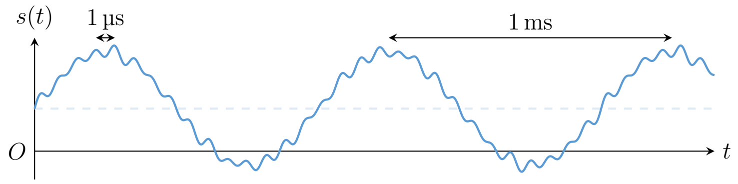
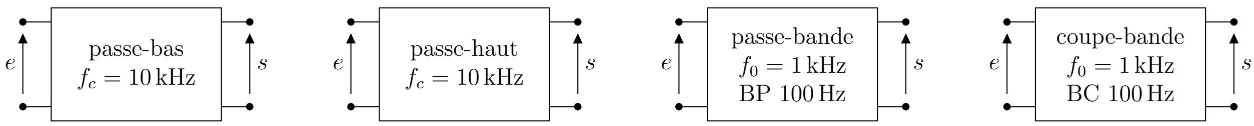
TD14 – Filtrage linéaire

Exercice 1 – Filtrage d'un signal

Lors d'une expérience d'interférométrie laser, on souhaite étudier un flux lumineux variant sinusoïdalement dans le temps. Lors d'une mesure, une photodiode délivre le signal $s(t)$ schématisé ci-dessous.



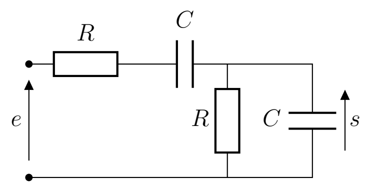
1. Décomposer ce signal électrique en trois parties que l'on commentera. Représenter son spectre.
2. Pour chacun des filtres ci-dessous, décrire qualitativement la tension obtenue en sortie du filtre. Les filtres sont supposés idéaux, c'est-à-dire que leur gain vaut 1 dans la bande passante (BP) et 0 dans la bande coupée (BC). Quel est le filtre le plus approprié ?



Exercice 2 – Filtre de Wien

On s'intéresse au filtre de Wien représenté ci-dessous, où $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 500\,\mathrm{nF}$.

1. Sans calcul, déterminer de quel type de filtre il s'agit.



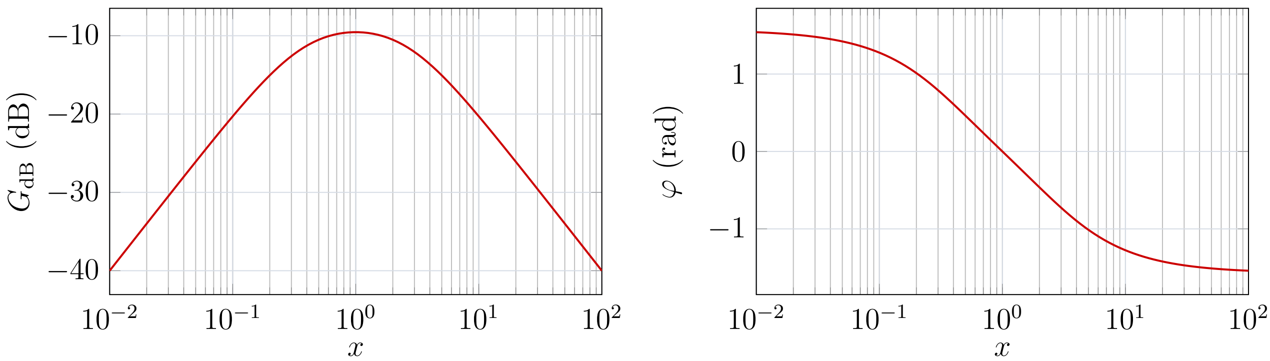
2. Montrer que la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

Donner les expressions de H_0, Q et ω_0.

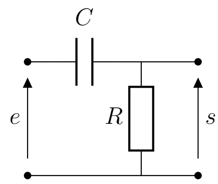
3. Exprimer le gain linéaire, le gain en dB et le déphasage de la tension de sortie par rapport à celle d'entrée, en fonction de $x = \omega/\omega_0$.
4. Calculer simplement le gain maximal G_0 du filtre, exprimer sa valeur $G_{0,\mathrm{dB}}$ en dB, et calculer le déphasage φ_0 correspondant.
5. Déterminer les fréquences de coupure et en déduire la bande passante du circuit.
6. Le diagramme de Bode de ce filtre est représenté ci-dessous. Expliquer les valeurs prises par la pente en haute et basse fréquence.
7. Déterminer l'expression du signal de sortie pour un signal d'entrée de la forme :

$$e(t) = E_0 + E_0\cos(\omega t) + E_0\cos(10\omega t) + E_0\cos(100\omega t),\ \text{où } \omega = 200\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}.$$



Exercice 3 – Impédance d'entrée d'un oscilloscope

On considère le filtre représenté ci-contre.

