DS1 – Optique géométrique

Durée : 3h.
L'usage de la calculatrice est autorisée.
L'annexe 1 est à rendre avec la copie.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'expliciter clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Toute démarche engagée, même non aboutie, et toute prise d'initiative seront valorisées.

Relations de conjugaison et de grandissement

On rappelle, pour un objet AB et son image $A'B'$ formée par une lentille mince de centre optique O et de foyers objet F et image F' :

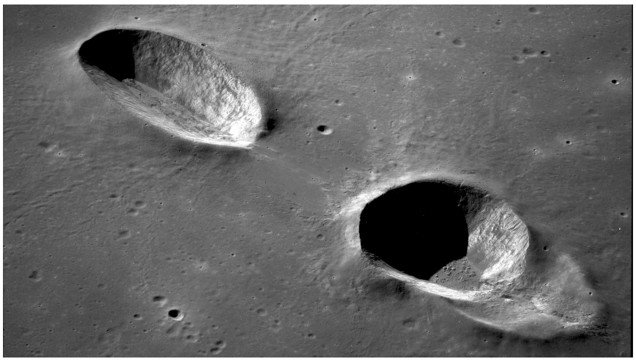
- les relations de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}}-\frac{1}{\overline{OA}}=\frac{1}{\overline{OF'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}},$$

- les relations de Newton :

$$\overline{F'A'}\cdot\overline{FA}=-\overline{OF'}^2 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=-\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}}.$$

Exercice 1 – Observation du cratère lunaire Messier (20 points)



Messier est un cratère lunaire relativement récent, caractérisé par sa forme allongée. À côté se trouve Messier A, un autre cratère de taille et de forme similaire. Ils ont été photographiés lors de la mission Apollo 11 en 1969, au cours de laquelle les astronautes ont posé pour la première fois le pied sur la Lune.

On souhaite observer ces cratères à l'aide d'une lunette amateur.

Données :

Largeur du cratère Messier :	$d = 11\,\text{km}$
Distance Terre-Lune :	$D = 3{,}84 \times 10^5\,\text{km}$

Lunette amateur

Distance focale de l'objectif :	$f'_{\text{obj}} = 300\,\text{mm}$
Diamètre de l'objectif :	$D_{\text{obj}} = 70\,\text{mm}$
Distance focale des oculaires disponibles :	$f'_{\text{oc}} = 35\,\text{mm}$, $20\,\text{mm}$ ou $10\,\text{mm}$

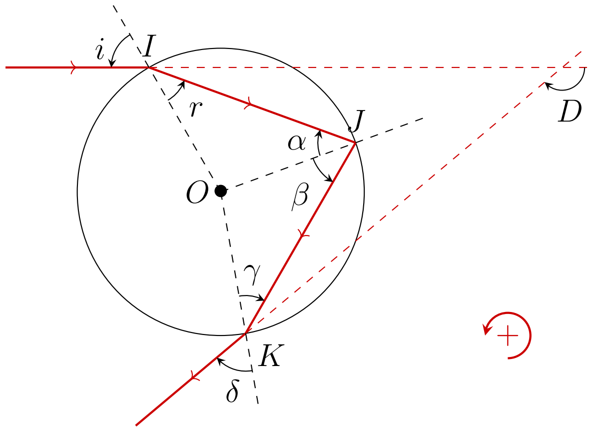
1. Sur l'annexe 1 à rendre avec la copie, construire l'image A_2B_2 obtenue grâce à la lunette de l'objet $A_\infty B_\infty$ considéré à l'infini. On fera apparaitre la marche du rayon lumineux issus de B_∞, l'image intermédiaire A_1B_1 et l'angle α' sous lequel est vu l'image A_2B_2 à travers la lunette.
2. Expliquer succinctement l'intérêt d'utiliser une lunette *afocale*.
3. Rappeler l'expression du grossissement G de la lunette, puis montrer qu'il s'exprime sous la forme :

