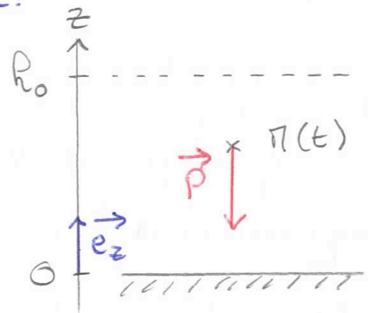
TD 7.

Exercice 2.

1. * Système : le marteau, assimilé à son centre de masse M, de masse m.

* Référentiel : lié au sol de la Lune, considéré galiléen.

* Schéma.



Le mouvement se fait selon $\vec{e_z}$, on choisit de ne s'intéresser qu'à la coordonnée z des coordonnées cartésiennes de M :

* Bilan des forces:

- $\vec{P} = -m g_L \vec{e_z} = -\frac{1}{6} m g \vec{e_z}$

↑ accélération de la pesanteur sur la Lune

↖ accélération de la pesanteur sur Terre.

car $g_L = \frac{1}{6} g$

* Etude cinématique:

$$\vec{OM} = z\,\vec{e_z}$$
$$\vec{v} = \dot{z}\,\vec{e_z}$$
$$\vec{a} = \ddot{z}\,\vec{e_z}$$

* PFD :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P} \quad \text{or} \quad m = \text{cste} \Rightarrow m\vec{a} = \vec{P}$$

En projetant selon $\vec{e_z}$, on obtient :

$$m\ddot{z} = -\frac{1}{6} m g \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{z} = -\frac{g}{6}}$$

2. * $\ddot{z} = -\frac{g}{6}$

* $\dot{z}(t) = -\frac{g}{6} t + A$

$\dot{z}(t=0) \underset{\text{sol}}{=} 0 + A \underset{\text{CI}}{=} 0$ d'où $A = 0$.

$$\boxed{\dot{z}(t) = -\frac{g}{6} t}$$

* $z(t) = -\frac{g}{12} t^2 + B$

$z(t=0) \underset{\text{sol}}{=} B \underset{\text{CI}}{=} h_0$ d'où $B = h_0$

$$\boxed{z(t) = -\frac{g}{12} t^2 + h_0}$$

3. La durée t_1 de la chute est telle que :

$$z(t_1) = 0$$

$$-\frac{g}{12} t_1^2 + h_0 = 0$$

$$\frac{g}{12} t_1^2 = h_0$$

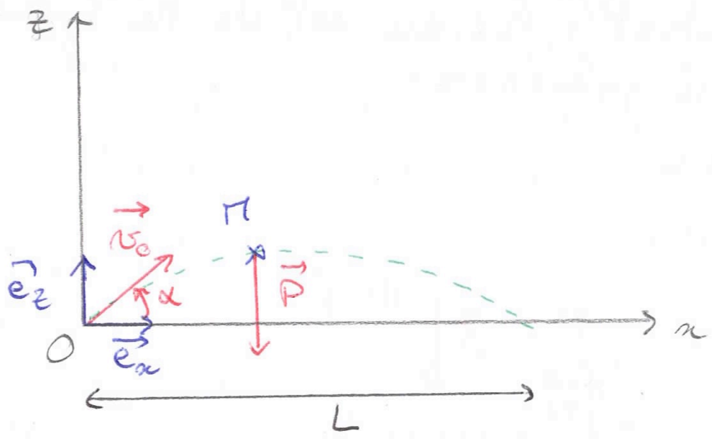
$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{12 h_0}{g}}} \quad \text{AN : } t_1 = 1{,}35 \text{ s.}$$

$$\boxed{v_1 = |\dot{z}(t_1)| = \frac{g}{6} t_1} \quad \text{AN : } v_1 = 2{,}21 \text{ m.s}^{-1}$$

L'expression de $z(t)$ ne dépend pas de la masse, ces deux valeurs restent identiques pour le lâcher d'une plume, d'une enclume,... Il en serait tout autre s'il y avait des frottements.

Exercice 3.

