DL12 –Expérience de Rüchardt

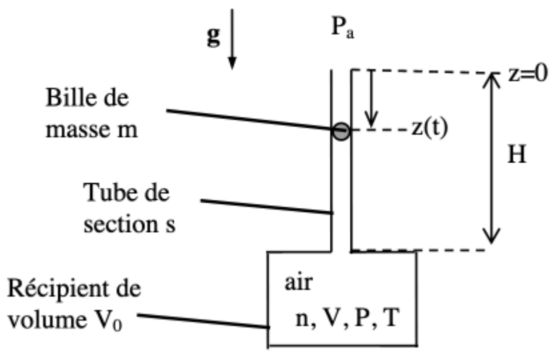
Exercice 1 – Autour de l'expérience de Rüchardt

Cet exercice est à traiter sans calculatrice.
Sujet original et corrigé

On s'intéresse à l'expérience de Rüchardt qui permet de mesurer le coefficient isentropique γ d'un gaz, ici l'air. Cet air est contenu dans un récipient de volume $V_0 = 4{,}0\,\mathrm{L}$ surmonté d'un tube en verre de section $s = 2\,\mathrm{cm}^2$ et de hauteur $H = 80\,\mathrm{cm}$. Une bille en acier de masse $m = 17\,\mathrm{g}$ peut se déplacer dans ce tube. Le diamètre de la bille est très voisin de celui du tube si bien que la bille se comporte comme un piston étanche.

On note $P_a = 1{,}0\,\mathrm{bar}$ la pression atmosphérique. On néglige les frottements dans un premier temps. L'intensité du champ de pesanteur vaut $g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. Dans tout le problème les gaz sont supposés parfaits. On note n le nombre de moles d'air enfermé dans le système, P sa pression, V son volume et T sa température.

On donne : $(1+\varepsilon)^k \approx 1+k\varepsilon$ pour $\varepsilon \ll 1$. On pourra prendre $\pi^2 \approx 10$ et $\pi = 3$. La constante des gaz parfaits vaut $R = 8{,}3\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$. La masse volumique de l'air sera prise égale à $M = 29\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$.



1. Citer une expérience (nom et description en quelques mots) montrant que l'énergie interne U d'un gaz parfait ne dépend pas du volume V.
2. Montrer que pour un gaz parfait de coefficient γ constant, on a $PV^\gamma = \mathrm{cste}$ lors d'une transformation adiabatique et réversible.

On repère la position de la bille par sa cote $z(t)$ comptée par rapport au haut du tube, l'axe des z est orienté vers le bas. On lâche la bille avec une vitesse initiale nulle depuis le haut du tube ($z = 0$). La bille effectue des oscillations dans le tube. En $z = 0$, la pression vaut bien sûr P_a. Lors des mouvements de la bille, on admet que le gaz subit une évolution adiabatique et réversible, de telle sorte qu'il suit la loi de Laplace, où le produit $PV^\gamma = \mathrm{cste}$.

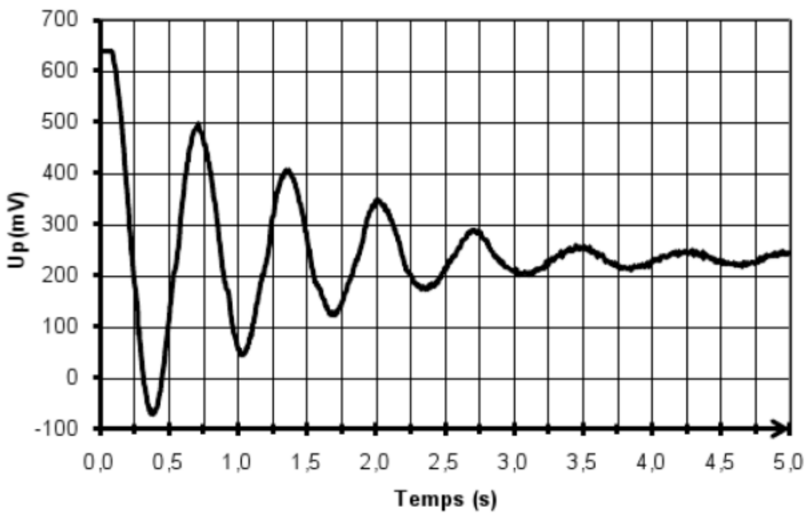
3. Pourquoi peut-on considérer que l'air subit une transformation adiabatique ? Réversible ?
4. Exprimer le volume V occupé par le gaz en fonction de V_0 H, s et z. En remarquant que $V_0 \gg Hs$, montrer que

