

Chapitre 0 – Analyse dimensionnelle

Plan du cours

- I Dimensions et unités**
 - I.1** Définitions
 - I.2** Déterminer la dimension d'une grandeur
- II Utiliser l'analyse dimensionnelle**
 - II.1** Vérifier une équation
 - II.2** Un moyen mnémotechnique
 - II.3** Estimer un résultat

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

- Contrôler l'homogénéité d'une expression, notamment par référence à des expressions connues.
- Déterminer les exposants d'une expression de type monôme $E = A^\alpha B^\beta C^\gamma$ par analyse dimensionnelle.

Questions de cours

- Indiquer les sept unités du Système international (dimension, nom et symbole).
- Déterminer la dimension et l'unité d'une grandeur à partir d'une expression simple.



Documents

Document 1 – Le Système international

Dimension	Unité S.I.			Constante associée
Temps	T	seconde	s	$\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770\text{ Hz}$: fréquence de la transition hyperfine du césium 133.
Longueur	L	mètre	m	$c = 299\,792\,458\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$: vitesse de la lumière dans le vide, <i>seconde</i> .
Masse	M	kilogramme	kg	$h = 6,626\,070\,15 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}$: constante de Planck, <i>mètre, seconde</i> .
Intensité électrique	I	ampère	A	$e = 1,602\,176\,634 \times 10^{-19}\text{ C}$: charge élémentaire, <i>seconde</i> .
Température	Θ	kelvin	K	$k = 1,380\,649 \times 10^{-23}\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$: constante de Boltzmann, <i>kilogramme, mètre, seconde</i> .
Quantité de matière	N	mole	mol	$N_{\text{A}} = 6,022\,140\,76 \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$: nombre d'Avogadro.
Intensité lumineuse	J	candela	cd	$K_{\text{cd}} = 683\text{ lm}\cdot\text{W}^{-1}$: efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \times 10^{12}\text{ Hz}$, <i>kilogramme, mètre, seconde</i> .

TABLE 1 – Les dimensions et unités des sept grandeurs de base du Système international.

La neuvième édition de la brochure sur le SI (<https://www.bipm.org/fr/publications/si-brochure/>) précise les modifications adoptées lors de la redéfinition du Système international d'unité, votée en 2018 lors de la 26^{ème} Conférence générale des poids et mesures.

Document 2 – Nécessité de la redéfinition des unités

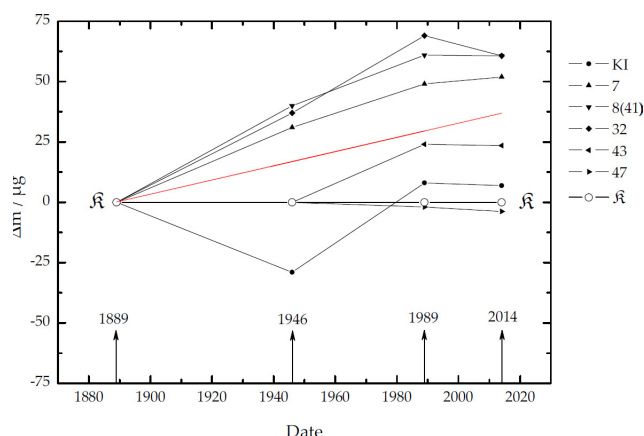


FIGURE 1 – À gauche : l'un des étalons en platine iridié, protégé sous ses deux cloches en verre, qui servait jusqu'en 2018 à la définition du kilogramme. À droite : évolutions de l'écart de masse des six témoins officiels à la masse du prototype international du kilogramme (Thomas M. *et al.*). La droite rouge, régression linéaire des données, présente une pente de l'ordre de 0,25 μg par an.

Document 3 – Préfixes

10^n	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^0	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
Préfixe	téra	giga	méga	kilo	unité	milli	micro	nano	pico	femto
Symbole	T	G	M	k		m	μ	n	p	f

Document 4 – Dimensions de quelques grandeurs courantes

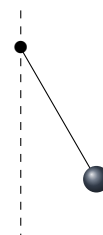
Dimension		Unité		S.I.	Formule utilisée
Charge	$T \cdot I$	coulomb	C	$s \cdot A$	$i = \frac{dq}{dt}$
Capacité	$M^{-1} \cdot L^{-2} \cdot T^4 \cdot I^2$	farad	F	$kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^4 \cdot A^2$	$E = \frac{1}{2}Cu^2$
Inductance	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot I^{-2}$	henry	H	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$	$E = \frac{1}{2}Li^2$
Fréquence	T^{-1}	hertz	Hz	s^{-1}	$f = \frac{1}{T}$
Énergie	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	joule	J	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$	$E = \frac{1}{2}mv^2$
Force	$M \cdot L \cdot T^{-2}$	newton	N	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$	$m\vec{a} = \vec{F}$
Résistance	$M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot I^{-2}$	ohm	Ω	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$	$P = Ri^2$
Pression	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	pascal	Pa	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$	$p = \frac{F}{s}$
Tension	$M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot I^{-1}$	volt	V	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$	$P = ui$
Puissance	$M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$	watt	W	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$	$P = \frac{dE}{dt}$ ou $\vec{F} \cdot \vec{v}$

TABLE 2 – Expressions des unités S.I. de quelques grandeurs couramment utilisées. La dernière colonne propose quelques exemples de formules permettant de les retrouver rapidement.

Applications

Application 1 – Le pendule simple

Établir la liste de toutes les grandeurs physiques permettant de décrire le pendule simple représenté ci-contre.



Application 2 – Le joule

1. Déterminer la dimension de l'énergie cinétique $E = \frac{1}{2}mv^2$.
2. Exprimer le joule (J) à l'aide des unités de bases.
3. Montrer que le produit mgh est homogène à une énergie, où m est une masse, g l'accélération de pesanteur et h une hauteur.
4. Retrouver l'expression des autres dimensions du tableau 2 en fonction des dimensions de base.

Application 3 – Période du pendule simple

On note g l'accélération de pesanteur et l la longueur du pendule. Parmi les formules ci-dessous, identifier celle qui donne la période T du pendule simple. Justifier.

$$\bullet T = 2\pi\sqrt{lg} \qquad \bullet T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{lg}} \qquad \bullet T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \bullet T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Application 4 – Vitesse, longueur d'onde et fréquence

Retrouver, par analyse dimensionnelle, la relation simple entre la vitesse de propagation v d'une onde, sa longueur d'onde λ et sa fréquence ν .