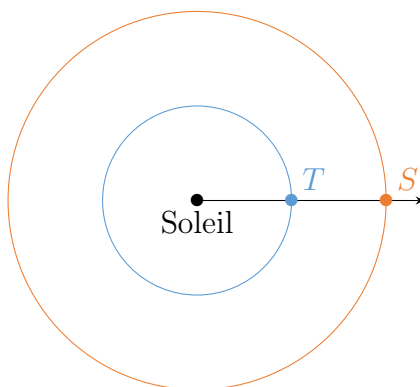


Concours Blanc 2022

Épreuve de Physique

Exercice 1 – Saturne et ses anneaux

1. Lors d'une opposition de Saturne, le Soleil, la Terre et Saturne sont alignés dans cet ordre.



2. La distance minimale entre la Terre et Saturne est celle correspondant à l'opposition représentée ci-dessus. On a alors, dans le cadre de l'approximation des petits angles,

$$\alpha_0 = \frac{d_S}{R_S - R_T}.$$

A.N. : $\alpha_0 = 9,01 \times 10^{-5} \text{ rad} = 18,7''$.

3. Sur la photographie, on constate que les anneaux sont environ deux fois plus grands que la planète elle-même. On en déduit $\alpha_A \approx 40''$.

La limite de résolution angulaire d'un œil emmétrope est de $1' > \alpha_A$: il n'est pas possible de distinguer les anneaux de Saturne à l'œil nu.

4. Puisque la vitesse angulaire est constante on a

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T_T} \quad \text{et} \quad \omega_S = \frac{2\pi}{T_S}.$$

En intégrant, avec la condition initiale $\theta_T(0) = \theta_S(0) = 0$, on obtient :

$$\theta_T(t) = \frac{2\pi}{T_T}t \quad \text{et} \quad \theta_S(t) = \frac{2\pi}{T_S}t$$

5. La troisième loi de Kepler indique que pour des corps en orbite autour du même astre, le rapport T^2/a^3 est constant, où T est la période de révolution et a le demi-grand axe de la trajectoire.

Pour Saturne et la Terre en orbite autour du Soleil, on a :

$$\frac{T_T^2}{R_T^3} = \frac{T_S^2}{R_S^3} \quad \text{d'où} \quad T_S = T_T \left(\frac{R_S}{R_T} \right)^{3/2}.$$

A.N. : avec $T_T = 365,25$ jours, on obtient $T_S = 10,7 \times 10^3$ jours.

6. On cherche le premier instant τ pour lequel on retrouve une opposition de Saturne, c'est-à-dire $\theta_T(\tau) = \theta_S(\tau) + 2\pi$. En effet, la Terre a fait une révolution de plus que Saturne. On en déduit :

$$\tau = \frac{T_T T_S}{T_S - T_T}.$$

A.N. : $\tau = 378$ jours.

7. On compare la distance entre la Terre et Saturne à la distance focale de la lentille \mathcal{L}_1 . On obtient $(R_S - R_T)/f'_1 \approx 5 \times 10^{11}$: la distance focale de la lentille est beaucoup (!) plus petite que la distance entre la lentille et l'objet, on peut donc considérer qu'il est à l'infini.

L'image se forme donc dans le plan focal image de \mathcal{L}_1 . Pour obtenir une image nette, il faut donc que $d_1 = f'_1$.

8. La surface occupée par un pixel est $\varepsilon_c^2 = S_c/N$, d'où

$$\varepsilon_c = \sqrt{\frac{S_c}{N}} = 5,60 \mu\text{m}.$$

La taille de l'image de Saturne sur le capteur est donnée par $\alpha_0 f'_1$, soit en nombre de pixels :

$$\frac{\alpha_0 f'_1}{\varepsilon_c} = 41.$$

9. On construit d'abord l'image $A_1 B_1$ de AB par la lentille \mathcal{L}_1 (tracé **bleu**), puis $A' B'$ image de $A_1 B_1$ par \mathcal{L}_2 (tracé **vert**).

