

DS6 – Mécanique

Durée : 3h.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

RCO Des questions de cours sont identifiées dans le sujet par le sigle **RCO** dans la marge.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Toute démarche engagée, même non aboutie, et toute prise d'initiative seront valorisées.

★ Quelques questions sont plus délicates car moins classiques : elles sont repérées par le symbole ★ dans la marge. N'y passez pas un temps déraisonnable.

Exercice 1 – Mission Rosetta

Rosetta est une mission spatiale de l'ESA (agence spatiale européenne) dont l'objectif principal est de recueillir des données sur la composition du noyau de la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko et sur son comportement à l'approche du Soleil. La sonde spatiale s'est placée en orbite autour de la comète puis, après une période d'observation de plusieurs mois, a envoyé le 12 novembre 2014 Philae, un petit atterrisseur, se poser sur sa surface pour analyser la composition de son sol et sa structure.

Données :

masse de la comète :	$m_{\text{com}} = 1,0 \times 10^{13} \text{ kg}$
masse volumique de la comète :	$\rho_{\text{com}} = 400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
période de rotation propre de la comète :	$T_{\text{com}} = 12,4 \text{ h}$
distance de largage par rapport au centre :	$r_{\text{larg}} = 22,5 \text{ km}$
masse de la sonde Rosetta :	$m_{\text{ros}} = 1\,500 \text{ kg}$
masse de l'atterrisseur Philae :	$m_{\text{ph}} = 98 \text{ kg}$
constante gravitationnelle :	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

Dans tout le problème, la comète est modélisée par une boule homogène de masse m_{com} et de masse volumique ρ_{com} .

1. Déterminer le rayon r_{com} de la boule équivalente à la comète.

Orbite de Rosetta

Avant de larguer l'atterrisseur Philae, la sonde Rosetta était en orbite autour de la comète. Elle s'est rapprochée par paliers de la comète : le 10 septembre 2014, Rosetta se situe sur une orbite circulaire de rayon $r_1 = 30 \text{ km}$.

- RCO 2. Montrer que le mouvement est uniforme sur cette orbite.
- RCO 3. Établir l'expression de la vitesse v_1 de la sonde sur son orbite circulaire de rayon r_1 en fonction de G , m_{com} et r_1 . Faire l'application numérique.
- RCO 4. Retrouver la troisième loi de Kepler et en déduire la période de révolution T_1 de la sonde. Faire l'application numérique.
- RCO 5. Exprimer l'énergie mécanique de la sonde en fonction de G , m_{com} , m_{ros} et r_1 .

À partir du 8 octobre 2014, la sonde parcourt une orbite elliptique avec un apocentre A situé à la distance $r_a = r_{\text{max}} = 20 \text{ km}$ du centre O de la comète et un péricentre P caractérisé par $r_p = r_{\text{min}} = 10 \text{ km}$. Le 15 octobre, la propulsion est utilisée pour placer la sonde sur une orbite circulaire de rayon $r_p = 10 \text{ km}$.

6. Représenter sur un schéma l'orbite elliptique, en faisant apparaître le centre O de la comète, les points A et P , ainsi que les distances r_a et r_p .
7. On admet que, sur l'orbite elliptique, l'expression de l'énergie mécanique est la même que sur une orbite circulaire en remplaçant le rayon par le demi-grand axe de l'ellipse. Exprimer l'énergie mécanique de la sonde sur l'orbite elliptique en fonction de G , m_{com} , m_{ros} , r_a et r_p .
8. Sur cette orbite, en déduire la vitesse v_p de Rosetta en P en fonction de G , m_{com} , r_a et r_p . Faire l'application numérique.
9. Pour placer la sonde en orbite circulaire de rayon r_p , la propulsion est utilisée lorsque Rosetta est au péricentre. Exprimer la variation de vitesse Δv nécessaire en fonction de G , m_{com} , r_a et r_p . Faire l'application numérique.

Trajectoire de Philae

Dans le repère sphérique dont l'origine est au centre de la comète et pour $r > r_{\text{com}}$, le champ gravitationnel \vec{g}_{com} associé à la comète s'écrit

$$\vec{g}_{\text{com}} = -G \frac{m_{\text{com}}}{r^2} \vec{e}_r.$$

- RCO** 10. Rappeler l'expression de la force d'interaction gravitationnelle \vec{F}_G subie par l'atterrisseur Philae à une distance r de la comète. En déduire son expression en fonction de m_{ph} et \vec{g}_{com} . Préciser l'unité de \vec{g}_{com} .

