DL 8.

Exercice 1.

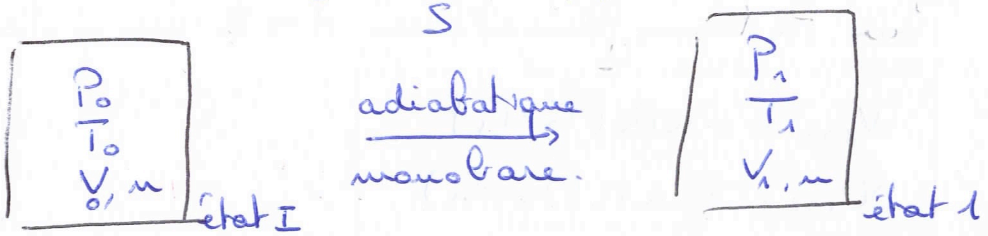
1. La transformation est rapide, on peut donc négliger les transferts thermiques qui eux sont lents : on modélise cette transformation par une transformation adiabatique.

L'obtention de la température finale n'est pas immédiate, c'est l'objet des questions suivantes.

2. Dans l'état 1, l'équilibre mécanique est vérifié d'où

$$\boxed{P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}}$$

3. On s'intéresse au système {gaz} de l'enceinte. La transformation est adiabatique et monobare ($P_{ext} = P_0 + \frac{Mg}{S} = P_1$)



Le travail des forces de pression s'exprime

$$W_p = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_1 - V_0)$$

Le système est fermé, on applique le premier principe pour la transformation I → 1.

$$\Delta U + \Delta E_c = W + Q$$

avec

* $\Delta E_c = 0$ (pas de variation macroscopique d'énergie cinétique).
* $W = W_p$ (pas d'autres forces à considérer que les forces de pression).
* $Q = 0$ (adiabatique)
* $\Delta U = C_v(T_1 - T_0)$ (GP).

Finalement :

$$\boxed{C_v(T_1 - T_0) = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_1 - V_0)}$$

avec $C_v = \frac{5}{2} nR$

4. On utilise la loi des gaz parfaits :

$$PV = nRT$$

pour remplacer le produit PV dans le premier principe :

$$\frac{5}{2} nR(T_1 - T_0) = -nRT_1 + nRT_0 + \frac{Mg}{SP_0} nRT_0$$

$$\frac{7}{2}\cancel{n}RT_1 = \frac{7}{2}\cancel{nR}T_0 + \frac{Mg}{SP_0}\cancel{nR}T_0$$

$$\boxed{T_1 = T_0\left(1 + \frac{2}{7}\frac{Mg}{SP_0}\right)}$$

L'expression de V_1 s'obtient avec la loi des GP.

$$\boxed{V_1 = \frac{nRT_1}{P_1}}$$

5. Les transferts thermiques entre le système et l'extérieur sont responsables de cette transformation.

6. Dans l'état 2, le système est à l'équilibre mécanique et thermique avec l'extérieur d'où :

$$\boxed{\begin{array}{l} T_2 = T_0 \\ P_2 = P_1 = P_0 + \dfrac{Mg}{S} \end{array}}$$

Avec la loi des gaz parfaits.

$$\boxed{V_2 = \frac{P_0}{P_0 + \frac{Mg}{S}} V_0}$$

7. Pour la transformation $1 \to 2$.

$$\underset{\text{état 1}}{\boxed{\begin{array}{c} P_1 \\ T_1 \\ V_1,\ n \end{array}}} \xrightarrow{\text{monobare}} \underset{\text{état 2}}{\boxed{\begin{array}{c} P_1 \\ T_0 \\ V_2,\ n \end{array}}}$$

$$\begin{aligned} W_{1\to2} &= -P_1(V_2 - V_1) \\ &= -P_1\left(\frac{P_0}{P_1}V_0 - V_1\right) \\ &= -nR(T_0 - T_1) \end{aligned}$$

$$\Delta U_{1\to2} = C_V(T_0 - T_1) = \frac{5}{2}nR(T_0 - T_1).$$

Avec le premier principe :

$$\Delta U_{1\to2} = W_{1\to2} + Q_{1\to2}$$

$$\begin{aligned} Q_{1\to2} &= \frac{5}{2}nR(T_0 - T_1) + nR(T_0 - T_1) \\ &= \frac{7}{2}nR(T_0 - T_1) \end{aligned}$$

