

DS3 – Mécanique

Durée : 3h.

L’usage de la calculatrice est autorisée.

RCO Des questions de cours sont identifiées dans le sujet par le sigle **RCO** dans la marge. Même s’il ne s’agit pas au sens strict de questions de cours, les questions 3 à 7 de l’exercice 1 sont très proches des exercices corrigés en TD.

* D’autres questions, identifiées par le symbole * peuvent être traitées, au moins partiellement, exclusivement avec les informations contenues dans le sujet.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l’initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d’explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Toute démarche engagée, même non aboutie, et toute prise d’initiative seront valorisées.

Exercice 1 – Chasse au plomb – CCP MP 2017 (39 points)

Un fusil de chasse (arme à feu) ou de ball-trap permet d'envoyer à distance des projectiles au moyen de gaz produits par la combustion rapide et confinée d'un composé chimique. La déflagration va éjecter de la bouche du fusil les sphères de plomb qui étaient dans la cartouche avec une vitesse qui, en moyenne, vaut $v_0 = 380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, valeur à utiliser dans toutes les applications numériques ultérieures.

Données

$$\begin{aligned} \text{accélération de la pesanteur : } & g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ \text{masse volumique du plomb : } & \rho = 11\,350 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ \text{masse volumique de l'air : } & \rho_a = 1,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

Document 1 – Données d'un fabricant de cartouches

Les données suivantes sont fournies par un fabricant de cartouches de fusil de chasse (contenant de la grenaille de plomb ou de fer doux, dont les projectiles sont appelés « plombs » quelle que soit leur nature). La photographie ci-contre est celle d'une cartouche en partie dénudée.



La vitesse de vol des billes de plomb dépend en premier lieu de leur taille. Avec une même vitesse de départ on obtient des différences considérables puisque, en raison de leur masse moins importante, les plombs de petit diamètre perdent plus de vitesse pour une même distance parcourue, face à la résistance de l'air à laquelle ils sont confrontés. La distance de sécurité de la grenaille de plomb, c'est-à-dire la distance au-delà de laquelle il n'y a plus danger pour les tiers, peut être déterminée à partir de la règle grossière suivante : diamètre des plombs $\times 100 =$ zone dangereuse en m. Exemple : pour des plombs de 3 mm : $3 \times 100 = 300 \text{ m}$.

Voilà la distance maximale possible avec l'angle de tir le plus favorable, à ne pas confondre avec la portée utile, qui est beaucoup plus faible. Dans le cas de la grenaille de fer doux, cette distance de sécurité est nettement plus faible en raison de la moindre densité des billes. Par contre, en cas d'agglutination, les billes agglutinées constituent des projectiles d'un poids supérieur qui peuvent être dangereux à des distances beaucoup plus grandes. Selon la taille des grains, la portée utile avec de la grenaille de plomb est de 35 à 40 m tout au plus. Au-delà, la dispersion est trop grande de sorte qu'il n'y a plus de couverture suffisante. La puissance de pénétration et la létalité des plombs diminuent avec l'augmentation de la distance de tir et ce, d'autant plus rapidement que les plombs sont plus petits.

Nous allons vérifier ces affirmations.

Équation du mouvement

Nous considérons la trajectoire d'un plomb de cartouche dont la dimension est typiquement de quelques millimètres et la masse inférieure au gramme. On néglige la poussée d'Archimède.

Le projectile est a priori soumis à deux forces : son poids et la force de frottement fluide exercée par l'air qui, dans les cas considérés, est constituée de la traînée aérodynamique qui s'écrit

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2}\rho_a S C_D v \vec{v},$$

où v est la norme du vecteur vitesse \vec{v} du projectile, ρ_a est la masse volumique de l'air, $S = \pi R^2$ est la section de l'objet exposée au fluide dans la direction de l'écoulement et C_D est un coefficient sans dimension appelé « coefficient de traînée ». Pour les vitesses typiques étudiées (vitesses supersoniques situées entre 375 et $420 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) et pour les formes quasi-sphériques de projectiles, C_D est de l'ordre de $0,44$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse \vec{v} d'un plomb de masse m .

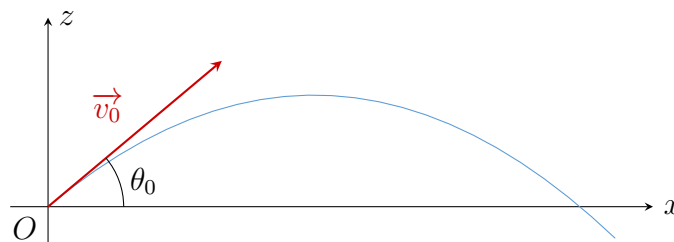
Premier modèle : trajectoire gravitaire

On considère le cas où la vitesse initiale du projectile est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de frottement fluide de l'air.

