TD23 – Introduction à la physique quantique

charge élémentaire :	$e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
masse d'un électron :	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
masse d'un nucléon :	$m_n = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
constante de Boltzmann :	$k_\mathrm{B} = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$
constante de Planck :	$h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$
permittivité diélectrique du vide :	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$

Exercice 1 – Ordres de grandeur

Les questions sont indépendantes.

1. Exprimer le vecteur d'onde et la pulsation de l'onde associés à une particule non relativiste d'énergie E et de quantité de mouvement $\vec{p} = mv\vec{e_x}$. On pourra faire apparaitre la constante de Planck réduite $\hbar = h/(2\pi)$.
2. Exprimer la longueur d'onde de de Broglie associée à un électron, initialement immobile, non relativiste, accéléré avec une différence de potentiel U. Déterminer la valeur de U pour laquelle on obtiendrait la même longueur d'onde 0,1 nm que celle d'un photon X.
3. La lumière d'un faisceau laser est émise par des atomes effectuant une transition entre deux niveaux d'énergie séparés de 2,28 eV. Quelle est la couleur de ce laser ?
4. Un émetteur radio émet un signal de fréquence 105,5 MHz et de puissance 100 kW. Évaluer le nombre de photons qu'il émet par seconde.
5. Les fullerènes sont des molécules de carbone C_{60} totalement refermées sur elles mêmes, en forme de ballon de football. Déterminer l'ordre de grandeur de leur longueur d'onde de de Broglie thermique à 300 K. Comparer à la taille de la molécule, de l'ordre de 1 nm. On supposera les molécules formées uniquement de carbone 12 ^{12}C.
6. Estimer la longueur d'onde de de Broglie typique d'un ballon de football lors d'un pénalty. Peut-on faire diffracter celui-ci lorsqu'il passe entre les poteaux des cages ? Estimer la distance à laquelle se placer pour que la taille de la tache de diffraction soit de l'ordre de 10^{-10} m. Commenter.

Exercice 2 – Flux de photons d'une étoile

Une étoile émet un flux lumineux constant reçu sur Terre $\Phi = 1 \times 10^{-10}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$ à une longueur d'onde moyenne de $\lambda = 0{,}5\,\mathrm{\mu m}$.

1. Calculer le nombre de photons traversant chaque seconde la pupille de l'œil d'un observateur, de rayon $r = 4$ mm.

La pression de radiation P_rad exercée par ce flux constant issu de l'étoile sur la surface de la pupille (supposé parfaitement absorbante) est donnée par

$$P_\mathrm{rad} = \frac{1}{S}\frac{N}{\Delta t}p,$$

où p représente la quantité de mouvement d'un photon et N le nombre de photons arrivant sur la pupille durant l'intervalle de temps Δt.

2. Calculer numériquement la pression de radiation exercée par l'étoile, puis celle $P_\odot$ exercée par les photons émis par le Soleil, dont le flux sur Terre vaut $\Phi_\odot = 1 \times 10^4\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$. Commenter les valeurs obtenues.

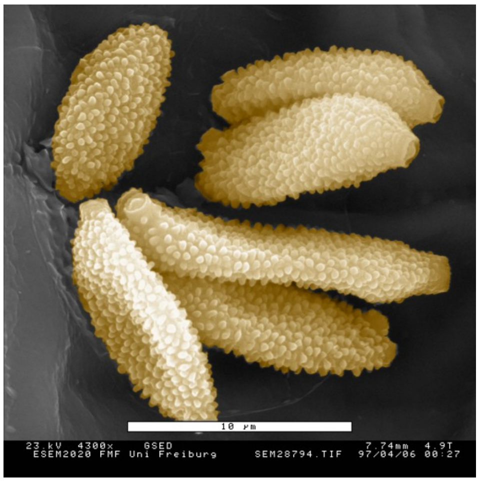
Exercice 3 – Microscopie électronique à balayage

Le pouvoir de résolution d'un microscope, c'est-à-dire la taille caractéristique des plus petits détails qu'il permet d'observer est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde utilisée.

1. Quel est le phénomène qui limite le pouvoir de résolution d'un microscope ?
2. Rappeler les valeurs des longueurs d'ondes extrêmes du spectre visible et déterminer les énergies des photons correspondants, exprimées en électronvolt.

