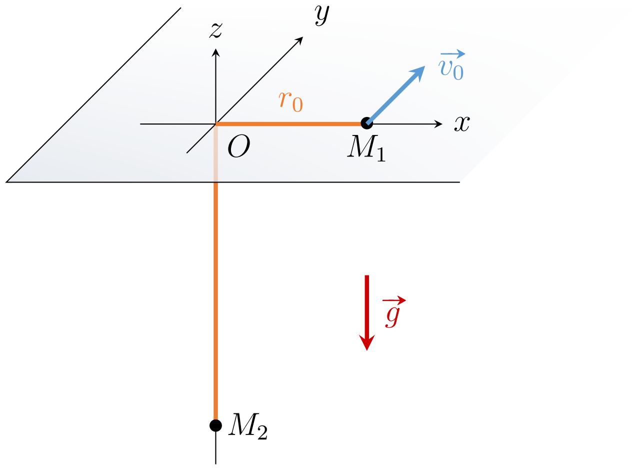
DM10 – Moment cinétique

Exercice 1 – Points matériels reliés par un fil



On considère deux points matériels M_1 et M_2, de masses respectives m_1 et m_2. M_1 se déplace sur le plan horizontal (xOy) et M_2 sur un axe vertical (Oz) orienté positivement vers le haut. Ils sont reliés par un fil inextensible de longueur L, de masse négligeable, qui passe dans un trou du plan (xOy) situé en O.

On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur. On repère M_2 par sa coordonnée z sur l'axe (Oz) et M_1 par ses coordonnées polaires r et θ. On note $\vec{v}$ la vitesse de M_1. À $t = 0$, $\overrightarrow{OM_1} = r_0\vec{e_x}$ et $\vec{v} = v_0\vec{e_y}$, avec $0 < r_0 < L$ et $v_0 > 0$.

1. Faire une figure à un instant t quelconque.
2. Exprimer les vecteurs position et vitesse des points M_1 et M_2 dans le repère cylindrique $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$.
3. Montrer que le fait que le fil soit inextensible permet de relier z et r.
4. Exprimer les conditions initiales sur r, $\dot{r}$, θ, $\dot{\theta}$, z et $\dot{z}$.

On considère que le fil coulisse sans frottement au niveau du point O, de sorte que la norme de la tension du fil est la même de part et d'autre de O. On néglige également tout frottement sur les points M_1 et M_2.

5. Combien de degrés de liberté possède le mouvement de M_1 ? Celui de M_2 ? Combien d'équations sont nécessaires pour étudier le mouvement ?
   Une de ces équations a été établie à la question 3.
6. Appliquer le théorème du moment cinétique au système $\{M_1\}$ pour montrer que $r^2\dot{\theta} = \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est une constante que l'on exprimera à l'aide des conditions initiales.
7. On définit $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, où $\mathcal{E}_1$ est l'énergie mécanique de M_1 et $\mathcal{E}_2$ l'énergie mécanique de M_2. À l'aide du théorème de l'énergie cinétique appliqué tout d'abord au point M_1 puis au point M_2, montrer que $\mathcal{E}_0$ est conservée.
8. Montrer que l'on peut obtenir l'équation du mouvement plan de M_1 sous la forme :
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + m_2 g(r - L) + \frac{1}{2}m_1 r^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 + m_2 g(r_0 - L).$$
9. En éliminant $\dot{\theta}$ de l'équation précédente à l'aide du résultat de la question 6, montrer que l'on peut écrire l'équation du mouvement radial sous la forme :
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{\text{p,eff}}(r) = \mathcal{E}_0,$$
   où $\mathcal{E}_{\text{p,eff}}(r)$ est une fonction qui ne dépend que de r et que l'on explicitera.

Les équations précédentes doivent être mises en forme pour être résolues numériquement. Les grandeurs r_0, v_0 et $\frac{1}{2}m_1v_0^2$ et le rapport $t_0 = r_0/v_0$ sont utilisés pour adimensionner les longueurs, vitesses, énergies, et temps : on notera $G^* = G/G_0$ la grandeur sans dimension associée à G.

On pose $\alpha = \dfrac{m_2 g r_0}{\frac{1}{2}m_1v_0^2}$ et on choisit $L = 3r_0$, $m_2 = 3m_1$ et $\alpha = 0{,}5$ pour les calculs.

10. Montrer que $\mathcal{E}_0^* = 1 - 2\alpha$ et $\mathcal{E}_{\text{p,eff}}^*(r^*) = \alpha(r^* - 3) + \dfrac{1}{r^{*2}}$.

11. Montrer que l'équation de conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$4\left(\frac{\mathrm{d}r^*}{\mathrm{d}t^*}\right)^2 + \alpha(r^* - 3) + \frac{1}{r^{*2}} = 1 - 2\alpha \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}^2r^*}{\mathrm{d}t^{*2}} = -\frac{\alpha}{8} + \frac{1}{4r^{*3}}.$$

12. *La notation $\dot{G}^*$ désigne dorénavant $\dfrac{\mathrm{d}G^*}{\mathrm{d}t^*}$.*

Montrer que la conservation du moment cinétique de M_1 s'écrit $\dot{\theta}^* = 1/r^{*2}$.

13. En déduire que le mouvement de M_1 vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \ddot{r}^* = -\dfrac{\alpha}{8} + \dfrac{1}{4r^{*3}} \\ \dot{\theta}^* = \dfrac{1}{r^{*2}} \end{cases} \quad \text{avec les conditions initales} \quad \begin{cases} r^*(0) = 1 \\ \dot{r}^*(0) = 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases}. \tag{1}$$

La résolution numérique de ce système est bien sûr possible avec la méthode d'Euler ou, plus simplement peut-être, avec la fonction `odeint`*. Pour les plus courageux/courageuses, vous pouvez vous-même écrire le programme qui résout le système (1). Comme pour les équations différentielles du deuxième ordre, on se ramènera à un système d'équations du premier ordre. Ici, on en a trois : la première donnant $\dot{r}^*$, la deuxième $\ddot{r}^*$ et la dernière $\dot{\theta}^*$. La fonction F associée à l'équation différentielle doit donc renvoyer la dérivée $\dot{V}^* = (\dot{r}^*, \ddot{r}^*, \dot{\theta}^*)$ du vecteur $V^* = (r^*, \dot{r}^*, \theta)$. On utilisera sinon directement le programme* `dm10.py`.

14. Représenter graphiquement avec Python $r^*(t^*)$ et $\dot{\theta}^*(t^*)$ pour $t^* \in [0, 100]$.

Quelles particularités présentent les courbes représentatives de $r^*(t^*)$ et de $\theta(t^*)$?

15. Exprimer y^* et x^* en fonction de r^* et θ, puis représenter sur un nouveau graphe la trajectoire $y^*(x^*)$. Commenter l'allure de la trajectoire.