TD14 – Filtrage linéaire

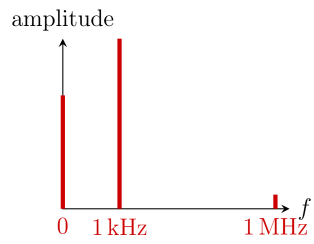
Erratum : La fonction de transfert donnée à la question 4 de l'exercice 3 du poly distribué en cours est fausse (le poly sur CdP est corrigé). On utilisera

$$\underline{\tilde{H}}(j\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = H_0 \frac{jR_{éq}(C+C_0)\omega}{1+jR_{éq}(C+C_0)\omega}, \text{ avec } H_0 = \frac{C}{C+C_0} \text{ et } R_{éq} = \frac{RR_0}{R+R_0}$$

Exercice 1 – Filtrage d'un signal

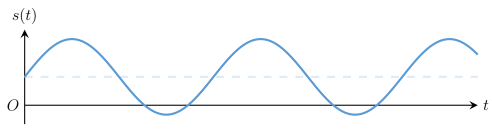
1. Le signal est formé de trois composantes principales :

- une composante continue : c'est la valeur moyenne du signal reçu ;
- une composante de période 1 ms (f = 1 kHz) : c'est le mode fondamental associé au signal d'intérêt ;
- une composante de période 1 µs (f = 1 MHz) : il s'agit d'un bruit qui perturbe la mesure.

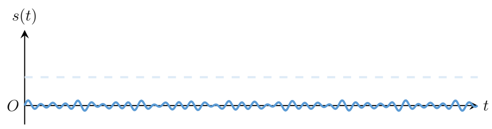


2. On représente le signal à la sortie de chacun des filtres.

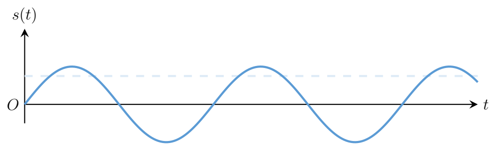
- passe-bas f_c = 10 kHz : la composante à 1 MHz est éliminée ;



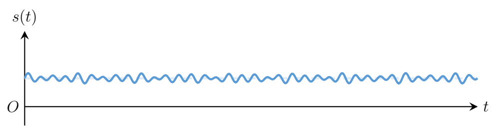
- passe-haut f_c = 10 kHz : seule la composante à 1 MHz subsiste ;



- passe-bande f_0 = 1 kHz et BP 100 Hz : seule la composante à 1 kHz est subsiste ;



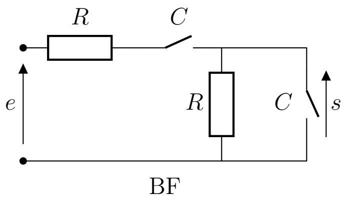
- coupe-bande f_0 = 1 kHz et BC 100 Hz : la composante à 1 kHz est éliminée ;

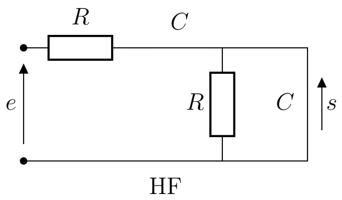


Les filtres 1 et 3 peuvent convenir : on privilégiera le 1 pour étudier le signal dans son ensemble ou le 3 si l'on souhaite étudier uniquement les fluctuations du flux lumineux.

Exercice 2 – Filtre de Wien

1. On représente les circuits équivalents en BF et HF :





Dans les deux cas, la tension $s(t)$ est nulle : il s'agit d'un passe-bande.

2. Montrer que la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \text{ avec } H_0 = \frac{1}{3},\ Q = \frac{1}{3} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

3.

$$G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}, \text{ d'où } G_{\mathrm{dB}}(x) = 20\log G(x) \text{ et } \varphi(x) = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

4. On a $G_0 = G(x=1) = H_0 = 1/3$, soit $G_{\mathrm{dB}}(x=1) = -9{,}5\,\mathrm{dB}$. De plus $\varphi_0 = 0$
5. La fonction de transfert a la même forme que celle rencontrée lors de l'étude de la résonance en intensité dans le circuit RLC série. On a $\Delta\omega = \omega_0/Q$.
6.

$$\underline{H}(jx) \underset{\mathrm{BF}}{\sim} jx\frac{H_0}{Q}, \text{ d'où } G_{\mathrm{dB}}(x) \underset{\mathrm{BF}}{\sim} 20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right) + 20\log x,$$

ce qui correspond bien à une pente de $20\,\mathrm{dB/décade}$.

$$\underline{H}(jx) \underset{\mathrm{HF}}{\sim} -j\frac{H_0}{Qx}, \text{ d'où } G_{\mathrm{dB}}(x) \underset{\mathrm{HF}}{\sim} 20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right) - 20\log x,$$

ce qui correspond bien à une pente de $-20\,\mathrm{dB/décade}$.

7. Avec les valeurs de R et C utilisées, $\omega_0 = 2\,000\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, d'où

$$s(t) \approx \frac{E_0}{10}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{E_0}{3}\cos(10\omega t) + \frac{E_0}{10}\cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Le signe $\approx$ est liée aux approximations réalisée dans la lecture de la phase.

