# Chapitre 14 – Filtrage linéaire

## Plan du cours



## Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal périodique.
→ Calculer la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.
→ Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
→ Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.
→ Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.
→ Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les comportements asymptotiques des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.
→ Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.

## Questions de cours

→ Donner la définition de la valeur moyenne et de la valeur efficace d'un signal périodique $s(t)$. Donner, puis retrouver la valeur moyenne de $\cos^2(\omega t)$ ou $\sin^2(\omega t)$.
→ Représenter le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1 donné par le colleur.
→ Établir l'expression et/ou le spectre du signal de sortie d'un filtre dont la fonction de transfert ou le diagramme de Bode est donné, pour une entrée dont l'expression ou le spectre est donné (App. 4 et 5).
→ Donner la forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas et/ou passe-haut du premier ordre (Doc. 4).

# Documents

## Document 1 – Décomposition en série de Fourier

Tout signal périodique de fréquence $f_s$ peut s'écrire sous la forme d'un **développement en série de Fourier** :

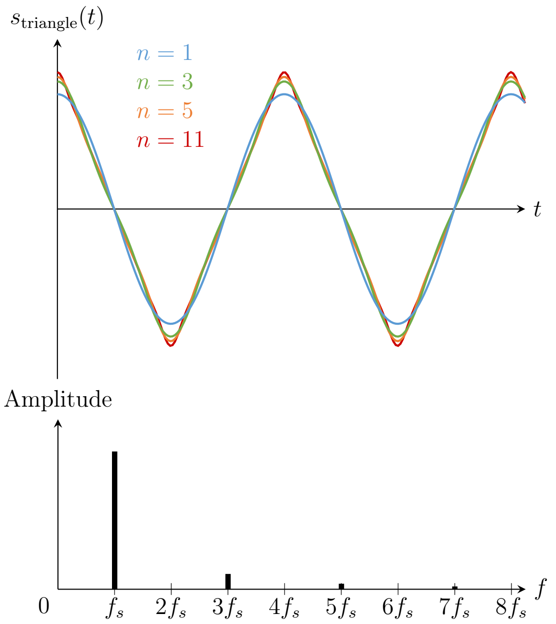
$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n), \text{ où}$$

- $S_0$ est la composante continue du signal ;
- $f_s$ et $S_1$ caractérisent le **mode fondamental** ;
- les composantes suivantes sont les **harmoniques de rang** $n$.

sciences.univ-nantes.fr

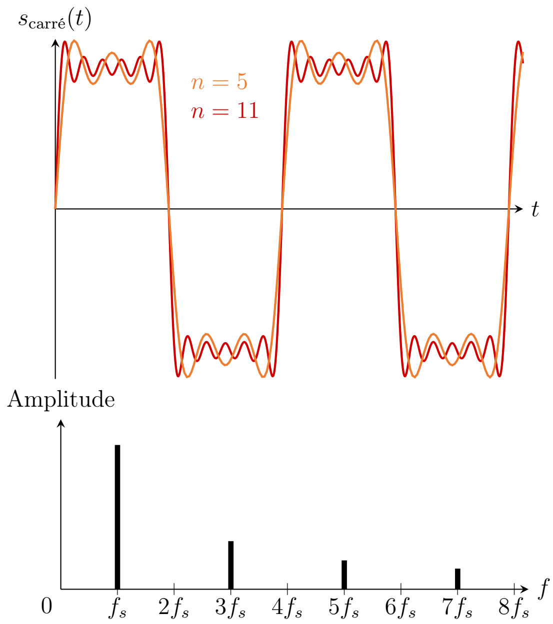
### Signal triangle

$$s_{\text{triangle}}(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{\substack{n>0 \\ \text{impair}}} \frac{1}{n^2} \cos(2\pi n f_s t)$$




### Signal carré

$$s_{\text{carré}}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n>0 \\ \text{impair}}} \frac{1}{n} \sin(2\pi n f_s t)$$




En utilisant le même nombre d'harmoniques, la décomposition (partielle) en série de Fourier donne de moins bons résultats pour le signal carré que pour le signal triangle. En effet la contribution de la $n$-ième harmonique est en $1/n$ pour le carré, alors qu'elle est en $1/n^2$ pour le triangle : les composantes de fréquences élevées sont nécessaires pour bien décrire les discontinuités du carré.

Cette décomposition se généralise pour un signal quelconque. On parle alors de transformée de Fourier et le spectre du signal est est un spectre continu. Les oscilloscopes utilisés en TP peuvent calculer le spectre du signal mesuré avec un algorithme performant, dit FFT (fast Fourier transform).

