TD6 – Cinématique du point matériel

Exercice 1 – Changement de coordonnées

On souhaite retrouver les expressions de la dérivée temporelle des vecteurs $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ du système de coordonnées polaires.

1. Sur un schéma, représenter les vecteurs $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ de la base cartésienne, $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ ainsi que l'angle θ pour un point M quelconque.
2. Exprimer $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ en fonction de $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ et θ.
3. Établir l'expression de $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et θ. Conclure.

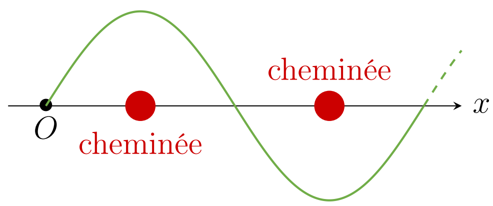
Exercice 2 – Course de voitures radio-télécommandées

Anatole et Barnabé comparent les performances de leurs voitures télécommandées. La voiture d'Anatole a une accélération de $2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ tandis que celle de Barnabé accélère à $3\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, mais la voiture d'Anatole peut atteindre $12\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ alors que celle de Barnabé ne dépasse pas $10\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

1. Déterminer le vainqueur d'une course longue de $15\,\mathrm{m}$.
2. Le gagnant, accorde une revanche à son adversaire et lui laisse choisir la distance de la course. Quelle distance le perdant doit-il proposer pour être sûr, cette fois, de l'emporter ?

Exercice 3 – May the force be with you

Dans un épisode de Star Wars, on peut assister à une course poursuite de speeders entre les cheminées d'une usine. On suppose que le véhicule slalome entre les cheminées alignées selon l'axe (Ox) en suivant une trajectoire sinusoïdale. Elle sont espacées d'une distance $L = 200\,\mathrm{m}$.



https://youtu.be/fjojcgNE34o

1. Le véhicule conserve une vitesse v_0 constante selon (Ox) et met une temps $\Delta t = 12\,\mathrm{s}$ pour revenir sur l'axe après la sixième cheminée. Exprimer, puis calculer la vitesse v_0.
2. Déterminer l'amplitude de la sinusoïde pour que l'accélération du véhicule reste inférieure à $10g$ en valeur absolue, avec $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Commenter.

Exercice 4 – Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire a un mouvement circulaire uniforme autour de la Terre et sa période de révolution est égale à la période T de rotation de la Terre sur elle-même. Son accélération est donnée par $a = g_0\left(\frac{R}{r}\right)^2$, où $R = 6\,400\,\mathrm{km}$ est le rayon de la Terre, r le rayon de l'orbite du satellite et $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ l'accélération de pesanteur au niveau du sol.

1. Faire un schéma et représenter la base de Frenet.

2. Exprimer la vitesse du satellite en fonction de r et T.
3. Déterminer l'altitude h du satellite en orbite géostationnaire.
4. Calculer la norme de sa vitesse.

Exercice 5 – Mouvement elliptique

Un point matériel M se déplace dans le sens trigonométrique sur une ellipse d'équation cartésienne :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'équation horaire du mouvement de M peut s'écrire $x(t) = \alpha\cos(\omega t+\varphi)$ et $y(t) = \beta\cos(\omega t+\psi)$, où ω est une constante. En $t = 0$, les coordonnées du point M sont $(a, 0)$.

1. Déterminer α, β, φ et ψ. Représenter la trajectoire, dans le cas où $a > b$.
2. Déterminer les composantes de la vitesse et celles de l'accélération du point M.
3. Que dire des vecteurs position et accélération à chaque instant ?
4. Pour trois positions de M sur sa trajectoire, représenter les vecteurs position, vitesse et accélération.

Exercice 6 – Ballon sonde

On modélise un ballon sonde par un point matériel de coordonnées $(x(t), z(t))$. Le ballon est lâché depuis le point O à l'instant $t = 0$. Il acquiert quasi-instantanément une vitesse verticale v_0 qui demeure constante tout au long du mouvement. Le vent lui communique une vitesse horizontale $v_x > 0$, orientée selon l'axe (Ox) et proportionnelle à son altitude $z > 0$ mesurée par rapport au niveau du sol : $v_x = z/\tau$, où $\tau > 0$ est homogène à un temps.

1. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
2. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. On exprimera $x(t)$ en fonction de v_0 et τ.
3. En déduire l'équation de la trajectoire $z(x)$ pour le ballon sonde.
4. Représenter cette trajectoire et représenter le vecteur vitesse du ballon sonde à trois instants différents.
5. Exprimer les composantes de l'accélération du ballon sonde.

Exercice 7 – Résolution de problème

Le Rafale est un avion de chasse qui peut se déplacer jusqu'à Mach 1,6. Déterminer le rayon de courbure R minimal de la trajectoire que peut supporter un pilote à bord d'un tel avion allant à sa vitesse maximale.

Temps	0,6 s	1,8 s	6 s	18 s	1 min	3 min	10 min	30 min
Accélération (g)	18	14	11	9	7	6	4,5	3,5

Table 1 – Accélération maximale supportable par un pilote entrainé et équipé, en fonction de la durée d'exposition.

Exercice 8 – Lancer de poids

On souhaite explorer numériquement la situation décrite dans l'application 5 du cours. On note $v_x(t)$ et $v_z(t)$ les composantes de la vitesse de M selon $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_z}$. Les autres notations sont identiques à celles choisies dans l'application.

1. Exprimer les $\dot{x}$, $\dot{z}$, $\dot{v_x}$ et $\dot{v_z}$ en fonction de v_x, v_y et g.
2. Écrire deux fonctions `mouvement_x` et `mouvement_z` qui permettront d'intégrer numériquement les équations différentielles du mouvement à l'aide de la fonction `odeint` de `scipy.integrate`.
3. Intégrer numériquement ces équations et représenter graphiquement la trajectoire du point M.
4. À l'aide de la simulation, déterminer l'angle α permettant, pour une vitesse initiale donnée de lancer le projectile le plus loin.
5. À l'aide de la simulation, déterminer la vitesse initiale v_0 du poids lors du lancer du record du monde.