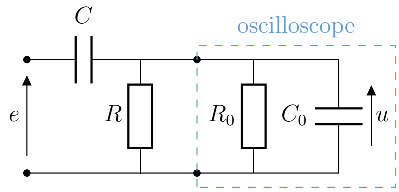


1. Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \underline{s}/\underline{e}$ où l'on posera $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$.

2. Représenter son diagramme de Bode.

3. Déterminer la fréquence de coupure pour $R = 500\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 0{,}1\,\mathrm{nF}$.

On mesure la tension de sortie à l'aide d'un oscilloscope dont l'entrée peut être assimilée à une association en parallèle d'une capacité $C_0 = 30\,\mathrm{pF}$ et d'une résistance $R_0 = 1\,\mathrm{M\Omega}$.



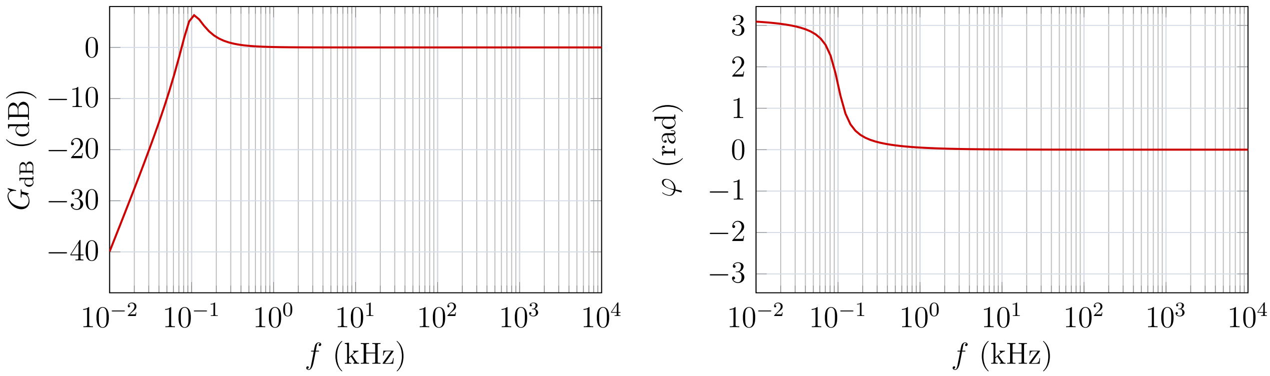
4. Montrer que la nouvelle fonction de transfert s'exprime :

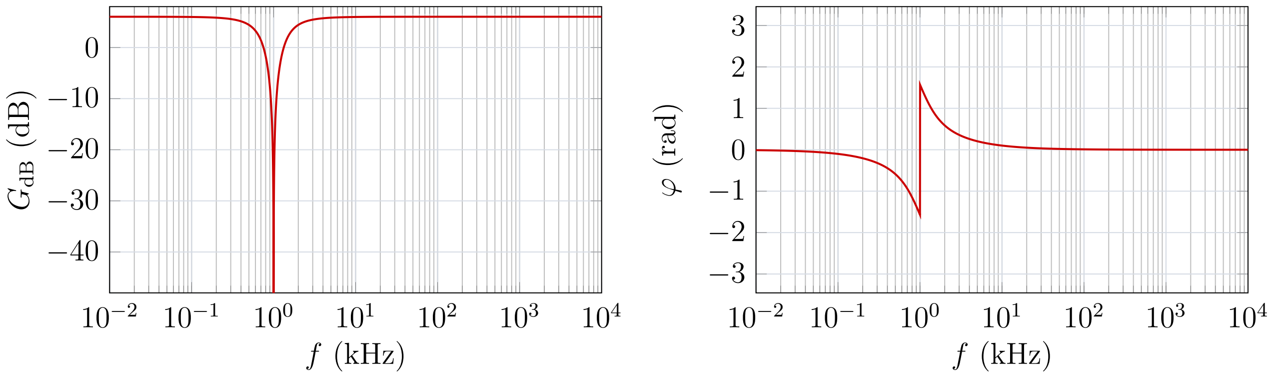
$$\underline{\tilde{H}}(j\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = H_0 \frac{jR_{\text{éq}}(C+C_0)\omega}{1 + jR_{\text{éq}}(C+C_0)\omega}, \text{ avec } H_0 = \frac{C}{C+C_0} \text{ et } R_{\text{éq}} = \frac{RR_0}{R+R_0}$$

