

# Concours Blanc 2022

## Épreuve de Physique

Durée : 4h.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le sujet comporte deux annexes à rendre avec la copie.

Si au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Toute démarche engagée, même non aboutie, et toute prise d'initiative seront valorisées.

### Relations de conjugaison et de grandissement

On rappelle, pour un objet  $AB$  et son image  $A'B'$  formée par une lentille mince de centre optique  $O$  et de foyers objet  $F$  et image  $F'$  :

- les relations de Descartes :

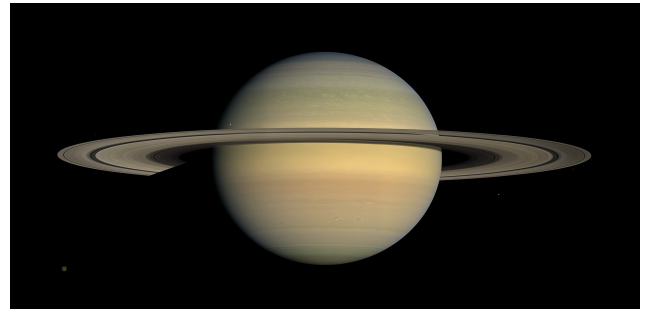
$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}},$$

- les relations de Newton :

$$\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -\overline{OF'}^2 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}}.$$

## Exercice 1 – Saturne et ses anneaux

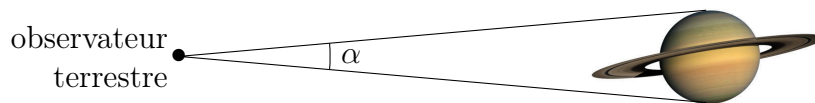
Les géantes gazeuses du système solaire possèdent toutes des anneaux, plus ou moins remarquables. Les plus célèbres sont ceux de Saturne. Ils ont été photographiés par la sonde Cassini en 2008 (photographie ci-contre) et peuvent être observés depuis la Terre avec un équipement modeste, accessible aux amateurs d'astronomie.



### Oppositions de Saturne

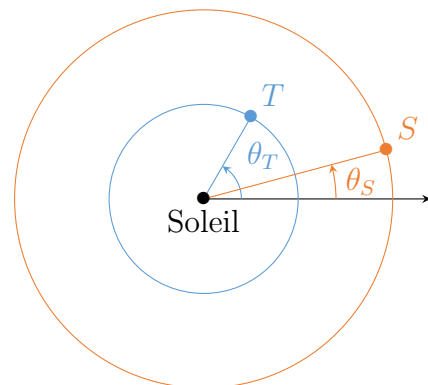
Dans le référentiel héliocentrique, les orbites de la Terre et de Saturne sont assimilées à des cercles dans un même plan, ayant pour centre le Soleil, de rayons respectifs  $R_T = 1,0 \text{ au} = 150 \times 10^6 \text{ km}$  et  $R_S = 9,54 \text{ au}$ . On note  $T_T$  et  $T_S$  les périodes de révolution des planètes. Saturne est modélisée par une sphère de diamètre  $d_S = 116 \times 10^3 \text{ km}$ . On note  $d_A$  le diamètre extérieur de ses anneaux.

Pour un observateur terrestre, Saturne est vue sous un angle  $\alpha$  qui varie suivant la distance Terre – Saturne. L'opposition de Saturne correspond à la situation où cette distance est minimale : le diamètre apparent de Saturne est alors maximal, ce qui facilite son observation depuis la Terre.



1. Représenter, sans soucis d'échelle, les orbites de la Terre et de Saturne, ainsi que les positions du Soleil, de la Terre et de Saturne lors d'une opposition de Saturne.
2. Exprimer l'angle maximal  $\alpha_0$  sous lequel est vue Saturne (sans ses anneaux) en fonction de  $R_T$ ,  $R_S$  et  $d_S$ . Faire l'application numérique.
3. Estimer l'angle maximal  $\alpha_A$  sous lequel sont vus les anneaux de Saturne. Est-il alors possible de les distinguer à l'œil nu ? Justifier.
4. Les orbites étant circulaires, la vitesse angulaire de chacune des planètes est constante. Exprimer, à l'aide de  $T_T$  et  $T_S$ , les vitesses angulaires  $\omega_T = \dot{\theta}_T$  et  $\omega_S = \dot{\theta}_S$  de la Terre et de Saturne sur leurs orbites.