À la sortie de \mathcal{L}_1 , le rayon issu de B se dirige vers B_1 avant d'être dévié vers B' après \mathcal{L}_2 .



10. On veut un grandissement par la lentille \mathcal{L}_2 égal à γ_2 , soit, en utilisant la relation de Descartes :

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}}.$$

Or d'après la question 7, on a $A_1 = F'_1$. Par ailleurs $\overline{O_2A'} = D_{2c}$ par définition et $\overline{O_2F'_1} = \overline{O_2O_1} + f'_1 = -D_{12} + f'_1$ en appliquant Chasles. On obtient finalement

$$D_{12} = f'_1 - \frac{D_{2c}}{\gamma_2}.$$

A.N. : $D_{12} = 2,28 \text{ m}$.

11. En appliquant la relation de conjugaison de Descartes, on obtient

$$f'_2 = \frac{\overline{O_2A_1O_2A'}}{\overline{O_2A_1} - \overline{O_2A'}} \quad \text{soit} \quad \boxed{f'_2 = \frac{D_{2c}}{1 - \gamma_2}}.$$

A.N. : $f'_2 = -100 \text{ mm}$, cohérent avec une lentille divergente.

12. L'image est trois fois plus grande que dans le cas de la seule lentille \mathcal{L}_1 de distance focale f'_1 . On veut $\alpha_0 f' = \gamma_2 \alpha_0 f'_1$, soit directement

$$\boxed{f' = \gamma_2 f'_1}.$$

Avec $\gamma_2 = 3$, la distance focale équivalente de l'objectif est bien triplée, ce qui explique le nom de tripleur de focale.

13. Pour une observation confortable par un œil emmétrope, l'image de Saturne à travers le système optique doit être à l'infini. C'est le cas si les foyers image de \mathcal{L}_1 et objet de \mathcal{L}_2 sont confondus : on obtient alors une lunette **afocale**.
14. Le demi-angle θ caractéristique de diffraction vérifie, dans l'approximation des petits-angles $\theta \approx \lambda/d_1$, où λ est la longueur d'onde moyenne du visible, voisine de 500 nm . L'image d'un objet ponctuel situé à l'infini par la lentille \mathcal{L}_1 aura donc une largeur $2f'_1\lambda/d_1$. Finalement, sur le capteur l'image agrandie aura une largeur

$$\boxed{\varepsilon_d = 2\gamma_2 f'_1 \frac{\lambda}{d_1}}.$$

A.N. : $\varepsilon_d \approx 30 \mu\text{m}$, soit environ 6 pixels.

Cette tache de diffraction reste petite devant la taille de l'image agrandie de Saturne (~ 120 pixels), mais pas complètement négligeable : l'effet de la diffraction affectera la qualité de l'image sans empêcher de distinguer nettement les anneaux de Saturne.

Exercice 2 – Accordeur de guitare

1. Pour un signal périodique $s(t)$ de période T , la moyenne est définie par

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt,$$

où t_0 est un instant quelconque.

Graphiquement, on lit pour le signal du micro $\langle u_e(t) \rangle \approx 10 \text{ mV}$.

2. Graphiquement, on estime la durée de trois périodes à environ 9 ms, soit

$$f_{co} \approx 330 \text{ Hz.}$$

Il s'agit donc du **Mi aigu**.

3. Le signal est périodique mais il n'est pas sinusoïdal. Son spectre comportera donc des harmoniques.
4. La fonction de transfert du filtre (\mathcal{F}_a) est définie par :

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e},$$

où \underline{u}_s et \underline{u}_e sont les signaux complexes associés aux signaux réels u_s et u_e .