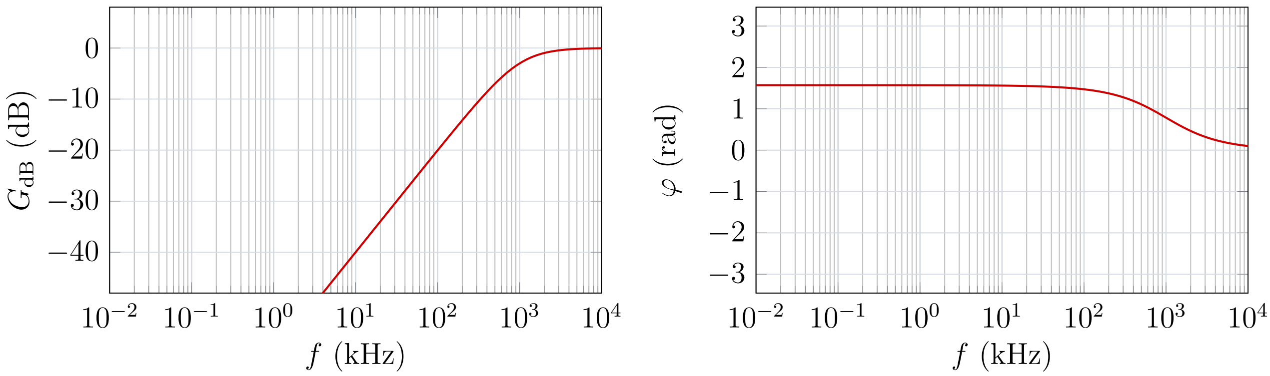
et déterminer la nouvelle fréquence de coupure. Conclure sur l'influence de l'oscilloscope.

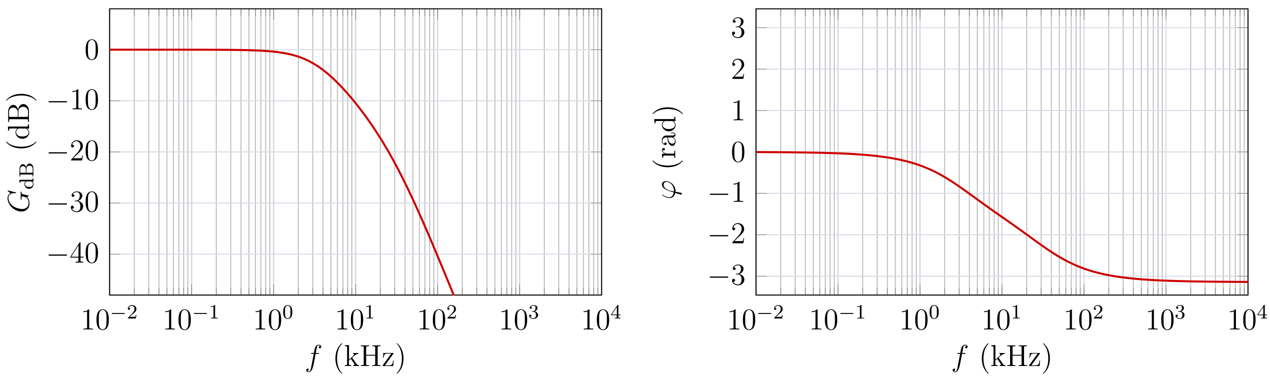
Exercice 4 – Lecture de diagramme de Bode

1. Pour les quatre diagrammes de Bode ci-dessous, indiquer le type de filtre dont il s'agit. Préciser s'il peut s'agir d'un filtre d'ordre 1 ou non.
2. On envoie en entrée de chacun des filtres le signal
$$e(t) = E_0 + E_0\cos(\omega t) + E_0\cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0\cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right),$$
où $\omega = 2\pi \times 1\,\text{kHz}$. Déterminer l'expression du signal $s(t)$ de sortie du filtre.



