TD16 – Mouvement dans un champ de gravitation newtonien

Les réponses ne sont pas rédigées.

Exercice 1 – Échauffements

1. La projection du PFD selon $\overrightarrow{e_\theta}$ donne $2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0$, soit en multipliant par r, $2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta}=0$. On reconnait la dérivée de $r^2\dot{\theta}$ qui est donc constante.
2. En identifiant le poids à la force d'attraction gravitationnelle à la surface de la Terre, on obtient :
$$\cancel{m}g = G\frac{\cancel{m}M_T}{R_T^2}, \quad \text{d'où} \quad g = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$
3. Pour une orbite circulaire de rayon R_T+h,
$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}} = \sqrt{\frac{gR_T^2}{R_T+h}} = 7{,}68\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$
Avec $v = 2\pi(R_T+h)/T$,
$$T = \frac{2\pi(R_T+h)}{v} = 5{,}53\times10^3\,\mathrm{s} = 1{,}54\,\mathrm{h}.$$

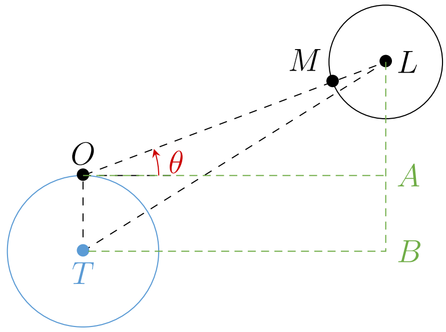
Exercice 2 – Vitesses cosmiques

On considère un astre de masse M et de rayon R.

1. Pour une orbite circulaire :
$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$
Pour la Terre, $v1 = 7{,}9\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.
2. On exprime l'énergie mécanique du corps de masse m aux EI et EF :
   - EI : $\mathcal{E}_{\mathrm{m}1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM}{R}$;
   - EF : $\mathcal{E}_{\mathrm{m}2} = 0$.

   Le TEM donne alors :
$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{d}}.$$
Pour la Terre, $v_2 = 11{,}2\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.
3. À partir de la relation précédente :
$$R_S = \frac{2GM}{c^2}.$$
Avec $M = M_T$, on trouve $R_S = 8{,}8\,\mathrm{mm}$! Cette application numérique traduit la grande compacité des trous noirs.

Exercice 3 – Masse de la Terre



1. $OM = c\tau/2 = 377{,}1 \times 10^3\,\text{km}$.
   En utilisant les triangles OAL et TBL, respectivement rectangles en A et B, on a
   $$LA = OL\sin\theta = (OM + R_L)\sin\theta$$
   et
   $$TL = \sqrt{TB^2 + BL^2} = \sqrt{(OL\cos\theta)^2 + (R_T + LA)^2}.$$
   Finalement
   $$TL = \sqrt{\left(\frac{c\tau}{2} + R_L\right)^2\cos^2\theta + \left(R_T + \left(\frac{c\tau}{2} + R_L\right)\sin\theta\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{c\tau}{2} + R_L\right)^2 + R_T^2 + 2R_T\left(\frac{c\tau}{2} + R_L\right)\sin\theta} = 3{,}834 \times 10^8\,\text{m}.$$
2. Cf. cours : $\dfrac{T_L^2}{TL^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}$.
3. $M_T = \dfrac{4\pi^2 TL^3}{GT_L^2} = 5{,}98 \times 10^{24}\,\text{kg}$.

