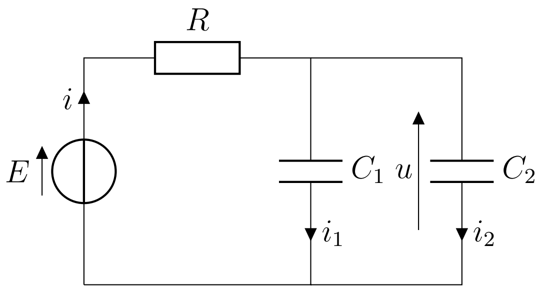
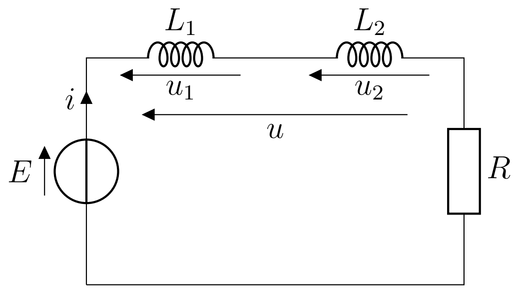
TD4 – Circuits du premier ordre

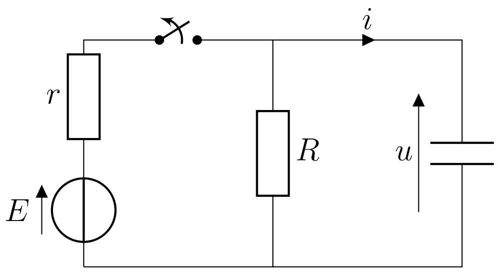
Exercice 1 – Association de dipôles





1. Pour chacun des deux circuits représentés ci-dessus, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u (*resp.* l'intensité i) et montrer que les deux condensateurs (*resp.* bobines) peuvent se ramener à un condensateur (*resp.* une bobine) unique de capacité $C_{\text{éq}}$ (*resp.* d'inductance $L_{\text{éq}}$) que l'on exprimera en fonction de C_1 et C_2 (*resp.* L_1 et L_2).
2. Faire de même dans le cas de deux condensateurs montés en série, puis de deux bobines en parallèle.

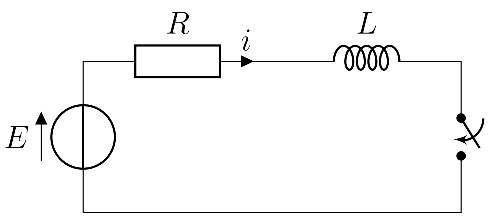
Exercice 2 – Décharge d'un condensateur



E est une tension continue. L'interrupteur étant fermé depuis « très longtemps », on l'ouvre à la date $t = 0$.

Déterminer $u(t)$ et $i(t)$.

Exercice 3 – Comportement aux limites



Le circuit représenté ci-contre est alimenté par une source de tension continue de f.é.m. E et de résistance interne négligeable devant R. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

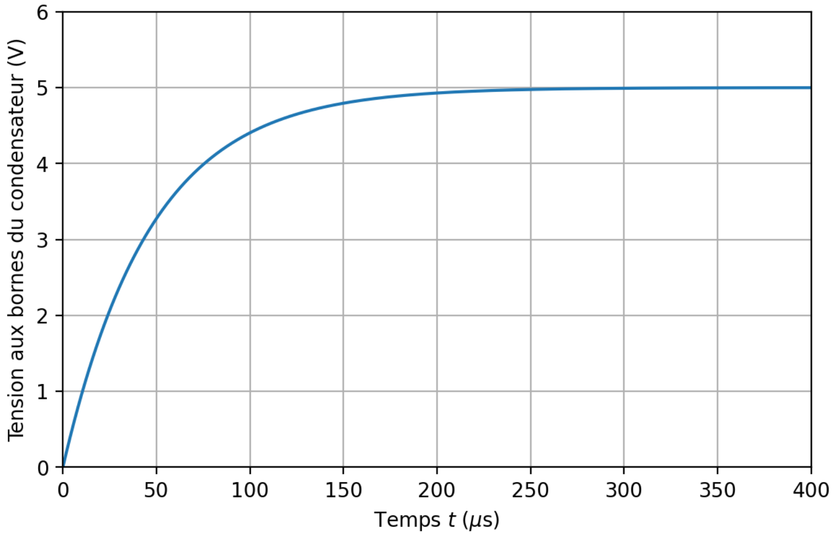
Sans calcul, déterminer, parmi les expressions ci-dessous, celle qui correspond à l'intensité du courant $i(t)$. Justifier pourquoi les autres expression ne peuvent convenir.

