

## TD15 – Moment cinétique

### Exercice 1 – Sphère attachée à un fil

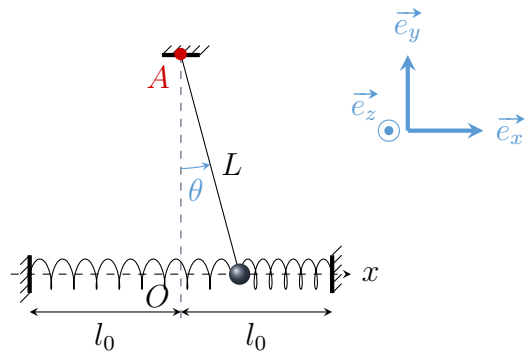
1.  $\vec{L}_O = ml_0 v_0 \vec{e}_z$  et  $L_z = ml_0 v_0 = 0,1 \text{ J} \cdot \text{s}$ .
2. Le moment du poids et de la réaction du support par rapport à  $(Oz)$  sont nuls car parallèles à  $(Oz)$ . La tension du fil est une force centrale, son moment par rapport à  $(Oz)$  est nul. Par application du TMCS, le moment cinétique  $L_z$  est conservé, d'où  $v_1 = l_0 v_0 / l_1 = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
3.  $\mathcal{E}_{c2} = 4\mathcal{E}_{c1}$ .
4. Il y a un mouvement radial lors de la réduction de longueur du fil, la tension du fil travaille. Le mouvement radial est alors dans le sens de la tension, son travail est donc positif, ce qui explique la variation d'énergie cinétique.

### Exercice 2 – Pendule simple couplé à des ressorts

1. Le déplacement vertical est donné par  $L(1 - \cos \theta) \underset{\text{DL0}}{\approx} 0$  : on peut négliger le déplacement vertical pour  $\theta \ll 1$ .
2. Comme précédemment, on se contente de DL au premier ordre non nul.

$$x = L \sin \theta \underset{\text{DL1}}{\approx} L\theta$$

$$\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{e}_\theta = L\dot{\theta}(\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y) \underset{\text{DL0}}{\approx} L\dot{\theta}\vec{e}_x.$$



3. On applique le TMC par rapport au centre du mouvement : ici, il s'agit de A. Système {masse  $m$ }, référentiel du laboratoire supposé galiléen, bilan des forces :

- poids :  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$ ;  $\vec{M}_A(\vec{P}) = -Lmg \sin \theta \vec{e}_z \approx -Lmg\theta \vec{e}_z$ ;
- ressort gauche :  $\vec{F}_g = -kx\vec{e}_x$ ;  $\vec{M}_A(\vec{F}_g) \approx -kL^2\theta \vec{e}_z$ ;
- ressort droit :  $\vec{F}_d = -kx\vec{e}_x$ ;  $\vec{M}_A(\vec{F}_d) \approx -kL^2\theta \vec{e}_z$ .

En projetant le TMC selon  $\vec{e}_z$ , on obtient :

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{L} + \frac{2k}{m} \right) \theta = 0$$

4. La période des oscillations est  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}}}$ .

### Exercice 3 – Vitesse à la sortie d'un toboggan

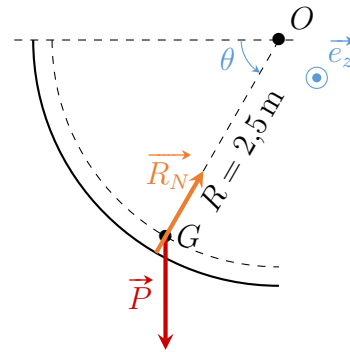
1. Les forces qui s'exercent sur le système sont le poids et la réaction normale du support (pas de réaction tangentielle car les frottements sont négligés). Cf. schéma ci-dessous.

2. Système {enfant assimilé au point  $G$ }, référentiel terrestre supposé galiléen, bilan des forces :

- poids :  $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = Lmg \cos \theta$  ;
- réaction normale de moment nul par rapport à  $(Oz)$  car force centrale.

On applique le TMCS par rapport à l'axe  $(Oz)$ , et on obtient :

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{R} \cos \theta = 0.$$



3. Cette équation s'intègre en la multipliant par  $\dot{\theta}$ . En utilisant les conditions initiales à  $t = 0$  ( $\theta = \theta_0$  et  $\dot{\theta} = 0$ ), on trouve

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{R} \sin \theta = -\frac{g}{R} \sin \theta_0 \quad \text{d'où} \quad v(\theta) = R\dot{\theta} = \sqrt{2gR(\sin \theta - \sin \theta_0)}.$$

On a retenu la solution positive lors du passage à la racine car le mouvement se fait dans le sens direct autour de  $(Oz)$ .