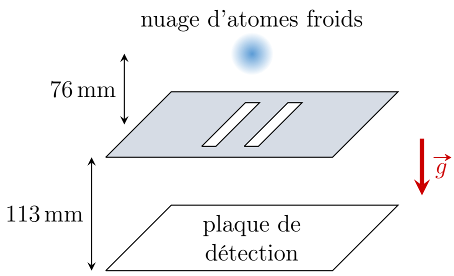
La taille des grains de pollen d'orchidée visibles ci-dessous est de l'ordre de 10 µm.

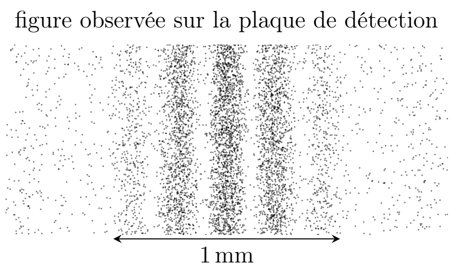
3. Justifier que cette image ne peut pas provenir d'un microscope optique, sachant qu'en grossissant l'image ci-contre, on peut observer des détails 100 fois plus petits que la taille des grains de pollen.
4. Cette image a été obtenue à l'aide d'un microscope électronique à balayage (MEB) dans lequel un faisceau d'électrons est envoyé sur l'échantillon à analyser. Évaluer l'ordre de grandeur de l'énergie cinétique minimale des électrons utilisés pour imager les grains de pollen.



Exercice 4 – Interférométrie atomique

En 1992, des physiciens Japonais (Shimizu et al.) réalisaient une expérience d'interférences atomiques : un nuage d'atomes de néon est lâché avec une vitesse initiale nulle à 76 mm au dessus d'un écran percé de deux fentes parallèles, de largeur 2,0 µm et distantes de $d = 6{,}0\,\mu\text{m}$. Les atomes sont ensuite détectés sur une plaque située à une distance $D = 113\,\text{mm}$ à l'aplomb du plan des fentes.





1. Comment se manifestent respectivement les caractères corpusculaire et ondulatoire des atomes de néon dans cette expérience ?
2. Déterminer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de de Broglie λ des atomes de néon dans ce dispositif. On rappelle l'expression de l'interfrange $i = \lambda D/d$ dans une expérience de type fentes d'Young avec écran à grande distance.
3. En déduire un ordre de grandeur de la vitesse v_q des atomes au cours de leur chute.
4. En supposant que l'on peut traiter classiquement la chute des atomes de néon, calculer la vitesse v_c des atomes de néon au niveau de l'écran. Commenter.

Données : constante d'Avogadro $N_A = 6{,}0\times10^{23}\,\text{mol}^{-1}$ *; masse molaire du néon* $M = 20\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Exercice 5 – Diffusion Compton

Dans le modèle classique, lorsqu'ils sont soumis à une onde électromagnétique de fréquence ν, les électrons d'un atome oscillent à la fréquence ν et émettent à leur tour une onde de même fréquence ν. Cette vision classique ne permet pas d'expliquer les résultats observés par l'américain Arthur Compton lors de ses expériences en 1923.

Il a envoyé des rayons X durs, c'est-à-dire de fréquence élevée, donc de très faible longueur d'onde λ entre 1 pm et 1 nm, sur une mince feuille de graphite. Il observe que les rayons X sont diffusés (déviés) et ont une fréquence différente après la diffusion. La longueur d'onde λ' des photons diffusés est liée à la direction θ dans laquelle ils sont déviés :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta),$$

où m_e la masse de l'électron.

1. Montrer que $h/(m_e c)$ est homogène à une longueur. Faire l'application numérique. Cette longueur est appelée longueur d'onde de Compton de l'électron.
2. Pourquoi cette expérience est-elle intéressante spécialement pour des rayons X ?
3. Comment évolue l'énergie d'un photon dans cette expérience ? Proposer une explication.
4. Pour des rayons X incidents tels que $\lambda = 7{,}08 \times 10^{-11}$ m, Compton a observé des rayons X diffusés à 90°. Déterminer leur longueur d'onde.
5. Quelle est l'énergie perdue par un photon ? Qu'en déduire sachant que l'énergie d'ionisation est de l'ordre de la dizaine d'électronvolts ?

★ On souhaite maintenant démontrer l'expression liant λ', λ et θ : on note $\vec{p}$ la quantité de mouvement du photon avant le choc, $\vec{p}\,'$ la quantité de mouvement du photon après le choc et $\vec{p}_e$ la quantité de mouvement de l'électron après le choc. L'électron est supposé initialement immobile dans le référentiel de la cible. Il doit être considéré relativiste, si bien que son énergie totale est donnée par $E = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4}$ quand sa quantité de mouvement vaut p_e.

