mieux quand $i = \frac{\pi}{2}$ (incidence rasante), on est à la limite de reflexion totale.

4.



Sur le schéma, tous les angles, sauf D, sont positifs.

Dans le triangle JKL :

$$\cancel{\pi} = (\cancel{\pi} - r) + (i - r) + \theta$$

d'où

$$\theta = 2r - i$$

D'autre part :

$$-D + 2\theta = \pi \quad \text{d'où } D = 2\theta - \pi$$

Finalement :

$$\boxed{D = 4r - 2i - \pi}$$

5. La couleur d'un rayonnement est liée à sa longueur d'onde dans le vide.

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad \text{AN : } \lambda_1 = 410 \text{ nm} \rightarrow \text{bleu}$$
$$\lambda_2 = 671 \text{ nm} \rightarrow \text{rouge}$$

Le rayonnement 1 est ~~bleu~~, le rayonnement 2 est rouge.

6. L'indice optique est défini comme

$$n = \frac{c}{v}$$

c ← célérité de la lumière
v ← vitesse de la lumière dans le milieu
n : indice du milieu

AN : $n_1 = 1{,}339$ $\quad n_2 = 1{,}332$

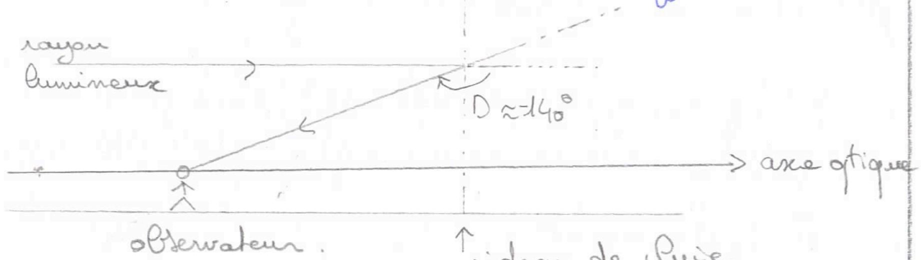
On retrouve bien des valeurs proches de 1,33.

7. n est un nombre sans dimension donc :

- A est adimensionné et s'exprime sans unité
- $\left[\frac{B}{\lambda^2}\right] = 1$ donc $[B] = [\lambda^2] = L^2$

B a la dimension L^2 (surface) et s'exprime en m^2

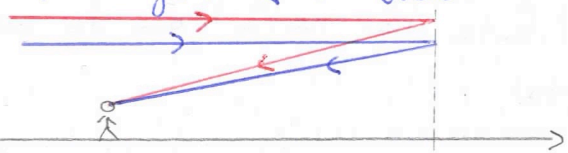
8. La courbe montre que la déviation $D(i)$ passe par un maximum (un minimum pour $|D(i)|$) pour $i \approx 60°$. Autour de cet angle, une variation de l'angle d'incidence i a peu d'effet sur la déviation : la lumière s'accumule dans cette direction. ($D \approx -140°$).
ce qui n'est pas le cas dans d'autres directions associée à des incidences très différentes de $60°$.



De plus, le problème est symétrique par rotation autour de l'axe optique dont la direction est celle des rayons incidents et passant par l'observateur: les rayons observés par le personnage semblent venir d'un cône dont seule une partie est visible. Ceci explique la forme d'arc observée.

Pour expliquer que le rouge est au dessus du bleu, il faut remarquer que $n_{rouge} < n_{bleu}$ donc les rayons rouges sont moins déviés en valeur absolue que les rayons bleus

$$|D_{rouge}| < |D_{bleu}|$$



Exercice 3.

1. Pour que le rayon puisse être guidé, il faut qu'une réflexion totale soit possible au niveau du dioptre cœur/gaine. C'est possible seulement si :

$$n_c > n_g$$

Le milieu constituant le cœur doit être plus réfringent que celui de la gaine.

2. À la limite de réflexion totale, l'angle réfracté vaut $\frac{\pi}{2}$ d'où, en appliquant la troisième loi de Snell Descartes:

$$n_c \sin i_p = n_g$$

d'où

$$\sin i_p = \frac{n_g}{n_c} \quad \text{ou} \quad \boxed{i_p = \arcsin \frac{n_g}{n_c}}$$

Le rayon est guidé si $i > i_p$.

3. $i > i_p$

$\iff \sin i > \sin i_p$ — $i \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $i_p \in [0, \frac{\pi}{2}]$ la fonction sinus est ↗ sur cet intervalle.