On reconnaît un pont diviseur de tension :

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}.$$

5. On a

$$|\underline{H}_1(j\omega)| \xrightarrow{\text{BF}} 0 \quad \text{et} \quad |\underline{H}_1(j\omega)| \xrightarrow{\text{HF}} 1.$$

Il s'agit d'un filtre **passe-haut** du premier ordre.

En posant $\omega_1 = (R_1C_1)^{-1}$, la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{j\omega/\omega_1}{1 + j\omega/\omega_1}.$$

ω_1 est la **pulsation de coupure** du filtre, en-deçà de laquelle l'atténuation est supérieure à 3 dB.

6. En basse fréquence :

$$\underline{H}_1(j\omega) \underset{\text{BF}}{\sim} j\frac{\omega}{\omega_1} \quad \text{d'où} \quad G_{\text{dB},1}(\omega) \underset{\text{BF}}{\sim} 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right),$$

ce qui correspond à une asymptote de pente +20 dB/décade, qui passe par le point $(\omega_1, 0 \text{ dB})$. Par ailleurs en haute fréquence :

$$\underline{H}_1(j\omega) \underset{\text{HF}}{\sim} 1 \quad \text{d'où} \quad G_{\text{dB},1}(\omega) \underset{\text{HF}}{\sim} 0,$$

ce qui correspond à une asymptote horizontale à 0 dB.

On en déduit le diagramme de Bode représenté Fig. 1.

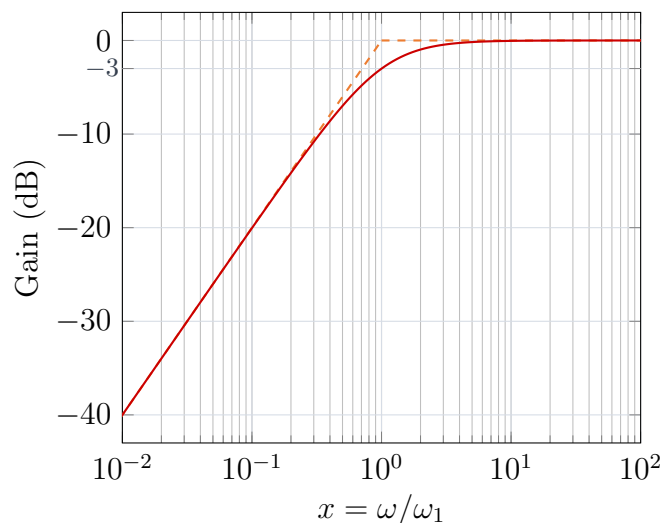


FIGURE 1 – Diagramme de Bode en amplitude du filtre (\mathcal{F}_a).

7. A.N. : $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 16 \text{ Hz}$.

Ce filtre permet d'éliminer la composante continue du signal $u_e(t)$, sans affecter la fondamentale et les harmoniques.

8. On remplace le condensateur par un interrupteur ouvert en basse fréquence et par un fil en haute fréquence. Les circuits équivalents au filtre (\mathcal{F}_b) deviennent alors :



On reconnaît un pont diviseur de tension en basse fréquence, d'où

$$u_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) u_1,$$

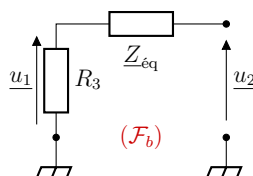
tandis qu'en haute fréquence, on a immédiatement

$$u_2 = u_1.$$

9. On a

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}.$$

10. En utilisant le résultat de la question précédente, le filtre devient



On reconnaît le même pont diviseur que précédemment, où $\underline{Z}_{\text{eq}}$ remplace R_2 , d'où

$$\underline{u}_2 = \left(1 + \frac{R_2/R_3}{1 + jR_2C_2\omega}\right) \underline{u}_1.$$

On retrouve alors la forme donnée dans l'énoncé :

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}, \quad \text{avec} \quad G_0 = \frac{R_2}{R_3} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}.$$

On retrouve les limites en basse et haute fréquence

$$|\underline{H}_2(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1 + G_0 \quad \text{et} \quad |\underline{H}_2(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 1,$$

cohérentes avec la question 8.

