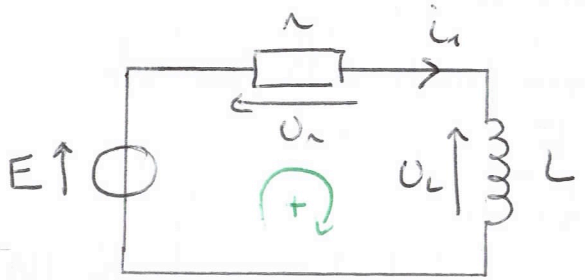
DM 2.

1.



Après avoir orienté la maille, on utilise la loi des mailles:

$E - u_r - u_L = 0$

La résistance et la bobine sont en convention récepteur d'où

$u_r = r i_1$ et $u_L = L\frac{di_1}{dt}$

On obtient ainsi l'équation différentielle vérifiée par i_1 :

$$\boxed{E = r i_1 + L\frac{di_1}{dt}}$$

2. En régime permanent, $\frac{di_1}{dt} = 0$, l'équation devient :

$$\boxed{E = r i_1}$$

3. D'après la question précédente,

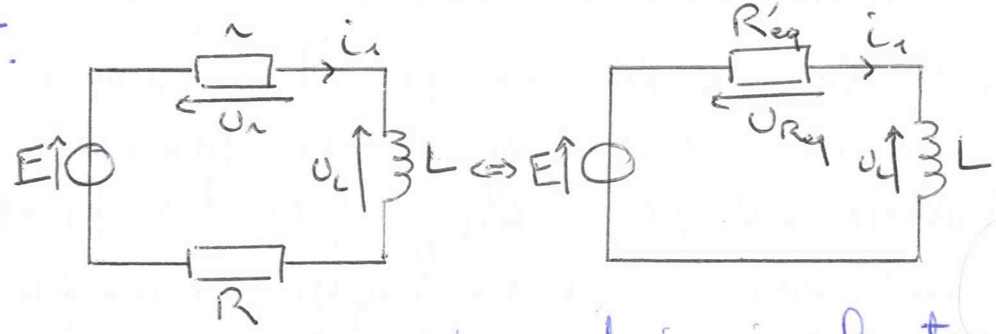
$\boxed{I_1 = \frac{E}{r}}$ AN : $I_1 = 2,0\ A$

4. En régime permanent,

$u_2 = \alpha \cancel{\frac{di_1}{dt}}^{\,0} = 0 < 10\ kV$.

Il ne peut y avoir d'étincelle aux bornes de la bougie en régime permanent

5.



Ces deux circuits sont équivalents si

$R_{éq} = R + r$.

Le temps caractéristique associé au circuit est donc

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R+r}}$$

Rq : puisque $R \gg r$, on pourrait simplifier : $\tau \approx \frac{L}{R}$

③

6. D'après la question 1, en remplaçant r par $R+r$, on obtient

$$L \frac{di_1}{dt} + (R+r) i_1 = E$$

Sous sa forme canonique, cette équation devient :

$$\boxed{\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau} = \frac{E}{L}}$$

7. L'énergie est une grandeur continue. Comme l'énergie stockée par la bobine s'écrit : $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i_1^2$, i_1 est continu. Si l'on suppose, comme le suggère l'énoncé que le régime permanent est atteint avant l'ouverture du rupteur, on a $i_1(t=0^-) = I_1$ d'où :

$$\boxed{i_1(t=0^-) = i_1(t=0^+) = i_1(t=0) = I_1}$$

8. On commence par résoudre l'équation homogène :

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau} = 0.$$

④

Les solutions sont de la forme :

$$i_{1,h}(t) = I_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Une solution particulière est

$$i_{1,p}(t) = \frac{E}{R+r}.$$

Les solutions sont donc de la forme :

$$i_1(t) = I_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R+r}.$$

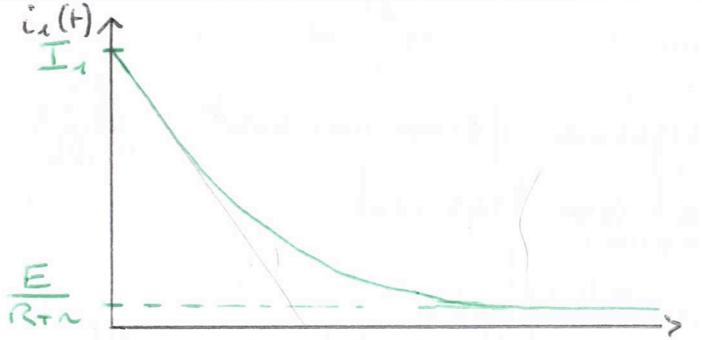
En utilisant la condition initiale on trouve l'expression de la constante I_0 :

$$i_1(t=0) = I_0 + \frac{E}{R+r} = I_1$$

d'où $\quad I_0 = I_1 - \frac{E}{R+r}$.