On étudie la chute libre de l'atterrisseur Philae, dans un référentiel \mathcal{R} dont l'origine est le centre O de la comète et qui tourne avec Rosetta, de sorte que le vecteur \vec{e}_r pointe constamment vers l'atterrisseur. L'accélération de l'atterrisseur s'exprime alors simplement $\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r$. Ce référentiel peut être considéré comme galiléen.

La propulsion de Rosetta a été utilisée à deux reprises, les 27 et 31 octobre 2014, pour relever l'orbite afin de placer la sonde en position de larguer Philae, à une distance r_{larg} du centre de la comète.

11. Peut-on considérer le champ de gravitation de la comète uniforme lors de la chute du module Philae, suite à son largage ? Justifier numériquement la réponse.

Approche numérique

12. Établir l'équation du mouvement de l'atterrisseur Philae, une fois séparé de Rosetta, en projection sur l'axe radial.
13. Cette équation peut être résolue numériquement (Fig. 1). Déterminer la durée τ_0 de la chute de Philae s'il est abandonné par Rosetta avec une vitesse verticale nulle. Commenter alors l'hypothèse selon laquelle le référentiel d'étude est galiléen.
14. La durée réelle de la chute est $\tau \approx 7$ h. En déduire la vitesse verticale initiale communiquée à l'atterrisseur.
- ★ 15. En exploitant la figure 2, déterminer la norme de la vitesse verticale v_f atteinte par Philae au moment du contact avec la comète.

Approche énergétique

16. Lors de la chute de Philae, préciser comment évolue l'énergie mécanique de l'atterrisseur. En déduire, littéralement puis numériquement, la vitesse atteinte par l'atterrisseur lors du contact avec la comète.

À la surface de la comète

On s'intéresse au module Philae une fois celui-ci posé sur la surface de la comète.

17. Lors du largage de Philae, le 12 novembre 2014, plusieurs journalistes commentent l'événement : « Philae pèse 1,7 g sur la comète ». Commenter cette affirmation.

Une réponse détaillée est attendue, à la fois sur le vocabulaire employé et sur la valeur numérique indiquée.

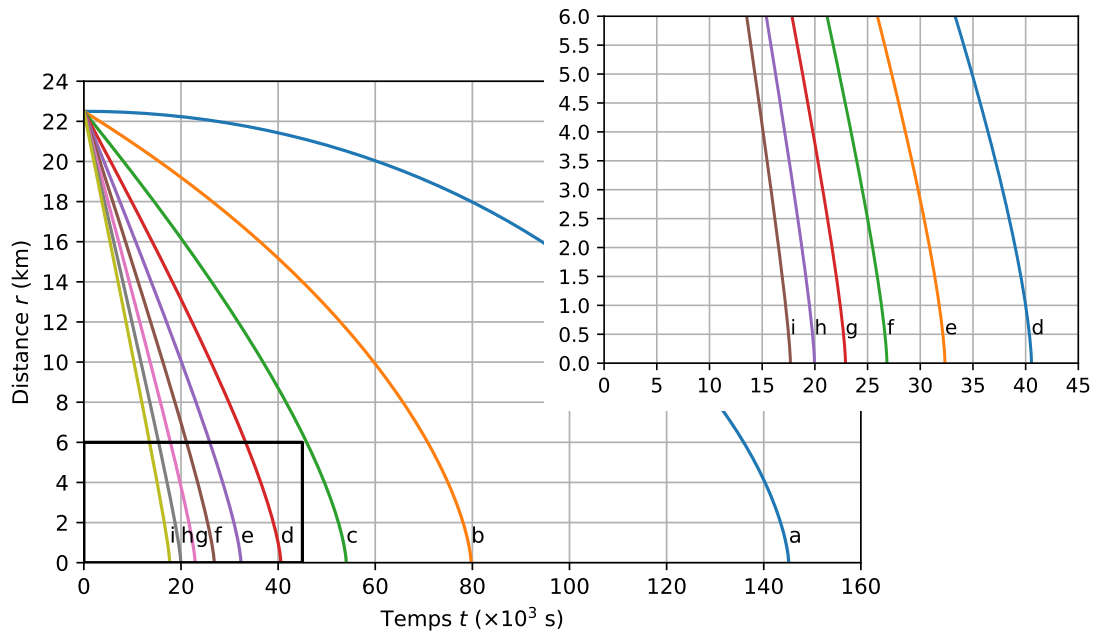


FIGURE 1 – Évolution temporelle de la distance r entre Philae et la comète, pour $r(t = 0) = r_{\text{larg}}$ et différentes vitesses initiales $v(t = 0) = v_0$. L'encart est un zoom de la zone encadrée sur la figure principale.

