DS2 – Électrocinétique

Durée : 4h.
L'usage de la calculatrice est autorisé.
L'annexe 1 est à rendre avec la copie.

La présence de schéma, même lorsqu'ils ne sont pas explicitement demandés, sera valorisée dans la notation.

RCO Des questions de cours sont identifiées dans le sujet par le sigle RCO dans la marge.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'expliciter clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Toute démarche engagée, même non aboutie, et toute prise d'initiative seront valorisées.

Exercice 1 – Guirlandes électriques (27 points)

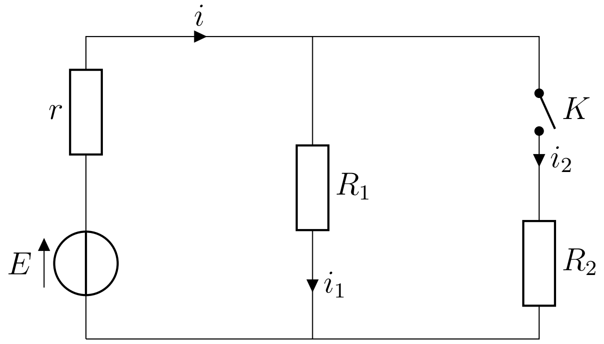
On cherche à optimiser l'alimentation électrique d'un système comportant deux guirlandes électriques, modélisées par deux résistances R_1 et R_2 de même valeur : $R_1 = R_2 = R = 2\,\Omega$. La première guirlande est dédiée à un fonctionnement continu. La seconde est associée à un interrupteur K qui bascule périodiquement afin de produire un clignotement. On supposera dans cet exercice que la puissance lumineuse fournie par ces guirlandes est proportionnelle à la puissance électrique qu'elles reçoivent.

Système de base

RCO

1. Rappeler et retrouver l'expression de la puissance $\mathcal{P}_J$ dissipée par effet Joule dans une résistance R parcourue par un courant d'intensité I.

On considère dans un premier temps le circuit représenté ci-dessous, alimenté par un générateur réel de f.é.m. $E = 6\,\text{V}$ et de résistance interne $r = 1\,\Omega$.



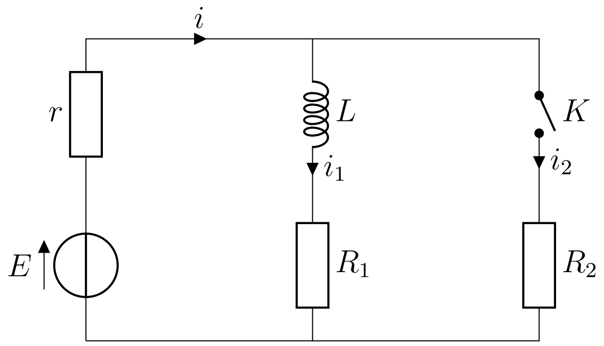
2. Lorsque l'interrupteur K est ouvert, établir l'expression de l'intensité $i = I_o$. En déduire l'expression de la puissance $\mathcal{P}_{1,o}$ reçue par la guirlande R_1. Faire l'application numérique. Quelle est la puissance $\mathcal{P}_{2,o}$ reçue par la guirlande R_2 ?

On s'intéresse maintenant au cas où l'interrupteur K est fermé.

3. Établir la nouvelle expression de $i = I_f$. En déduire les intensités $i_1 = I_{1,f}$ et $i_2 = I_{2,f}$ circulant dans les deux guirlandes.
4. Exprimer, puis calculer la puissance $\mathcal{P}_{1,f}$ reçue par la guirlande 1 en fonction de E, R et r.
5. La puissance reçue par la première guirlande est-elle identique dans les deux régimes ? Expliquer ce qu'un observateur verrait lors du fonctionnement de la guirlande.
6. Comment doit-on choisir r par rapport à R pour limiter cet effet ? Commenter.

Système amélioré

On considère maintenant le circuit représenté ci-contre, afin de limiter les variations de puissance reçue par la première guirlande. Un bobine d'inductance L a donc été ajoutée en série avec la première guirlande. L'interrupteur K est ouvert pour $t \in [0, T/2[$ et fermé pour $t \in [T/2, T[$.



7. Quand l'interrupteur est ouvert, justifier qu'en régime permanent, l'ajout de la bobine ne modifie pas la valeur de l'intensité i obtenue à la question 2.
8. Établir l'équation différentielle vérifiée par i_1 sur l'intervalle $[0, T/2[$. Faire apparaitre un temps caractéristique τ_1 et donner son expression en fonction de L, R et r.

9. Sur l'intervalle $[T/2, T[$, lorsque l'interrupteur est fermé, l'intensité $i_1(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{\tau_2} = \frac{E}{L(1+\frac{r}{R})} \quad \text{avec} \quad \tau_2 = \frac{L(1+\frac{r}{R})}{R+2r}.$$

Que devient cette équation en régime permanent ? En déduire que l'ajout de la bobine ne modifie pas la valeur de l'intensité $i_1 = I_{1,f}$ en régime permanent obtenue à la question 3.