3Blue1Brown

## Document 2 – Musique !

En musique, on peut obtenir des effets sonores variés avec des filtres passe-haut, passe-bas, passe-bande, etc. Le son de la guitare électrique est amplifié à l'aide de composants non-linéaires pour obtenir la distorsion si caractéristique. Certaines techniques de compression de fichiers, comme le format MP3, éliminent une partie des fréquences du signal pour limiter leur taille.

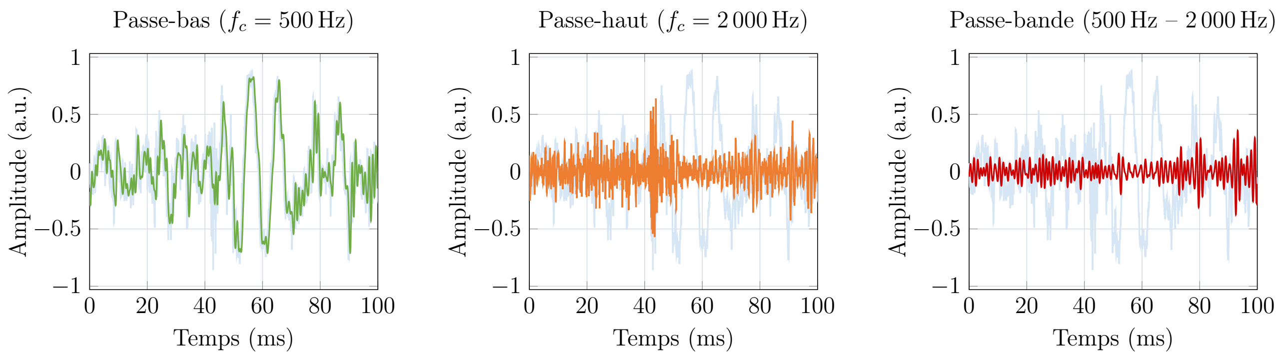



FIGURE 1 – Allure du signal associé au titre *Hey Brother* de Avicii, au voisinage de la 50ème seconde du morceau. Le signal original, représenté en clair sur chaque graphique, est soumis à différents filtres.

## Document 3 – GW150914

La première détection directe d'onde gravitationnelle du 14 septembre 2015, associée à l'évènement GW150914, est remarquable car le signal avait une amplitude suffisante pour être distingué à l'œil nu, après un « simple » filtrage du signal issu du détecteur. Le spectre du signal brut présente de nombreuses composantes parasites associées à l'appareil lui même : 60 Hz du secteur américain, vibrations mécaniques, etc. Un premier filtrage est réalisé directement sur le spectre du signal brut et permet d'obtenir le signal, encore bruité, représenté en clair. Finalement, le signal historique est obtenu en appliquant un filtre passe-bande d'ordre élevé.

gw-openscience.org

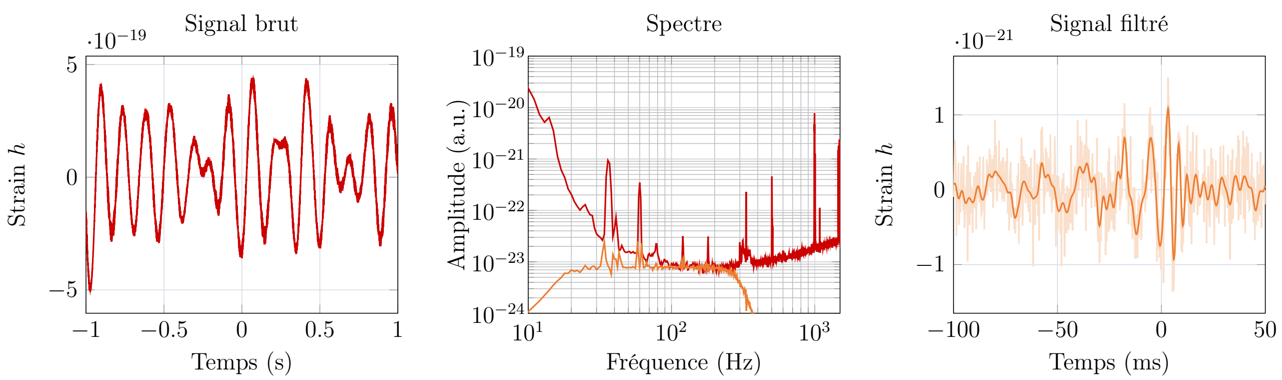



FIGURE 2 – Filtrage du signal associé à l'évènement GW150914. Les courbes représentées en rouge sont associées au signal brut, directement issu du détecteur. Celles en orange correspondent au signal filtré.

