

## DS6 – Mécanique

### Exercice 1 – Mission Rosetta

1. On a  $m_{\text{com}} = \frac{4}{3}\pi r_{\text{com}}^3 \rho_{\text{com}}$ , d'où

$$r_{\text{com}} = \left( \frac{3m_{\text{com}}}{4\pi\rho_{\text{com}}} \right)^{1/3}.$$

A.N. :  $r_{\text{com}} = 1,8 \text{ km}$ .

2. On applique le théorème de la puissance cinétique à la sonde, soumise à la seule force d'interaction gravitationnelle  $\vec{F}_G$  due à la comète, dans le référentiel lié au centre  $O$  de la comète et dont les axes sont fixés par trois étoiles lointaines, supposé galiléen :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \vec{F}_G \cdot \vec{v} = 0,$$

puisque  $\vec{v} \perp \vec{F}_G$  sur la trajectoire circulaire. On a donc  $v = \text{cte}$  : le mouvement est **uniforme**.

3. En appliquant cette fois le PFD dans le repère polaire dans le cas d'un mouvement circulaire, on obtient après projection selon  $\vec{e}_r$

$$-m_{\text{ros}} \frac{v_1^2}{r_1} = -G \frac{m_{\text{com}} m_{\text{ros}}}{r_1^2}, \quad \text{soit} \quad v_1 = \sqrt{\frac{G m_{\text{com}}}{r_1}}.$$

A.N. :  $v_1 = 0,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

4. Le mouvement étant circulaire, on a aussi

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}.$$

Avec l'expression précédente, on retrouve après calcul la troisième loi de Kepler

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{G m_{\text{com}}}.$$

La période de révolution de la sonde s'exprime

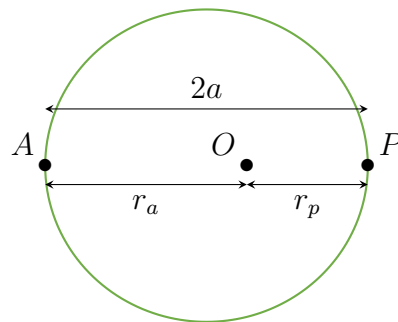
$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{r_1^3}{G m_{\text{com}}}}.$$

A.N. :  $T_1 = 14,6 \text{ jours}$ .

5. Toujours sur l'orbite circulaire, on a

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_{\text{ros}} v_1^2 - G \frac{m_{\text{ros}} m_{\text{com}}}{r_1}, \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}_m = -G \frac{m_{\text{ros}} m_{\text{com}}}{2r_1}.$$

6. Le périhélie est le point de la trajectoire le plus proche de la comète, l'aphélie le point le plus éloigné.



7. On a  $2a = r_a + r_p$ , d'où

$$\mathcal{E}_m = -G \frac{m_{\text{ros}} m_{\text{com}}}{r_a + r_p}.$$

8. La sonde n'est soumise qu'à la force d'interaction gravitationnelle qui est conservative : on a donc  $\mathcal{E}_m = \text{cste}$ . En particulier, au point  $P$  :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_{\text{ros}} v_p^2 - G \frac{m_{\text{ros}} m_{\text{com}}}{r_p} = -G \frac{m_{\text{ros}} m_{\text{com}}}{r_a + r_p}.$$

On en déduit après calcul

$$v_p = \sqrt{\frac{2Gm_{\text{com}}r_a}{r_p(r_a + r_p)}}.$$

A.N. :  $v_p = 0,30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

9. Sur l'orbite circulaire de rayon  $r_p$ , la vitesse  $v_2$  est donnée par

$$v_2 = \sqrt{\frac{Gm_{\text{com}}}{r_p}}.$$

La variation de vitesse  $\Delta v$  s'exprime donc

$$\Delta v = v_2 - v_p = \sqrt{\frac{Gm_{\text{com}}}{r_p}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_a}{r_a + r_p}} \right).$$

A.N. :  $\Delta v = -40 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$  : il faut réduire la vitesse pour passer de l'orbite elliptique à l'orbite circulaire.

10. On a

$$\vec{F}_G = -G \frac{m_{\text{ph}} m_{\text{com}}}{r^2} \vec{e}_r, \quad \text{soit} \quad \vec{F}_G = m_{\text{ph}} \vec{g}_{\text{com}}.$$

On retrouve une relation similaire au poids :  $\vec{g}_{\text{com}}$  s'exprime en  $\boxed{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$ .

11. On compare l'intensité du champ de pesanteur lors du largage à une distance  $r_{\text{larg}}$  du centre de la comète avec celle au niveau de sa surface à une distance  $r_{\text{com}}$  du centre :

$$\frac{g_{\text{com}}(r_{\text{com}})}{g_{\text{com}}(r_{\text{larg}})} = \left( \frac{r_{\text{larg}}}{r_{\text{com}}} \right)^2 = 1,6 \times 10^2.$$

L'intensité du champ gravitationnel est multipliée par 160 au cours de la descente : **on ne peut pas considérer le champ de gravitation uniforme.**

12. On applique le PFD à l'atterrisseur soumis à la seule force d'interaction gravitationnelle due à la comète, dans le référentiel  $\mathcal{R}$  supposé galiléen. La projection sur  $\vec{e}_r$  donne

$$\ddot{r} + \frac{Gm_{\text{com}}}{r^2} = 0.$$

13. On lit sur la courbe a que la surface de comète ( $r = r_{\text{com}} = 1,8 \text{ km}$ ) est atteinte au bout de  $\tau_0 \approx 145 \times 10^3 \text{ s}$ , soit 1,7 jours.