1. $i(t) = \frac{E}{2R}\left(1 - e^{-\frac{t}{RL}}\right)$
2. $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 + e^{-\frac{R}{L}t}\right)$
3. $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{L}{R}t}\right)$
4. $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$
5. $i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$
6. $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{R}{L}t}\right)$

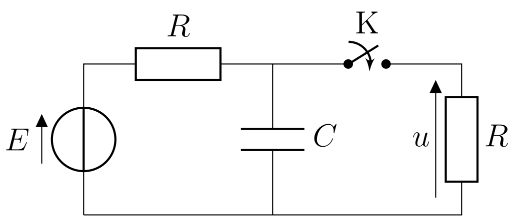
Exercice 4 – Étude d'un circuit RC

On étudie un circuit RC série, alimenté par un GBF en continu, et on observe la tension aux bornes du condensateur à l'aide d'un oscilloscope. Dans le circuit, les composants utilisés ont les valeurs suivantes : $R = 50\,\Omega$ et $C = 470\,\mathrm{nF}$.

1. Exprimer et calculer le temps caractéristique $\tau_{\text{théo}}$ d'évolution de la tension aux bornes du condensateur.
2. On obtient l'oscillogramme ci-dessous. Déterminer graphiquement le temps caractéristique τ_{exp}. Distinguer le régime permanent du régime transitoire.
3. D'où vient la différence constatée entre la valeur théorique et la valeur expérimentale ? Déterminer la valeur du composant « manquant ».



Exercice 5 – Circuit RC à deux mailles



Le circuit représenté ci-contre est alimenté par une source idéale de tension. L'interrupteur K est ouvert depuis « très longtemps ». On le ferme à l'instant $t = 0$.

Déterminer l'expression de $u(t)$ et tracer son allure.

Exercice 6 – Résistance de fuite d'un condensateur

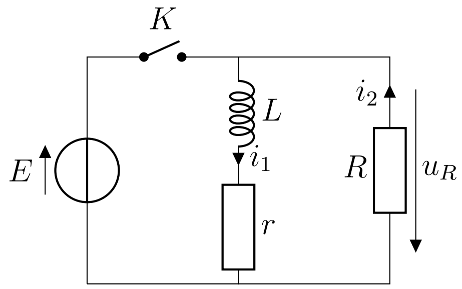
On débranche un condensateur de capacité $C = 100\,\mathrm{pF}$ initialement chargé sous une tension $E = 10\,\mathrm{V}$. Au bout de $\Delta t = 2\,\mathrm{min}$, la tension entre ses bornes n'est plus que de $0{,}1E$.

1. Proposer une explication à cette décharge spontanée du condensateur.
2. Justifier qualitativement qu'un condensateur qui se décharge spontanément peut se modéliser par l'ajout d'une résistance en parallèle d'un condensateur idéal. Cette résistance R_{f} est appelée résistance de fuite.
3. Exprimer, puis calculer l'ordre de grandeur de la résistance de fuite du condensateur.

Exercice 7 – Clôture électrique

Pour empêcher des animaux de sortir d'un enclos, on peut choisir d'utiliser une clôture électrique. Cela consiste à générer périodiquement des impulsions de haute tension dans un fil. Pour ce faire, on modélise le système par le circuit représenté ci-contre.