## Document 4 – Filtres d'ordre 1

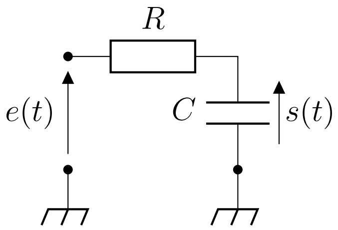
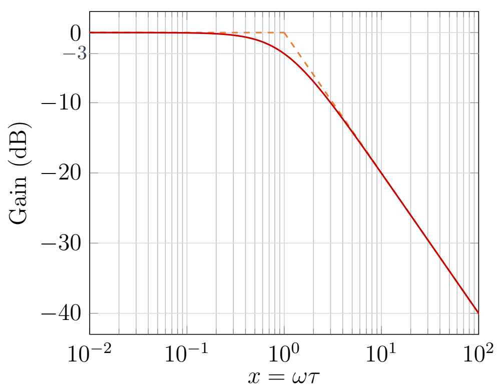
<table>
<tr><th>Passe-bas</th><th>Passe-haut</th></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$</td><td>$$\underline{H}(j\omega) =$$</td></tr>
<tr><td>Diagramme en amplitude


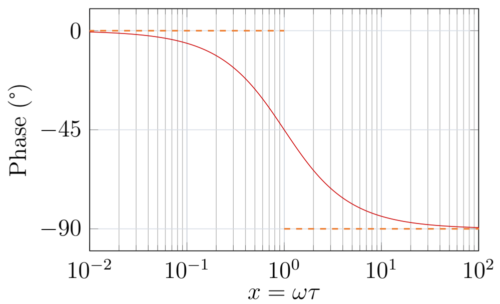
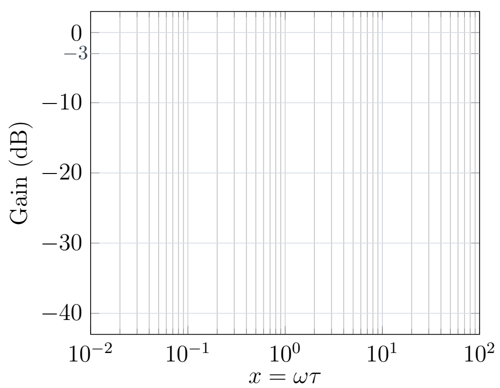
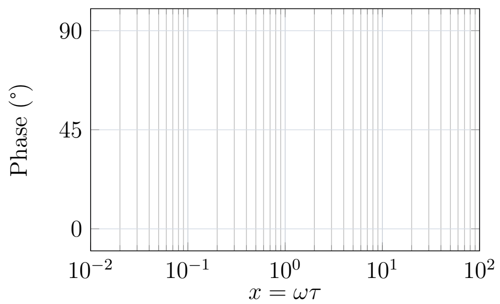
Diagramme en phase

</td><td>Diagramme en amplitude


Diagramme en phase

</td></tr>
</table>

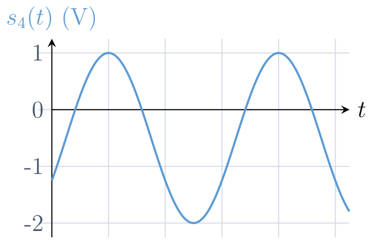
Il existe aussi des filtres passe-haut et passe-bas d'ordre plus élevés. Avec des circuits plus complexes, il est également possible d'obtenir des filtres **passe-bande** ou **coupe-bande**. Par exemple, le circuit RLC série étudié au chapitre précédent peut-être utilisé comme un filtre passe-bas d'ordre 2 quand on prend la tension aux bornes du condensateur comme signal de sortie, ou comme un passe-bande quand on prend la tension aux bornes de la résistance comme signal de sortie.

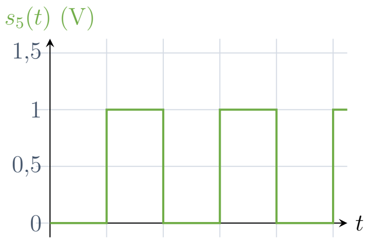
# Applications

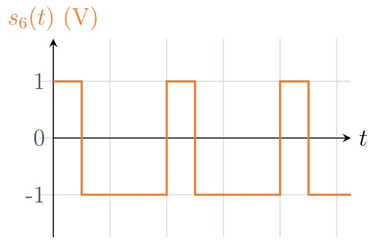
## Application 1 – Valeur moyenne

1. Exprimer, puis calculer la valeur moyenne des signaux suivants :
   - $s_1(t) = S_0 + S_1\cos(\omega t)$ ;
   - $s_2(t) = S_0 + \dfrac{S_1}{2}(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))$ ;
   - $s_3(t) = S_0 + S_1\cos(\omega t + \varphi) + S_2\cos(2\omega t)$,

   où $S_0 = 0{,}5\,\mathrm{V}$, $S_1 = 1\,\mathrm{V}$ et $0{,}25\,\mathrm{V}$. Commenter.
2. Donner la valeur moyenne des signaux représentés ci-dessous.