a : $v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;	d : $v_0 = -0,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;	g : $v_0 = -0,90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
b : $v_0 = -0,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;	e : $v_0 = -0,60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;	h : $v_0 = -1,05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
c : $v_0 = -0,30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;	f : $v_0 = -0,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;	i : $v_0 = -1,30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

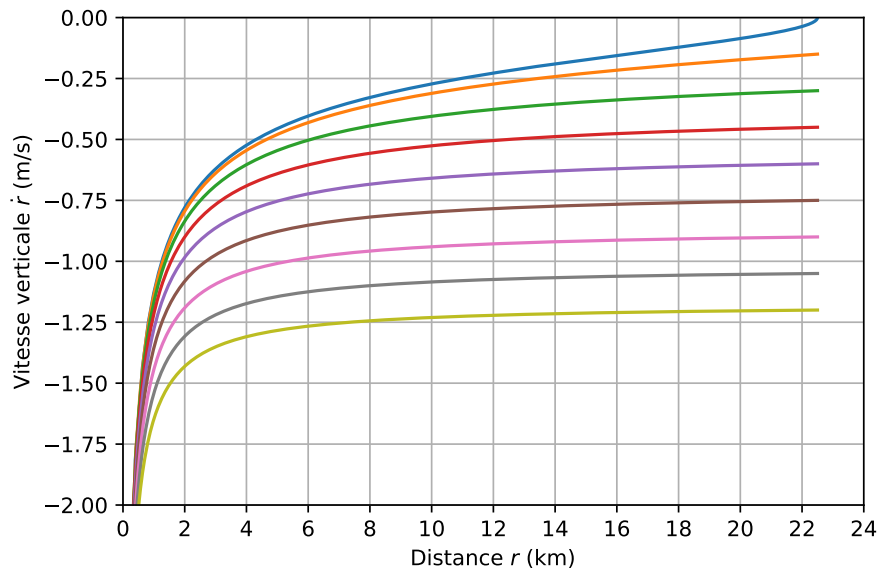


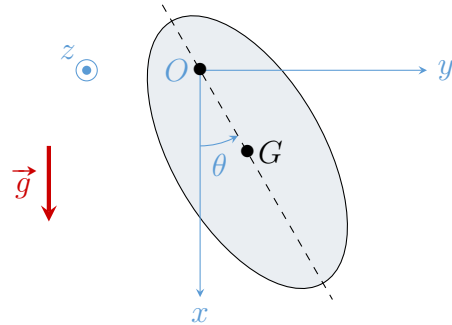
FIGURE 2 – Évolution de la vitesse radiale \dot{r} en fonction de la distance r entre Philae et la comète, pour $r(t = 0) = r_{\text{larg}}$ et différentes vitesses initiales $v(t = 0) = v_0$.

Exercice 2 – Mesure de l'intensité du champ de pesanteur terrestre

Plusieurs causes contribuent aux variations spatiales du champ de pesanteur terrestre : la rotation propre terrestre qui induit une force dite centrifuge, l'inégale valeur des rayons de la Terre aux pôles et à l'équateur, les inhomogénéités de composition et de topographie de la Terre. On cherche une méthode expérimentale pour mesurer localement l'intensité de ce champ à la surface de la Terre, noté \vec{g} . On envisage pour cela deux types de pendules.

Pendule sans couple de rappel

Un pendule est composé d'un solide de masse m , de centre d'inertie G , mobile autour d'un axe horizontal (Oz) et de moment d'inertie J par rapport à l'axe (Oz). Il peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical (Oxy) autour de l'axe (Oz). La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la verticale descendante et la droite (OG). On note a la distance OG .



L'étude est menée dans le référentiel terrestre \mathcal{R} considéré galiléen. Les frottements au niveau de l'axe de rotation et les frottements de l'air sont négligés. Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur \vec{g} tel que $\vec{g} = g\vec{e}_x$ où \vec{e}_x désigne un vecteur unitaire de l'axe (Ox).

