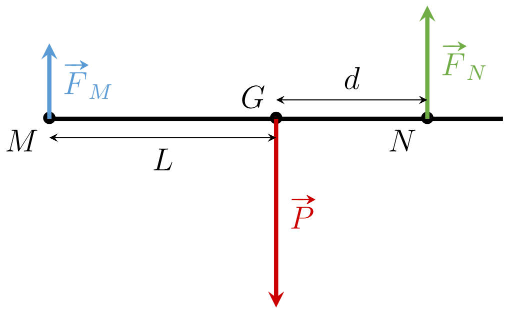
TD17 – Mouvement d'un solide

Exercice 1 – Échauffements

1. $v = R\omega = 50 \times 2\pi \times 14/60 = 73\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 2{,}6 \times 10^2\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.
2. $\mathcal{P} = \Gamma\omega$, d'où $\Gamma = \mathcal{P}/\omega = 3{,}0\,\mathrm{kN\cdot m^{-1}}$.
3. $\mathcal{E}_c = J\omega^2/2 = 2{,}6 \times 10^{29}\,\mathrm{J}$.

Exercice 2 – Portage d'une poutre

1. Les forces exercées par les deux personnages sont a priori différentes. On peut par exemple prendre le cas limite, où $d = 0$: le personnage en N portera toute la poutre alors que le personnage en M ne portera rien.



2. Avec le TMC appliqué à la poutre par rapport au point G en statique, on a $F_M = dF_M/L$. D'autre part, le PFD appliqué au centre de masse de la poutre impose $\vec{P}+\vec{F}_N+\vec{F}_M = \vec{0}$, soit finalement
$$F_M = \frac{mgd}{L+d} \quad \text{et} \quad F_N = \frac{mgL}{L+d}.$$
3. et 4. Les résultats sont inchangés quand la poutre et inclinée.

Exercice 3 – Démarrage d'une machine tournante

On pose : $\Omega = 50\pi\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ la pulsation nominale du moteur ; $J = 12{,}5\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ le moment d'inertie du rotor ; $\Gamma_m = 40\,\mathrm{N\cdot m}$ le couple moteur ; $\Gamma_f = 4\,\mathrm{N\cdot m}$ le couple dû aux frottement constant.

1. Le TMC appliqué au rotor donne $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = (\Gamma_m - \Gamma_f)/J = 2{,}88\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$.
2. L'accélération est constante : $\Delta t = \Omega/\dot{\omega} = 54{,}5\,\mathrm{s}$.
3. En appliquant a nouveau le TMC au rotor :
$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J}\dot{\theta} = \frac{\Gamma_m - \Gamma_f}{J}.$$
4. En régime permanent :
$$\frac{\alpha}{J}\Omega = \frac{\Gamma_m - \Gamma_f}{J} \quad \text{soit} \quad \alpha = \frac{\Gamma_m - \Gamma_f}{\Omega} = 0{,}229\,\mathrm{J\cdot s}.$$

5. On résout l'équation différentielle, avec $\dot{\theta}(0) = 0$:

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \Omega_l(1 - e^{-t/\tau}), \quad \text{où} \quad \tau = \frac{J}{\alpha} \quad \text{et} \quad \Omega_l = \frac{\Gamma_m - \Gamma_f}{\alpha}.$$

Le temps nécessaire pour atteindre 99 % de la valeur limite vaut environ $4{,}6\tau = 251\,\mathrm{s}$.

Exercice 4 – Étude d'une poulie

1. $\dot{x} = R\dot{\theta}$.
2. Le PFD appliqué à la masse permet d'obtenir la tension de la corde $T = mg$. Pour une corde sans masse, la force exercée par la corde en A est égale à $T\vec{e_x}$. Finalement, par application du TMC à la poulie en statique : $\vec{F} = mg\vec{e_x}$.
3. On applique le PFD à la masse M soumise à son poids et à la tension du fil, puis le TMC à la poulie soumise à la tension du fil et à la réaction de la liaison idéale :

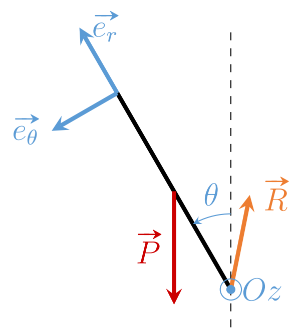
$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg - T & (\text{PFD } \{M\}) \\ J\ddot{\theta} = RT & (\text{TMC } \{\text{poulie}\}) \end{cases}$$

Avec $\ddot{x} = R\ddot{\theta}$, on obtient l'accélération angulaire en combinant les deux équations :

$$\ddot{\theta} = \frac{Rmg}{J + mR^2} = 91\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \quad \text{d'où} \quad \ddot{x} = R\ddot{\theta} = 9{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \quad \text{et} \quad T = \frac{J\ddot{\theta}}{R} = 4{,}5\,\mathrm{N}.$$

Exercice 5 – Chute d'un arbre

1. Schéma :



2. Le TMC par rapport au point O, appliqué au tronc donne

$$\ddot{\theta} - \frac{3g}{2l}\sin\theta = 0.$$

3. En multipliant par $\dot{\theta}$ des deux côtés, on peut intégrer l'équation du mouvement, avec comme conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$:

$$\omega(\theta) = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{l}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}.$$