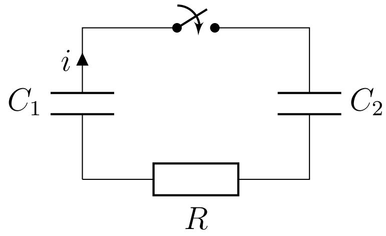
Le générateur est une batterie de voiture de tenion $E = 12\,\mathrm{V}$, qui possède une charge totale $Q = 45\,\mathrm{A{\cdot}h}$. K est un relai (un interrupteur commandé par une horloge) qui s'ouvre et se ferme périodiquement avec une période $T \sim 1\,\mathrm{s}$. La bobine d'inductance $L = 1{,}0\,\mathrm{H}$ et de résistance interne $r = 10\,\Omega$ est connectée au fil de la clôture, modélisé par une résistance $R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$.



1. Pour chaque position du relai K, déterminer les différentes grandeurs électriques en régime permanent.
2. Pour $t \in [0; \frac{T}{2}[$ où K est fermé, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i_1(t)$ et la résoudre. On supposera qu'à $t = 0$, la bobine n'a pas stocké d'énergie.
3. Pour $t \in [\frac{T}{2}; T[$, le relai est ouvert. Déterminer l'expression de $i_1(t)$.
4. Exprimer alors la tension $u_R(t)$ et montrer qu'elle peut prendre une valeur supérieure à E, que l'on estimera. Déterminer la durée pour laquelle $u_R > 10E$.
5. Représenter l'allure de $u_R(t)$ et de $i_1(t)$ pour $t \in [0; 2T[$.
6. Estimer enfin le temps de fonctionnement de la batterie avec un tel système.
7. Proposer une modification du comportement du relai permettant d'augmenter l'autonomie du système, tout en continuant à produire une surtension par seconde.

Exercice 8 – Décharge d'un condensateur dans un autre

On considère le circuit représenté ci-contre. Le condensateur de capacité C_1 porte une charge q_0 sur l'armature du haut. Celui de capacité C_2 est déchargé.



À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$.
2. Déterminer la solution de cette équation différentielle.
3. Donner l'expression des charges des deux condensateurs en régime permanent.
4. Exprimer l'énergie du système $\mathcal{E}_0$ du système avant la fermeture de l'interrupteur (*i.e.* l'énergie stockée par tous les dipôles du circuit). Déterminer l'énergie $\mathcal{E}_\infty$ en régime permanent. Commenter le signe de $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_\infty - \mathcal{E}_0$.
5. Sous quelle forme l'énergie est-elle dissipée ? Retrouver l'expression de $\Delta\mathcal{E}$ par un calcul direct.

Exercice 9 – Résolution de problème

La résolution de ce problème nécessite de connaitre la méthode de variation de la constante.

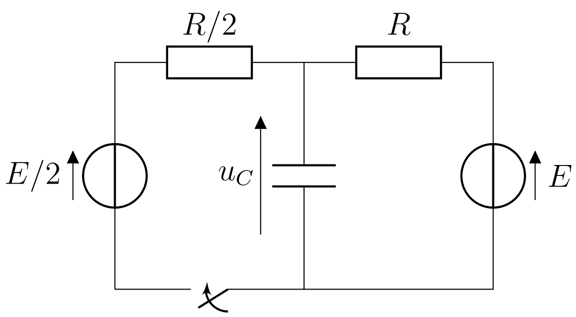
Un dispositif destiné à détecter des particules ionisantes émet, s'il en détecte une à l'instant $t = 0$, un courant $i_0(t) = I_0 e^{-t/t_1}$, avec I_0 de l'ordre de $10\,\mu\text{A}$ et t_1 de l'ordre de $100\,\mu\text{s}$. On cherche à détecter les particules grâce à l'apparition d'un pic de tension de l'ordre de $100\,\text{mV}$ au bout d'une durée de l'ordre de t_1. Pour cela, on dispose d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C.