$$G = -\frac{f'_{\text{obj}}}{f'_{\text{oc}}}.$$

4. Exprimer, puis calculer l'angle apparent α sous lequel est vu Messier depuis la Terre.
5. Est-il possible de le distinguer à l'œil nu ?
6. Déterminer le ou les oculaires, parmi les trois disponibles, qu'un astronome amateur doit utiliser pour pouvoir espérer observer le cratère Messier.
7. Serait-il possible de construire une lunette avec un oculaire de distance focale 10 mm permettant d'observer les traces de pas que les astronautes de la mission Apollo 11 ont laissé sur le sol lunaire ? On précisera la distance focale de l'objectif à utiliser.
8. On s'intéresse à nouveau à la lunette amateur. Sur l'annexe 1 à rendre avec la copie, construire le cercle oculaire, image de la monture de l'objectif par l'oculaire et montrer graphiquement qu'un faisceau issu de B_∞ passe par le cercle oculaire.
9. Exprimer le diamètre d_{co} du cercle oculaire en fonction des données de l'énoncé. Faire l'application numérique dans le cas où l'oculaire de distance focale $f'_{\text{oc}} = 10\,\text{mm}$ est utilisé.

Exercice 2 – Arc-en-ciel (18 points)

On considère une goutte d'eau sphérique de centre O éclairée par un faisceau de rayons parallèles provenant du Soleil. On s'intéresse tout d'abord à un rayon lumineux qui entre dans la goutte avec une incidence i au point I, avant d'être partiellement réfléchi en J et de ressortir de la goutte en K. Les angles, *orientés*, sont définis sur la figure ci-contre.



On souhaite tout d'abord déterminer l'expression de la déviation D en fonction de l'angle d'incidence i et de l'indice de l'eau n.

1. Donner la relation liant les angles i et r.
2. Exprimer chacun des angles α, β, γ et δ en fonction de i et r.
3. La réflexion en J peut-elle être totale ? Justifier.
4. En déduire l'expression de D en fonction de i et r, puis de n et i.

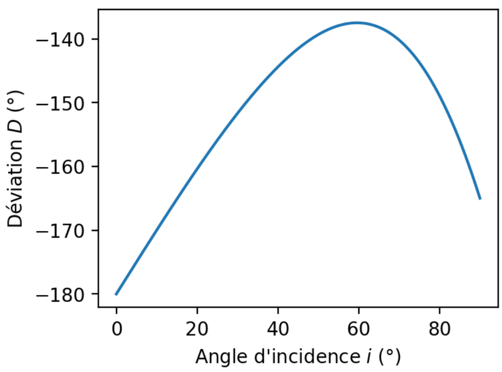
L'eau est un milieu dispersif, c'est-à-dire que son indice optique dépend de la longueur d'onde du rayonnement lumineux. On donne la vitesse de propagation de la lumière pour deux rayonnements de fréquences différentes.

Rayonnement	**1**	**2**
Fréquence ν (Hz)	$7{,}32 \times 10^{14}$	$4{,}47 \times 10^{14}$
Vitesse de propagation v ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)	$2{,}240 \times 10^{8}$	$2{,}253 \times 10^{8}$

5. Donner la couleur de chacun des deux rayonnements.
6. Exprimer, puis calculer l'indice de l'eau pour chaque rayonnement.
7. Dans certains cas, on peut estimer l'indice d'un milieu à partir de la loi de Cauchy :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}.$$

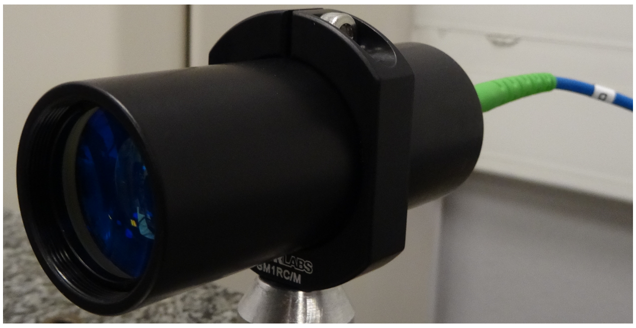
où A et B sont des constantes. Donner les dimensions et unités de A et B.