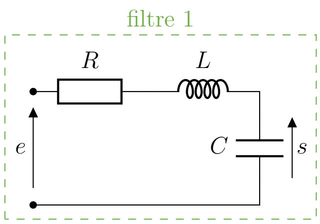


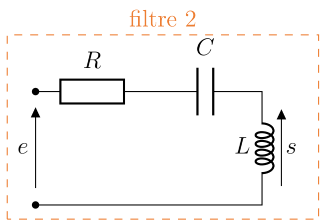




Exercice 5 – Filtres RLC série

On étudie les deux circuits linéaires représentés ci-dessous, dont l'expression des fonctions de transferts est donnée.





$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}} \qquad \underline{H}_2(j\omega) = \frac{jQ\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

On pourra traiter les questions pour le filtre 1, puis pour le filtre 2.

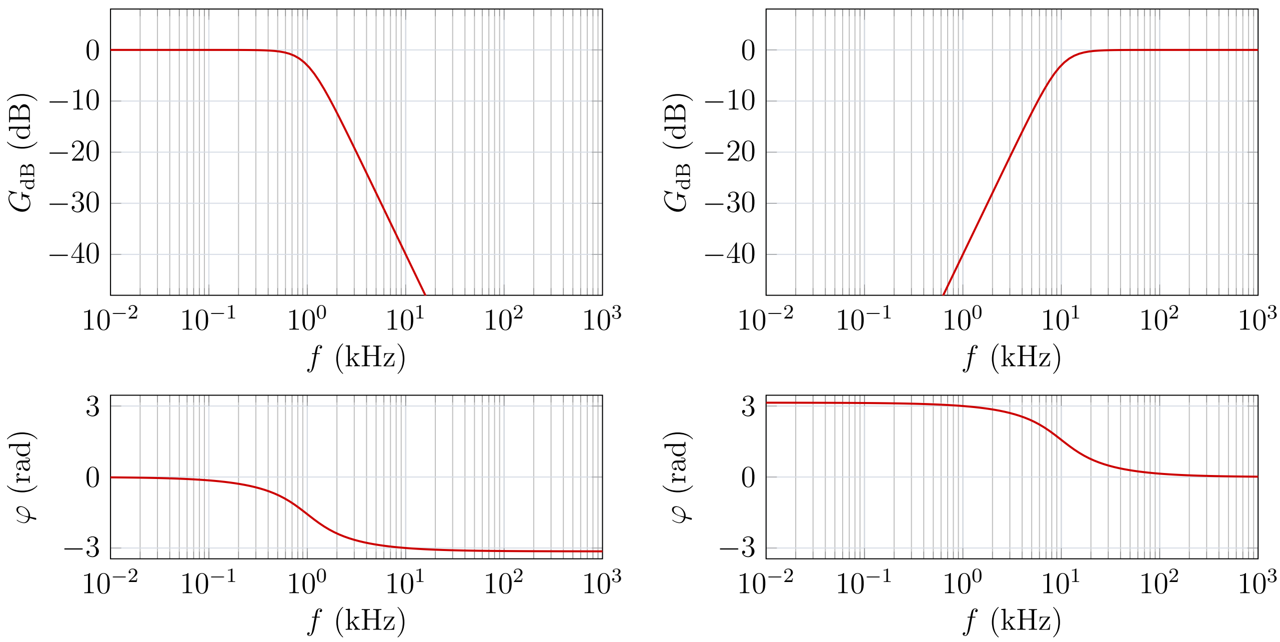
1. Sans calcul, déterminer le type de filtre dont il s'agit.

2. Retrouver l'expression de la fonction de transfert et donner les expressions de ω_0 et Q. Donner l'ordre du filtre.

3. Donner l'expression de l'équation différentielle reliant $s(t)$ et $e(t)$. Pour quelle raison peut-on affirmer la convergence du régime transitoire ?

4. Exprimer le gain et la phase du filtre en fonction de ω, ω_0 et Q.

Les diagrammes de Bode de ces filtres sont représentés ci-dessous pour $Q = 1/\sqrt{2}$.



