

Interro21 - Filtrage linéaire

Nom :

Note :

Prénom :

Exercice 1 – Filtrage linéaire (10 points)

- /1 1. Définir la valeur moyenne d'un signal périodique $s(t)$ de période T .

$$\langle s(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt = \int_0^T s(t) dt.$$

- /1 2. Déterminer la valeur moyenne de $s_1(t) = S_0 + S_1 \cos(\omega t)$.

$$\langle s_1(t) \rangle = \langle S_0 \rangle + \langle S_1 \cos(\omega t) \rangle = S_0 + 0 = S_0.$$

- /1 3. Définir la valeur efficace de $s(t)$.

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle}.$$

- /1 4. Déterminer la valeur efficace de $s_2(t) = S_1 \cos(\omega t)$.

$$s_{2,\text{eff}} = \sqrt{\langle S_1^2 \cos^2(\omega t) \rangle} = S_1 \sqrt{\langle \cos^2(\omega t) \rangle} = \frac{S_1}{\sqrt{2}}$$

On considère un filtre linéaire dont la fonction de transfert est notée $\underline{H}(j\omega)$. Le signal à l'entrée du filtre est

$$e(t) = 10 + 2 \cos(\omega_0 t) + 10 \cos(10\omega_0 t).$$

- /2 5. Donner l'expression du gain linéaire et du gain en décibel du filtre.

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| \text{ et } G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log(G(\omega)).$$

- /1 6. Donner l'expression du déphasage introduit par le filtre.

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)).$$

- /3 7. On suppose $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$. Déterminer $s(t)$.

On a

ω	$\underline{H}(j\omega)$	$G(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	1	1	0
ω_0	$\frac{1}{1+j}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$
$10\omega_0$	$\frac{1}{1+10j}$	$\frac{1}{\sqrt{101}} \approx \frac{1}{10}$	$-\arctan(10) \approx -\frac{\pi}{2}$

d'où :

$$s(t) \approx 10 + \sqrt{2} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(10\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$