DS3

Exercice 1.

1- On s'intéresse à un plomb sphérique de rayon R et de masse m = cste, assimilé à son centre de masse M. Le mouvement est étudié dans le référentiel terrestre considéré galiléen. M est soumis à :

- Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_z}$
- Traînée : $\vec{F_D} = -\frac{1}{2}\rho_a C_D \pi R^2 v\vec{v}$.

On applique le PFD :

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\,\vec{e_z} - \frac{1}{2}\rho_a \pi R^2 C_D v\vec{v}}$$

2. On cherche $v_0 = \|\vec{v_0}\|$ tel que $\|\vec{P}\| \gg \|\vec{F_D}\|$

$$mg \gg \frac{1}{2}\rho_a \pi R^2 C_D v^2$$

soit :

$$\boxed{v_0 \ll \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}} = v_\infty}$$

3. On projette le PFD selon $\vec{e_x}$ et $\vec{e_z}$, en négligeant F_D : M n'est soumis qu'à son poids :

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}}$$

4. On intègre en tenant compte des conditions initiales :

$$\begin{cases} \dot{x}(t=0) = v_0 \cos\theta_0 \\ \dot{z}(t=0) = v_0 \sin\theta_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t=0) = 0 \\ z(t=0) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos\theta_0 \\ \dot{z}(t) = v_0 \sin\theta_0 - gt \end{cases}} \qquad \boxed{\begin{cases} x(t) = v_0\cos\theta_0 \times t \\ z(t) = v_0 \sin\theta_0 \times t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}}$$

5. On a $t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0}$ d'où :

$$z(x) = \tan\theta_0 \times x - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta_0}$$

ou encore :

$$\boxed{z(x) = x\left(\tan\theta_0 - \frac{gx}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)}$$

On reconnaît l'équation d'une parabole, compatible avec un <u>mouvement de chute libre</u>.

6. On cherche x_π tel que $z(x_\pi) = 0$.

La solution $x_\pi = 0$ correspond à la position initiale.

$$\tan\theta_0 - \frac{g\, x_\pi}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0} = 0$$

$$x_\pi = \frac{v_0^2}{g} 2 \tan\theta_0 \cos^2\theta_0 \tag{1}$$

$$= \frac{v_0^2}{g} 2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \tag{2}$$

$$\boxed{x_\pi = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0}$$

On cherche x_R tel que $H_\pi = z(x_R)$

soit $\frac{dz}{dx}(x_R) = 0$.

$$\frac{dz}{dx} = \tan\theta_0 - \frac{\cancel{2} x g}{\cancel{2} v_0^2 \cos^2\theta_0}$$

$$\frac{dz}{dx}(x_R) = 0 \iff x_R = \frac{x_\pi}{2}.$$

On injecte dans l'expression de $z(x)$ en utilisant les expression (1) et (2) de x_π obtenue précédemment.

$$z\left(\frac{x_\pi}{2}\right) = \frac{v_0^2}{g} \sin\theta_0 \cos\theta_0 \left(\tan\theta_0 - \frac{\cancel{g} \frac{\cancel{v_0^2}}{\cancel{g}} \tan\theta_0}{2 \cancel{v_0^2}} \frac{\cancel{\cos\theta_0}}{\cancel{\cos\theta_0}}\right.$$

$$= \frac{v_0^2}{g} \sin\theta_0 \cos\theta_0 \times \frac{\tan\theta_0}{2}$$

Finalement.

$$\boxed{H_\pi = \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g}}$$

7. x_π est maximal si $\sin 2\theta_0$ est maximal c'est-à-dire pour

$$\boxed{\theta_0 = \frac{\pi}{4}}$$

8.

N° du plomb	1	5	10
rayon (mm)	2,0	1,5	0,875
masse (g)	0,38	0,16	0,031
portée (km)	15	15	15
hauteur (km)	3,7	3,7	3,7
v_∞ ($m \cdot s^{-1}$)	33	29	22

9. Dans le document 1, la portée est de l'ordre de quelques centaines de mètres ce qui est 2 ordres de grandeur en dessous des résultats obtenus dans cette étude

(5)

Cette incohérence n'est pas surprenante puisqu'on a négligé les frottements en supposant que $v_0 \ll v_\infty$. Ce n'est pas du tout le cas car $v_0 = 380\,m.s^{-1}$ et v_∞ est de l'ordre de $30\,m.s^{-1}$.

Le modèle gravitaire n'est pas pertinent dans le cadre de cette étude.