Exercice 4 – Freinage

1. Cf. cours : $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{\text{cste}}$.
2. La conservation de la direction du moment cinétique implique la planéité du mouvement.
3. Conservation de la norme du moment cinétique : $\mathcal{C} = r^2\dot\theta$.
4. $r = \text{cste}$, donc $\dot\theta = \text{cste}$: le mouvement est circulaire et uniforme.
5. PFD selon $\vec{e_r}$ avec $\vec{a} = -\dfrac{v^2}{r}\vec{e_r}$: $v = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r}}$.
6. Cf. cours : $\dfrac{T_0^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}$ d'où $T_0 = 1{,}75\,\text{h}$.
7. Avec $v = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r}}$, on a $\mathcal{E}_\text{c} = G\dfrac{mM_T}{2r}$.
8. Par définition, $\mathcal{E}_\text{p} = -G\dfrac{mM_T}{r} = -2\mathcal{E}_\text{c}$.
9. Par définition, $\mathcal{E}_\text{m} = \mathcal{E}_\text{c} + \mathcal{E}_\text{p} = -\mathcal{E}_\text{c} = \dfrac{\mathcal{E}_\text{p}}{2}$.
10. On applique la version instantanée du TEM :
    $$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\text{m}}{\mathrm{d}t} = -\alpha m v^3, \quad \text{soit} \quad G\frac{mM_T}{2r^2}\dot r = -\alpha m\left(\frac{GM_T}{r}\right)^{3/2} \quad \text{d'où} \quad \dot r = -2\alpha\sqrt{GM_T r}.$$
11. Puisque $\alpha > 0$, $\dot r < 0$: r diminue.
12. Avec l'expression de la vitesse (Q. 5), on remarque que quand r diminue, v augmente, ce qui est contre intuitif : dans cette situation avec frottement, la vitesse augmente.

Exercice 5 – Paramètre d'impact

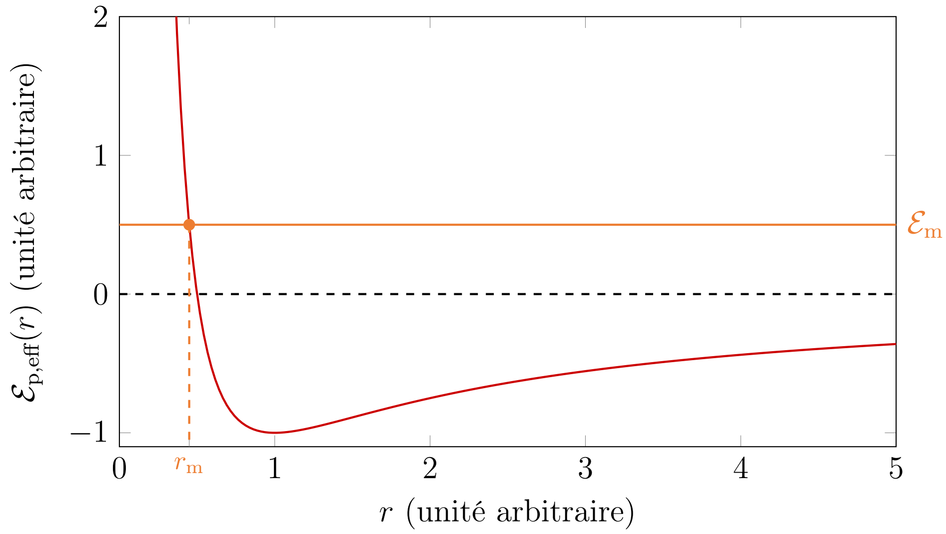
1. Il s'agit d'un mouvement à force centrale, le moment cinétique de P est conservé. On introduit alors la constante des aires $\mathcal{C} = r^2\dot{\theta}$.
Quand le point matériel est situé très loin de S, on a $\vec{v}_0 = v_0\vec{e_x}$. Son moment cinétique s'exprime alors

$$\vec{L}_S = (SH\vec{e_y} - HP\vec{e_x}) \wedge mv_0\vec{e_x} = -mbv_0\vec{e_z}.$$

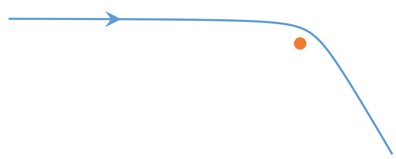
d'où $\mathcal{C} = bv_0$.

2. $\mathcal{E}_\mathrm{m} = \mathcal{E}_\mathrm{c} + \mathcal{E}_\mathrm{p} = \dfrac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) - G\dfrac{mM}{r}$.

3. $\mathcal{E}_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_\mathrm{p,eff}(r)$ avec $\mathcal{E}_\mathrm{p,eff}(r) = \dfrac{m\mathcal{C}^2}{2r^2} - G\dfrac{mM}{r}$.



4. Le point P est dans un état de diffusion, qui correspond à une énergie mécanique $\mathcal{E}_\mathrm{m} > 0$. La trajectoire du point P est une branche d'hyperbole.



5. Lorsque la distance SP est minimale, on a $\dot{r} = 0$. La vitesse du point P s'exprime alors $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta} \perp \overrightarrow{SP}$.