L'allure de la déviation D en fonction de l'angle d'incidence i est représentée ci-contre, pour une longueur d'onde donnée. On suppose que les rayons issus du Soleil proviennent tous de la même direction. L'angle d'incidence i n'est toutefois pas constant car les rayons lumineux ne frappent pas les gouttes au même point I.

8. Proposer une explication permettant de justifier la forme que prennent les arcs-en-ciel.

Exercice 3 – Collimateur à fibre (22 points)

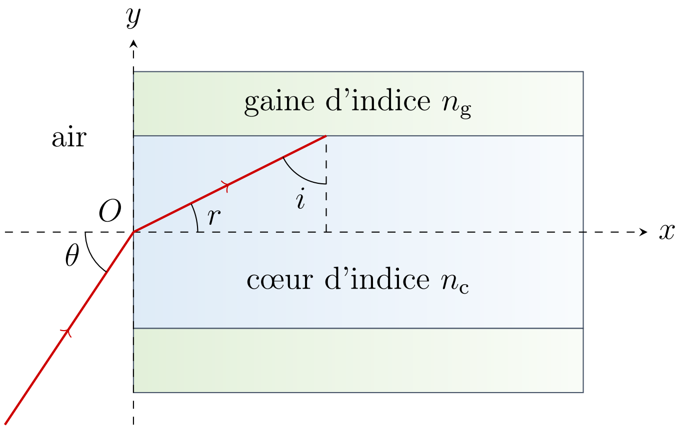


La lumière permet de manipuler des atomes. On peut ainsi piéger et refroidir des gaz atomiques grâce à des lasers.

Les atomes froids sont à la base de nombreuses expériences de métrologie, destinées à la mesure du temps (horloges atomiques), de l'accélération de pesanteur (gravimètres), ou de constantes fondamentales.

On s'intéresse au système optique permettant de mettre en forme le faisceau issu d'une fibre optique, utilisé pour le piégeage d'atomes de rubidium dans l'une de ces expériences.

Ouverture numérique de la fibre



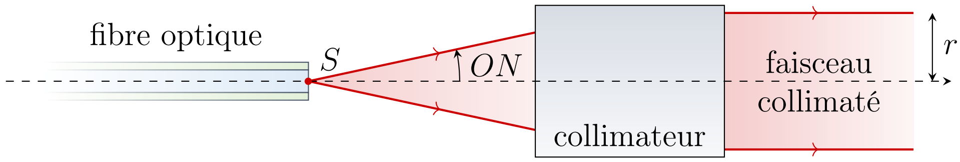
Une fibre à saut d'indice, représentée ci-dessus, est formée d'un cœur cylindrique d'axe Ox, de diamètre $2a$ et d'indice n_c entouré d'une gaine optique d'indice n_g. La fibre est dans l'air. Un rayon contenu dans le plan xOy entre dans la fibre au point O avec un angle d'incidence θ. Il y a guidage lorsque le rayon subit une succession de réflexions totales au niveau du dioptre cœur/gaine.

1. Rappeler la condition sur n_c et n_g pour laquelle un rayon peut être guidé dans la fibre.
2. Exprimer l'angle d'incidence limite i_l en fonction de n_c et n_g pour lequel il y a réflexion totale au niveau du dioptre cœur/gaine. Donner la condition sur i pour laquelle le rayon est guidé.
3. Montrer que cette condition est vérifiée si l'angle d'incidence θ est inférieur à un angle limite θ_l. Montrer que l'ouverture numérique $ON = \sin\theta_l$ peut s'écrire :

$$ON = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}.$$

4. Faire l'application numérique pour $n_c = 1{,}500$ et $n_g = 1{,}495$.

Le faisceau sortant de la fibre est contenu dans un cône dont le demi-angle au sommet est $\theta_l \approx ON$: la fibre se comporte comme une source ponctuelle S, située sur l'axe optique au niveau de la face de sortie, mais les rayons issus de S sont contenus dans un cône de demi-angle au sommet ON.



