TD5 – Circuits du deuxième ordre (correction)

Exercice 1 – Caractéristiques de signaux sinusoïdaux

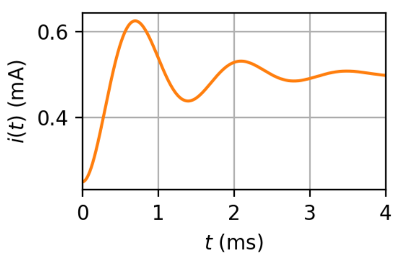
1. $s_1(t)$: $A = 15$, $T = 0{,}02\,\text{s}$, $f = 50\,\text{Hz}$ et $\varphi = 0{,}5\,\text{rad}$.
   $s_2(t)$: $A = 5$, $T = 0{,}8\,\mu\text{s}$, $f = 1{,}25\,\text{MHz}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.
   $s_3(t)$: $A = 2$, $T = 16{,}7\,\text{ms}$, $f = 60\,\text{Hz}$ et $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$.
   $s_4(t)$: $A = \sqrt{15^2 + 5^2}$, $T = 1\,\text{ms}$, $f = 1\,\text{kHz}$ et $\varphi = \arctan\frac{5}{15}$.
2. $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 2 – Résolution d'équation différentielles

1. $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$
2. **2.a.** $x(t) = x_0 \cos\omega_0 t$;
   2.b. $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$;
   2.c. $x(t) = x_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$.
3. **3.a.** $x(t) = (x_0 - X_0)\cos\omega_0 t + X_0$;
   3.b. $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + X_0$;
   3.c. $x(t) = (x_0 - X_0)\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + X_0$.

Exercice 3 – Connexion d'une bobine à un circuit RC parallèle

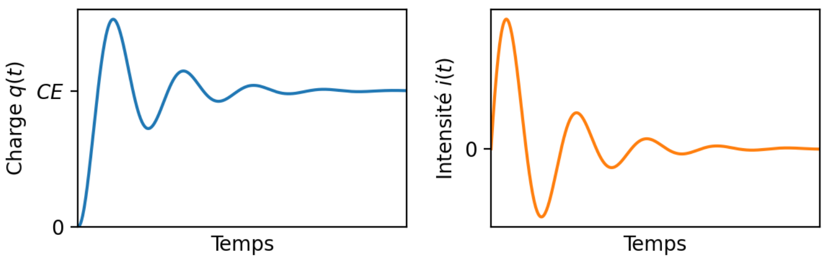
1. En $t = 0^-$, le régime permanent est atteint : le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. Avec un pont diviseur de tension, on trouve $u(t = 0^-) = \frac{E}{2}$.
   La tension aux bornes du condensateur est continue : $u(t = 0^+) = u(t = 0^-) = \frac{E}{2}$.
2. En régime permanent la bobine est équivalente à un fil : $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 0$.
3. L'intensité du courant traversant la bobine est continue donc $i_L(t = 0^+) = 0$, donc à $t = 0^+$, la loi des nœuds donne $i = \frac{u}{R} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. En injectant cette expression de i dans la loi des mailles sur la grande maille toujours à $t = 0^+$: $E = Ri + u$, on obtient $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$.
4. $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$, avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$.
5. $Q > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $R > \sqrt{\frac{L}{C}}$.
6. La courbe 1 convient : les valeurs $u(t = 0)$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0)$ et $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$ sont cohérentes avec les questions précédentes. Pour la courbe 0, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) > 0$, pour la courbe 2, $u(t = 0^+) = E \neq \frac{E}{2}$ et pour la courbe 3, $u(t = 0^+) = 0 \neq \frac{E}{2}$ et $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = E \neq 0$.
7. Sans calcul, on ne peut qu'utiliser les conditions $i(t = 0^+) = \frac{E}{2R}$, $\lim\limits_{t\to\infty} i(t) = \frac{E}{R}$ et le fait que $i(t)$ doit présenter le même nombre d'oscillations que $u(t)$.



8. Le régime transitoire présente quelques oscillations (~ 3), ce qui permet d'estimer le facteur de qualité : $Q \approx 3$. On a donc $\omega_0 \approx \Omega$, où Ω est la pseudo-pulsation, d'où, après une mesure graphique de la pseudo-période T : $L \approx 0{,}47\,\mathrm{H}$.
9. $u(t) = \frac{E}{2} e^{-\mu t}(\cos \Omega t + \frac{\mu}{\Omega} \sin \Omega t)$.

Exercice 4 – Régime pseudo-périodique

1. En $t = 0^-$, le régime permanent est atteint : le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil d'où $i(0^-) = 0$ et $q(0^-) = Cu_C(0^-) = 0$.
2. $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L}$.
3. La tension aux bornes du condensateur est continue, donc sa charge q aussi et l'intensité du courant parcourant la bobine est continue, donc $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ l'est aussi. On a donc $q(0^+) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$.
4. Il faut que le discriminant de l'équation caractéristique soit négatif, c'est-à-dire $\omega_0 > \gamma$.
5. $q(t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)e^{-\gamma t} + D$, avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, $A = -CE$, $B = -CE\frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$ et $D = CE$.
6. $i(t) = CE \frac{\omega_0^2}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t$.
7. On retrouve les valeurs en régimes permanent indiquées sur les graphes en faisant un schéma équivalent au circuit en remplaçant C par un interrupteur ouvert et L par un fil.



8. $\mathcal{E}_g = CE^2$, $\mathcal{E}_{LC} = \frac{CE^2}{2}$ d'où $\mathcal{E}_J = \frac{CE^2}{2}$. Ces expressions ne dépendent pas du régime. Quand $R \to 0$, le circuit n'atteint jamais le régime permanent, le condensateur et la bobine stockent et restituent alternativement de l'énergie.

Exercice 5 – Réponse d'un circuit RLC

$$i(t) = \frac{E}{2R} e^{-t/\tau} \left(-\cos \frac{t}{\tau} + \sin \frac{t}{\tau} \right) + \frac{E}{2R}$$