On mesure expérimentalement les variations de l'intensité i_1 en mesurant la tension aux bornes de la guirlande R_1 à l'aide d'un oscilloscope. On obtient les courbes représentées en annexe 1, à rendre avec la copie, pour deux valeurs différentes de l'inductance L, notées L_1 et L_2.

10. Laquelle des deux inductances est la plus élevée ? Justifier. Déterminer la valeur de L_1.

11. Indiquer l'inductance à utiliser pour limiter le clignotement de la guirlande R_1. Justifier.

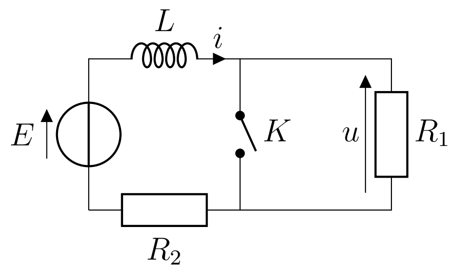
On admet que ce choix est respecté et que lorsqu'elle est allumée, la deuxième guirlande est parcourue par un courant d'intensité quasi constante $i_2 \approx 1{,}4\,\mathrm{A}$.

12. Le générateur est en réalité une batterie, identique à celle représentée ci-dessous.
Proposer une estimation de la durée de fonctionnement Δt du système et de son rendement η, c'est-à-dire le rapport entre l'énergie reçue par les guirlandes et celle fournie par la batterie. Conclure.

Exercice 2 – Annulation d'une surtension (53 points)

Le régime transitoire associé à un circuit inductif peut faire apparaitre une surtension aux bornes de certains de ces composants. Cet effet est parfois voulu, comme dans le cas du circuit d'allumage d'un moteur à essence, ou pour l'allumage de tubes néons. Dans d'autres appareils, certains composants sont fragiles et peuvent être endommagés par une surtension trop importante.

Dans le circuit ci-contre, on assimile l'un de ces composants à une résistance R_1 et on souhaite le protéger lors de l'ouverture ou de la fermeture de l'interrupteur K. On donne les valeurs des composants : $R_1 = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 5{,}0\,\mathrm{k\Omega}$, $L = 1{,}0\,\mathrm{H}$ et $E = 12\,\mathrm{V}$.



RCO

1. Rappeler le schéma équivalent à un générateur de Thévenin de f.é.m. E et de résistance interne r et donner la relation entre la tension U à ses bornes et l'intensité I du courant le traversant. On rappellera les unités de *toutes* les grandeurs
2. La source de tension E est en réalité un générateur réel de résistance de sortie r. En donnant l'ordre de grandeur de r pour les générateurs utilisés en TP, justifier qu'il est possible d'assimiler ce générateur à une source idéale de tension dans le circuit considéré.

Régime transitoire après la fermeture de l'interrupteur

On suppose que l'interrupteur est ouvert depuis suffisamment longtemps pour que le régime permanent soit atteint. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

3. Montrer qu'en $t = 0^-$, l'intensité du courant traversant la bobine vaut

$$i(t = 0^-) = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

4. Justifier, sans calcul, qu'il ne peut y avoir de surtension aux bornes de R_1 pour $t \geqslant 0$ et qu'alors, l'intensité du courant traversant la résistance R_1 est nulle.
5. Exprimer, puis calculer l'intensité i_∞ du courant dans la bobine après la fermeture de K, en régime permanent.
6. Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour $t > 0$. Vérifier qu'elle est cohérente avec la valeur de i_∞ trouvée précédemment.
7. Résoudre cette équation différentielle et montrer que

$$i(t) = \frac{E}{R_2}\left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau}\right), \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R_2}.$$

   Vérifier que la solution est cohérente avec la valeur de i_∞.
8. Représenter graphiquement $i(t)$, en faisant apparaitre τ et i_∞.

Ouverture de l'interrupteur sans condensateur

On laisse l'interrupteur fermé plusieurs secondes avant de l'ouvrir à nouveau. On redéfinit l'instant $t = 0$, qui est désormais celui où on ouvre l'interrupteur. On s'intéresse désormais à la tension $u(t)$ aux bornes de la résistance R_1 et on admet qu'elle vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau_1} = \frac{u_\infty}{\tau_1} \quad \text{avec} \quad u_\infty = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad \tau_1 = \frac{L}{R_1 + R_2}.$$