En déduire les expressions des angles  $\theta_T(t)$  et  $\theta_S(t)$  en fonction du temps  $t$  en considérant qu'en  $t = 0$ , le Soleil, la Terre et Saturne sont alignés dans cet ordre.



5. Rappeler la troisième loi de Kepler et exprimer la période de révolution  $T_S$  de Saturne en fonction de celle de la Terre  $T_T$  et des rayons  $R_T$  et  $R_S$ . Faire l'application numérique.
6. Exprimer le temps  $\tau$  qui sépare deux oppositions de Saturne en fonction de  $T_T$  et  $T_S$ . Faire l'application numérique.

## Photographie de Saturne

En raison des imperfections du modèle, la valeur de  $\alpha_0$  n'est pas exactement celle trouvée à la question 2, mais  $\alpha_0 = 20''$  ( $3\,600'' = 1^\circ$ ). **On adoptera cette valeur dans toute la suite du problème.**

Un astronome amateur désire photographier la planète Saturne vue depuis la Terre, à l'opposition. Il utilise un appareil dont l'objectif est assimilé à une lentille mince convergente  $\mathcal{L}_1$  de diamètre  $d_1 = 235\text{ mm}$  et de distance focale  $f'_1 = 2\,350\text{ mm}$ , montée sur un tube  $\mathcal{T}_1$ . On note  $O_1$  le centre optique de  $\mathcal{L}_1$ . Une caméra CCD (capteur) est axée sur un tube  $\mathcal{T}_2$  appelé « porte oculaire », dont l'axe est confondu avec celui de  $\mathcal{L}_1$ . La mise au point est faite en faisant coulisser  $\mathcal{T}_2$ . On se place, sauf pour la question 14, dans le cadre de l'optique géométrique.



FIGURE 1 – Schéma de l'appareil utilisé sans lentille de Barlow (à gauche), puis avec (à droite).

7. Justifier précisément qu'il est très raisonnable de considérer que Saturne est située à l'infini. En déduire la distance  $d_1$  entre le capteur et le centre optique  $O_1$  de  $\mathcal{L}_1$  pour obtenir une image nette de Saturne.

Le fabricant de la caméra donne les caractéristiques techniques suivantes pour le capteur : modèle ICX618, type CCD, noir et blanc, rectangulaire de largeur  $\ell_c = 3,58\text{ mm}$ , hauteur  $h_c = 2,69\text{ mm}$ , surface  $S_c = 9,63\text{ mm}^2$ , comptant  $N = 307\,200$  pixels de forme carrée.

8. Calculer la largeur  $\varepsilon_c$  d'un pixel et en déduire la largeur, exprimée en nombre de pixels, de l'image de Saturne (sans ses anneaux) sur le capteur.

## Lentille de Barlow

Pour obtenir une image plus grande de la planète, on intercale une lentille de Barlow, modélisée ici par une lentille mince  $\mathcal{L}_2$  divergente, de distance focale  $f'_2$ , placée à la distance  $D_{2c} = 200\text{ mm}$  du capteur (Fig. 1).  $\mathcal{L}_2$  et  $\mathcal{L}_1$  ont même axe optique. On note  $O_2$  le centre optique de  $\mathcal{L}_2$ . La mise au point se fait en translatant l'ensemble  $\{\mathcal{L}_2 - \text{capteur}\}$ , axé sur le tube porte oculaire. On notera  $D_{12}$  la distance entre  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  et on admet que le foyer image  $F'_1$  de  $\mathcal{L}_1$  est situé entre  $\mathcal{L}_2$  et le capteur.

9. Sur l'annexe 1 à rendre avec la copie, construire l'image  $A'B'$  de l'objet  $AB$  par le système  $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$  en faisant apparaître l'image intermédiaire  $A_1B_1$ . Représenter la marche du rayon lumineux issu de  $B$  à travers le dispositif. *Pour plus de lisibilité et uniquement pour la construction graphique, les distances focales ont été modifiées.*

On souhaite que le dispositif produise sur le capteur de la caméra une image de Saturne agrandie d'un facteur  $\gamma_2 = 3$  par rapport à la situation précédente.

