Interro8 - Circuit LC

Nom : **Note :**
Prénom :

Exercice 1 – Trigonométrie (2 points)

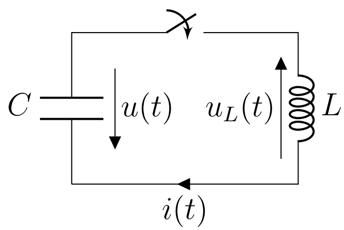
/2 **1.** Exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$, $\cos(\varphi)$ et/ou $\sin(\varphi)$.

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

$$\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{2}$$

Exercice 2 – Circuit électrique (8 points)

On s'intéresse au circuit LC représenté ci-contre. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. On suppose $u(0^-) = U_0$ et $i(0^-) = 0$.



/2 **1.** Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 et rappeler l'unité de chaque grandeur.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

avec ω_0 en s^{-1}, L en H (henry) et C en F (farad).

/2 **2.** Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t > 0$. On l'écrira sous sa forme canonique.

$$u + u_L = 0 \quad \Rightarrow \quad u + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad u + LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t} = 0$$

Sous forme canonique :

$$\omega_0^2 u + \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

/1 **3.** Donner la forme générale de la solution $u(t)$.

$$u(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

où A et B sont des constantes.

/1 **4.** On donne $u(t) = U_0\cos(\omega_0 t)$. En déduire $i(t)$.

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -CU_0\omega_0\sin\omega_0 t$$

/2 **5.** Montrer que l'énergie totale $\mathcal{E}$ est conservée.

Plusieurs manières de faire :

1. Brute force :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

En remplaçant u et i par leurs expressions et en remplaçant ω_0 par son expression, on trouve :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}CU_0^2 = \text{cste}.$$

2. Un peu plus « élégant », en multipliant la loi des mailles ($u + u_L = 0$) par i :

$$0 = ui + u_L i = \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_L = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}$$

donc $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = 0$ d'où $\mathcal{E} = \text{cste}$. L'énergie est conservée.