Chapitre 17 – Mouvement d'un solide

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Différencier un solide d'un système déformable.
→ Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
→ Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
→ Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.
→ Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
→ Définir un couple.
→ Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
→ Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.
→ Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
→ Établir, dans le cas d'un solide en rotation dans autour d'un axe fixe, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.

Questions de cours

→ Énoncer le théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe pour un solide en rotation.
→ Énoncer le théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe et montrer qu'il est équivalent à la loi du moment cinétique scalaire.
→ Établir l'équation du mouvement du pendule pesant par application du théorème du moment cinétique et/ou avec le théorème de l'énergie cinétique.

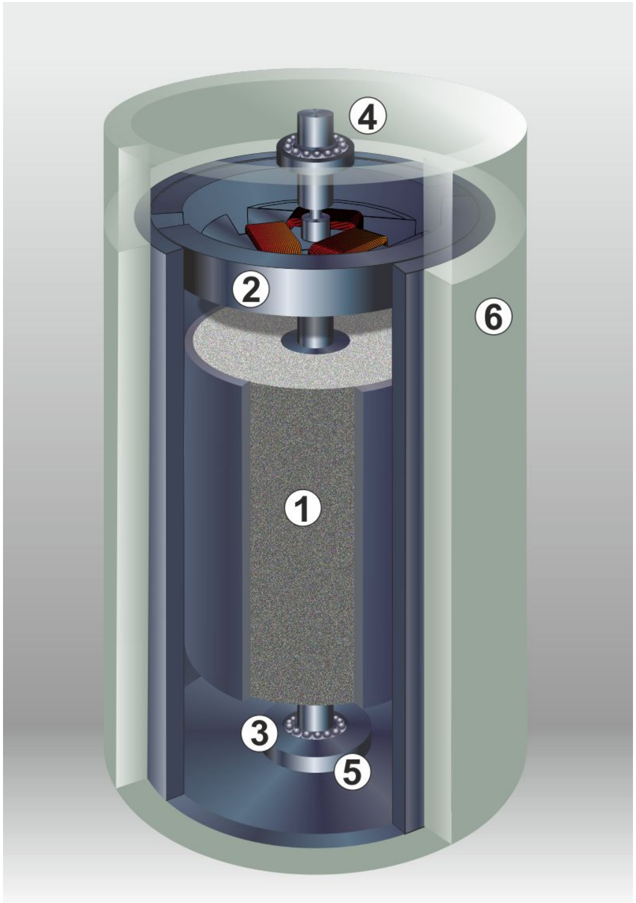
Documents

Document 1 – Moment d'inertie de la Terre

En analysant finement le mouvement de rotation de la Terre, il est possible de déterminer son moment d'inertie autour de l'axe Nord-Sud. Des mesures astronomiques montrent qu'il vaut $0{,}33 M_T R_T^2$, où M_T et R_T sont les masse et rayon de la Terre. On note alors qu'il est inférieur au moment d'inertie d'une boule homogène de même masse et de même rayon, qui vaut $0{,}4 M_T R_T^2$.

On en déduit que la répartition des masses à l'intérieur de la Terre n'est pas homogène et que la couche profonde située près de son axe de rotation est plus dense que les couches superficielles. Cette couche profonde est le noyau. Des mesures sismiques permettent par ailleurs de déterminer sa taille. On peut donc estimer sa densité, qui correspond à celle du fer à haute pression. C'est un des principaux arguments prouvant que le noyau est essentiellement composé de fer.

Document 2 – Volant d'inertie



L'énergie solaire est abondante mais son stockage présente d'importantes difficultés. Une solution consiste à utiliser des volants d'inertie, qui permettent de stocker de l'énergie pendant la journée, puis de la restituer pendant la nuit. Une entreprise française propose un volant en béton, matériau peu coûteux (voir la conférence TEDx d'André Gennesseaux, co-fondateur d'Énergiestro).

Le volant ENERGIESTRO est constitué d'un cylindre (1) en béton précontraint par un enroulement de fibre de verre. Il est capable de résister à une grande vitesse de rotation pour stocker l'énergie sous forme cinétique. Un moteur/alternateur (2) permet de transférer de l'énergie électrique au volant (accélération) puis de la récupérer (freinage). Les paliers inférieur (3) et supérieur (4) sont des roulements à billes. Une butée magnétique passive (5) supporte le poids du volant. Une enceinte étanche (6) maintient le volant dans le vide pour supprimer le frottement de l'air.

energiestro.fr

Pour une version DIY : https://youtu.be/yhu3s1ut3wM.

Document 3 – Analogies entre translation et rotation

Translation rectiligne	**Rotation autour d'un axe fixe**
(Oz) direction du mouvement	
Position z Vitesse $\dot{z}$	
Masse m Quantité de mouvement $p_z = m\dot{z}$ Forces $\overrightarrow{F_{i,z}}$	
PFD $\dfrac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = \sum F_{i,z}$	
Puissance d'une force $\mathcal{P}(F_{i,z}) = F_{i,z}\dot{z}$ Énergie cinétique $\mathcal{E}_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}m\dot{z}^2$	
TEC $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}(F_{i,z})$ équivalent au PFD	

Applications

Application 1 – Mouvements de translation et de rotation

Pour chacune des situations ci-dessous, indiquer la nature du mouvement.

	Référentiel	**Système**
1.	terrestre	ascenseur
2.	terrestre	tambour de machine à laver
3.	terrestre	nacelle de grande roue
4.	géocentrique	Terre
5.	héliocentrique	Terre

Application 2 – Face cachée de la Lune

Dans le référentiel géocentrique, la Lune effectue un révolution circulaire de période $T = 27{,}3\,\mathrm{j}$ centrée sur la Terre. La distance Terre-Lune vaut $R = 3{,}84 \times 10^5\,\mathrm{km}$. Au cours de cette révolution, la Lune montre toujours la même face à la Terre.