10. Exprimer alors la valeur de  $D_{12}$  en fonction de  $f'_1$ ,  $D_{2c}$  et  $\gamma_2$ . Faire l'application numérique.
11. En déduire l'expression de la distance focale  $f'_2$  de la lentille  $\mathcal{L}_2$  en fonction de  $D_{2c}$  et  $\gamma_2$ . Faire l'application numérique.

12. Déterminer la distance focale  $f'$  de la lentille convergente qui permettrait d'obtenir la même taille d'image de Saturne que le dispositif de Barlow ainsi réglé. Justifier que ce dispositif est qualifié de « tripleur de focale ».
13. Comment faudrait-il placer la lentille  $\mathcal{L}_2$  par rapport à  $\mathcal{L}_1$  dans le cas d'une observation directe confortable, où l'œil emmétrope de l'observateur remplace le capteur et n'accommode pas. Comment peut-on qualifier le système optique obtenu ?

### Limites de l'optique géométrique

14. La lentille  $\mathcal{L}_1$ , par son ouverture finie, se comporte comme un diaphragme qui limite la propagation des rayons lumineux. Dans le cas de l'objectif avec tripleur de focale, estimer la largeur  $\varepsilon_d$  de l'image d'un objet ponctuel situé à grande distance suivant l'axe optique sur le capteur. Conclure.

## Exercice 2 – Accordeur de guitare

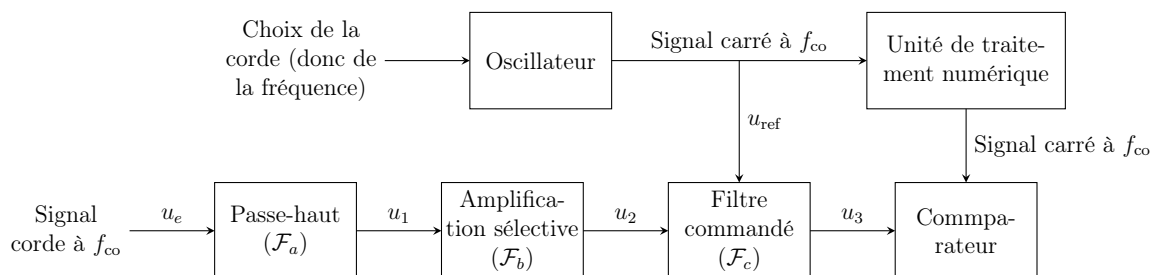
Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu. Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées  $f_{ac}$  sont données dans le tableau ci-dessous.

Corde	Fréquence $f_{ac}$ (Hz)
Mi grave	82,4
La	110,0
Ré	146,8
Sol	196,0
Si	246,9
Mi aigu	329,6

On souhaite accorder une corde *légèrement* désaccordée : on notera  $f_{co}$  la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

### Principe de l'accordeur

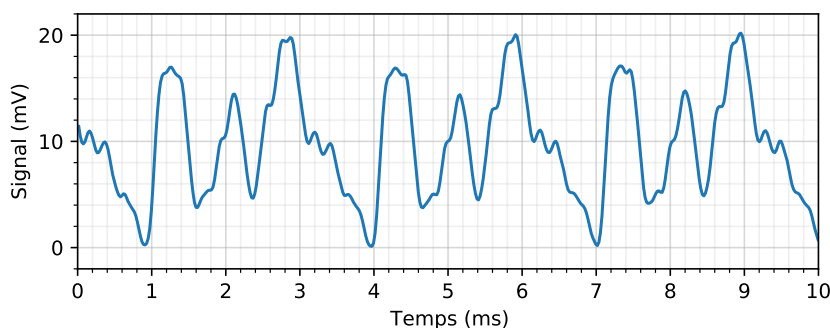
- Sélection de la corde à accorder (donc  $f_{ac}$  est fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence  $f_{ac}$  avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal  $u_e(t)$  provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence  $f_{co}$ .
- Amplification et filtrage de ce signal.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence  $f_{co}$  par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence  $f_{co}$ .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives  $f_{ac}$  et  $f_{co}$ . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand  $f_{co} = f_{ac}$ .



On ne s'intéresse ici qu'au traitement du signal venant de la corde. Dans tout le problème, on admet que toutes les précautions sont prises pour pouvoir **traiter les filtres indépendamment**, sans que l'ajout d'un nouveau filtre n'affecte le comportement du précédent.