2. Montrer que cela correspondrait à une vitesse initiale v_0 obéissant à l'inégalité

$$v_0 \ll v_\infty, \text{ avec } v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}}.$$

- RCO 3. Projeter l'équation du mouvement sur la base cartésienne. On note θ l'angle de la vitesse \vec{v} avec le plan horizontal et θ_0 sa valeur à l'instant initial. On prend un repère tel que $\vec{v}_0 = v_0(\cos \theta_0 \vec{e}_x + \sin \theta_0 \vec{e}_z)$ et dont l'origine O est la position de la particule à l'instant initial.



- RCO 4. Établir les équations paramétriques de la vitesse et de la position en fonction du temps.
- RCO 5. Donner l'équation de la trajectoire. Quelle est la nature de cette trajectoire dite « gravitaire » ?
- RCO 6. Montrer que la portée du tir, c'est-à-dire la distance atteinte par le projectile dans le plan horizontal de départ ($z = 0$), vaut

$$X_M = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$$

et que la hauteur maximale atteinte par le projectile vaut

$$H_M = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}.$$

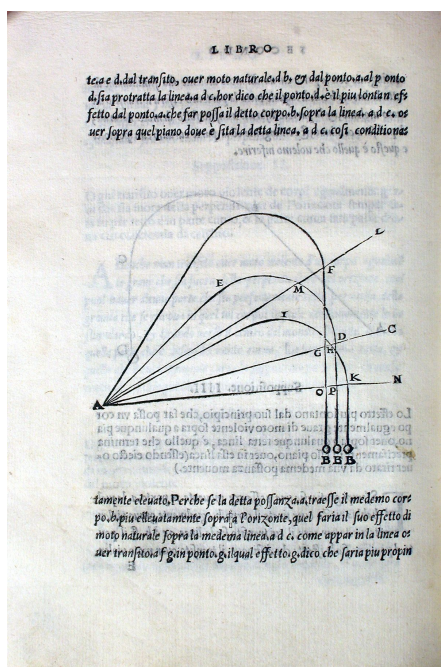
- * 7. Donner la valeur de l'angle θ_0 pour laquelle la portée est maximale.
8. Le tableau ci-dessous donne les rayons de quelques plombs et certains résultats numériques obtenus en utilisant les formules ci-dessus, pour une vitesse initiale de $380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- * Reporter le tableau sur votre copie en le complétant par des valeurs à deux chiffres significatifs.

| n° du plomb | 1 | 5 | 10 |
|---|------|-----|-------|
| rayon (mm) | 2,0 | 1,5 | 0,875 |
| masse m (g) | 0,38 | | 0,031 |
| portée X_M (km) | | | |
| hauteur H_M (km) | | | |
| v_∞ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) | 33 | | 22 |

9. Comparer la portée maximale à la portée donnée dans le document 1 et conclure. Quel(s) autre(s) facteur(s) montre(nt) qu'il faut abandonner le modèle gravitaire ?

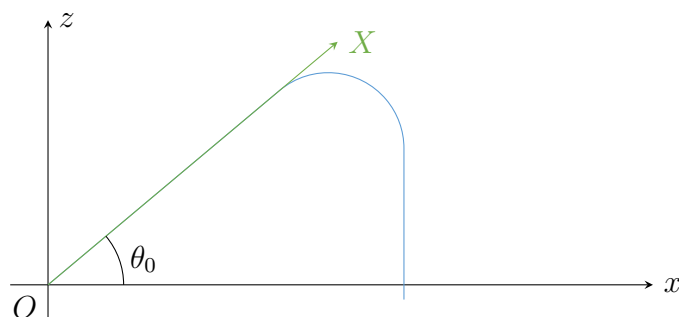
Deuxième modèle : trajectoire de Tartaglia

On vient de voir dans l'étude précédente que, pour les plombs de chasse, v_0 est très supérieure à v_∞ . Dans ce cas, la trajectoire diffère considérablement de la trajectoire gravitaire. On distingue trois phases : une première phase à mouvement rectiligne, une deuxième phase à trajectoire asymétrique autour d'un sommet et une troisième phase de mouvement de chute verticale. Il s'agit d'une « trajectoire de Tartaglia », du nom du mathématicien balisticien Niccolò Tartaglia (XVI^e siècle, portrait ci-dessous), qui a décrit les trajectoires (extrait ci-dessous) d'un boulet de canon.