1. Décrire le mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique.

2. En déduire la vitesse angulaire Ω du centre de la Lune sur sa trajectoire.

3. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du centre de la Lune dans le référentiel géocentrique. Calculer numériquement la norme de la vitesse.

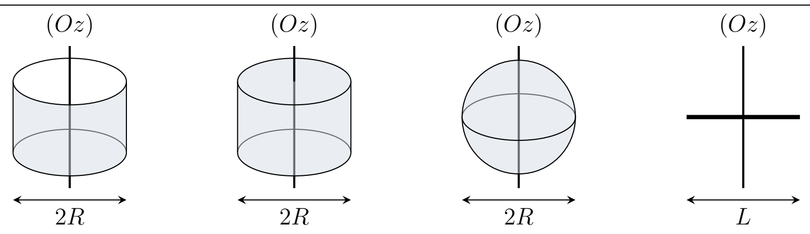
4. Décrire le mouvement de la Lune dans le repère sélénocentrique (mêmes axes que le repère géocentrique mais origine au centre de la Lune).

Application 3 – Plongeon

On admet qu'en chute libre, le moment cinétique d'un système est conservé. À l'aide d'une estimation raisonnable des paramètres pertinents, interpréter l'évolution de la vitesse angulaire de rotation du plongeur lors son saut : https://youtu.be/m9BzPki0V7w?t=42.

Le tableau ci-dessous indique les moments d'inertie de quelques solides de masse m.

Cylindre vide de rayon R	Cylindre plein de rayon R	Boule de rayon R	Tige de longueur L
mR^2	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$

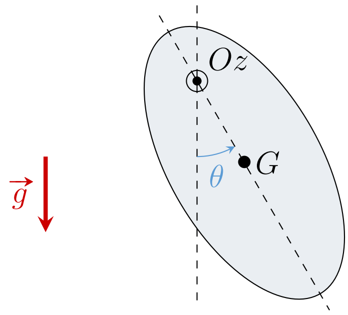


Tabouret d'inertie

Application 4 – Pendule pesant

On considère un pendule de masse totale m et de centre d'inertie G, en rotation autour de l'axe fixe (Oz) horizontal. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) et d la distance OG. On considère que la liaison pivot d'axe (Oz) est idéale.

La position du pendule est repérée par l'angle θ entre (OG) et la verticale.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ. On dressera soigneusement le bilan des forces.
2. En déduire la pulsation et la période du mouvement dans le cas de faibles oscillations. Comparer le cas d'une masse ponctuelle située en G ($J_1 = md^2$) et celui d'une tige de longueur $2d$ accrochée à l'une de ses extrémités en O ($J_2 = 4md^2/3$).
3. Dans le cas général, c'est-à-dire en dehors de la limite des oscillations de faible amplitude, montrer qu'à tout instant

$$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mgd\cos\theta = \text{cste}.$$

Interpréter.

Application 5 – Équivalence entre le TEC et le TMCS

On considère un solide en rotation autour de l'axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire ω. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe. Le système est soumis à des forces $\vec{F_i}$, dont le moment par rapport à l'axe (Oz) est noté Γ_i.

1. Montrer que le théorème de l'énergie cinétique et le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) sont équivalents.
2. Retrouver l'équation différentielle du pendule pesant (App. 4) en utilisant le TEC.

Application 6 – Volant d'inertie

Un volant d'inertie est un cylindre mis en rotation de manière à stocker de l'énergie. Le volant de stockage solaire (VOSS, Doc. 2) existera en différentes tailles, adaptées à différentes utilisations. Les caractéristiques des volants des différents modèles de la gamme sont indiquées ci-dessous.

Capacité ($\mathrm{kW \cdot h}$)	**Diamètre** (m)	**Hauteur** (m)	**Masse** (t)	**Puissance** (kW)
10	1,3	2,5	6,0	2 à 40
20	1,6	3,1	12	4 à 80
50	2,2	4,3	30	10 à 200

Données : le moment d'inertie d'un cylindre plein de masse m et de rayon R vaut $mR^2/2$.

1. Pour chacun des modèles, déterminer la vitesse angulaire Ω du volant en tours par minute et la vitesse d'un élément en périphérie du volant. Commenter.

2. Justifier que ce système ne permet de stocker efficacement de l'énergie que sur des temps courts.

On considère le modèle de $50\,\mathrm{kW}\cdot\mathrm{h}$.

3. Le volant est initialement à l'arrêt et on néglige tous les frottements. Déterminer le temps nécessaire pour « recharger » le système en utilisant la puissance maximale indiquée.
4. Donner l'expression de la vitesse angulaire $\omega(t)$ lors de la charge.

Une fois la vitesse angulaire Ω, atteinte le système n'est plus alimenté. On modélise les frottements par des frottements fluides, associés à un couple résistant $\Gamma = -\alpha\omega$, où ω est la vitesse angulaire du volant et α une constante positive.

5. Exprimer la vitesse angulaire $\omega(t)$ lors de cette phase.
6. Représenter graphiquement l'évolution de $\omega(t)$, puis celle de l'énergie stockée.
7. Une alternative au stockage par volant d'inertie consiste à surélever une masse, qui entraine ensuite un alternateur lors de sa descente. Quelle serait la hauteur h nécessaire pour stocker la même énergie qu'un volant VOSS, en utilisant ce même volant comme masse ?
8. Déterminer le volume d'eau minimal nécessaire pour obtenir la même énergie avec le barrage hydroélectrique du Chevril, plus haut barrage français avec une hauteur de $180\,\mathrm{m}$.