## Le signal

Un exemple de signal à la sortie du micro d'une guitare électrique est représenté ci-dessous.

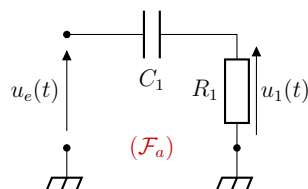


1. Rappeler la définition de la moyenne d'un signal  $s(t)$  périodique de période  $T$ . Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique). De quelle corde de guitare s'agit-il ?
3. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

## Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre représenté ci-dessous (filtre  $(\mathcal{F}_a)$ ).

4. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert  $\underline{H}_1(j\omega)$  de ce filtre en fonction de  $R_1$ ,  $C_1$  et de la pulsation  $\omega$  du signal.

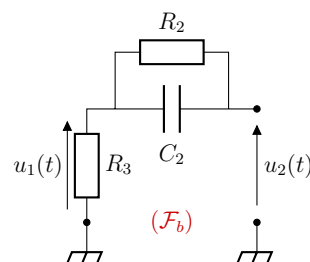


5. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique  $\omega_1$  en fonction de  $R_1$  et  $C_1$  et préciser sa signification.
6. Tracer le diagramme de Bode asymptotique relatif au gain. On justifiera les équations des asymptotes. Sur le même graphique, tracer la courbe réelle.
7. On a choisi  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$  et  $C_1 = 100 \text{ nF}$ . Calculer la fréquence de coupure  $f_1$  à  $-3 \text{ dB}$  de ce filtre. Au vu de l'allure du signal issu du micro de la guitare, quel est le rôle de ce premier filtre ?

## Amplification légèrement sélective

En sortie du filtre ( $\mathcal{F}_a$ ), le signal  $u_1(t)$  est envoyé sur le filtre ( $\mathcal{F}_b$ ).

8. Représenter les circuits équivalents au filtre ( $\mathcal{F}_b$ ) dans les limites basse et haute fréquence. En déduire, dans les deux cas, l'expression de  $u_2$  en fonction de  $u_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ .



9. Exprimer l'impédance équivalente  $\underline{Z}_{\text{eq}}$  de l'association de  $R_2$  en parallèle avec  $C_2$ .

10. Montrer que la fonction de transfert  $\underline{H}_2$  de ce filtre se met sous la forme

$$\underline{H}_2(j\omega) = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}, \quad \text{avec} \quad G_0 = \frac{R_2}{R_3} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}.$$

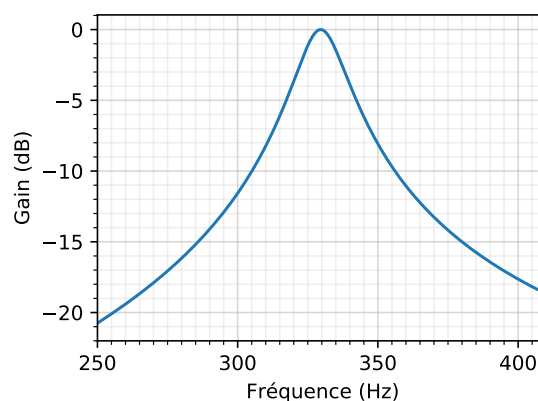
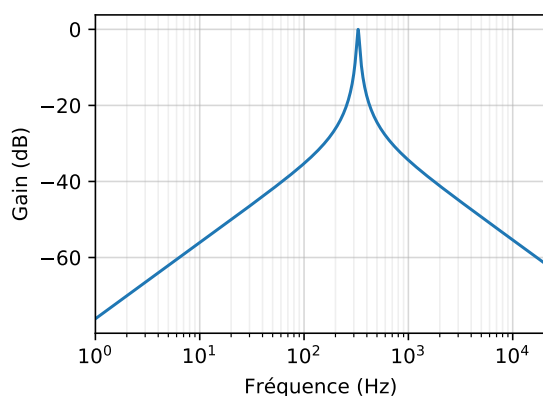
Vérifier que cette expression est cohérente avec les réponses de la question 8.