Exercice 3 – Impédance d'entrée d'un oscilloscope

1. Avec transfert $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$, on a :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}.$$

2. Il s'agit d'un passe-haut du premier ordre de pulsation de coupure ω_0, cf cours.
3. $f_c = \frac{\omega_0}{2\pi} = 3{,}2\,\text{kHz}$.
4. On commence par simplifier le circuit, c'est-à-dire déterminer l'impédance équivalente à l'association en parallèle de R, R_0 et C_0, puis à l'aide d'un pont diviseur de tension, on obtient

$$\underline{\tilde{H}}(j\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = H_0 \frac{jR_{\text{éq}}(C+C_0)\omega}{1+jR_{\text{éq}}(C+C_0)\omega}, \text{ avec } H_0 = \frac{C}{C+C_0} \text{ et } R_{\text{éq}} = \frac{RR_0}{R+R_0}$$

La pulsation de coupure est maintenant $\omega_0' = \frac{1}{R_{\text{éq}}(C+C_0)}$ soit $f_c' = 3{,}7\,\text{kHz}$. On obtient le même type de filtre en incluant l'oscilloscope mais sa fréquence de coupure est plus élevée.

Exercice 4 – Lecture de diagramme de Bode

1. Passe-haut d'ordre deux :

$$s(t) = E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right).$$

2. Coupe-bande d'ordre deux :

$$s(t) = E_0 + E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E_0}{10} \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right),$$

3. Passe-haut d'ordre un :

$$s(t) = \frac{E_0}{1000} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{E_0}{100} \cos\left(10\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) + \frac{E_0}{10} \cos\left(100\omega t + \frac{\pi}{6}\right),$$

4. Passe-bas d'ordre deux :

$$s(t) = E_0 + E_0 \cos(\omega t) + \frac{E_0}{10} \cos\left(10\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E_0}{100} \cos\left(100\omega t - \frac{4\pi}{3}\right),$$

Exercice 5 – Filtres RLC série

1. En représentant les circuits équivalents, on trouve que le filtre 1 (resp. 2) est un filtre passe-bas (resp. passe-haut).
2. On obtient les fonctions de transfert indiquées, avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Il s'agit de filtres d'ordre deux.

3. Filtre 1 :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 e$$

Filtre 2 :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}t^2}$$

La convergence du régime transitoire est assurée par celle de la solution de l'équation homogène. Ici, le terme ω_0/Q devant la dérivée première est positif (terme d'amortissement), ce qui assure cette convergence. En effet, l'enveloppe exponentielle de la solution transitoire est de la forme $\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$ et converge si $\omega_0/(2Q) > 0$ (cf. Chap. 5).

Un coefficient négatif devant la dérivée première dans l'équation canonique correspondrait à un terme d'amplification, menant à un divergence de la solution.

4. On applique les définitions :

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right).$$

5. Filtre 1 :

$$G_{\mathrm{dB},1}(\omega) \underset{BF}{\sim} 1$$

d'où une asymptote horizontale en BF à 0 dB.

$$G_{\mathrm{dB},1}(\omega) \underset{HF}{\sim} -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

d'où une asymptote de pente −40 dB/décade en HF.

Filtre 2 :

$$G_{\mathrm{dB},2}(\omega) \underset{BF}{\sim} +40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

d'où une asymptote de pente 40 dB/décade en BF.

$$G_{\mathrm{dB},2}(\omega) \underset{HF}{\sim} 1$$

d'où une asymptote horizontale en HF à 0 dB.

6. L'atténuation est plus importante dans la bande coupée pour un filtre d'ordre deux, ce qui permet d'obtenir des filtres plus sélectifs. Pour le filtre passe-bas d'ordre deux, on a

$$s(t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega_e t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{E_0}{100}\cos\left(10\omega_e t - \pi\right).$$

Pour le filtre passe-bas d'ordre un, on a

$$s(t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega_e t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E_0}{10}\cos\left(10\omega_e t - \frac{\pi}{2}\right).$$

L'harmonique à $10\omega_e$ est 10 fois plus atténuée avec le filtre d'ordre 2 qu'avec le filtre d'ordre 1.

Exercice 6 – Conception d'un filtre de signaux acoustiques

1. Cf. cours : pente de −20 dB/décade en HF, $G = 1/\sqrt{2}$ à la fréquence de coupure.
2. On calcule le gain à 40 kHz, soit $x = 2$: $G_1 = 1/\sqrt{5}$ soit $G_{\mathrm{dB}} = -7\,\mathrm{dB} > -10\,\mathrm{dB}$. Le cahier des charges n'est pas respecté.

   Un filtre d'ordre supérieur permettra un atténuation plus importante au delà de la fréquence de coupure.
3. On a

$$G_{\mathrm{dB},1}(\omega) \underset{BF}{\sim} 1$$

d'où une asymptote horizontale en BF à 0 dB, et

$$G_{\mathrm{dB},1}(\omega) \underset{HF}{\sim} -40\log(x)$$

d'où une asymptote de pente −40 dB/décade en HF.
Pour $x = 2$,

$$G_2(x=2) = \frac{1}{\sqrt{9+\frac{4}{Q^2}}}.$$

Le cahier des charges est respecté, notamment si $G_2(x=2) < 1/\sqrt{10}$, ce qui est possible si $Q < 2$.

4. À la fréquence de coupure, on a $G_{\mathrm{dB}}(x=1) = 20\log(Q)$ et on veut $G_{\mathrm{dB}}(x=1) > -3\,\mathrm{dB}$, soit $Q > 10^{-3/20} \approx 0{,}7$.
Avec la question précédente, on a donc $0{,}7 < Q < 2$.