10. On a $\underline{v_0 \gg v_\infty}$ donc $\underline{\|\vec{P}\| \ll \|\vec{F}_D\|}$.

11. Le PFD s'écrit alors :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{2}\rho_a \pi R^2 C_D v\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\underbrace{\frac{\rho_a \pi R^2 C_D}{2m}}_{\frac{g}{v_\infty^2}} v\vec{v}$$

En remarquant que $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dX}{dt} \times \frac{d\vec{v}}{dX}$

et $v = \frac{dX}{dt}$ car la trajectoire est rectiligne et dirigée selon (OX) on obtient

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dX} = -\frac{1}{D}\vec{v} \quad \text{avec } D = \frac{v_\infty^2}{g}}$$

(6)

12. $[D] = \left[\frac{v_\infty^2}{g}\right] = \frac{L^2.T^{-2}}{L.T^{-2}} = L.$

D est homogène à une longueur.

13. En projetant sur l'axe (OX) associé au vecteur unitaire $\vec{e_X}$:

$$\frac{dv}{dX} + \frac{v}{D} = 0$$

d'où $v(X) = Ae^{-\frac{X}{D}}$

$v(0) \underset{sol}{=} A \underset{CI}{=} v_0$

donc : $\boxed{v(X) = v_0 e^{-\frac{X}{D}}}$

D est la distance caractéristique de variation de $v(X)$. En $X = D$, $v(D) = v_0 \times 0{,}37$

14. $v(d) = v_0 e^{-\frac{d}{D}} = 10\,v_\infty$

d'où $\boxed{d = D \ln \frac{v_0}{10\,v_\infty}}$

On pose $d' = 40\,m$.

$v_0 = v_0 e^{-\frac{d'}{D}}$ et $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv_0^2$

N° du plomb	1	5	10
D (m)	110	86	50
v_0/v_∞	11	13	17
d (m)	15,5	23	27
v_0 (m.s⁻¹)	270	240	170
$\mathcal{E}_c$ (J)	13,5	4,6	0,45

15. On peut définir la portée du tir comme la distance nécessaire pour que la vitesse ait diminué de 95% par rapport à sa valeur initiale, soit $\sim 3D$.

16. On suppose que le canard est situé à 40 m pour pouvoir utiliser les valeurs du tableau. Soit $\mathcal{E}_{rot}$ l'énergie nécessaire pour avoir un canard :

$$\mathcal{E}_{rot} = 2\,\mathcal{E}_{c,1} = 27\,J.$$

Pour des plombs n° 5, il en faut 6 pour avoir la même énergie et 60 plombs n° 10.

On peut définir la portée utile comme la distance d_0 telle que $\mathcal{E}_c(d_0) = 14\,J$, soit pour des plombs n°1 $d_{0,1} = 36$ m.

17. D'après le document 1, la portée utile est au plus de 40 m. Le résultat obtenu précédemment est cohérent, puisque d_0 diminue quand le rayon diminue.

d_0 est tel que $\mathcal{E}_c(d_0) = 14\,J = \mathcal{E}_1$.

$$\mathcal{E}_c(d_0) = \frac{1}{2} m v_0^2\, e^{-\frac{2d_0}{D}} = \mathcal{E}_1$$

soit $d_0 = -\frac{D}{2}\ln\frac{2\mathcal{E}_1}{m v_0^2} = \frac{D}{2}\ln\left(\frac{m v_0^2}{2\mathcal{E}_1}\right)$

En supposant $\frac{1}{2} m v_0^2 > \mathcal{E}_1$, d_0 augmente avec m :

- si $\rho \searrow$, il faut $\nearrow R$ pour avoir la même masse
- en cas d'agglutinement, $m \nearrow$ ce qui augmente la portée utile

18. Lors de la dernière phase, il faut considérer $\vec{P}$ et $\vec{F_D}$.

19. La vitesse est verticale d'où $\vec{v} = -v\,\vec{e_z}$

On projette le PFD selon $\vec{e_z}$.

$$-m\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\rho_a \pi R^2 C_D v(-v) - mg$$

En régime permanent, v = cste

$$0 = \frac{1}{2}\rho_a \pi R^2 C_D v^2 - mg$$

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}} = v_\infty .$$

On a bien $\boxed{\vec{v_\infty} = -v_\infty \vec{e_z}}$

La vitesse atteint une valeur limite quand les frottements compensent le poids c'est le mur aérodynamique.