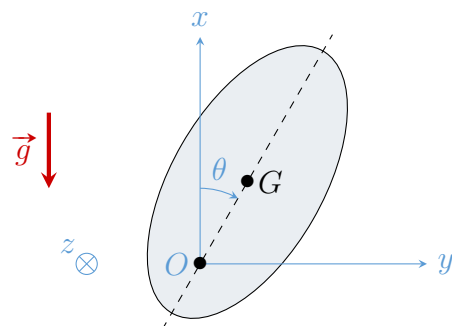
- RCO** 1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps. En déduire l'expression de la période T des petites oscillations du pendule autour de la position d'équilibre stable $\theta = 0$, en fonction de J , m , a et g .

On souhaite étudier l'influence d'une variation d'intensité δg du champ de pesanteur sur la période du pendule. Pour cela, on définit la sensibilité s du pendule comme le rapport $s = \delta T/T$ où δT représente une faible variation de la période du pendule engendrée par une faible variation δg du champ de pesanteur.

- ★ 2. Déterminer l'expression de la sensibilité s en fonction de δg et g .

Pendule avec couple de rappel

Le pendule précédent est maintenant soumis à l'action d'un ressort spiral (non représenté sur la figure), qui exerce un couple de rappel dont le moment par rapport à l'axe (Oz) est $\Gamma = -K\theta$ où K est une constante positive. La position du pendule est maintenant repérée par l'angle θ entre la verticale **ascendante** et la droite (OG). Dans cette partie, on a donc $\vec{g} = -g\vec{e}_x$.



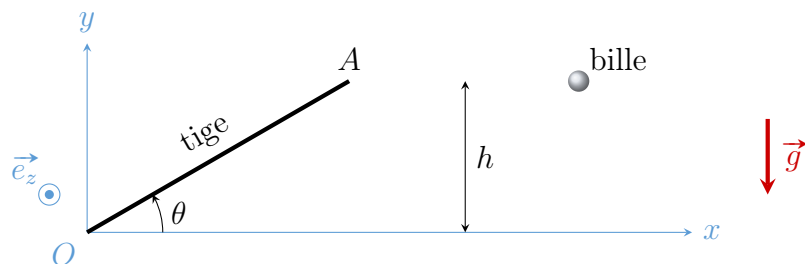
3. Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par θ .

L'énergie potentielle du ressort spiral ne dépend que de l'angle θ et de la constante K : elle est donnée par l'expression

$$\mathcal{E}_{p,r}(\theta) = \frac{1}{2}K\theta^2.$$

4. Exprimer l'énergie potentielle totale \mathcal{E}_p du pendule, en gardant comme référence pour \mathcal{E}_p la position $\theta = 0$.
5. En déduire l'équation vérifiée par la ou les positions d'équilibre du système (on pourra également raisonner à partir du TMC). Montrer que $\theta = 0$ est toujours solution. Discuter graphiquement le nombre de ces positions d'équilibre.
6. Établir la condition pour que la position $\theta = 0$ soit une position d'équilibre stable. Cette condition sera supposée réalisée dans toute la suite.
7. Exprimer l'énergie mécanique totale \mathcal{E}_m du pendule. Retrouver alors l'équation du mouvement établie à la question 3.
8. En considérant que θ reste petit, établir l'expression de la période T' des petites oscillations du pendule autour de la position $\theta = 0$.
- ★ 9. On souhaite étudier la sensibilité s' de ce pendule à une variation δg du champ de pesanteur. On définit s' , tout comme précédemment, par le rapport $s' = \delta T'/T'$. Déterminer l'expression de la sensibilité s' en fonction de δg , K , g , a , et m .
10. Montrer que l'on peut choisir la constante K de telle sorte que le pendule avec ressort spiral de rappel soit plus sensible que le premier et permette ainsi de détecter des variations plus faibles du champ de pesanteur. Exprimer cette condition sous forme d'une relation entre K , g , m et a .

Exercice 3 – Qui tombe le plus vite ?



Une tige rigide, homogène, de longueur ℓ et de masse m peut tomber au sol en pivotant autour du point O . On la lâche avec une vitesse initiale nulle, à partir de la position $\theta(t=0) = \theta_0 = 30^\circ$. Le moment d'inertie de la tige par rapport au point O est $J = m\ell^2/3$.

Au même instant $t = 0$, on lâche une bille de masse m , d'une hauteur h égale à la hauteur initiale de l'extrémité A de la tige. Tous les frottements sont négligés.

1. Qui de la bille ou de l'extrémité A de la tige touche le sol en premier ? Une justification quantitative de la réponse est attendue.

Donnée : pour $\theta_0 = 30^\circ$, on donne la valeur approchée de l'intégrale

$$\mathcal{I} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin \theta}} \approx 1,52.$$