11. A.N. : $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \approx 500 \text{ Hz}$ et $G_0 \approx 114$.

Ce filtre permet d'amplifier une première fois la composante fondamentale du signal u_e à la fréquence f_{co} par un facteur ~ 100 sans affecter les harmoniques. Il s'agit d'un filtre d'ordre 1 donc peu sélectif : les premières harmoniques seront inévitablement légèrement amplifiées.

12. Le diagramme de Bode montre que le gain du filtre (\mathcal{F}_c) décroît rapidement quand on s'éloigne de sa fréquence caractéristique ($\sim 330 \text{ Hz}$). Il s'agit d'un passe-bande d'ordre 2, comme le montre les asymptotes haute et basse fréquence de pente $\pm 20 \text{ dB/décade}$.
13. La bande-passante à -3 dB correspond à l'intervalle de fréquence pour lequel le gain du filtre est supérieur à -3 dB . Graphiquement, on estime $\Delta f \approx 17 \text{ Hz}$.
14. Graphiquement, on lit sur le diagramme de Bode du filtre (\mathcal{F}_c) $G_{\text{dB}}(f_{\text{co}}) \approx -6 \text{ dB}$, soit $G(f_{\text{co}}) = 10^{-6/20} \approx 0,5$. Dans ces conditions, l'amplitude de la composante fondamentale est réduite d'un facteur deux.
15. On a $[f_{\text{co}}] = \text{T}^{-1}$, $[\mu] = \text{M} \cdot \text{L}^{-1}$, $[L] = \text{L}$ et $[T] = \text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}$. On remarque alors

$$\left[\frac{1}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \right] = \text{T}^{-1}.$$

Une expression possible de la fréquence caractéristique de vibration de la corde est donc

$$f_{\text{co}} = \frac{\alpha}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

où α est une constante sans dimension.

Pour accorder la corde de Mi aigu, il faut augmenter f_{co} , ce qui est possible en augmentant la tension de la corde.

L'étude des modes de vibration de la corde montre que $\alpha = 1/2$.

16. Dans le spectre de u_e , on s'attend à observer :

- une composante continue d'amplitude voisine de 10 mV à la fréquence nulle ;
- la composante fondamentale à une fréquence proche de 330 Hz ;

- de nombreuses harmoniques à des fréquences multiples de celle de la fondamentale.

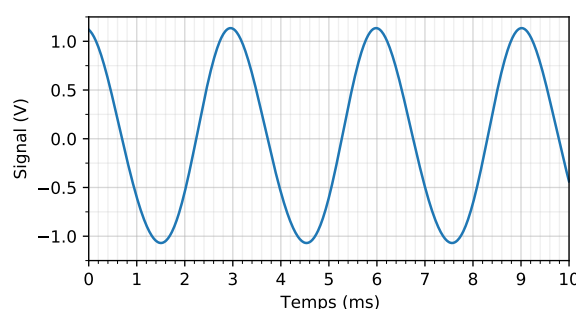
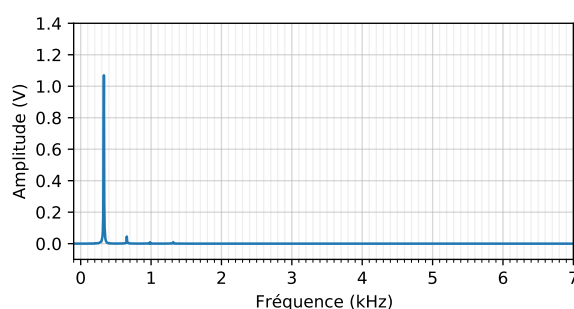
On retrouve tous ces éléments dans le spectre donné dans l'énoncé, il est donc raisonnable de penser qu'il s'agit du spectre du signal u_e .