20. Graphiquement, on lit :

$X'_{\pi 1} = 340$ m (n°1)

$X'_{\pi 5} = 270$ m (n°5)

$X'_{\pi 10} = 190$ m. (n°10).

Le document 1, indique que la zone dangereuse est de l'ordre de

$2R \times 100$ ce qui donne :

en m

N° du ballon	1	5	10
$2R\times 100$ (m)	400	300	200
X_π' (m)	340	270	190.

Les valeurs précédentes, inférieures aux données, sont cohérentes avec la zone de sécurité à respecter. (il est normal et rassurant de conserver une marge)

Exercice 2.

1. Un référentiel galiléen est défini par rapport au principe d'inertie :

Il existe une classe privilégiée de référentiels dans lesquels le mouvement de tout système isolé est rectiligne et uniforme. Ce sont les référentiels galiléens

Le référentiel terrestre peut être considéré galiléen car la durée du mouvement étudié ici est très faible devant 24h.

2. $$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r} + z\,\vec{e_z}}$$

Ici $r = L + d\sin\alpha$
$z = R - d\cos\alpha$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = (L + d\sin\alpha)\vec{e_r} + (R - d\cos\alpha)\vec{e_z}}$$

3. $\dot\theta = \omega = \text{cste}$ et $\alpha = \text{cste}$: le mvt est circulaire et uniforme. On a donc pour r, θ et z :

$$\boxed{\begin{aligned} r &= L + d\sin\alpha \\ \theta &= \omega t \quad (+\text{cste}) \\ z &= R - d\cos\alpha \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &= R \\ & \\ &= z_0 \end{aligned}$$

La constante dans l'expression de θ dépend de l'origine choisie, sans importance dans la suite du problème.

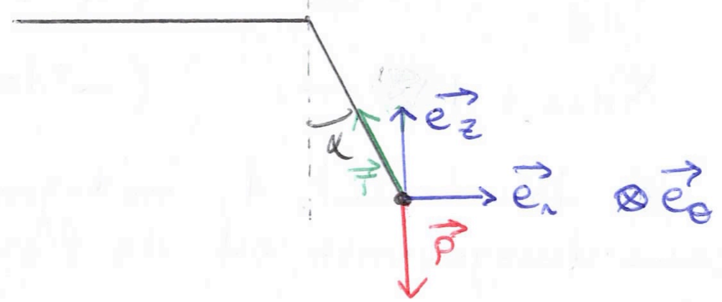
4. $\vec{v} = R\omega\vec{e_\theta}$

$\vec{a} = -R\omega^2\vec{e_r}$

soit :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v} &= (L + d\sin\alpha)\,\omega\,\vec{e_\theta} \\ \vec{a} &= -(L + d\sin\alpha)\,\omega^2\,\vec{e_r} \end{aligned}}$$

5. Bilan des forces :
- $\vec{P}$: le poids.
- $\vec{T}$: la tension de l'attache



(13)

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{P} &= -mg\,\vec{e_z}\\ \vec{T} &= T(\cos\alpha\,\vec{e_z} - \sin\alpha\,\vec{e_x})\end{aligned}}$$

6. Système : Nacelle assimilée au point M de masse m = cste

Référentiel : terrestre, considéré galiléen

PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

La projection selon $\vec{e_z}$ donne.

$$0 = -mg + T\cos\alpha$$

d'où $\boxed{T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}}$ avec $T = \|\vec{T}\|$

7. La projection du PFD selon $\vec{e_x}$, en remplaçant T par son expression, donne

$$\cancel{-}\cancel{m}(L + d\sin\alpha)\omega^2 = \cancel{-}\cancel{m}g\tan\alpha$$