Pour une orbite circulaire de rayon  $r_{\text{larg}}$ , la période de révolution de la sonde, et donc celle du référentiel  $\mathcal{R}$  est alors d'environ 9,6 jours. La durée  $\tau_0$  de la descente est plus faible que le temps caractéristique d'évolution de l'orientation du référentiel, même si elle n'est pas complètement négligeable. L'hypothèse selon laquelle le référentiel  $\mathcal{R}$  est galiléen pour ce mouvement est plutôt raisonnable.

14. On a  $7 \text{ h} = 25,2 \times 10^3 \text{ s}$ . La courbe pour laquelle la distance  $r$  vaut  $1,8 \text{ km}$  à l'instant  $25,2 \times 10^3 \text{ s}$  est la **f**, obtenue avec une vitesse initiale  $v_0 = -0,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
15. On utilise la courbe pour laquelle la vitesse à une distance  $r_{\text{larg}} = 22,5 \text{ km}$  vaut  $-0,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . À une distance  $r_{\text{com}} = 1,8 \text{ km}$ , on lit  $v_f = |\dot{r}| = 1,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
16. Lors de la descente, Philae n'est soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle due à la comète qui est conservative : l'énergie mécanique est conservée. On applique le TEM entre le largage et le contact avec la comète :

$$\Delta \mathcal{E}_m = \left( \frac{1}{2} m_{\text{ph}} v_f^2 - G \frac{m_{\text{ph}} m_{\text{com}}}{r_{\text{com}}} \right) - \left( \frac{1}{2} m_{\text{ph}} v_0^2 - G \frac{m_{\text{ph}} m_{\text{com}}}{r_{\text{larg}}} \right) = 0,$$

d'où, après calcul

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + 2Gm_{\text{com}} \left( \frac{1}{r_{\text{com}}} - \frac{1}{r_{\text{larg}}} \right)}.$$

A.N. :  $v_f = 1,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , ce qui est cohérent avec la valeur obtenue numériquement.

17. À la surface de la comète, l'intensité de la force d'interaction gravitationnelle subie par Philae est :

$$F_G = G \frac{m_{\text{ph}} m_{\text{com}}}{r_{\text{com}}^2} = 20 \text{ mN}.$$

À la surface de la Terre, où l'intensité du champ de pesanteur vaut environ  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , une masse  $m = F_G / g_{\text{Terre}} = 2,1 \text{ g}$ , aurait un poids équivalent à  $F_G$ . On retrouve bien l'ordre de grandeur indiqué par les journalistes. La phrase employée est toutefois incorrecte : il s'agit d'un abus de langage, où le poids est confondu avec la masse. Si la force d'interaction gravitationnelle dépend aussi de l'objet attracteur, la masse est invariante.

## Exercice 2 – Mesure de l'intensité du champ de pesanteur terrestre

1. Le pendule n'est soumis qu'à son poids et à l'action de la liaison pivot idéale dont le moment est nul par rapport à  $(Oz)$ . On applique le TMC scalaire au pendule pesant, par rapport à l'axe fixe  $(Oz)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  supposé galiléen :

$$\ddot{\theta} + \frac{amg}{J} \sin \theta = 0.$$

Pour des petites oscillations, on retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{amg}{J}}.$$

On en déduit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{amg}}.$$

2. En différenciant cette relation, ou en calculant la nouvelle période  $T + \delta T$  quand le champ de pesanteur passe de  $g$  à  $g + \delta g$ , on obtient

$$s = \frac{\delta T}{T} = -\frac{\delta g}{2g}.$$

3. Le pendule est soumis à son poids, au couple de rappel et à l'action de la liaison pivot idéale dont le moment est nul par rapport à  $(Oz)$ . On applique le TMC scalaire au pendule pesant, par rapport à l'axe fixe  $(Oz)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  supposé galiléen :

$$\ddot{\theta} + \frac{K}{J} \theta - \frac{amg}{J} \sin \theta = 0.$$

4. En choisissant la référence d'énergie potentielle en  $\theta = 0$ , l'énergie potentielle de pesanteur  $\mathcal{E}_{p,p}$  s'exprime

$$\mathcal{E}_{p,p}(\theta) = amg(\cos \theta - 1).$$

Avec l'énergie potentielle associée au couple de rappel, l'énergie potentielle totale  $\mathcal{E}_p$  du pendule s'exprime

