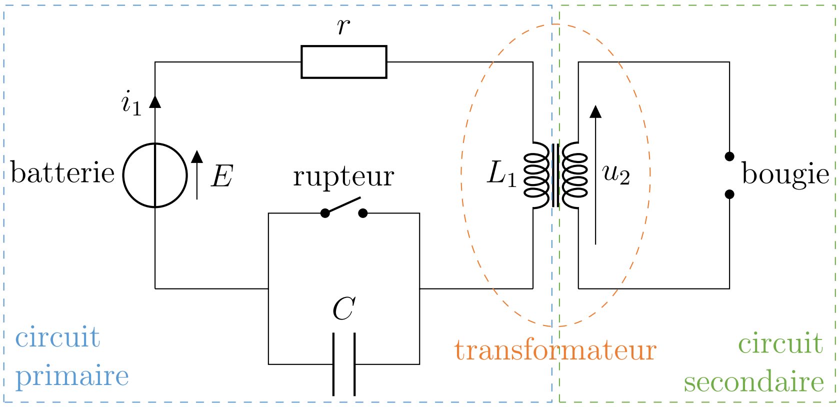
DM4 – Bougie d'allumage (deuxième partie)

Exercice 1 – Bougie d'allumage (24 points)

Dans un moteur à essence, l'inflammation du mélange air-carburant est provoquée par une étincelle qui se produit entre les bornes d'une bougie d'allumage. Cette étincelle apparait seulement lorsque la valeur absolue de la tension aux bornes de la bougie d'allumage est supérieure à 10 kV. On peut modéliser le circuit d'allumage par le schéma représenté ci-dessous.



La batterie de f.é.m. $E = 12\,\mathrm{V}$ est considérée comme une source idéale de tension. La bobine du circuit primaire est modélisée par une inductance L_1 en série avec une résistance $r = 6{,}0\,\Omega$. Le rupteur est un interrupteur commandé par le mouvement mécanique du moteur.

Le rôle du transformateur est d'obtenir une tension de sortie u_2 aux bornes de la bougie très élevée. Cette tension est liée à l'intensité du courant dans le circuit primaire i_1 :

$$u_2 = \alpha \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t},$$

où α est une constante positive. Aucune autre connaissance concernant le fonctionnement du transformateur n'est nécessaire pour résoudre l'exercice.

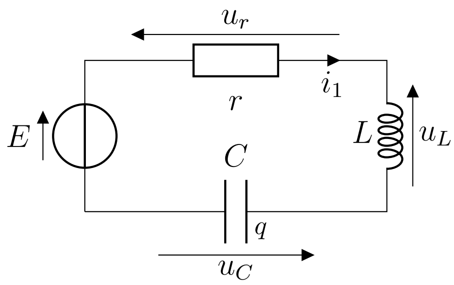
L'objectif de l'exercice est d'étudier les conditions de formation d'une étincelle au niveau de la bougie d'allumage.

Circuit primaire sans condensateur

Dans la première partie, on avait vu que lors de l'ouverture du rupteur, il se forme une étincelle au niveau de la bougie, mais aussi une étincelle aux bornes du rupteur. Cette dernière est problématique car elle endommage rapidement le rupteur.

Circuit primaire avec condensateur

Pour empêcher la formation d'une étincelle aux bornes du rupteur au moment de son ouverture, un condensateur de capacité $C = 10\,\mu\text{F}$ est branché en dérivation aux bornes du rupteur. À l'instant $t = 0$, le rupteur s'ouvre : le circuit primaire peut alors être modélisé selon le schéma représenté ci-contre.

