TD0 – Analyse dimensionnelle (correction)

Exercice 1 – Charge d'un condensateur

1. L'argument de l'exponentielle doit être sans dimension. On a donc $[\tau] = [t] = \mathrm{T}$. Le paramètre τ est homogène à un temps (c'est le temps caractéristique de charge du condensateur.)
2. En utilisant le tableau du document 3 du polycopié de cours, on peut exprimer les dimensions de R et C en fonction des dimensions de base :
   - $[R] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-3} \cdot \mathrm{I}^{-2}$;
   - $[C] = \mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{L}^{-2} \cdot \mathrm{T}^4 \cdot \mathrm{I}^2$.

   Le produit des deux est homogène à un temps, donc $\tau = RC$.

Exercice 2 – Homogénéité

1. Étudions chaque terme de l'équation :
   - $[x(t)] = \mathrm{L}$;
   - $[v_0 t^2] = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1} \times \mathrm{T}^2 = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}$;
   - $\left[\frac{1}{2} g t\right] = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2} \times \mathrm{T} = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}$.

   Cette équation n'est donc **pas homogène** car les trois termes ont des dimensions différentes. Une expression correcte de l'évolution temporelle de la position $x(t)$ peut être : $x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$.
2. La constante G a pour dimension $\mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{L}^3 \cdot \mathrm{T}^{-2}$ (on peut la retrouver en utilisant l'expression de la force d'interaction gravitationnelle $F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$).
   - $\left[\frac{T^2}{R^3}\right] = \mathrm{T}^2 \cdot \mathrm{L}^{-3}$;
   - $\left[\frac{4\pi^2}{G M_\odot}\right] = \frac{1}{\mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{L}^3 \cdot \mathrm{T}^{-2} \times \mathrm{M}} = \mathrm{L}^{-3} \cdot \mathrm{T}^2$.

   Les deux membres ont la même dimension : l'équation est **homogène** (et juste).
3. En s'aidant du document 3 :
   - $[x(t)] = \mathrm{L}$;
   - $\left[\frac{eUt^2}{2d}\right] = \frac{\mathrm{I} \cdot \mathrm{T} \times \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-3} \cdot \mathrm{I}^{-1} \times \mathrm{T}^2}{\mathrm{L}} = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}$;
   - $[v_0 t] = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1} \times \mathrm{T} = \mathrm{L}$.

   Cette équation n'est **pas homogène**. Ici, on a oublié la masse du proton m_p dans le premier terme après le signe $=$. Une expression correcte serait : $x(t) = \frac{eUt^2}{2 m_\mathrm{p} d} + v_0 t$.

Exercice 3 – Gaz parfaits

On commence par isoler la constante des gaz parfaits :

$$R = \frac{pV}{nT},$$

puis on écrit l'équation aux dimensions :

$$[R] = \left[\frac{pV}{nT}\right] = \frac{\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2} \times \mathrm{L}^3}{\mathrm{N} \times \Theta} = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2} \cdot \mathrm{N}^{-1} \cdot \Theta^{-1}.$$

Son unité S.I. est donc $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$.

Exercice 4 – Trinity

1. - $[E] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2}$
   - $[r] = \mathrm{L}$
   - $[t] = \mathrm{T}$
   - $[\rho] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-3}$

2. On souhaite que $[E] = [k \times r^\alpha \times t^\beta \times \rho^\gamma]$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2} &= \mathrm{L}^\alpha \times \mathrm{T}^\beta \times (\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-3})^\gamma \\ &= \mathrm{M}^\gamma \cdot \mathrm{L}^{\alpha - 3\gamma} \cdot \mathrm{T}^\beta \end{aligned}$$

   On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 1 = \gamma \\ 2 = \alpha - 3\gamma \\ -2 = \beta \end{cases}$$

   ce qui donne $\gamma = 1$, $\beta = -2$ et $\alpha = 5$.
   On a donc $E = k \times r^5 \times \frac{1}{t^2} \times \rho$, d'où :

$$r = \left(\frac{1}{k}\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}.$$

3. Avec $k = 1$, on a $E = r^5 \frac{\rho}{t^2}$. Sur le graphique, on lit qu'à $t = 0{,}010\,\mathrm{s}$, $r \approx 90\,\mathrm{m}$. L'application numérique donne :

$$E \approx 74 \times 10^{12}\,\mathrm{J} = 74\,\mathrm{TJ},$$

   soit un équivalent de 18×10^3 tonnes de TNT.