La solution est finalement :

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E}{R+r} + \left(I_1 - \frac{E}{R+r}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}}$$



9. La tension aux bornes de la bougie tend vers 0 : (5)

$$u_2(t) = \alpha \frac{di_1}{dt} = -\frac{\alpha}{\tau}\left(I_1 - \frac{E}{R+r}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_2(t=0) = -\frac{\alpha}{\tau}\left(I_1 - \frac{E}{r+R}\right)$$

$$u_2(t=\tau) = u_2(t=0)\, e^{-\frac{\tau}{\tau}} = u_2(t=0)\, \underbrace{e^{-1}}_{\sim 0,37}$$

On cherche graphiquement l'instant pour lequel la tension $u_2(t)$ atteint 37 % de sa valeur initiale : On trouve

$$\boxed{\tau \approx 2,0 \text{ ms.}}$$

10. L'étincelle au niveau de la bougie s'arrête quand $|u_2(t_1)| = 10 kV$

($|u_2(t)|$ est décroissante).

Graphiquement, on lit :

$$\boxed{t_1 \approx 0,8 \text{ ms.}}$$

11. Dans le modèle du circuit primaire, où le rupteur ouvert est assimilé à une résistance R du fait de la présence d'une étincelle à ses bornes, l'énergie (6) perdue en raison de cette étincelle est celle dissipée par effet Joule par cette résistance :

$$\mathcal{E}_e = \int_0^\infty P_J\, dt$$

$$= \int_0^\infty R\, i_1^2\, dt \qquad \text{cf page suivante pour le calcul.}$$

Puisque i_1 n'est pas nul en régime permanent cette intégrale est infinie. Cela est dû à une modélisation trop simpliste : En effet, de la même façon que l'étincelle aux bornes de la bougie finit par s'estomper, l'étincelle aux bornes du rupteur s'arrêtera quand la tension à ses bornes passera en dessous d'un certain seuil. L'étincelle ne durera pas indéfiniment.

(7)

$$\mathcal{E}_e = \int_0^\infty R i_1^2 \, dt$$

$$= \int_0^\infty R\left(\frac{E}{R+r} + \left(I_1 - \frac{E}{R+r}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 dt.$$

On pose $I_\infty = \frac{E}{R+r}$

$$\mathcal{E}_e = \int_0^\infty R\left(I_\infty + (I_1 - I_\infty)e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 dt$$

$$= \int_0^\infty R\left(I_\infty^2 + (I_1 - I_\infty)^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} + 2 I_\infty (I_1 - I_\infty) e^{-\frac{t}{\tau}}\right) dt$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty R I_\infty^2 \, dt}_{\mathcal{E}_\infty} + \underbrace{\int_0^\infty R(I_1 - I_\infty)^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt}_{\mathcal{E}_1} + \underbrace{\int_0^\infty 2R I_\infty (I_1 - I_\infty) e^{-\frac{t}{\tau}} dt}_{\mathcal{E}_2}$$

$$= \mathcal{E}_\infty + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

$$\mathcal{E}_1 = \left[-\frac{\tau R}{2}(I_1 - I_\infty)^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^\infty = \frac{\tau R}{2}(I_1 - I_\infty)^2$$

$$\mathcal{E}_2 = \left[-\tau 2 R I_\infty (I_1 - I_\infty) e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^\infty = 2R\tau I_\infty (I_1 - I_\infty)$$

$$\mathcal{E}_\infty = \left[R I_\infty^2 t\right]_0^\infty \longrightarrow \infty$$

(8)

Il faut nécessairement que l'étincelle ait une durée finie pour éviter la divergence de $\mathcal{E}_e$ liée à celle de $\mathcal{E}_\infty$.