11. Calculer numériquement la fréquence caractéristique  $f_2$  correspondant à  $\omega_2$  si  $R_2 = 680 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 6 \text{ k}\Omega$  et  $C_2 = 470 \text{ pF}$ , ainsi que son gain  $G_0$ . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

## Filtrage (très) sélectif commandé

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale  $f_{\text{co}}$  du signal  $u_2$ , dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur  $f_{\text{ac}}$  (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde de Mi aigu que l'on souhaite accorder.

Le principe du filtre ( $\mathcal{F}_c$ ) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence  $f_{\text{ac}}$ . Le diagramme de Bode relatif au gain du filtre ( $\mathcal{F}_c$ ) est représenté ci-dessous, tracé à deux échelles différentes.

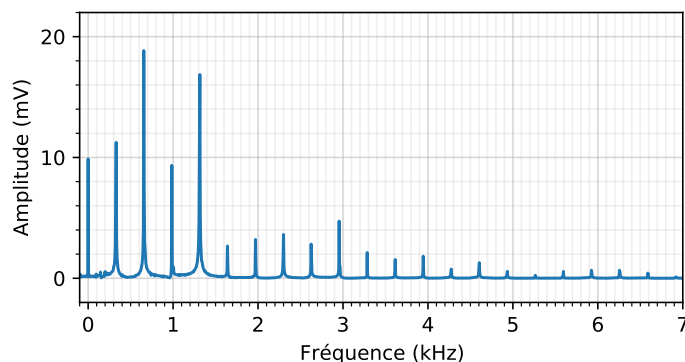


12. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?
13. Donner une estimation de sa bande-passante à  $-3 \text{ dB}$  après l'avoir définie.
14. Si la corde est désaccordée à  $f_{\text{co}} = 315 \text{ Hz}$ , estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

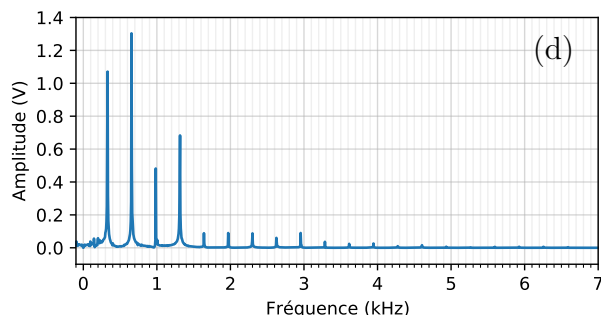
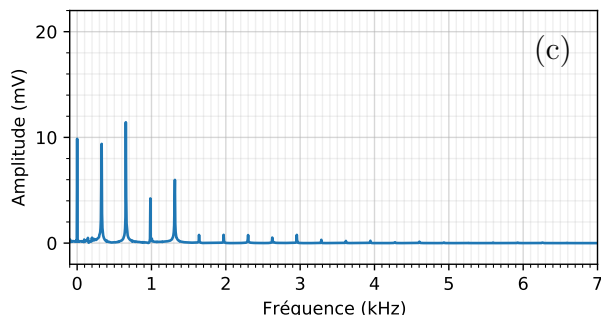
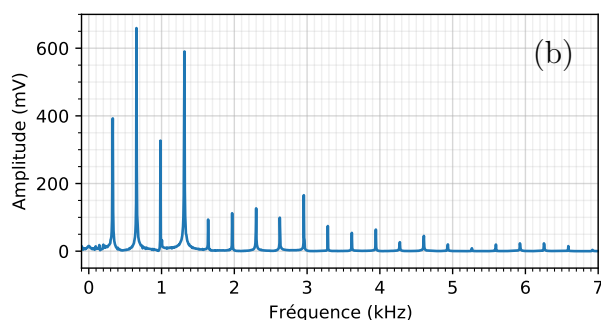
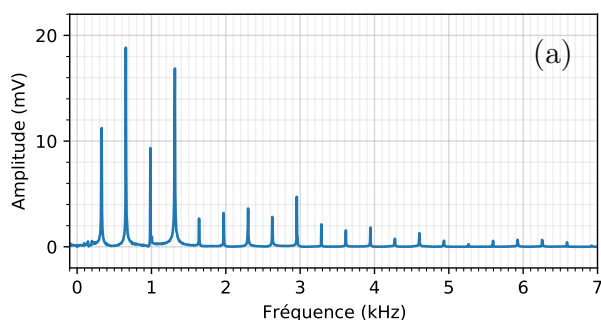
15. La fréquence à laquelle vibre la corde dépend de sa masse linéique  $\mu$  (masse par unité de longueur), sa longueur  $L$  et de sa tension  $T$ . Par analyse dimensionnelle, proposer une expression de la fréquence caractéristique de vibration de la corde. En déduire s'il faut tendre ou détendre la corde pour l'accorder.