$\iff \sin(\frac{\pi}{2} - r) > \sin i_p$ — $i = \frac{\pi}{2} - r$

$\iff \cos r > \sin i_p$ — $\oplus$

$\iff \cos^2 r > \sin^2 i_p$ — r et i $[0, \frac{\pi}{2}]$ où cosinus et sinus sont posit. fs

$\cos^2 r + \sin^2 r = 1$

$\iff 1 - \sin^2 r > \sin^2 i_p$

$\iff \sin^2 r < 1 - \sin^2 i_p$

$\iff \sin r < \sqrt{1 - \sin^2 i_p}$ } les deux membres sont positifs car $\sin^2 i_p \in [0,1]$

Or, la troisième loi de Snell Descartes en O donne ($n_{air} = 1$)

$$\sin\theta = n_c \sin r$$

D'où

$$\sin\theta < n_c\sqrt{1 - \sin^2 i_p}$$

$$\sin\theta < n_c\sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$$

Puisque $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ où la fonction sinus est croissante, on a bien que le rayon est guidé si

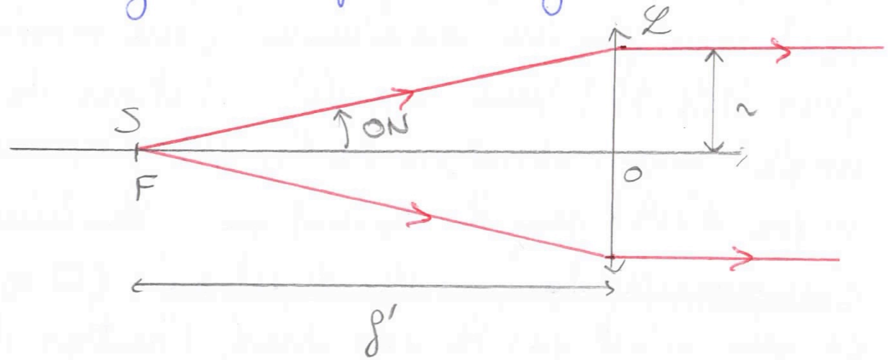
$$\underline{\theta < \arcsin\sqrt{n_c^2 - n_g^2} = \theta_p}$$

$$\boxed{ON = \sin\theta_p = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}}$$

4. AN : $\underline{ON = 0{,}1224}$

5. On peut utiliser une lentille convergente et placer le bout de la fibre dans son plan focal objet de telle sorte à obtenir

une image à l'infini de l'objet S.



6. On a $\tan ON = \frac{r}{f'} \approx ON$

(l'approximation des petits angles est justifiée par la valeur numérique de $ON \approx 0{,}1 \ll 1$)

Finalement :

$$\boxed{f' = \frac{r}{ON}}$$ AN : $\underline{f' = 8{,}2 \text{ cm}}$

7 Pour que faisceau soit collimaté, il faut que $F_2 = S'$ d'où

$$\boxed{\overline{O_2S'} = \overline{O_2F_2} = -\overline{O_2F'_2} = -f'_2}$$

$$S \xrightarrow{\mathcal{L}_1} S' \xrightarrow{\mathcal{L}_2} S_\infty$$

dans le plan focal objet de $\mathcal{L}_2$

faisceau collimaté

8. On utilise la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{O_1S'}} - \frac{1}{\overline{O_1S}} = \frac{1}{f'_1}$$

Or on sait que $\overline{O_1S} = 2f'_1$

$$\frac{1}{\overline{O_1S'}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{2f'_1} = \frac{3}{2f'_1}$$

$$\boxed{\overline{O_1S'} = \frac{2f'_1}{3}}$$

9. $\overline{SO_2} = \overline{SO_1} + \overline{O_1S'} + \overline{S'O_2}$

$$= -2f'_1 + \frac{2f'_1}{3} + f'_2$$

$$= -\frac{4f'_1}{3} + f'_2$$

$$\boxed{\overline{SO_2} = -\frac{4f'_1}{3} + f'_2}$$ AN : $\underline{\overline{SO_2} = 43 \text{ mm}}$

Ce collimateur est deux fois plus compact (ou presque) que le précédent.

10 Pour un tel doublet, on s'intéresse à la formation d'une image A_2B_2 formée à partir d'un objet AB.

$$AB \xrightarrow{\mathcal{L}_3} A_1B_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_4} A_2B_2$$

Les relations de conjugaison donnent :

$\mathcal{L}_3$: $\frac{1}{\overline{O_3A_1}} - \frac{1}{\overline{O_3A}} = \frac{1}{f'_3}$

$\mathcal{L}_4$: $\frac{1}{\overline{O_4A_2}} - \frac{1}{\overline{O_4A_1}} = \frac{1}{f'_4}$

On considère que $O_3 = O_4 = O$ d'où, en sommant les deux relations :

$$\frac{1}{\overline{OA_2}} - \cancel{\frac{1}{\overline{OA_1}}} + \cancel{\frac{1}{\overline{OA_1}}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_4} + \frac{1}{f'_3}$$

$$\frac{1}{\overline{OA_2}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_4 f'_3}(f'_4 + f'_3) = \frac{1}{f'_{eq}}$$

Tout se passe comme si A_2B_2 était l'image d'un objet AB formée par une lentille unique de distance focale

$$\boxed{f'_{eq} = \frac{f'_3 f'_4}{f'_3 + f'_4}}$$

11. AN : $f'_{eq} = \underline{81{,}0 \text{ mm}}$.

⚠ $\mathcal{L}_3$ est convergente donc $f'_3 > 0$
$\mathcal{L}_4$ est divergente donc $f'_4 < 0$

12. $u(f'_{fab}) = \frac{f'_{fab} \times 0{,}01}{\sqrt{3}} = 0{,}5$ mm.

On peut calculer le Z-score :

$$Z = \frac{|f'_{eq} - f'_{fab}|}{u(f'_{fab})} = 1,5 < 2.$$

La valeur trouvée à la question précédente est cohérente avec les spécifications du fabricant