

# Théorie cinétique des gaz

La théorie cinétique des gaz<sup>1</sup> permet de relier quantitativement les variables d'état d'un système à ses propriétés microscopiques. On se propose d'en aborder quelques aspects.

On considère dans toute la suite un gaz parfait monoatomique à la température  $T$ , occupant un volume  $V$  et constitué de  $N$  particules de masse  $m^*$ . On note  $n^* = N/V$  la densité particulaire correspondant au nombre de particules par unité de volume.

## 1 Température cinétique

Le théorème d'équipartition de l'énergie permet de relier la température  $T$  d'un système contenant un grand nombre de particules à l'énergie moyenne des particules qui le compose :

Dans un système classique (au sens où les effets quantiques sont négligeables), en équilibre à la température  $T$ , chaque degré de liberté intervenant de façon quadratique dans l'énergie, contribue pour  $\frac{1}{2}k_B T$  à l'énergie totale, avec  $k_B$  la constante de Boltzmann.

L'énergie d'une particule d'un GPM n'est autre que son énergie cinétique

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m^*v^2 = \frac{1}{2}m^*(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2),$$

qui compte trois degrés de liberté intervenant de façon quadratique dans l'énergie. Le théorème d'équipartition indique donc que l'énergie moyenne  $\langle \mathcal{E}_c \rangle$  d'une particule dans le gaz vaut

$$\langle \mathcal{E}_c \rangle = 3 \times \frac{1}{2}k_B T = \frac{3}{2}k_B T.$$

Cette relation permet de définir la température cinétique, puisque la température est alors une mesure de l'énergie cinétique liée à l'agitation thermique des particules microscopiques.

Par ailleurs, on a

$$\langle \mathcal{E}_c \rangle = \frac{1}{2}m^*\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}m^*u^2,$$

où l'on a introduit la vitesse quadratique moyenne  $u = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ . On peut ainsi relier la vitesse quadratique moyenne à la température :

$$u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m^*}}. \quad (1)$$

## 2 Pression cinétique

La pression s'explique au niveau microscopique par les collisions des particules du gaz avec la paroi du système. On cherche à déterminer la force exercée par le gaz sur un élément de surface orientée  $d\vec{S} = dS\vec{e}_x$  de la paroi (Fig. 1). En vidéo : [https://youtu.be/k9yl-L\\_1\\_9g](https://youtu.be/k9yl-L_1_9g).

On considère une distribution de vitesse simple<sup>2</sup> : les particules ont toutes la même vitesse  $u$  et il y a autant de particules dont la vitesse est dirigée selon  $+\vec{e}_x$  que selon  $-\vec{e}_x$ ,  $+\vec{e}_y$ ,  $-\vec{e}_y$ ,  $+\vec{e}_z$ ,  $-\vec{e}_z$ .

1. En bonus car hors programme MP2I.

2. En ne supposant qu'un espace isotrope, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de direction privilégiée, la démonstration est plus lourde mais aboutit au même résultat.

ou  $-\vec{e}_z$ . Il n'y a donc qu'un sixième des particules du gaz dont la vitesse est  $+u\vec{e}_x$ , etc. On ne s'intéresse qu'aux particules dont la vitesse est  $+u\vec{e}_x$  car les autres ne peuvent pas entrer en collision avec la paroi.

Les chocs sont supposés élastiques : une particule rebondit parfaitement sur la paroi. Lors d'un choc, la vitesse d'une particule passe de  $+u\vec{e}_x$  à  $-u\vec{e}_x$  : la variation de quantité de mouvement  $\delta\vec{p}$  d'une particule lors d'un choc est donc

$$\delta\vec{p} = -m^*u\vec{e}_x - m^*u\vec{e}_x = -2m^*u\vec{e}_x.$$

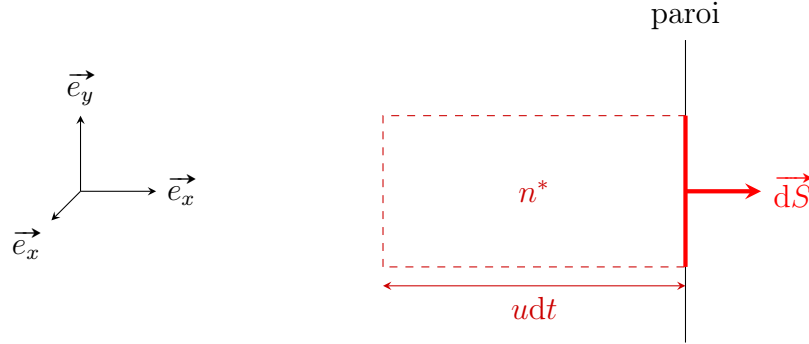


FIGURE 1 – Pression exercée par un gaz sur un élément de surface de la paroi  $\vec{dS}$ .

Durant un intervalle de temps  $dt$ , seules les particules situées au plus à une distance  $u dt$  de la paroi peuvent la toucher : seules les particules contenues dans le volume  $u dt dS$  et ayant une vitesse  $u\vec{e}_x$  entrent en collision avec la paroi, soit  $n^* u dt dS / 6$  particules. La variation de quantité de mouvement  $d\vec{p}$  de ces particules est donc

$$d\vec{p} = \frac{1}{6} n^* u dt dS \delta\vec{p}, \text{ soit } \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{1}{3} n^* m^* u^2 \vec{dS}.$$

La force  $d\vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{particules}}$  exercée par la paroi sur les particules ayant subi un choc avec la paroi pendant  $dt$  s'obtient en appliquant le PFD :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = d\vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{particules}}.$$

Finalement, le principe des actions réciproques donne

$$d\vec{F} = d\vec{F}_{\text{particules} \rightarrow \text{paroi}} = -d\vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{particules}} = \frac{1}{3} n^* m^* u^2 \vec{dS},$$

ce qui permet d'obtenir l'expression de la pression cinétique définie par  $d\vec{F} = P \vec{dS}$  :

$$P = \frac{1}{3} n^* m^* u^2. \quad (2)$$

### 3 Équation des gaz parfaits

En injectant l'expression de la vitesse quadratique moyenne (Éq. 1) dans celle de la pression cinétique (Éq. 2) et en remarquant que  $Nk_B = (N/\mathcal{N}_A) \times (\mathcal{N}_A k_B)$ , on retrouve la loi des gaz parfaits :

$$PV = nRT, \quad (3)$$

où  $\mathcal{N}_A$  est la constante d'Avogadro,  $R = \mathcal{N}_A k_B$  la constante des gaz parfaits et  $n = N/\mathcal{N}_A$  la quantité de matière de gaz.