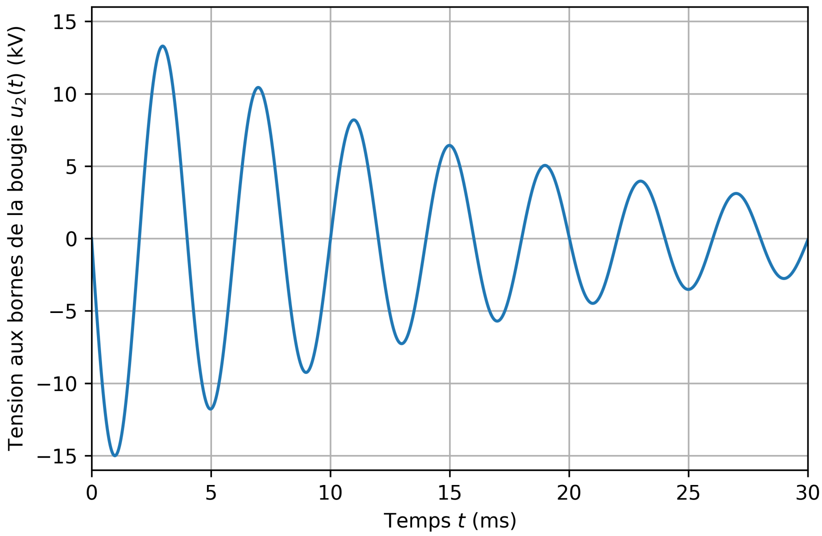


1. On suppose qu'avant d'être ouvert, le rupteur était fermé depuis un temps très long. En comparant la tension aux bornes du rupteur à l'instant précédant son ouverture et à l'instant suivant immédiatement l'ouverture, justifier que la présence du condensateur empêche la formation d'une étincelle au niveau du rupteur.
2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur pour $t > 0$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 Q_0,$$

   où ω_0, Q et Q_0 sont des constantes dont on donnera l'expression en fonction de r, L, C et E.
3. En accord avec l'étude menée dans la première partie, on suppose que pour $t < 0$, l'intensité du courant i_1 est vaut $I_1 = \dfrac{E}{r}$. Justifier qu'en $t = 0^+$, $q(0^+) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0^+) = I_1$.

L'allure de la variation temporelle de la tension $u_2(t)$ réellement observée aux bornes de la bougie est représentée ci-dessous.



4. Expliquer, grâce à la courbe précédente, pourquoi en présence du condensateur, on observe un train d'étincelles aux bornes de la bougie.
5. Qualifier le régime observé. En déduire une borne inférieure à la valeur du facteur de qualité Q.

6. Résoudre l'équation différentielle établie à la question 2 et donner l'expression de $q(t)$ pour $t > 0$.
7. Écrire l'équation différentielle établie à la question 2 sous la forme de deux équations différentielles du premier ordre couplées vérifiées par $x(t) = q(t)$ et $y(t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t)$.
8. Écrire sur la copie la fonction `charge_primaire(V,t)` associée à ce système, permettant une résolution numérique avec la fonction `odeint` de `scipy.integrate`.
9. On admet que l'évolution de $u_2(t)$ est très similaire à celle de $-q(t)$, à une constante multiplicative positive près.
Écrire un programme python qui résout numériquement l'équation différentielle à l'aide de la fonction `odeint` et représente convenablement l'évolution temporelle de la solution. Indiquer les valeurs de ω_0 et Q permettant d'obtenir une évolution cohérente avec celle de $u_2(t)$.
10. Représenter sur le même graphique, la solution analytique obtenue à la question 6. Commenter.
11. Envoyer votre programme à remi.metzdorff@orange.fr en nommant le fichier au format `dm4_nom_prenom.py`.

Annexe 1 – Fonction `odeint`

`scipy.integrate.odeint(F, V0, t)` : intègre un système d'équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = F(V, t).$$

Paramètres :

`F` : fonction qui calcule la dérivée de V en t ;

`V0` : conditions initiales sur V ;

`t` : liste des instants auxquels calculer V.

Renvoie :

`V` : tableau contenant `len(t)` vecteurs V, calculés au instants de `t`.