### Analyse spectrale

Le spectre du signal d'entrée  $u_e$  issu du micro de la guitare est représenté ci-dessous.



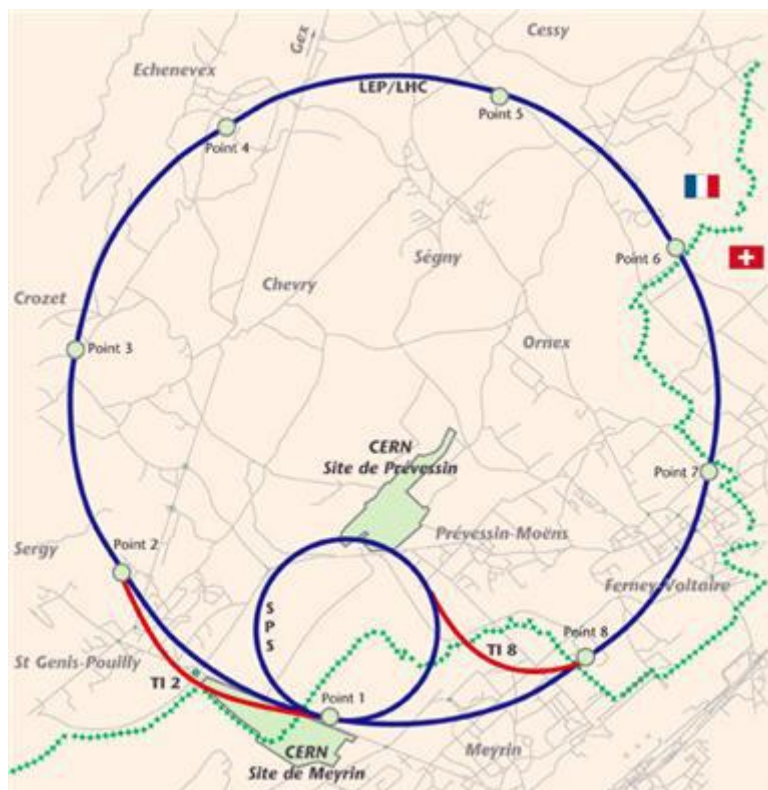
16. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal  $u_e$ .  
17. En le justifiant soigneusement, identifier le spectre qui correspond à la sortie  $u_1$  du premier filtre ( $\mathcal{F}_a$ ) parmi ceux représentés ci-dessous.  
18. Même question, pour la sortie  $u_2$  du filtre ( $\mathcal{F}_b$ ).  
19. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre ( $\mathcal{F}_c$ ). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.





## Exercice 3 – Étude du LHC

Le Grand Collisionneur de Hadrons (Large Hadron Collider ; LHC) est entré en fonctionnement en 2008. Il est situé dans un anneau de 27 kilomètres de circonférence et enterré à 100 m sous terre à la frontière franco-suisse, près de Genève. Le LHC est désormais le plus puissant des accélérateurs de particules au monde.



Dans cette partie, on étudie la trajectoire des protons dans le LHC. Il est formé d'une succession d'accélérateurs, d'énergies toujours croissantes. Chaque accélérateur injecte un faisceau dans la machine suivante, qui prend le relais pour porter ce faisceau à une énergie encore plus élevée, et ainsi de suite. Tous les accélérateurs de particules sont composés de la même façon : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions.

### Données

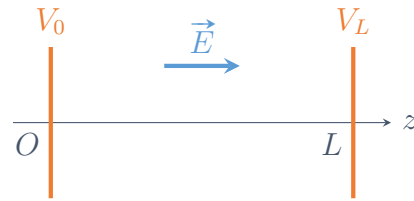
charge élémentaire :	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
masse d'un proton :	$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
masse d'un électron :	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
accélération de la pesanteur :	$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

### Proton dans un champ électrique uniforme et stationnaire

1. Exprimer la force subie par un proton dans une zone de l'espace où règne un champ électrique uniforme et stationnaire  $\vec{E}$ . Comparer le poids du proton à la force générée par un champ  $E = 100 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ . Conclure.
2. Établir l'équation du mouvement pour un proton dans une zone de l'espace où règne un champ électrique  $\vec{E} = E\vec{e}_z$  uniforme et stationnaire.