17. Procédons par élimination :

- le spectre (c) comporte une composante continue à la fréquence nulle, incompatible avec un la sortie d'un filtre passe-haut ;
- la composante fondamentale et les harmoniques des spectres (b) et (d) ont des amplitudes supérieures à celle du spectre de u_e , incompatibles avec le gain haute fréquence du filtre (\mathcal{F}_a) qui est unitaire ;
- le spectre (a) ne présente pas de composante continue et le reste du spectre n'est pas modifié par rapport à celui de u_e , ce qui est compatible avec la fréquence de coupure faible (16 Hz) du filtre.

Le spectre du signal u_1 est le **spectre (a)**.

18. Le **spectre (d)** est compatible avec celui de la sortie du filtre (\mathcal{F}_b) : la composante continue a été éliminée par le filtre (\mathcal{F}_a) et la composante fondamentale a été amplifiée par un facteur 100 environ. Les harmoniques, au-delà de la fréquence de coupure f_2 , sont de moins en moins amplifiées quand on s'éloigne de f_2 .
19. Le spectre du signal u_3 à la sortie de (\mathcal{F}_c) ne contient presque exclusivement que la composante fondamentale à la fréquence f_{co} . Le signal u_3 est donc quasi-sinusoïdal.



Exercice 3 – Étude du LHC

1. Il s'agit de la composante électrique de la force de Lorentz. Pour un proton de charge $+e$ dans le champ \vec{E} , on a

$$\boxed{\vec{F}_E = e\vec{E}.}$$

On compare cette composante au poids du proton :

$$\boxed{\frac{F_E}{P} = \frac{eE}{mg} \approx 10^{12}.}$$

En présence d'un champ électrique, le poids d'un proton est négligeable devant la composante électrique de la force de Lorentz.

2. On s'intéresse au système {proton} dans le référentiel terrestre supposé galiléen, soumis à la seule composante électrique de la force de Lorentz. Le PFD projeté selon \vec{e}_x donne immédiatement

$$\ddot{z} = \frac{e}{m_p} E.$$

3. On intègre en tenant compte des conditions initiales pour obtenir la vitesse $v(t)$ puis la position du proton :

$$v(t) = \dot{z}(t) = \frac{e}{m_p} Et \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{e}{2m_p} Et^2.$$

On en déduit

$$v(z) = \sqrt{\frac{2eE}{m_p} z}, \quad \text{d'où} \quad v_L = \sqrt{\frac{2eE}{m_p} L}.$$

4. On a

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dz} \vec{e}_z,$$

d'où, en projetant selon \vec{e}_z ,

$$V(L) - V_0 = - \int_0^L E dz = -EL.$$

Puisque $V_0 = 0$, on a finalement $V_L = -EL$.

On a bien $V_L < 0$ si, comme sur la figure \vec{E} est orienté vers les z croissants, ce qui est nécessaire pour accélérer les protons de charge positive dans le même sens. On retrouve bien que le champ est orienté des zones de fort potentiel vers les zones de faible potentiel.

5. Dans le champ électrique, le mouvement du proton est conservatif car il n'est soumis qu'à la composante électrique de la force de Lorentz qui est conservative.

- initialement, en $z = 0$ où sa vitesse est nulle : $\mathcal{E}_m = \cancel{\mathcal{E}_c} + \mathcal{E}_p = eV_0 = 0$;
- en $z = L$ où sa vitesse vaut v_L : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_p v_L^2 - eEL$.