1. • Système : capitaine Haddock, assimilé à son centre de masse M, de masse m.
• Référentiel : lié au sol de la Lune, considéré galiléen.
• Schéma.



• Bilan des forces :
- poids $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$
• Etude cinématique :

$$\vec{OM} = x\vec{e_x} + z\vec{e_z}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{z}\vec{e_z}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e_x} + \ddot{z}\vec{e_z}$$

• PFD, $m = \text{cste}$

$$m\vec{a} = -mg_L\vec{e_z}$$

Selon $\vec{e_x}$: $\ddot{x} = 0$

Selon $\vec{e_z}$: $\ddot{z} = -g_L$

* CI : $\vec{v_0} = v_0 \cos\alpha\, \vec{e_x} + v_0 \sin\alpha\, \vec{e_z}$

$\vec{OM}(t=0) = \vec{0}$

* $\ddot{x} = 0$

$\dot{x} = A_x$

$\underset{\text{sol}}{\dot{x}(t=0)} = \underset{\text{CI}}{A_x = v_0 \cos\alpha}$

$\dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha$

* $x(t) = v_0 \cos\alpha\, t + B_x$

$\underset{\text{sol}}{x(t=0)} = \underset{\text{CI}}{B_x = 0}$

* $\ddot{z} = -g_L$

$\dot{z} = -g_L t + A_z$

$\underset{\text{sol}}{\dot{z}(t=0)} = A_z = v_0 \sin\alpha$

$\dot{z}(t) = -g_L t + v_0 \sin\alpha$

* $z(t) = -\frac{1}{2} g_L t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + B_z$

$\underset{\text{sol}}{z(t=0)} = \underset{\text{CI}}{B_z = 0}$

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\, t \\ z(t) = -\frac{1}{2} g_L t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}}$$

2. $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$

$$\boxed{z(x) = -\frac{1}{2} g_L \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + \tan\alpha\, x}$$

3. On cherche L tel que $z(L) = 0$.

soit :

$$\left(-\frac{1}{2} g_L \frac{L}{v_0^2 \cos^2\alpha} + \tan\alpha\right) L = 0$$

ce qui donne deux solutions ;

$L = 0$ et $\frac{1}{2} g_L \frac{L}{v_0^2 \cos^2\alpha} = \tan\alpha$.

La première correspond à la position de départ.

$$L = \frac{2 v_0^2 \cos^2\alpha \tan\alpha}{g_L}$$

$$= \frac{2 v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g_L}$$

$$\boxed{L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g_L}} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{\frac{g}{6}}$$

4. Sur Terre :

$$L' = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

d'où $\underline{L = 6L'}$. AN : $\underline{L = 6\text{ m}}$

(7)

Exercice 4.

1. On réutilise les résultats de l'exercice 3, en remplaçant g_L par g et z par y.

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x\tan\alpha}$$

2. De même

$$\boxed{d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}}$$

d est maximale quand $\sin 2\alpha$ est maximal, c'est-à-dire, pour

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

3. On cherche x_{max} tel que $y(x_{max}) = y_{max}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{gx}{v_0^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha$$

$$\frac{dy}{dx}(x_{max}) = 0 \Leftrightarrow \frac{g\, x_{max}}{v_0^2 \cos^2\alpha} = \tan\alpha$$

Soit :

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = \frac{d}{2}$$

(8)

$$\boxed{y_{max} = y\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$$

(après calcul).

4. On obtient immédiatement la forme demandée, en remarquant que :

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha + 1.$$

et en posant $h = \frac{v_0^2}{2g}$

h correspond à la hauteur maximale qu'il est possible d'atteindre, pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$

On obtient ainsi un polynôme en $\tan\alpha$:

$$\boxed{\frac{x^2}{4h}\tan^2\alpha - x\tan\alpha + \left(y + \frac{x^2}{4h}\right) = 0}$$

5. Il est possible d'atteindre le point (x, y) s'il est possible de trouver une solution $\tan\alpha$ réelle, ce qui est le cas si le discriminant est positif. On obtient alors, pour $\Delta = 0$

$$\boxed{y = h - \frac{x^2}{4h}}$$ éq° de la parabole de sûreté