Proposer un montage et des valeurs numériques permettant d'obtenir un détecteur convenable.

Exercice 10 – Condensateur alimenté par deux générateurs – Oral CCP

On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par u_C.
2. Résoudre cette équation.
3. Déterminer le temps t_1 nécessaire pour que la valeur finale soit atteinte à $1\,\%$ près.
4. Exprimer la puissance dissipée. Interpréter sa valeur finale.



Exercice 11 – Méthode d'Euler explicite

On s'intéresse à un simple circuit RC série alimenté par un GBF.

1. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur peut s'écrire sous la forme :
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{e(t)}{\tau} - \frac{u(t)}{\tau},$$
où $e(t)$ est la tension aux bornes du GBF et τ une constante que l'on exprimera en fonction des caractéristiques des dipôles utilisés.

On souhaite discrétiser cette équation différentielle afin de la résoudre numériquement.

2. En remarquant que la dérivée temporelle de u à l'instant $t_k = t_0 + k\delta t$ s'obtient à partir du taux d'accroissement :
$$\frac{u(t_k + \delta t) - u(t_k)}{\delta t},$$
donner l'expression de $u(t_k + \delta t)$ en fonction de $u(t_k)$, $e(t_k)$, δt et τ.
3. En déduire qu'il est possible d'estimer numériquement $u(t_k)$ en calculant successivement les termes :
$$u_{k+1} = \left(1 - \frac{\delta t}{\tau}\right) u_k + \frac{\delta t}{\tau} e_k.$$

Le code Python ci-après utilise la méthode d'Euler pour estimer $u(t)$.

4. Sur le même graphe, représenter la solution exacte de l'équation différentielle dans le cas où $e(t) = 0$ et $u(0) = 1\,\mathrm{V}$. Commenter l'effet du pas de temps `dt` utilisé pour la résolution numérique. Pourquoi ne peut-on pas utiliser un pas de temps aussi faible que l'on veut ?

5. Étudier l'allure de la tension aux bornes du condensateur pour différents signaux produits avec le GBF.

6. Les condensateurs sont notamment utilisés pour lisser un signal, c'est-à-dire éliminer des pics de tension. Mettre en évidence cette propriété à l'aide d'un signal $e(t)$ bien choisi et d'un temps caractéristique τ adapté.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#############################
# PARAMÈTRES DE LA RÉSOLUTION
#############################
t0 = 0                   # bornes de l'intervalle de résolution
tf = 1                   # en secondes
dt = 1e-4                # pas de temps en secondes
n  = int((tf-t0)/dt + 1) # nombre de points
t = np.linspace(t0,tf,n) # temps en secondes

##########################
# PARAMÈTRES DU CIRCUIT RC
##########################
u0  = 1   # u(0) en volts (CI)
tau = 0.1 # temps caractéristique en secondes

############
# SIGNAL GBF
############
E   = 0   # offset en volts
amp = 1   # amplitude en volts
f   = 1   # fréquence en hertz

constant = np.ones(n) * E
square   = amp * np.sign(np.sin(2*np.pi*f*t)) + E
sinus    = amp * np.sin(2*np.pi*f*t) + E
noise    = np.random.normal(0,0.005,n) # bruit aléatoire
e = constant + noise # signal aux bornes du GBF
# À vous de créer le signal que vous voulez tester...

#################
# MÉTHODE D'EULER
#################
u = np.zeros(len(t))  # préparation du tableau
u[0] = u0             # initialisation en fonction de la CI
for i in range(n-1):  # méthode d'Euler explicite
    u[i+1] = e[i] * dt / tau + u[i] * (1 - dt / tau)

#########################
# REPRÉSENTATION GRAPHIQUE
#########################
plt.plot(t,e, label="e(t)")
plt.plot(t,u, label="u(t)")
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Tension (V)")
plt.legend()
plt.show() # pour afficher le graphique
```