6. On a alors $bv_0 = r_\mathrm{min}v_1$.

7. Le système n'est soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle qui est conservative. Par conservation de l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{mM}{r_\mathrm{min}} \quad \text{d'où} \quad v_0^2 = v_1^2 - \frac{2GM}{r_\mathrm{min}}.$$

8. En utilisant les résultats des deux équations précédentes, on trouve que la distance minimale d'approche est solution de l'équation

$$v_0^2 r_\mathrm{min}^2 + 2GMr_\mathrm{min} - b^2v_0^2 = 0.$$

On ne retient que la solution positive, qui doit être supérieure au rayon R de l'étoile pour éviter une collision, soit, après calcul

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{G^2M^2 + b^2v_0^4} - GM}{v_0^2} > R, \quad \text{d'où} \quad b > \sqrt{R^2 + 2R\frac{GM}{v_0^2}}.$$

Exercice 6 – Voyage vers Mars

1. Au périhélie, l'énergie mécanique du véhicule est

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}mv_P^2 - G\frac{mM}{r_T},$$

où M est la masse du Soleil. L'énergie mécanique et conservée et vaut, pour une orbite elliptique de grand-axe $2a = r_T + r_M$,

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = -G\frac{mM}{2a}.$$

Ce résultat n'est pas à connaitre mais il faut savoir le démontrer pour une orbite circulaire de rayon a. Il se généralise ensuite au cas elliptique avec a le demi grand-axe.
Le produit GM est obtenu avec la troisième loi de Kepler appliquée à la Terre :

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Finalement, on a

$$v_P = \frac{2\pi r_T}{T_T}\sqrt{\frac{2r_M}{r_T + r_M}} = v_T\sqrt{\frac{2r_M}{r_T + r_M}} = 33\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

2. La vitesse de libération (Ex. 2) à la surface de la Terre est donnée par

$$v_L = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}},$$

où M_T et R_T sont la masse et le rayon de la Terre.

3. La distance entre le projectile et la Terre passe de R_T à $d \gg R_T$, tandis que la distance entre le projectile et le Soleil reste environ égale à r_T. Par conservation de l'énergie mécanique, on a alors à l'EI et à l'EF

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_T}{R_T} - G\frac{GmM}{r_T} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{GmM}{r_T}, \quad \text{d'où} \quad v_\infty = \sqrt{v_0^2 - v_L^2}.$$

4. Il faut tirer le projectile dans la direction et le sens du mouvement de la Terre pour profiter de son élan.

5. $v_0 = \sqrt{(v_P - v_T)^2 + v_L^2}$.
La durée τ de l'aller correspond à une demie-période orbitale. Avec la troisième loi de Kepler et l'expression de GM obtenue précédemment :

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{T_T}{2}\left(\frac{r_T + r_M}{2r_T}\right)^{3/2} = 0{,}709\,\mathrm{an}.$$

Exercice 9 – Équation de Kepler

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import bisect

e = 0.5

# Question 1
def g(u):
    return u - e * np.sin(u)

u = np.linspace(-np.pi, np.pi)
plt.plot(u, g(u))
plt.grid()
plt.xlabel("$u$")
plt.ylabel("$g(u)$")

# Pour t = T/3, on cherche la valeur de u tq g(u) = 2 * pi / 3
plt.plot(u, np.ones(len(u))*2*np.pi/3, "--")
# Graphiquement, on lit u = 2.4

# Question 2
# On peut choisir u+ = 2,3 et u- = 2,5.

# Question 3
a, b = 2.3, 2.5
def f(u):
    return g(u) - 2*np.pi/3
u0 = bisect(f, a, b)
print("Solution de l'équation de Kepler (bisect) :", u0)
# Affiche 2.4234054584740083

# Question 4
precision = 2e-12
while (b-a) > precision:
    c = a + (b-a)/2
    if f(a)*f(c) > 0:
        a = c
    else:
        b = c
print("Solution de l'équation de Kepler (dichotomie) :", c)
# Affiche 2.4234054584740075

print ("Écart entre les deux valeurs :", np.abs(u0 - c))
# Affiche 8.881784197001252e-16
# Les deux méthodes donnent le même résultat
# avec au moins la précision demandée.
```