On souhaite résoudre numériquement cette équation à l'aide de la méthode d'Euler explicite. Le début du programme est donné ci-dessous.

```
1  import numpy as np
2
3  dt = 1e-6                   # pas de temps en seconde
4  t  = np.arange(0,1e-3,dt)   # liste des instants tk
5  N  = len(t)                 # nombre de valeurs tk
6
7  R1   = 10e3                 # résistance R1 en ohms
8  R2   = 5e3                  # résistance R2 en ohms
9  L    = 1.0                  # inductance L en henry
10 E    = 12                   # f.é.m. en volts
11 tau1 = L / (R1 + R2)        # temps caractéristique tau1 en secondes
12 uinf = E * R1 / (R1 + R2)   # valeur de u(t) en régime permanent
13
14 u = np.zeros(N)     # création d'une liste de 0 de même longueur que t
15 u[0] = R1 * E / R2          # condition initiale
16 for k in range(N-1):        # calcul des valeurs u(tk)
17     # À compléter
```

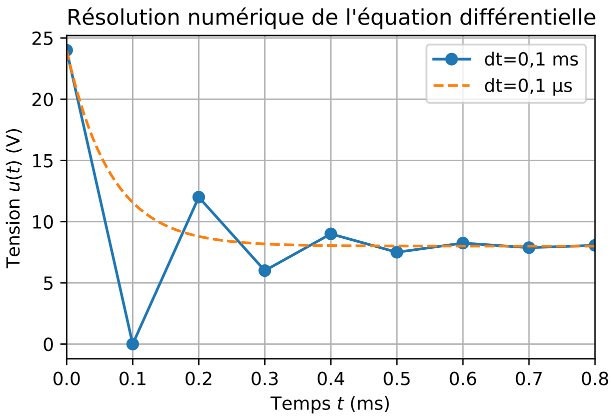
On note $t_k = k\delta t$ et $u_k = u(t_k)$, où k est un entier et δt est le pas de temps choisi pour la résolution numérique.

9. En remarquant que

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t_k) \approx \frac{u_{k+1} - u_k}{\delta t},$$

donner l'expression de u_{k+1} en fonction de u_k, u_∞, τ_1 et δt.

10. Écrire l'expression à taper à la ligne 17 du code ci-dessus pour calculer numériquement les valeurs `u[k]` de u aux instants t_k.



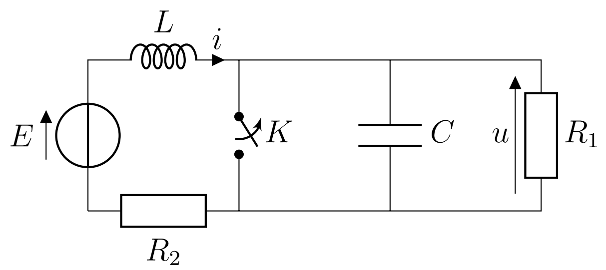
11. La résolution numérique donne les courbes représentées ci-dessus pour différents pas de temps $\delta t = 0{,}1\,\mathrm{ms}$ et $0{,}1\,\mu\mathrm{s}$. Commenter.

RCO **12.** Rappeler l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire d'un circuit dont le temps caractéristique est τ_1.

13. Proposer une estimation de la durée du régime transitoire.

Ouverture de l'interrupteur avec condensateur

On ajoute cette fois un condensateur C en parallèle de l'interrupteur, selon le schéma représenté ci-contre. Après avoir laissé l'interrupteur fermé plusieurs secondes, on l'ouvre à l'instant $t = 0$.



RCO **14.** Rappeler la loi de comportement d'un condensateur de capacité C.

15. Justifier que la présence du condensateur ne modifie pas les valeurs de $i(t)$ et $u(t)$ en régime permanent.

RCO **16.** Donner et retrouver l'expression de l'énergie stockée par un condensateur de capacité C chargé sous une tension u. On rappellera les unités de *toutes* les grandeurs.

17. Montrer que $u(t = 0^+) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = \dfrac{E}{R_2 C}$.

18. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t > 0$. L'écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \frac{E}{LC}$$

et donner l'expression de ω_0 et du rapport $\dfrac{\omega_0}{Q}$ en fonction de R_1, R_2, L et C, sans chercher à exprimer Q.

On remplace le composant modélisé par la résistance R_1 par un autre, toujours sensible aux surtensions, mais dont la résistance est beaucoup plus élevée, si bien que $R_1 \gg R_2$ et $R_2 C \gg \dfrac{L}{R_1}$.

19. Montrer qu'alors :

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{et} \qquad Q \approx \frac{1}{R_2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

RCO **20.** Nommer les différents régimes transitoires associés à un circuit du second ordre et donner la condition sur Q qui permet de les observer.

21. Déterminer la valeur de C qui permet d'obtenir un régime transitoire critique. Justifier ce choix.

22. Résoudre l'équation différentielle et donner l'expression de $u(t)$.

23. Exprimer, puis calculer l'ordre de grandeur de la durée Δt du régime transitoire.

24. Représenter graphiquement l'allure de $u(t)$ en faisant apparaitre $u_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} u(t)$.

Annexe 1 – Évolution de l'intensité du courant parcourant la guirlande R_1