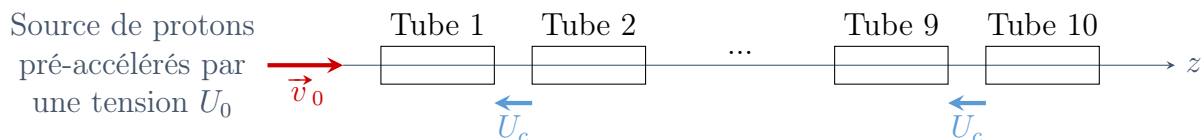


- Le proton est libéré avec une vitesse initiale nulle dans le plan  $x = 0$ . En déduire l'expression de sa vitesse  $v_L$  au bout de la zone de champ uniforme de longueur  $L$ .
- Le champ  $\vec{E}$  est créé par deux plaques conductrices séparées d'une distance  $L$ . On suppose que le potentiel électrique  $V_0$  de la plaque située en  $z = 0$  est nul. Exprimer le potentiel  $V_L$  de la plaque située en  $z = L$ . Commenter son signe.
- Retrouver l'expression de la vitesse  $v_L$  du proton en  $x = L$  par une approche énergétique.



### Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

L'accélérateur linéaire 2 (Linac 2) constitue le point de départ des protons utilisés dans les expériences menées au CERN.



Les protons passent dans une série de conducteurs métalliques coaxiaux. On considère que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs. Ces protons sont accélérés par une tension maximale  $U_c > 0$  toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes. Les protons sont injectés en  $O$  avec une vitesse  $v_0 = v_0 \vec{e}_z$  parallèle à l'axe de l'accélérateur et générée par une tension pré-accelératrice  $U_0$ .

- Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins ?
- Exprimer leur énergie cinétique  $\mathcal{E}_n$  à la sortie du  $n$ -ième tube en fonction de  $n$ ,  $e$ ,  $U_c$  et  $U_0$ . Calculer la valeur de la vitesse des protons à la sortie du 10<sup>ème</sup> tube pour  $U_0 = 200$  kV et  $U_c = 2000$  kV. Commenter la vitesse obtenue.
- Calculer, en méga électron-volt (MeV), l'énergie des protons à la sortie du 10<sup>ème</sup> tube, sachant qu'un électronvolt correspond à l'énergie cinétique d'un électron accéléré par une tension de 1 V.

### Du linac 2 au synchotron à protons (PS)

Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le synchrotron à proton (PS) a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC. Le synchrotron à protons est constitué de plusieurs éléments permettant d'une part, d'accélérer les protons (comme étudié dans la partie précédente) et d'autre part de les dévier (comme étudié dans cette partie). Ces éléments sont ensuite synchronisés afin de permettre aux protons de suivre une trajectoire circulaire tout en étant globalement accélérés. On considère un proton injecté en  $A$  (Ann. 2) dans le synchrotron où règne un champ magnétique statique et uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ .