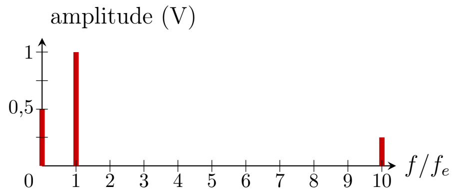

3. L'image ci-contre montre l'écran d'un des GBF utilisés en TP. Identifier le menu qui permet de modifier directement la valeur moyenne du signal généré.


## Application 2 – Valeur efficace

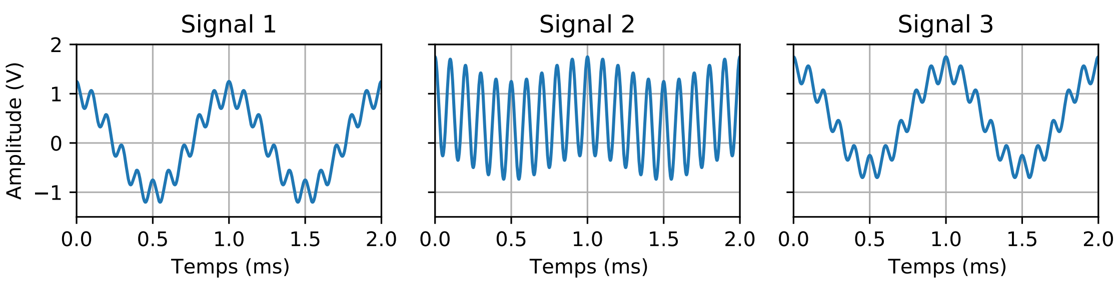
1. Exprimer, puis calculer la valeur efficace des signaux $s_1(t)$ et $s_4(t)$ (App. 1). Commenter.
2. Exprimer, puis calculer la valeur efficace du signal $s_5(t)$ (App. 1).

## Application 3 – Analyse d'un signal périodique

Le spectre en amplitude d'un signal périodique $e(t)$ est représenté ci-contre. Toutes les composantes ont la même phase à l'origine $\varphi_0$.




1. Donner l'expression du signal $e(t)$ en fonction de $f_e$ et $\varphi_0$.
2. Le signal $e(t)$ est l'un de ceux représentés ci-dessous. L'identifier en justifiant la réponse.
3. Déterminer les valeurs de $f_e$ et $\varphi_0$.
4. Représenter le spectre des autres signaux.



### Application 4 – Action d'un filtre sur un signal (1)

Le signal $e(t)$ de l'application 3 est envoyé à l'entrée d'un filtre dont la fonction de transfert est

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}, \text{ avec } \omega_c = 2\pi \times 1\,\text{kHz}.$$

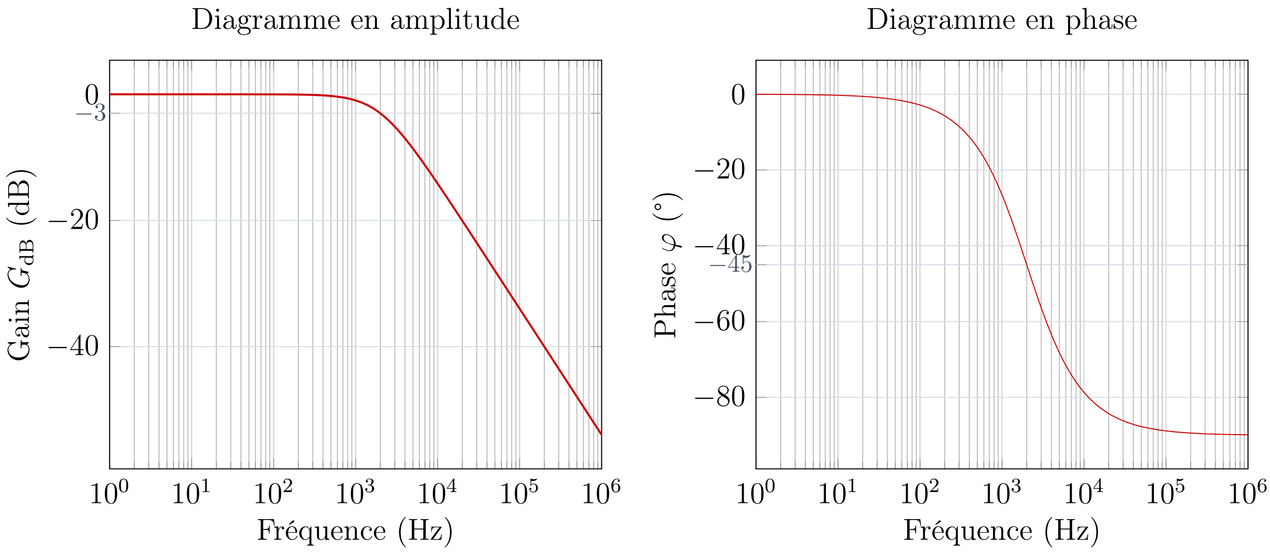
1. Donner l'expression du signal $s(t)$ en sortie du filtre et représenter, côte à côte les spectres en amplitude de $e(t)$ et $s(t)$.
2. Représenter graphiquement le signal $s(t)$.
3. Vérifier cette réponse avec Python (`chap14-app4.py`).
4. Quelle est la nature de ce filtre ? Quel type de filtre permettrait d'isoler la composante à $10f_e$ du signal $e(t)$ ?