$$\mathcal{E}_p(\theta) = amg(\cos \theta - 1) + \frac{1}{2}K\theta^2.$$

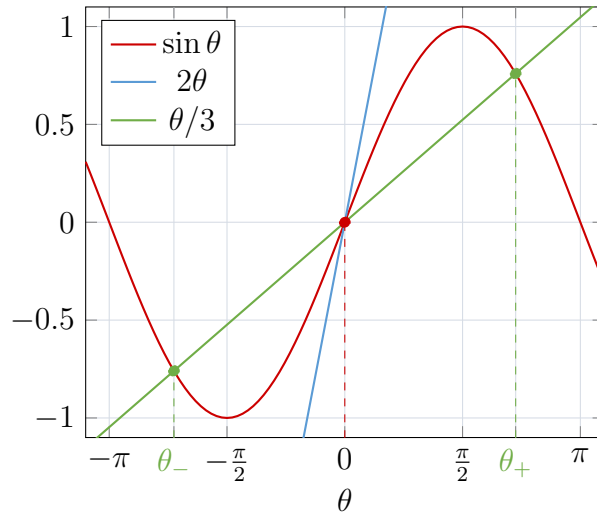
5. Les positions d'équilibre  $\theta_{\text{eq}}$  vérifient

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta}(\theta_{\text{eq}}) = 0, \quad \text{soit} \quad amg \sin \theta_{\text{eq}} = K\theta_{\text{eq}}.$$

On remarque que  $\theta_{\text{eq}} = 0$  est toujours solution puisque  $\sin 0 = 0$ .

La résolution graphique sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ , pour quelques valeurs du rapport  $\frac{K}{amg}$ , montre

- qu'il s'agit de la seule solution pour  $\frac{K}{amg} \geq 1$  ;
- qu'il existe deux autres positions d'équilibre si  $\frac{K}{amg} < 1$ .



6. La position  $\theta = 0$  est stable s'il s'agit d'un minimum d'énergie potentielle, c'est-à-dire si  $\frac{d^2\mathcal{E}_m}{d\theta^2}(0) > 0$ . Or

$$\frac{d^2\mathcal{E}_m}{d\theta^2} = -amg \cos \theta + K,$$

donc  $\theta = 0$  est stable si  $amg < K$ . Dans le cas où  $amg = K$ , la position  $\theta = 0$  correspond encore à un minimum d'énergie potentielle.

Finalement, la position  $\theta = 0$  est stable si  $K \geq amg$ .

7. L'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$  du pendule est donnée par

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + amg(\cos \theta - 1) + \frac{1}{2}K\theta^2.$$

En l'absence de frottement, le mouvement est conservatif, d'où

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = J\dot{\theta}\ddot{\theta} - amg\dot{\theta}\sin \theta + K\theta\dot{\theta} = 0.$$

Après simplification par  $\dot{\theta}$ , on retrouve l'équation différentielle établie précédemment :

$$\ddot{\theta} - \frac{amg}{J}\sin \theta + \frac{K}{J}\theta = 0.$$

8. Dans le cas des oscillations de faible amplitude, on retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{K - amg}{J}\theta = 0.$$

On en déduit, pour  $K - amg > 0$ , la période des oscillations :

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K - amg}}.$$

9. Avec la même méthode qu'à la question 2, on obtient

$$s' = \frac{\delta T'}{T'} = \frac{am}{2(K - amg)} \delta g.$$

10. On remarque que la sensibilité  $s'$  peut devenir très grande pour une valeur de  $K$  proche de  $amg$ . En particulier, le deuxième pendule est plus sensible que le premier si  $s' > |s|$ , soit  $K < 2amg$ . Pour tirer profit du pendule avec couple de rappel, il faut donc choisir

$$amg < K < 2amg.$$

### Exercice 3 – Qui tombe le plus vite ?

1. On commence par déterminer la durée de la chute de la bille. En négligeant les frottements, la bille est en chute libre : le PFD permet d'établir l'équation du mouvement qui, intégrée deux fois donne l'évolution temporelle de l'altitude  $y(t)$ . On trouve

$$y(t) = h - \frac{g}{2}t^2.$$

La durée  $\tau_{\text{bille}}$  de la chute est telle que  $y(\tau_{\text{bille}}) = 0$ , soit, en gardant la racine positive :

$$\tau_{\text{bille}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad \text{car } h = \ell \sin \theta_0.$$

La durée  $\tau_{\text{tige}}$  de la chute de la tige s'obtient en reprenant le raisonnement de l'exercice 5 du TD17, à la différence près que l'angle  $\theta$  est cette fois repéré par rapport à l'horizontale. On obtient finalement :

$$\tau_{\text{tige}} = \mathcal{I} \sqrt{\frac{\ell}{3g}}.$$

La comparaison des deux résultats permet de conclure :

$$\frac{\tau_{\text{bille}}}{\tau_{\text{tige}}} = \frac{\sqrt{3}}{\mathcal{I}} \approx 1,1.$$

On a donc  $\tau_{\text{bille}} > \tau_{\text{tige}}$  : l'extrémité  $A$  de la tige touchera le sol avant la bille.