On applique le théorème de l'énergie mécanique :

$$\Delta \mathcal{E}_m = 0 = \frac{1}{2} m_p v_L^2 - eEL, \quad \text{d'où} \quad v_L = \sqrt{\frac{2eE}{m_p} L}.$$

6. En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient directement, à chaque passage entre deux tubes

$$\Delta \mathcal{E}_c = eU_c.$$

7. Après n tubes, l'énergie cinétique d'un proton a augmenté de $(n - 1)\Delta\mathcal{E}_c$. Initialement avec une énergie cinétique eU_0 , on a donc :

$$\boxed{\mathcal{E}_n = e(U_0 + (n - 1)U_c).}$$

Après le 10ème tube, on a donc,

$$\boxed{v_{10} = \sqrt{\frac{2e(U_0 + 9U_c)}{m_p}}.}$$

A.N. : $v_{10} = 5,9 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette vitesse reste inférieure à $c/3$ où c est la célérité de la lumière : les protons ne sont pas encore relativistes et l'approche classique reste justifiée.

8. Par définition $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$, d'où $\boxed{\mathcal{E}_{10} = 18,2 \text{ MeV}.}$
9. Dans un champ magnétique, le proton est soumis à la composante magnétique de la force de Lorentz :

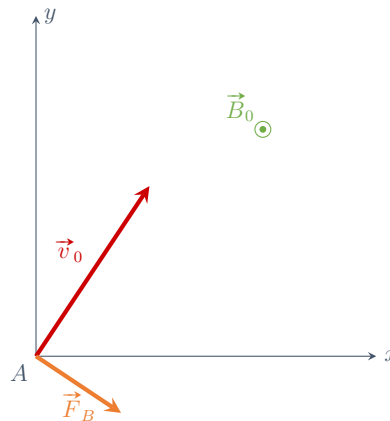
$$\vec{F}_B = e\vec{v} \wedge \vec{B}_0.$$

Si la vitesse est orthogonale au champ magnétique terrestre, on a

$$\boxed{\frac{F_B}{P} \approx 3 \times 10^{10}.}$$

À nouveau le poids peut être négligé devant la force de Lorentz.

10. Avec un proton de charge positive, on a avec la règle de la main droite :



11. La puissance de la composante magnétique de la force de Lorentz s'exprime

$$\mathcal{P} = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = e(\vec{v} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{v} = 0,$$

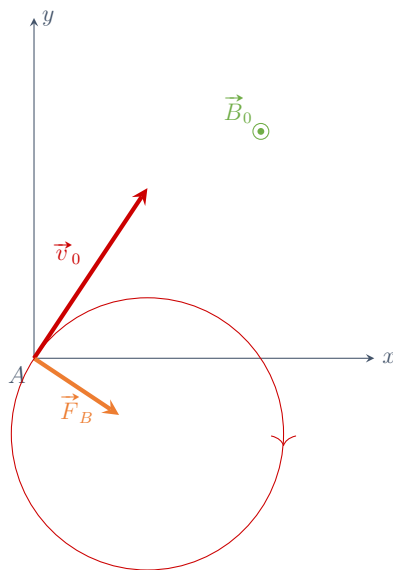
puisque, par construction, \vec{F}_B est toujours orthogonale à \vec{v} . **La composante magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas.**

Par application du théorème de la puissance cinétique, on obtient immédiatement :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = 0.$$

Le mouvement est uniforme.

12. La trajectoire est parcourue dans le **sens horaire**.



13. Sur la trajectoire circulaire, l'accélération du proton est centripète. La composante magnétique de la force de Lorentz est radiale et dirigée vers le centre de la trajectoire. On projette le PFD selon le vecteur du repère de Frenet normal à la trajectoire et on obtient finalement l'expression du rayon R de la trajectoire :

$$R = \frac{m_p v_0}{e B_0}.$$

14. Une fois sorti de la zone de champ magnétique, le mouvement est **rectiligne uniforme**.

Toujours le même problème : ici le poids ne peut être négligé puisque, en l'absence de champ magnétique, c'est la seule force que subit le proton. Le proton est en chute libre et la trajectoire est en réalité une parabole. Toutefois, la vitesse des particules est grande et les durées d'observation sont courtes, si bien que l'on ne voit qu'une toute petite partie de la parabole : la trajectoire est bien approchée par une droite.