4. Par définition $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. En séparant les variables,

$$\sqrt{\frac{3g}{l}}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}.$$

5. Le terme de gauche s'intègre entre les instants $t = 0$ pour lequel $\theta = \theta_0$ et τ pour lequel $\theta = \pi/2$, où τ est la durée de la chute. On obtient alors $\tau = 5{,}1\,\mathrm{s}$.
6. En suivant les indications de l'énoncé, on obtient après calcul

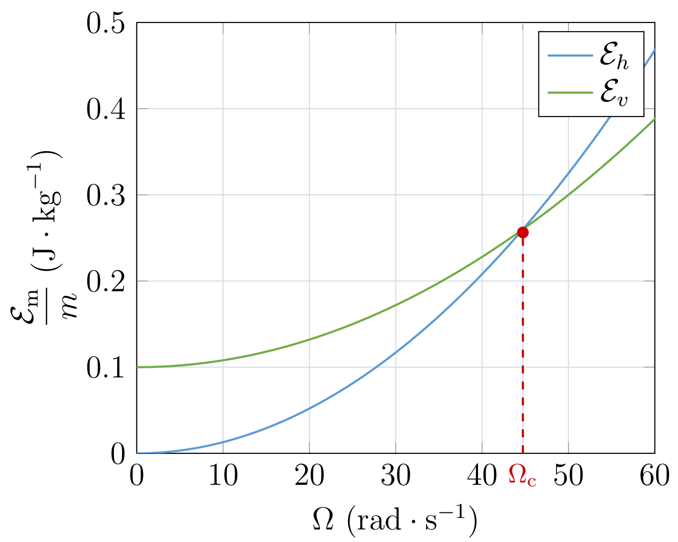
$$R_r = \frac{mg}{2}(5\cos\theta - 3\cos\theta_0) \quad \text{et} \quad R_\theta = -\frac{mg}{4}\sin\theta.$$

Exercice 6 – Œuf en rotation

1. En prenant comme origine de l'énergie potentielle l'altitude $z = 0$, on a

$$\mathcal{E}_h = m\frac{b^2 + a^2}{10}\Omega^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_v = m\frac{b^2}{5}\Omega^2 + mg(a - b).$$

2. La vitesse angulaire Ω_c est telle que $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_v$, soit $\Omega_c = \sqrt{\dfrac{10g}{a+b}} = 44{,}7\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.



Exercice 7 – Enseigne de saloon

On sort ici du cadre du solide indéformable...

1. Par conservation du moment cinétique du système {enseigne + balle} au moment de l'impact, on obtient

$$m\frac{h}{2}v_0 \approx \frac{Mh^2}{3}\omega_0, \quad \text{d'où} \quad \omega_0 \approx \frac{3m}{2Mh}v_0 = 3{,}4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}.$$

L'approximation vient du fait qu'on néglige, **après le choc**, le moment cinétique de la balle devant celui de l'enseigne.

2. En négligeant les frottements, après le choc, le mouvement de l'enseigne est conservatif. En particulier, l'énergie mécanique juste après le choc est égale à celle au « sommet » de la trajectoire correspondant à $\theta = \theta_m$. En négligeant la masse de la balle devant celle de l'enseigne,

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2} J\omega_0^2 + 0 = 0 + Mg\frac{h}{2}(1-\cos\theta_m), \quad \text{d'où} \quad \cos\theta_m = 1 - \frac{J\omega_0^2}{Mgh} = 1 - \frac{h\omega_0^2}{3g} = 32°.$$

3. La variation d'énergie mécanique du système {enseigne + balle} entre l'instant qui précède l'impact et celui qui le succède donne l'énergie dissipée W au moment de l'impact

$$W \approx \frac{1}{2} J\omega_0^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -6{,}7 \times 10^2\ \mathrm{J}.$$

On remarque $W < 0$: le système a perdu de l'énergie. L'approximation vient là encore du fait qu'on néglige, **après le choc**, l'énergie cinétique de la balle devant celle de l'enseigne.

Exercice 10 – Méthode des rectangles

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

theta0 = 5 * np.pi/180
def f(theta):
    return 1 / np.sqrt(np.cos(theta0) - np.cos(theta))

def rectangle_gauche(f, a, b, n):
    x = np.linspace(a, b-(b-a)/n, n)
    return (b-a) / n * np.sum(f(x))
def rectangle_milieu(f, a, b, n):
    x = np.linspace(a, b-(b-a)/n, n) + (b-a)/n/2
    return (b-a) / n * np.sum(f(x))

# La méthode des rectangles à gauche ne fonctionne pas ici
# car la fonction f tend vers l'infini en theta0
print(rectangle_milieu(f, theta0, np.pi/2, 1000000))
# Le résultat est proche de celui donné avec la fonction quad
I_quad = quad(f, theta0, np.pi/2)[0]
print(I_quad)

n = [ 2**k for k in range(20) ]
I = [ rectangle_milieu(f, theta0, np.pi/2, k) for k in n ]
plt.semilogx(n, I, "o", label="rectangle au milieu")
plt.semilogx(n, np.ones(len(n)) * I_quad, "--", label="quad")
plt.xlabel("$n$")
plt.ylabel("Valeur de l'intégrale")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```