4. La vitesse maximale est atteinte en  $\theta = 90^\circ$ , on obtient  $v_{\max} = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 22 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

## Exercice 4 – Gravimètre de Holweck–Lejay

1. Système {point matériel  $M$  de masse  $m$ }, référentiel terrestre supposé galiléen, bilan des forces dont on exprime le moment par rapport à  $(O)$  :

- poids :  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = lmg \sin \theta \vec{e}_z$  ;
- force de rappel du ressort spiral :  $\vec{\Gamma} = -C\theta \vec{e}_z$ .

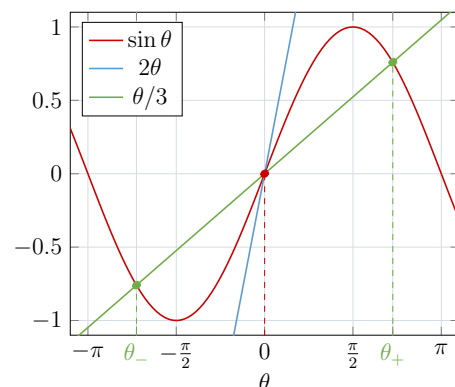
On projette le TMC selon  $\vec{e}_z$  :

$$ml^2\ddot{\theta} = lmg \sin \theta - C\theta \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} - \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{G}{l} \theta = 0, \quad \text{avec} \quad G = \frac{C}{ml}.$$

2. Les positions d'équilibre ( $\ddot{\theta} = 0$ ) vérifient  $\sin \theta = G\theta/g$ . Cette équation admet

- une unique solution  $\theta_0 = 0$  si  $G/g \geq 1$  (position d'équilibre stable) ;
- trois solutions sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  :  $\theta_0 = 0$  (instable) et  $\theta_{\pm}$  (stables) obtenues par résolution numérique ou graphique sinon.

Le graphe ci-contre rend compte de ces différentes situations.



3. On se restreint au cas où  $G/g > 1$ , c'est-à-dire au cas où la constante de raideur du ressort est élevée. Dans l'approximation des petits angles, l'équation du mouvement devient

$$\ddot{\theta} + \frac{G-g}{l} \theta = 0.$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\sqrt{\frac{G-g}{l}}$ . La période des oscillations est donc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{G-g}}. \quad (1)$$

4. Quand l'accélération de la pesanteur passe de  $g$  à  $g + \delta g$ , la période  $T$  des oscillations devient  $T + \delta T$  :

$$T + \delta T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{G - (g + \delta g)}} = T\sqrt{\frac{1}{1 - \varepsilon}}, \quad \text{où } \varepsilon = \frac{\delta g}{G - g}.$$

Puisque  $\varepsilon \ll 1$ , on obtient avec un DL à l'ordre un :

$$T + \delta T \approx T \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

On a finalement

$$\delta g = 2(G - g)\frac{\delta T}{T} = \frac{8\pi^2 l}{T^2} \frac{\delta T}{T} = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (2)$$

*Rq : la relation entre  $\delta T$  et  $\delta g$  peut être obtenue directement en différenciant l'expression de la période  $T(g)$  (Éq. 1) :*

$$dT = \pi\sqrt{\frac{l}{(G - g)^3}} dg,$$

*ce qui, en repassant à une variation finie  $dg \rightarrow \delta g$ , aboutit au même résultat (Éq. 2).*

5. La période du pendule simple est donnée par

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{d'où en différenciant } dT' = -\pi\sqrt{\frac{l}{g^3}} dg \quad \text{soit } \frac{dT'}{T'} = -\frac{dg}{2g}.$$

L'application numérique donne  $\delta g = -0,02 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  pour une même variation relative de période que précédemment, soit le double en valeur absolue de la valeur obtenue avec le gravimètre de Holweck-Lejay. Le gravimètre est donc deux fois plus sensible que le pendule simple pour des mesures de variations de l'accélération de pesanteur.