5. Retrouver les pentes des asymptotes en BF et HF.

6. Commenter l'intérêt d'utiliser un tel filtre plutôt qu'un filtre du même type mais d'ordre 1 en comparant leur action sur un signal d'entrée de pulsation $\omega_e = 2\pi \times 1\,\text{kHz}$ de la forme

$$e(t) = E_0 \cos(\omega_e t) + E_0 \cos(10\omega_e t).$$

Exercice 6 – Conception d'un filtre de signaux acoustiques

Un dispositif de traitement de signaux acoustiques nécessite la séparation de composantes sonores et ultrasonores. On souhaite éliminer les composantes ultrasonores : il faut donc réaliser un filtre passe-bas. Le cahier des charges du dispositif indique les caractéristiques suivantes :

- fréquence de coupure 20 kHz ;
- gain nominal (gain en basse fréquence) 0 dB ;
- l'atténuation des fréquences comprises entre 0 et 20 kHz doit être inférieure à 3 dB ;
- l'atténuation des fréquences supérieures à 40 kHz doit être supérieure à 10 dB

Le filtre le plus simple serait un passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure $f_c = 20\,\text{kHz}$. On rappelle que la fonction de transfert d'un tel filtre s'écrit sous forme réduite

$$\underline{H}_1(jx) = \frac{1}{1+jx}, \text{ avec } x = \frac{f}{f_c}.$$

1. Retrouver la pente des asymptotes du diagramme de Bode en gain de ce filtre et calculer son gain à la fréquence de coupure.
2. Montrer qu'il ne peut satisfaire au cahier des charges imposé. Justifier qu'il est nécessaire d'utiliser un filtre d'ordre plus élevé.

On se tourne alors vers un filtre passe-bas du second ordre de fonction de transfert

$$\underline{H}_2(jx) = \frac{1}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}.$$

3. Retrouver la pente des asymptotes du diagramme de Bode en gain de ce filtre. Peut-il satisfaire au cahier des charges imposé ?
4. Calculer le gain en décibel de ce filtre pour $f = f_c$. En déduire les valeurs de Q permettant de satisfaire au cahier des charges.

python Exercice 7 – Action d'un filtre sur un signal

Le cours et le TD donnent plusieurs exemples de signaux (sommes de quelques sinusoïdes, signal carré, triangle, etc.) soumis à des filtres variés. Pour un filtre donné, écrire une fonction `G(f)` donnant son gain en fonction de la fréquence et une fonction `phi(f)` donnant sa phase. Calculer ensuite la réponse du filtre à une entrée donnée, puis représenter graphiquement les signaux d'entrée et de sortie.

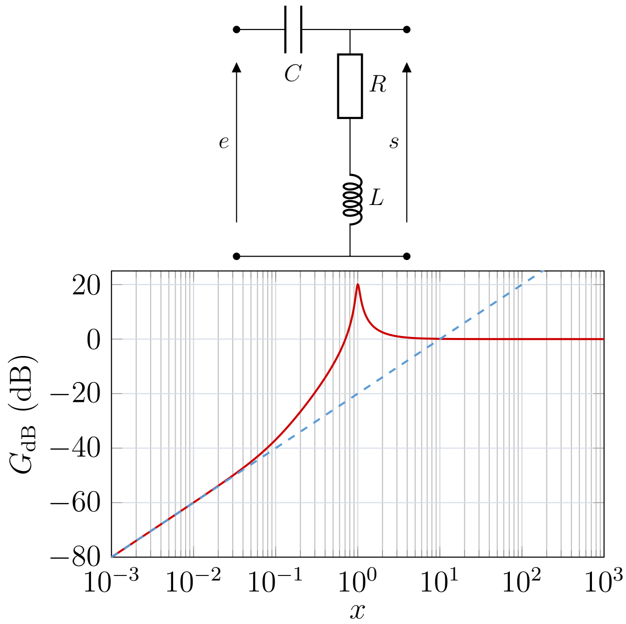
Exercice 8 – Filtre RLC – Oral Banque PT

1. Identifier sans calcul la nature du filtre représenté ci-contre.
2. Déterminer la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H}(jx) = \frac{\dfrac{jx}{Q} - x^2}{1 + \dfrac{jx}{Q} - x^2}$$

où $x = \omega/\omega_0$. Identifier la fréquence de résonance ω_0 et le facteur de qualité Q.

3. On donne le diagramme de Bode du filtre. Expliquer les valeurs prises par la pente en haute et basse fréquence. Déterminer la valeur de Q.



Exercice 9 – Résolution de problème

Un capteur délivre une tension parasitée par l'alimentation du secteur à 50 Hz (fréquence EDF). On cherche à concevoir un filtre adapté permettant d'obtenir le signal souhaité, c'est-à-dire déparasité.