6. Exprimer la conservation de la quantité de mouvement du système {photon + électron} entre avant et après le choc.
7. Exprimer de même la conservation de l'énergie totale du système {photon + électron} entre avant et après le choc.
8. Déduire des deux lois de conservation précédentes l'expression de la variation de longueur d'onde $\lambda' - \lambda$ du photon X telle qu'obtenue par Compton, en fonction de h, c, m_e et θ.

★ Exercice 6 – Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron M de masse m_e décrit une trajectoire circulaire autour du noyau (un proton) de charge e, fixe dans un référentiel galiléen. On fait l'hypothèse que la norme du moment cinétique orbital de l'électron est quantifiée : $L_O(M) = n\hbar$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\hbar = h/(2\pi)$ la constante de Planck réduite.

1. Rappeler l'expression de la force de Coulomb exercée par le proton sur l'électron.
2. Établir l'expression de la vitesse v de l'électron sur son orbite circulaire en fonction de m_e, e, ε_0 et du rayon r de la trajectoire.

3. En exploitant l'hypothèse de quantification du moment cinétique de l'électron, montrer que le rayon r_n de l'état n s'exprime sous la forme $r_n = n^2 a_0$, où a_0 est le rayon de Bohr, que l'on exprimera en fonction de m_e, $\hbar$, e et ε_0. Faire l'application numérique.

4. Montrer que l'énergie mécanique de l'électron se met sous la forme $E = E_1/n^2$, avec $E_1 < 0$ l'énergie du niveau fondamental que l'on exprimera en fonction des données du problème. Calculer E_1 et l'exprimer en électronvolts.

5. Exprimer, puis calculer la longueur d'onde de Broglie de l'électron dans l'état fondamental. Commenter.

6. Déterminer la distance parcourue par l'électron sur son orbite circulaire. Commenter.

Malgré sa simplicité, le modèle de Bohr permet de retrouver certains résultats expérimentaux. En 1908, Ritz établit expérimentalement une relation entre les longueurs d'onde $\lambda_{m,n}$ émises ou absorbées par un atome d'hydrogène et deux entiers positifs m et n. Elle s'exprime, avec $m > n$

$$\frac{1}{\lambda_{m,n}} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

où R_H est la constante de Rydberg de l'hydrogène.

7. Retrouver cette formule et exprimer, puis calculer la constante de Rydberg R_H.

8. Les raies d'émission ou d'absorption dans le visible de l'hydrogène appartiennent à la série de Balmer, caractérisée par $n = 2$. Calculer les longueurs d'onde de ces raies et préciser pour chacune d'elle la couleur associée.

La théorie classique de l'électromagnétisme prévoit que toute particule chargée accélérée émet une onde électromagnétique. La puissance rayonnée par un électron dont l'accélération vaut a est donnée par la formule de Larmor

$$\mathcal{P}_c = \frac{e^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}.$$

En mécanique quantique, le rayonnement d'un atome est associé aux transitions d'un électron entre deux niveaux d'énergie. Entre deux niveaux voisin, la puissance rayonnée est donnée par $\mathcal{P}_q = A_{n\to n-1}\hbar\omega_{n\to n-1}$, avec $A_{n\to n-1}$ le taux d'émission d'un photon d'énergie $\hbar\omega_{n\to n-1}$ entre les niveaux n et $n-1$. Dans la limite $n \gg 1$, les résultats coïncident : c'est le principe de correspondance de Bohr.

9. Exprimer la période classique $T_{c,n}$ de l'électron d'un atome d'hydrogène sur son orbite circulaire de rayon $r_n = n^2 a_0$. En déduire la pulsation classique $\omega_{c,n}$.

10. Montrer que, dans la limite $n \gg 1$, $\omega_{n\to n-1} \approx \omega_{c,n}$.

11. En déduire l'expression du taux d'émission $A_{n\to n-1}$ dans la limite $n \gg 1$.

12. Un atome de Rydberg est un atome placé dans un état circulaire de grand nombre quantique $n \gg 1$. Il émet principalement via les transitions $n \to n-1$. Calculer numériquement le temps de vie d'un état circulaire dans un atome de Rydberg, pour $n = 50$.