Interro24 - Force centrale

Nom : **Note :**
Prénom :

Exercice 1 – Force centrale (10 points)

On considère un point matériel M de masse m en interaction avec le Soleil de masse M_O situé en O. On note $r = OM$ la distance entre les deux et G la constante gravitationnelle. On étudie le mouvement dans le référentiel héliocentrique.

/2 **1.** Rappeler les expressions de la force d'interaction gravitationnelle et de l'énergie potentielle dont elle dérive.

$$\overrightarrow{F_G} = -G\frac{mM_O}{r^2}\overrightarrow{e_r} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_\mathrm{p}(r) = -G\frac{mM_O}{r}.$$

/1 **2.** Exprimer la constante des aires $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{C} = \frac{L_z}{m} = r^2\dot{\theta}$$

/2 **3.** Rappeler les deux conséquences de la conservation du moment cinétique.

La conservation du moment cinétique implique les conservations de sa direction et de sa norme :

- **planéité du mouvement** (direction) ;
- **loi des aires** ou deuxième loi de Kepler (norme).

/2 **4.** Dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon r_0, retrouver l'expression de la vitesse v_0 de M.

On applique le PFD au point matériel M dans le référentiel d'origine O supposé galiléen. La projection selon $\vec{e_r}$ donne

$$-m\frac{v_0^2}{r_0} = -G\frac{mM_O}{r_0^2},$$

d'où

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_O}{r_0}}.$$

/2 **5.** En déduire l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{\mathrm{m}}$. Que devient cette expression dans le cas d'une trajectoire elliptique de demi grand-axe a ?

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \mathcal{E}_{\mathrm{c}} + \mathcal{E}_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_O}{r_0} = -G\frac{mM_O}{2r_0}.$$

Pour une orbite elliptique de demi grand-axe a :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = -G\frac{mM_O}{2a}.$$

/1 **6.** Rappeler la troisième loi de Kepler.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_O}$$