$$\frac{P - P_a}{P_a} \approx \gamma \frac{sz}{Hs + V_0}.$$

5. Rappeler l'expression de la poussée d'Archimède qui s'exerce sur un corps de volume V totalement immergé dans un fluide de masse volumique ρ.
   Calculer l'ordre de grandeur de la masse volumique de l'air à 300 K et 1 bar en l'assimilant à un gaz parfait.
   Sachant que la masse volumique de l'acier est de $7{,}8 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, doit-on tenir compte de la poussée d'Archimède dans cette expérience.
6. On rappelle que l'on néglige les frottements. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la bille à un instant t quelconque. Donner l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$. En déduire que la période T_0 des oscillations est donnée par
   $$T_0^2 = \frac{4\pi^2 m(V_0 + Hs)}{\gamma s^2 P_a}.$$
   La mesure de T_0 permet donc de déterminer γ.
7. En tenant compte des conditions initiales, donner l'expression de $z(t)$ en fonction de g, t et $\omega_0 = 2\pi/T_0$.
8. En déduire la valeur maximale $z_{\max}$ de z atteinte au cours du mouvement en fonction de g et ω_0. Proposer alors une deuxième méthode pour mesurer γ.

Mesures et exploitation en régime libre

Un capteur de pression permet de suivre les oscillations grâce aux variations de la pression. Il délivre une tension u_P, reproduisant les variations de la pression P. Pour améliorer la précision des mesures, on fait varier le volume du récipient V_0 en introduisant de l'eau dans le récipient. Initialement le volume disponible est minimal noté V_{0i} et on mesure une période T_{0i}. On peut alors retirer progressivement de l'eau, le volume d'air dans le récipient prenant les valeurs : $V0k = V_{0i} + kV_1$, où k est un entier et V_1 est un volume constant. Pour chaque volume V_{0k}, on mesure la période T_k des oscillations de la bille.



9. Ecrire T_k^2 en fonction de k. Quel type de courbe obtient-on ? En déduire une méthode pour mesurer le coefficient γ de l'air. Dire en quoi cela améliore la méthode de la question 6.
10. La figure ci-dessus est un enregistrement obtenu à l'oscilloscope des oscillations de la bille. On a utilisé pour le faire le mode de déclenchement de l'oscilloscope « SINGLE » (monocoup). Pourquoi ?

11. Mesurer la pseudo-période T des oscillations amorties sur cet enregistrement (on confondra T et T_0 dans cette question). En déduire γ et commenter la valeur obtenue.

12. Les oscillations observées sont donc amorties. Proposer deux sources de dissipation de l'énergie.

13. Pour simplifier, on modélise cet amortissement par une force $\overrightarrow{F} = -\lambda\overrightarrow{v}$. Écrire la nouvelle équation différentielle vérifiée par $z(t)$ en tenant compte de cette force supplémentaire $\overrightarrow{F}$.

14. La mettre sous la forme

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \text{cste}.$$

Donner l'expression de Q en fonction des données du problème. Comment s'appelle ω_0 ? Comment s'appelle Q ? Donner l'unité et la dimension de ω_0. Donner la dimension de Q en la justifiant. À quelle condition sur Q obtient-on des oscillations amorties ?

15. Etablir l'expression littérale de la pseudo-période T des oscillations amorties en fonction de ω_0 et Q.

L'amplitude $A(t)$ des oscillations décroît exponentiellement : $A(t) = Ae^{bt}$. Que vaut b en fonction de ω_0 et Q ?

On considère que les oscillations sont négligeables quand leur amplitude est inférieure à 5 % de l'amplitude initiale. Montrer que l'amplitude $A(t)$ devient négligeable devant A au bout de Q oscillations. On pourra s'aider de la courbe ci-dessous qui représente e^{-x} en fonction de x.

En déduire une valeur approximative de Q sans calcul à partir de l'enregistrement précédent. L'expression de la période des oscillations utilisée à la question 6 est-elle valide ?