TD23 – Introduction à la physique quantique

charge élémentaire :	$e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
masse d'un électron :	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
masse d'un nucléon :	$m_n = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
constante de Boltzmann :	$k_\mathrm{B} = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$
constante de Planck :	$h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$
permittivité diélectrique du vide :	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$

Exercice 1 – Ordres de grandeur

1. Cf. cours.
2. $eU = E_c = \dfrac{p^2}{2m_e} = \dfrac{h^2}{2m_e\lambda^2}$ d'où $U = \dfrac{h^2}{2m_e e\lambda^2} = 150\,\mathrm{V}$.
3. $\lambda = \dfrac{hc}{E} = 544\,\mathrm{nm}$: vert.
4. $N = \dfrac{\mathcal{P}\Delta t}{h\nu} = 1{,}4 \times 10^{30}$.
5. $k_BT \sim E_c$, d'où $\lambda \sim \dfrac{h}{\sqrt{2(60 \times 12m_n)k_BT}} = 6{,}6 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$.
6. $\lambda = \dfrac{h}{mv} \approx 6 \times 10^{-35}\,\mathrm{m}$, ce qui donne une tache de diffraction avec $\sin\theta = \lambda/a = 2{,}4 \times 10^{-35}\,\mathrm{m}$. L'écran devrait être situé à une distance de l'ordre de 10^{24} mètres, ce qui est de l'ordre de la taille de l'univers observable !

Exercice 2 – Flux de photons d'une étoile

1. $N = \dfrac{\pi r^2\Phi\lambda}{hc}\Delta t = 1 \times 10^4$.
2. $P_\mathrm{rad} = \Phi/c = 3 \times 10^{-19}\,\mathrm{Pa}$. Pour le Soleil, on a $P_\mathrm{rad} = 3 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa}$. Ces deux valeurs sont très faibles devant la pression atmosphérique.

Exercice 3 – Microscopie électronique à balayage

1. La diffraction limite la résolution des microscopes.
2. $\lambda_\mathrm{vis} \in [400, 800]\,\mathrm{nm}$, d'où $E_\mathrm{vis} \in [1{,}55, 3{,}11]\,\mathrm{eV}$.
3. Sur la photo, les plus petits détails sont de l'ordre de $0{,}1\,\mu\mathrm{m} < 400\,\mathrm{nm}$. La résolution de la photo est meilleur que celle atteignable avec un microscope optique.
4. On a
$$E = \frac{h^2}{2m_e\lambda^2} = 15{,}1\,\mathrm{meV}.$$

Exercice 4 – Interférométrie atomique

1. Corpuscule : taches sur l'écran ; onde : interférence.
2. En estimant l'interfrange sur la figure d'interférence, on a
$$\lambda = \frac{id}{D} = 1 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}.$$
3. Avec la formule de de Broglie :
$$v_q = \frac{h}{\lambda m_e} = 2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$
4. À l'aide du TEM appliqué à un électron entre le début et la fin de la chute, on obtient
$$v_c = \sqrt{2g(L+D)} = 1{,}9\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1},$$
ce qui est proche de la valeur obtenue précédemment.

Exercice 5 – Diffusion Compton

1. Par analyse dimensionnelle, on obtient $[h/(m_e c)] = \mathrm{L}$. L'application numérique donne $\lambda_C = 2{,}2\,\mathrm{pm}$.
2. La longueur d'onde de Compton est proche de celle des rayon X : l'écart de longueur d'onde $\lambda' - \lambda$ sera comparable à λ. De plus, la distance interatomique est de l'ordre de $1\,\mathrm{Å}$, soit l'ordre de grandeur de la longueur d'onde des rayons X ce qui favorise la diffraction et donc une large gamme de valeurs pour θ.
3. $\lambda' > \lambda$, donc l'énergie du photon diminue. En effet, il en cède une partie à l'électron qui recule lors de l'interaction.
4. L'application numérique donne $\lambda' = 7{,}30 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$.
5. On trouve $\Delta E = -437\,\mathrm{eV}$, ce qui est beaucoup plus grand que l'énergie d'ionisation d'un atome qui est de l'ordre de la dizaine d'eV.
6. La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :
$$\vec{p} = \vec{p}_e + \vec{p}\,'.$$
7. La conservation de l'énergie s'écrit :
$$m_e c^2 + \frac{hc}{\lambda} = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} + \frac{hc}{\lambda'}.$$
8. La conservation de la quantité de mouvement se réécrit :
$$\vec{p}_e = \vec{p} - \vec{p}\,',$$
soit en élevant au carré
$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta,$$
où θ indique la direction dans laquelle le photon est dévié.
D'autre part, la conservation de l'énergie se réécrit :
$$\sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} = m_e c^2 + \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}.$$
En élevant au carré, puis en remplaçant p_e par son expression obtenue précédemment et p et p' par leurs expressions en fonction des longueurs d'onde, on retrouve après calcul la relation de Compton.