### Application 5 – Action d'un filtre sur un signal (2)

Soit $e(t)$ une tension périodique de la forme

$$e(t) = 5 + \cos(2\pi \times 100t) + 2\cos(2\pi \times 2 \cdot 10^3 t) + 10\cos(2\pi \times 200 \cdot 10^3 t),$$

où $e$ est en volts et $t$ en secondes. Le signal $e(t)$ alimente un filtre dont le digramme de Bode est représenté ci-dessous.




1. Déterminer la période de $e(t)$.
2. Représenter le spectre en amplitude de $e(t)$ et celui du signal $s(t)$ à la sortie du filtre.
3. Donner l'expression de $s(t)$.
4. Avec Python représenter le signal à l'entrée et à la sortie du filtre (`chap14-app5.py`).

## Application 6 – Filtre RL ou LR ?

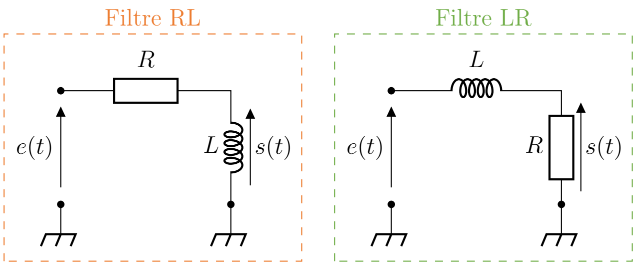
Pour une restitution optimale du son, les enceintes sont équipées de plusieurs haut-parleurs adaptés à différentes bandes de fréquences. Les plus petits, appelés tweeters, permettent d'émettre les sons les plus aigus.

Ces composants sont fragiles : ils peuvent être endommagés par des signaux basse fréquence. Il est donc nécessaire de filtrer le signal qui les alimente.

1. Indiquer le type de filtre à utiliser.
2. Sans calcul, identifier celui des deux filtres représentés ci-contre qui convient. Justifier.
3. Établir la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du filtre adapté. L'écrire sous sa forme canonique

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

et donner l'expression du temps caractéristique $\tau$.




4. Dans la limite haute fréquence, c'est-à-dire pour $\omega \gg 1/\tau$, établir l'équation des asymptotes en gain et en phase.
5. Faire de même, dans la limite basse fréquence, c'est-à-dire pour $\omega \ll 1/\tau$.
6. Exprimer la pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$ en fonction de $\tau$.
7. Construire le diagramme de Bode asymptotique en gain et en phase en fonction de $\log(\omega\tau)$ et en déduire l'allure du diagramme réel.
8. À partir des composants couramment utilisés en TP, proposer des valeurs permettant de réaliser un filtre dont la fréquence de coupure est proche de celle du tweeter dont la réponse est représentée ci-dessous.
9. On alimente ce filtre avec une tension $e$ formée de trois composantes harmoniques de même phase initiale et de fréquences $f_1 = 100\,\text{Hz}$, $f_2 = 1\,\text{kHz}$ et $f_3 = 10\,\text{kHz}$. La troisième composante a une amplitude quatre fois plus faible que les deux premières, de même amplitude. Représenter l'allure du spectre du signal d'entrée $e$ puis du signal de sortie $s$. En déduire l'allure du signal $s(t)$.