Pour piéger les atomes de rubidium, le faisceau doit être collimaté, c'est-à-dire que les rayons lumineux qui le composent doivent être parallèles entre eux. On s'intéresse à trois collimateurs qui permettent d'obtenir un faisceau collimaté, assimilé à un cylindre de rayon $r = 1{,}0\,\text{cm}$.

Collimateur simple

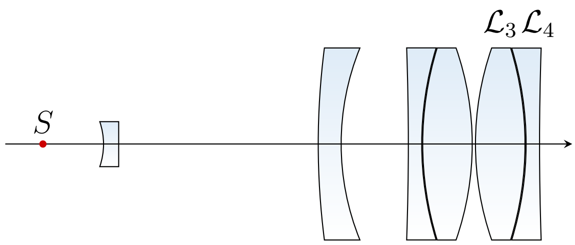
5. Décrire succinctement comment obtenir un tel faisceau en utilisant une unique lentille mince $\mathcal{L}$ dont on précisera la nature.
6. Exprimer la distance focale f' de la lentille à utiliser en fonction de r et ON. Faire l'application numérique.

Collimateur compact

Les contraintes d'encombrement autour de la cellule expérimentale imposent d'utiliser un collimateur plus compact. Une solution consiste à utiliser un collimateur formée de deux lentilles : une lentille divergente $\mathcal{L}_1$ de distance focale $f'_1 = -6{,}0\,\text{mm}$, associée à une lentille convergente $\mathcal{L}_2$ de distance focale $f'_2 = 35\,\text{mm}$. Le centre optique O_1 de la lentille $\mathcal{L}_1$ est situé à une distance $2|f'_1|$ après la sortie S de la fibre et la distance $\overline{O_1O_2}$ entre les deux lentilles est choisie de telle sorte que le faisceau sortant de la lentille $\mathcal{L}_2$ soit collimaté.

7. Exprimer la distance algébrique $\overline{O_2S'}$ entre le centre optique O_2 de la lentille $\mathcal{L}_2$ et l'image S' de S par la lentille $\mathcal{L}_1$ en fonction de f'_2.
8. Exprimer la distance algébrique $\overline{O_1S'}$ entre le centre optique O_1 et S' en fonction de f'_1.
9. En déduire l'expression de l'encombrement de ce nouveau collimateur, correspondant à la distance $\overline{SO_2}$ en fonction de f'_1 et f'_2. Faire l'application numérique.

Collimateur à quatre lentilles



Le faisceau obtenu avec le collimateur compact présente des aberrations qu'il est nécessaire de corriger pour améliorer l'efficacité du piégeage des atomes. On s'intéresse au collimateur à quatre lentilles représenté ci-dessus. Il est composé, notamment, de deux doublets identiques formés d'un paire de lentilles $\mathcal{L}_3$ et $\mathcal{L}_4$ de distances focales respectives f'_3 et f'_4, collées l'une à l'autre. On s'intéresse au doublet situé à la sortie du collimateur.

10. On considère que le centre optique de la lentille $\mathcal{L}_3$ et confondu avec celui de $\mathcal{L}_4$. Montrer que la distance focale équivalente $f'_{\text{éq}}$ du doublet s'exprime :

$$f'_{\text{éq}} = \frac{f'_3 f'_4}{f'_3 + f'_4}.$$

11. Faire l'application numérique, avec $|f'_3| = 30{,}8\,\mathrm{mm}$ et $|f'_4| = 49{,}7\,\mathrm{mm}$.

12. Le fabricant indique que la distance focale du doublet est $f'_{\mathrm{fab}} = 80{,}3\,\mathrm{mm} \pm 1\,\%$. Commenter la valeur obtenue à la question 11.

C'est ce modèle de collimateur qui a finalement été retenu pour son encombrement réduit et la qualité du faisceau qu'il permet d'obtenir.

Annexe 1 – Observation du cratère lunaire Mercier