Phase initiale : mouvement rectiligne ascendant

Soit (OX) la direction de la droite trajectoire dans cette phase initiale. On note X l'abscisse du point M sur cette droite qui fait un angle θ_0 avec (OX) et \vec{v} sa vitesse.



10. Montrer que le poids d'un plomb est alors négligeable devant la force de trainée.
 11. Montrer que l'équation du mouvement dans la première phase se met sous la forme :

$$\frac{d\vec{v}}{dX} = -\frac{g}{v_\infty^2} \vec{v} = -\frac{1}{D} \vec{v}$$

- * 12. Donner la dimension de D .
 * 13. Établir l'expression de \vec{v} en fonction de X . Que représente le paramètre D ?
 14. On note d la distance que doit parcourir le plomb pour atteindre une vitesse $10v_\infty$, v_u la vitesse atteinte quand le plomb a parcouru 40 m et \mathcal{E}_c l'énergie cinétique correspondante. Le tableau ci-dessous donne pour trois numéros de plomb des résultats numériques obtenus avec une vitesse initiale $v_0 = 380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
 Reporter le tableau sur votre copie en le complétant par des valeurs à deux chiffres significatifs.

| n° du plomb | 1 | 5 | 10 |
|--|------|---|------|
| D (m) | 110 | | 50 |
| v_0/v_∞ | 11 | | 17 |
| d (m) | 15,5 | | 27 |
| v_u ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) | 270 | | 170 |
| \mathcal{E}_c (J) | 13,5 | | 0,45 |

15. Comment pourrait-on définir la portée utile d'un tir ?

On lit dans les journaux de chasse que le caractère mortel du tir vient en première approximation du fait que les plombs qui pénètrent dans le gibier communiquent à l'animal leur énergie cinétique créant ainsi une onde de choc fatale.

- * 16. En supposant qu'il suffit de deux plombs numéro 1 pour avoir un canard à son tableau de chasse, de combien de plombs 5 et 10 suffirait-il ? En déduire l'ordre de grandeur de la portée utile à l'aide de l'évaluation du paramètre D précédemment défini.
 17. Comparer aux valeurs données dans le document 1. Pourquoi faut-il prendre des billes plus grosses en fer doux, sachant qu'il s'agit d'un acier de masse volumique $\rho' = 7\,600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$? Quel est le danger lié à l'agglutination de la grenaille ?

Troisième et dernière phase : mouvement rectiligne descendant

On note que cette phase est quasiment verticale.

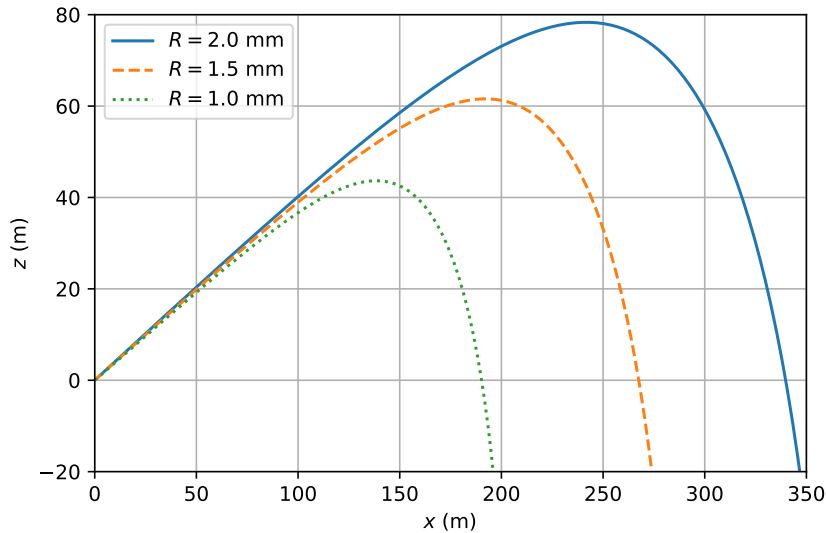
18. Quelles-sont les forces à considérer pendant cette phase ?

19. Montrer que la vitesse limite atteinte pendant cette dernière phase vaut :

$$\vec{v}_\infty = -\sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}} \vec{e}_z.$$

Expliquer le terme de mur aérodynamique utilisé pour qualifier cette dernière phase.

Pour calculer plus précisément la portée utile du tir de grenaille de plomb, on intègre numériquement l'équation du mouvement. La figure ci-dessous donne les trajectoires des plombs n° 1, 5 et 10 de vitesse initiale $380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, pour l'angle θ_0 qui optimise la portée maximale.



