Chapitre 0 – Analyse dimensionnelle

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Contrôler l'homogénéité d'une expression, notamment par référence à des expressions connues.

→ Déterminer les exposants d'une expression de type monôme $E = A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}$ par analyse dimensionnelle.

Questions de cours

Documents

Document 1 – Le Système international

Dimension		**Unité S.I.**		**Constante associée**
Temps	T	seconde	s	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}} = 9\,192\,631\,770\,\mathrm{Hz}$: fréquence de la transition hyperfine du césium 133.
Longueur	L	mètre	m	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$: vitesse de la lumière dans le vide, *seconde*.
Masse	M	kilogramme	kg	$h = 6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$: constante de Planck, *mètre, seconde*.
Intensité électrique	I	ampère	A	$e = 1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$: charge élémentaire, *seconde*.
Température	Θ	kelvin	K	$k = 1{,}380\,649 \times 10^{-23}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$: constante de Boltzmann, *kilogramme, mètre, seconde*.
Quantité de matière	N	mole	mol	$N_{\mathrm{A}} = 6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$: nombre d'Avogadro.
Intensité lumineuse	J	candela	cd	$K_{\mathrm{cd}} = 683\,\mathrm{lm}\cdot\mathrm{W}^{-1}$: efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \times 10^{12}\,\mathrm{Hz}$, *kilogramme, mètre, seconde*.

TABLE 1 – Les dimensions et unités des sept grandeurs de base du Système international.

La neuvième édition de la brochure sur le SI (https://www.bipm.org/fr/publications/si-brochure/) précise les modifications adoptées lors de la redéfinition du Système international d'unité, votée en 2018 lors de la 26ème Conférence générale des poids et mesures.

Document 2 – Nécessité de la redéfinition des unités

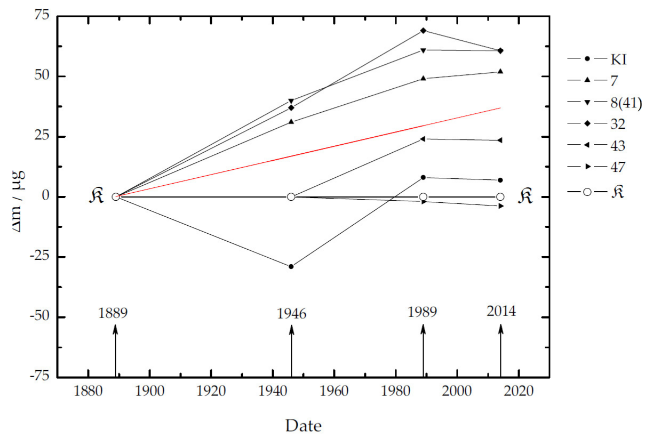


FIGURE 1 – À gauche : l'un des étalons en platine iridié, protégé sous ses deux cloches en verre, qui servait jusqu'en 2018 à la définition du kilogramme. À droite : évolutions de l'écart de masse des six témoins officiels à la masse du prototype international du kilogramme (Thomas M. *et al.*). La droite rouge, régression linéaire des données, présente une pente de l'ordre de $0{,}25\,\mu\mathrm{g}$ par an.

Document 3 – Dimensions de quelques grandeurs courantes

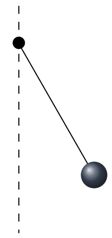
Dimension		**Unité**		**S.I.**	**Formule utilisée**
Charge	$\mathrm{T} \cdot \mathrm{I}$	coulomb	C	$\mathrm{s} \cdot \mathrm{A}$	$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$
Capacité	$\mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{L}^{-2} \cdot \mathrm{T}^{4} \cdot \mathrm{I}^{2}$	farad	F	$\mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{4} \cdot \mathrm{A}^{2}$	$E = \frac{1}{2}Cu^2$
Inductance	$\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{2} \cdot \mathrm{T}^{-2} \cdot \mathrm{I}^{-2}$	henry	H	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{A}^{-2}$	$E = \frac{1}{2}Li^2$
Fréquence	T^{-1}	hertz	Hz	s^{-1}	$f = \frac{1}{T}$
Énergie	$\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{2} \cdot \mathrm{T}^{-2}$	joule	J	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-2}$	$E = \frac{1}{2}mv^2$
Force	$\mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$	newton	N	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$	$m\vec{a} = \vec{F}$
Résistance	$\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{2} \cdot \mathrm{T}^{-3} \cdot \mathrm{I}^{-2}$	ohm	Ω	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{A}^{-2}$	$P = Ri^2$
Pression	$\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2}$	pascal	Pa	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$	$p = \frac{F}{s}$
Tension	$\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{2} \cdot \mathrm{T}^{-3} \cdot \mathrm{I}^{-1}$	volt	V	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{A}^{-1}$	$P = ui$
Puissance	$\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{2} \cdot \mathrm{T}^{-3}$	watt	W	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-3}$	$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ ou $\vec{F} \cdot \vec{v}$

Table 2 – Expressions des unités S.I. de quelques grandeurs couramment utilisées. La dernière colonne propose quelques exemples de formules permettant de les retrouver rapidement.

Applications

Application 1 – Le pendule simple

Établir la liste de toutes les grandeurs physiques permettant de décrire le pendule simple représenté ci-contre.



Application 2 – Le joule

1. Déterminer la dimension de l'énergie cinétique $E = \frac{1}{2}mv^2$.
2. Exprimer le joule (J) à l'aide des unités de bases.
3. Montrer que le produit mgh est homogène à une énergie, où m est une masse, g l'accélération de pesanteur et h une hauteur.
4. Retrouver l'expression des autres dimensions du tableau 2 en fonction des dimensions de base.

Application 3 – Période du pendule simple

On note g l'accélération de pesanteur et l la longueur du pendule. Parmi les formules ci-dessous, identifier celle qui donne la période T du pendule simple. Justifier.

- $T = 2\pi\sqrt{lg}$
- $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{lg}}$
- $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
- $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$

Application 4 – Vitesse, longueur d'onde et fréquence

Retrouver, par analyse dimensionnelle, la relation simple entre la vitesse de propagation v d'une onde, sa longueur d'onde λ et sa fréquence ν.