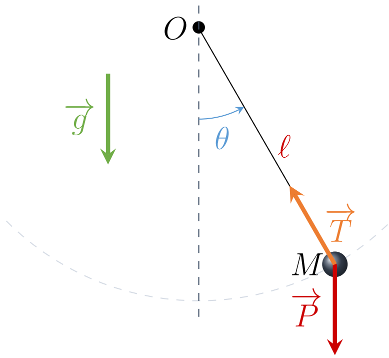
Interro12 - Pendule simple

Nom : **Note :**
Prénom :

Exercice 1 – Pendule simple (9 points)

On s'intéresse au mouvement d'une masse m assimilée à son centre de masse M, suspendue à un fil inextensible et de masse négligeable. L'étude est réalisée dans le référentiel terrestre considéré galiléen. On néglige les frottements.



/1 **1.** Nommer le système de coordonnées le plus adapté à l'étude de ce mouvement.

Le système de coordonnées polaires est le plus adapté ici.

/2 **2.** Exprimer les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ dans ce repère pour le point M.

$$\overrightarrow{OM} = \ell\vec{e_r}$$

$$\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a} = \ell\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - \ell\dot{\theta}^2\vec{e_r}$$

/3 **3.** Faire le bilan des forces : les représenter sur le schéma précédent et donner leur expression dans le repère choisi à la question 1.

Cf. schéma :

Poids : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = mg(\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta})$;

Tension : $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{e_r}$, avec $T > 0$.

/2 **4.** Exprimer les deux projections du PFD et indiquer celle qui permet d'obtenir l'évolution temporelle de $\theta(t)$.

On projette le PFD sur les deux vecteurs de la base de coordonnées polaire :

$$\begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \\ \ell\ddot{\theta} = -g\sin\theta \end{cases}$$

La projection selon $\overrightarrow{e_\theta}$ (en vert) permet de déterminer l'évolution de $\theta(t)$.

/1 **5.** Le pendule est lâché sans vitesse initiale depuis une angle $\theta_0 \ll 1$. Que devient l'équation précédente ? *Bonus : La résoudre pour donner $\theta(t)$.*

Dans le cadre de l'approximation des petits angles, on a $\sin\theta \approx \theta$, d'où :

$$\ell\ddot{\theta} + g\theta = 0, \text{ ou encore } \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Avec les conditions initiales :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\omega_0 t$$