## Exercice 5 – Pendule simple incliné

- $\vec{L}_O = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_z$
- Bilan des forces :
  - poids :  $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\sin\alpha\vec{e}_x - \cos\alpha\vec{e}_z) = mg(\sin\alpha\cos\theta\vec{e}_r - \sin\alpha\sin\theta\vec{e}_\theta - \cos\alpha\vec{e}_z)$  ;
  - réaction normale du support :  $\vec{R}_N = R_N\vec{e}_z$  ;
  - tension du fil :  $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ .
- On commence par exprimer le moment de chacune de ces forces par rapport au point  $O$  :

- $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = lmg(-\sin \alpha \sin \theta \vec{e}_z + \cos \alpha \vec{e}_\theta)$  ;
- $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}_N) = -lR_N \vec{e}_\theta$  ;
- $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0}$ .

En projetant le TMC sur  $\vec{e}_z$ , on obtient :

$$ml^2\ddot{\theta} = -lmg \sin \alpha \sin \theta \quad \text{d'où, pour } \theta \ll 1, \quad \ddot{\theta} + \frac{g \sin \alpha}{l} \theta = 0.$$

Tout se passe comme dans si le pendule simple était plongé dans un champ de pesanteur d'intensité  $g' = g \sin \alpha$ . On vérifie notamment que lorsque  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , la pulsation est celle du pendule simple.

4. Dans le cadre des petites oscillations, la période est celle de l'oscillateur harmonique, soit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \sin \alpha}}.$$

5. On résout l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique avec comme conditions initiales  $\theta = 0$  et  $\dot{\theta} = v_0/l$ , ce qui donne :

$$\theta(t) = \frac{v_0}{l\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{l}}.$$

Le pendule effectue des oscillations entre  $\pm \frac{v_0}{l\omega_0}$ .

## Exercice 6 – Pendules couplés

1. On peut négliger les phénomènes dissipatifs si l'amplitude des oscillations reste à peu près constante (atténuation inférieure à quelques %) durant la durée de l'expérience.
2. Pour la première masse, le TMCS par rapport à l'axe ( $Oz$ ) donne :

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -C\theta_1 + C(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_1.$$

De même, pour la deuxième masse :

$$ml^2\ddot{\theta}_2 = -C\theta_2 - C(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_2.$$

En introduisant les pulsations  $\omega_g = \sqrt{g/l}$  et  $\omega_C = \sqrt{C/(ml^2)}$ , on obtient un système d'équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + (\omega_g^2 + 2\omega_C^2)\theta_1 = \omega_C^2\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 + (\omega_g^2 + 2\omega_C^2)\theta_2 = \omega_C^2\theta_1 \end{cases}$$

$\omega_g$  est la pulsation qu'aurait le pendule s'il n'était soumis qu'au poids.

$\omega_C$  est la pulsation qu'aurait le pendule s'il n'était soumis qu'au couple de rappel des différentes portions de fil : c'est la pulsation d'un **pendule de torsion**.

3. En sommant, puis en soustrayant les deux équations précédentes, on obtient le système :

$$\begin{cases} 0 = \ddot{\theta}_+ + (\omega_g^2 + \omega_C^2)\theta_+ \\ 0 = \ddot{\theta}_- + (\omega_g^2 + 3\omega_C^2)\theta_- \end{cases}$$

4. Avec ces deux variables, on obtient un système d'équations différentielles découplées que l'on pourra résoudre analytiquement.
5. Si  $\theta_- = 0$ , alors  $\theta_1 = \theta_2$  : les deux pendules oscillent en phase. C'est le mode symétrique.  
Si  $\theta_+ = 0$ , alors  $\theta_1 = -\theta_2$  : les deux pendules oscillent en opposition de phase. C'est le mode antisymétrique.
6.  $\omega_s = \sqrt{\omega_g^2 + \omega_C^2}$  et  $\omega_a = \sqrt{\omega_g^2 + 3\omega_C^2}$ .
7. Pour le mode symétrique, la portion de fil situées entre les deux pendules n'est soumise à aucune torsion. Le TMCS appliqué au premier pendule donne :

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -C\theta_1 - mgl\theta_1 \quad \text{d'où} \quad \ddot{\theta}_1 + \omega_s^2\theta_1 = 0.$$

Pour le mode antisymétrique,  $\theta_1 = -\theta_2$ . Le TMCS appliqué au premier pendule donne cette fois :

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -C\theta_1 - 2C\theta_1 - mgl\theta_1 \quad \text{d'où} \quad \ddot{\theta}_1 + \omega_a^2\theta_1 = 0.$$