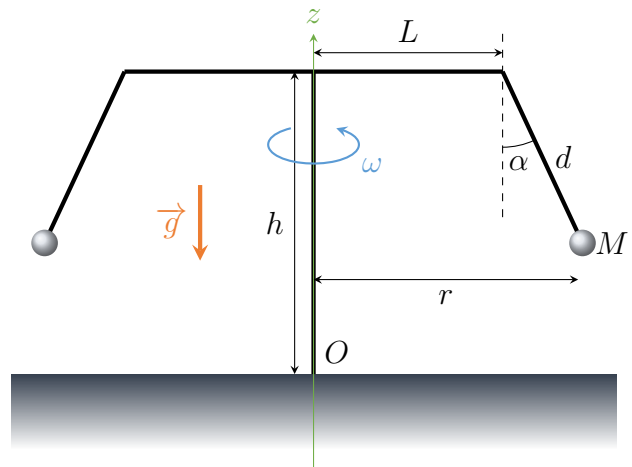
* 20. Évaluer les portées maximales pour chaque calibre et comparer aux informations du document 1.

Exercice 2 – Manège pendulaire (20 points)

L'ensemble du problème sera traité dans le référentiel terrestre considéré galiléen. Les frottements sont négligés et on note g l'accélération de la pesanteur.

Un manège pendulaire est constitué de bras horizontaux de longueur L , placés à une hauteur h au dessus du plateau, auxquels sont liés des nacelles par une tige rigide de longueur d et de masse est négligeable.

Le manège est entraîné à une vitesse angulaire ω par rapport au référentiel terrestre, autour de son axe fixe (Oz) . On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ la base cylindrique orthonormée directe d'axe (Oz) . La fixation permet aux nacelles de basculer librement d'un angle α par rapport à la verticale.



On s'intéresse à l'une de ces nacelles assimilée à son centre de masse M de masse m .

RCO 1. Définir le caractère galiléen d'un référentiel. Justifier que le référentiel terrestre peut ici être considéré galiléen.

RCO 2. Donner l'expression du vecteur \overrightarrow{OM} dans la base cylindrique en fonction de r et z , puis en fonction de L , h , d et α .

Pour une vitesse angulaire ω constante, la nacelle reste avec une inclinaison α constante lorsque le régime stationnaire est atteint. On se placera dans cette situation dans toute la suite du problème.

3. Décrire alors la trajectoire du point M dans le référentiel terrestre. En déduire l'expression des trois coordonnées cylindriques.

RCO 4. Exprimer les vecteurs vitesse \vec{v} et accélération \vec{a} de la nacelle, en fonction de r , ω et z , puis en fonction de L , d , ω et α .

5. Dresser le bilan des forces et les représenter sur un schéma. Donner leur expression dans la base cylindrique (on notera T la norme de la tension de l'attache reliant la nacelle au bras).

6. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, exprimer T en fonction de m , g et α .

7. Établir une relation entre α et ω et montrer que l'on peut l'écrire sous la forme :

$$a(1 + b \sin \alpha) = \tan \alpha, \text{ avec } a = \frac{L\omega^2}{g} \text{ et } b = \frac{d}{L}.$$

Expliquer qualitativement pourquoi la masse m n'intervient pas.

* 8. Sur un même graphe, tracer l'allure des courbes $\tan \alpha$ et $a(1 + b \sin \alpha)$ en fonction de α , pour $\alpha \in [0, 2\pi]$ et avec $a > 0$ et $0 < b < 1$. En déduire que l'on obtient deux solutions sur α , à identifier sur le graphe précédent.

9. Représenter schématiquement la nacelle et les forces qui lui sont appliquées dans ces deux positions. Déterminer qualitativement, dans chaque cas, si la position d'équilibre ainsi trouvée est stable ou instable.

Indication : une position d'équilibre est stable (resp. instable) si lorsqu'on en écarte légèrement le système, la somme des forces tend à le ramener vers (resp. l'éloigner de) cette position d'équilibre.

10. On donne $L = 10 \text{ m}$, $d = 4,0 \text{ m}$ et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Calculer la valeur de la vitesse angulaire ω amenant à un angle $\alpha = 30^\circ$. Donner cette valeur en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ puis en tours par minute (tr/min). Quelle serait alors l'accélération subie par les passagers de la nacelle, exprimée en g .

Exercice 3 – Partie immergée d'un iceberg (6 points)

On considère un iceberg de volume total V flottant sur l'eau. Soit v le volume de la partie émergée.

1. Déterminer le rapport $\frac{v}{V}$.

Masse volumique de l'air $\rho_a = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, masse volumique de la glace $\rho_g = 0,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.