★ Exercice 6 – Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

1. $\vec{F}_c = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$.
2. En appliquant le PFD dans le cas d'un mouvement circulaire, on trouve avec la composante radiale

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 r m_e}} = \sqrt{\frac{k}{m_e r}} \quad \text{avec} \quad k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}.$$

3. $L_O = n\hbar$, d'où

$$r_n = n^2 a_0 \quad \text{avec} \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k} = 52{,}9\,\text{pm}.$$

4. On a

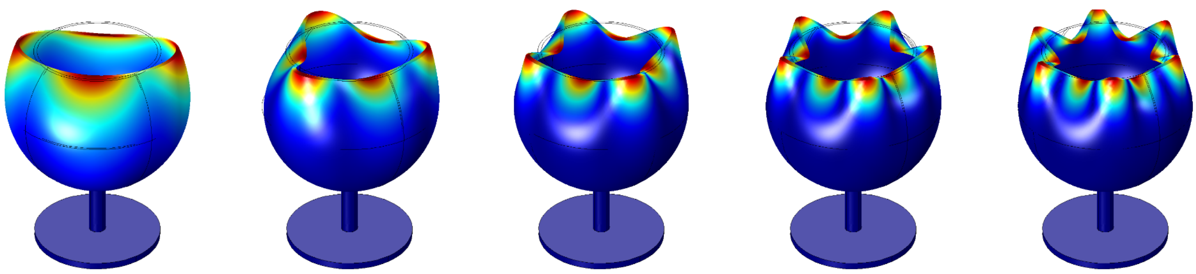
$$E = \frac{1}{2}m_e v_n^2 - \frac{k}{r_n} = \frac{E_1}{n^2} \quad \text{avec} \quad E_1 = -\frac{k}{2a_0} = -13{,}6\,\text{eV}.$$

5. On a

$$\lambda_1 = \frac{h}{m_e v_1} = h\sqrt{\frac{a_0}{k m_e}} = 3{,}32 \times 10^{-10}\,\text{m},$$

du même ordre de grandeur que la taille de l'atome : le traitement classique du mouvement est discutable.

6. On remarque $\lambda = 2\pi a_0$: la quantification du moment cinétique est liée à la condition de bouclage de l'onde de de Broglie associée à l'électron sur son orbite. L'onde associée à l'électron est une onde stationnaire, à la manière des ondes sur une corde de guitare, ou sur le bord d'un verre.



7. On obtient la relation demandée avec $\Delta E = E_m - E_n = hc/\lambda_{m,n}$, avec

$$R_H = -\frac{E_1}{hc} = 11{,}0 \times 10^6\,\text{m}^{-1}.$$

8. Les applications numériques donnent

m	3	4	5	6	7
λ (nm)	656	486	433	410	396
couleur	rouge	bleu	violet	violet	violet – UV

9. Avec l'expression de la vitesse obtenue plus tôt

$$T_{c,n} = 2\pi\sqrt{\frac{m_e r_n^3}{k}} \quad \text{soit} \quad \omega_{c,n} = \frac{1}{n^3}\sqrt{\frac{k}{m_e a_0^3}} = -\frac{2E_1}{\hbar n^3}.$$

10. On a

$$\hbar\omega_{n\to n-1} = E_1\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2}\right) \approx -\frac{2E_1}{n^3},$$

où la dernière expression est obtenue par un DL à l'ordre 1 en $1/n$, avec $n \gg 1$. On a bien $\omega_{c,n} \approx \omega_{n\to n-1}$ pour les grandes valeurs de n.

11. On identifie $\mathcal{P}_c$ et $\mathcal{P}_q$ dans la limite des grandes valeurs de n et on remplace l'accélération classique de l'électron par son expression obtenue plus tôt avec le PFD pour obtenir, après calcul

$$A_{n\to n-1} = \frac{2k^5 m_e}{3\hbar^6 c^3 n^5}.$$

12. Le temps de vie d'un atome de Rydberg caractérisé par $n = 40$ est de l'ordre de $1/A_{50\to 49} = 30\,\text{ms}$.

Les atomes de Rydberg sont très sensibles aux perturbations extérieurs et peuvent être utilisés pour détecter des photons dans une cavité micvroonde de manière non destructive. C'est notamment le cas dans les expériences de Serge Haroche (prix Nobel de physique en 2012) réalisées au LKB sur le site du Collège de France (Paris 5). Voir nobelprize.org et nature.com pour plus de détails...