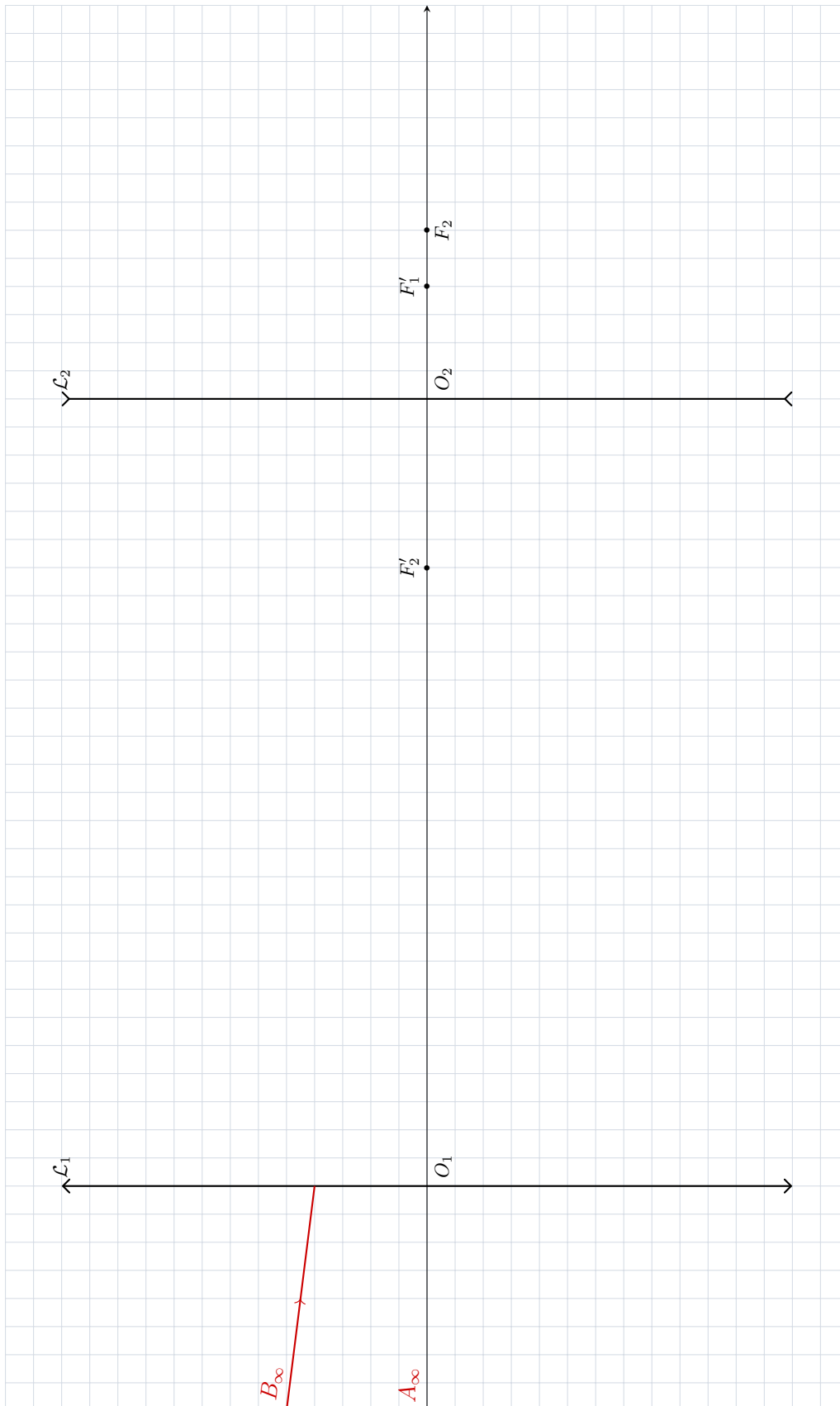
À  $t = 0$ , sa vitesse  $\vec{v}_0$  est perpendiculaire au champ magnétique.

9. Nommer la force que subit le proton dans le champ magnétique  $\vec{B}_0$ . Donner son expression à un instant quelconque en fonction de la vitesse  $\vec{v}$  du proton. Comparer le poids du proton à la force qu'il subit dans le champ magnétique terrestre, si sa vitesse est de l'ordre d'un cinquième de la célérité de la lumière.

Le champ  $\vec{B}_0$  a une intensité plus grande de plusieurs ordres de grandeurs que celle du champ magnétique terrestre. Pour les questions suivantes, on considère que le proton n'est soumis qu'à la force associée au champ  $\vec{B}_0$ .

10. Sur le schéma de l'annexe 2 à rendre avec la copie, représenter la force subie par le proton en A.
11. Montrer que la puissance de cette force est nulle. En déduire que le mouvement est uniforme.
12. On admet que la trajectoire du proton est un cercle. Sur le schéma de l'annexe 2 à rendre avec la copie, représenter la trajectoire du proton et indiquer son sens de parcours.
13. Établir l'expression du rayon  $R$  de la trajectoire en fonction de  $m_p$ ,  $B_0$ ,  $e$  et  $v_0$ .
14. Quelle est la nature du mouvement du proton après sa sortie de la zone de champ magnétique ?

## Annexe 1 – Objectif avec lentille de Barlow



Annexe 2 – Mouvement d'un proton dans un champ magnétique