$$\frac{L\omega^2}{g}\left(1 + \frac{d}{L}\sin\alpha\right) = \tan\alpha.$$

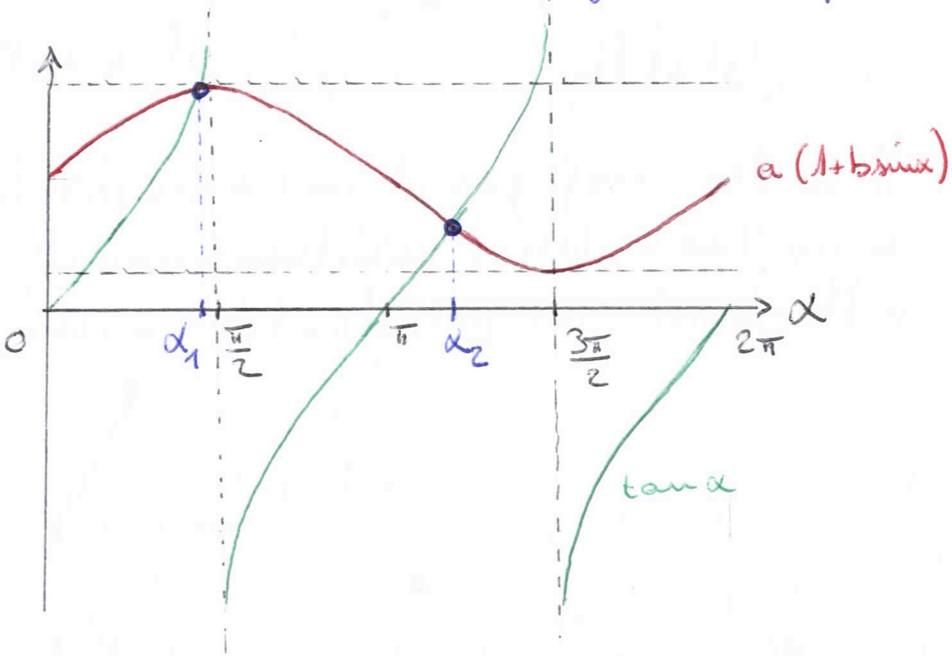
(14)

On retrouve bien :

$$\boxed{a(1 + b\sin\alpha) = \tan\alpha \quad \text{avec} \quad a = \frac{L\omega^2}{g} \quad \text{et} \quad b = \frac{d}{L}}$$

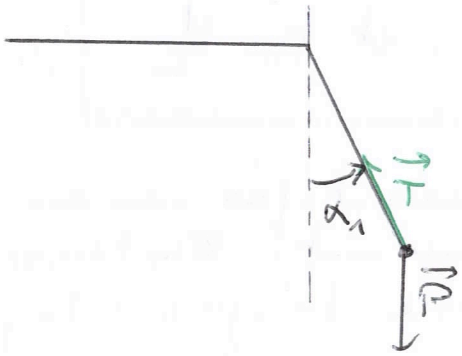
La masse n'intervient pas car on a néglige les frottement. La tension de l'attache compense toujours le poids.

8.

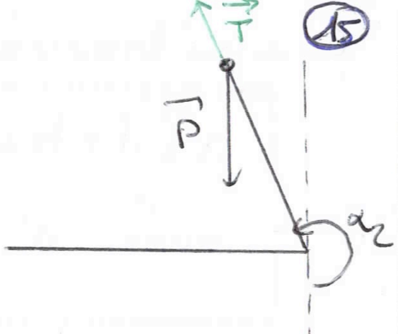


On obtient bien deux solutions, pour $\alpha_1 \in [0, \pi]$ et $\alpha_2 [\pi, \frac{\pi}{2}]$.

9. (Valeurs de a et b ≠ de la courbe précédente).

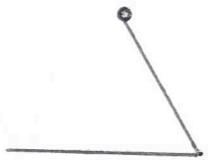


Stable



Instable

Pour des configurations compatibles avec les valeurs arbitrairement choisies à la question précédente, on aurait.



10. En reprenant le résultat de la question 7, on obtient

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}\,\frac{\tan\alpha}{\left(1+\frac{d}{L}\sin\alpha\right)}}}$$

AN : $\omega = 0{,}69\ \text{rad/s}$
$= 6{,}6\ \text{tr/min}$

L'accélération liée à la rotation du manège est alors

$$a = (L + d\sin\alpha)\,\omega^2 = 0{,}58\,g$$

Elle est dirigée selon $\vec{e_r}$.

Rq : l'accélération totale subie par le passager inclut l'accélération de la pesanteur. On a alors :

$$a_{tot} = g\sqrt{1+0{,}58^2} = 1{,}2\,g$$

Exercice 3. (Éléments de réponse, à rédiger convenablement).

1. $\underbrace{\vec{P} = -\vec{\Pi}_A}_{\text{à l'équilibre}} \iff \rho_g V \cancel{g} = \rho_e (V - v) \cancel{g}$

masse volumique de l'eau $\simeq 10^3\ \text{kg/m}^3$

(on néglige la poussée d'Archimède liée à l'air)

$$\boxed{\frac{v}{V} = 1 - \frac{\rho_g}{\rho_e} = 10\,\%}$$

90 % du volume de l'iceberg est immergé ce qui confirme que la plus grande partie de l'iceberg se trouve cachée sous la surface.