Pour la transformation $1 \to 2$ on a donc

$$\boxed{\begin{array}{l} W_{1\to2} = -nR(T_0 - T_1) \\ \Delta U_{1\to2} = \dfrac{5}{2}nR(T_0 - T_1) \\ Q_{1\to2} = \dfrac{7}{2}nR(T_0 - T_1) \end{array}}$$

⑤

Au cours de la transformation $I \to 2$.

$$W_{tot} = W_{I\to 1} + W_{1\to 2}$$

$$= -nR\left(\cancel{T_1} - \cancel{T_0} - \frac{\Pi g}{P_0 S} T_0\right) - nR(\cancel{T_0} - \cancel{T_1})$$

$$= +nR \frac{\Pi g}{P_0 S} T_0$$

$$\boxed{W_{tot} = \frac{\Pi g}{S} V_0}$$

$$Q_{tot} = Q_{I\to 1} + Q_{1\to 2}$$

$$= 0 + \frac{7}{2} nR\left(\cancel{T_0} - \cancel{T_0} - \frac{2}{7}\frac{\Pi g T_0}{S P_0}\right)$$

$$\boxed{Q_{tot} = -\frac{\Pi g}{S} V_0}$$

On remarque $W_{tot} + Q_{tot} = 0$ d'où $\Delta U_{tot} = 0$. C'était prévisible puisque l'évolution $I \to 2$ est monotherme : $\Delta T = 0$.

⑥

8. L'évolution est alors réversible d'où $T =$ cste. (transformation isotherme)

9. À l'état final, la température est T_0. De plus, la condition d'équilibre mécanique impose que la pression du système est P_1. Avec la loi des GP, le volume final est donc V_2.

L'état final est le même que l'état 2

10. Pour cette transformation :

$\boxed{\Delta U = 0}$ (isotherme).

$$W = -\int_{V_0}^{V_2} P\,dV \quad \text{(réversible)}.$$

isotherme + système fermé : $nRT = \text{cste} = PV$

d'où $P = \dfrac{P_0 V_0}{V}$

$$\boxed{W = -P_0 V_0 \ln\left(\frac{V_2}{V_0}\right)} \quad \text{où } V_2 = \frac{P_0}{P_1} V_0$$

Avec le premier principe : $\boxed{W = -Q}$

Lors de cette transformation, les états initial et final sont les même que précédemment donc on a toujours $\Delta U = 0$ mais le travail et le transfert thermique sont $\neq$. W et Q dépendent du chemin suivi !

Rq : On retrouve la distinction importante entre l'énergie interne (fonction d'état dont la variation ne dépend que des EI et EF) et le travail des forces de pression et les transferts thermiques qui dépendent du chemin suivi !

Exercice 2.

1. Lorsqu'on inverse le mouvement en NN', le clapet CR se ferme immédiatement (la pression dans la pompe augmente et devient supérieure à celle de l'enceinte.

Le clapet CP reste fermé tant que la pression dans la pompe reste inférieure à P_0. Si la pression dans la pompe devient supérieure à P_0 avant que le piston arrive en LL', CP s'ouvre et une fois en LL', le cycle recommence.

2. Quand le piston passe de LL' à NN', on considère le système {air} contenu dans l'enceinte et à gauche de MM', qui est fermé car CP est fermé. La transformation est la suivante :

$$\boxed{\begin{matrix} n_0 \\ P_0 \\ T_0 \\ V+v_m \end{matrix}} \xrightarrow[\text{syst. fermé, GP}]{\text{isotherme}} \boxed{\begin{matrix} n_0 \\ P_1 \\ T_0 \\ V+V_M \end{matrix}}$$

piston en LL' — piston en NN'

Isotherme + syst fermé : $PV = \text{cste}$.

On a donc : $P_0(V+v_m) = P_1(V+V_M)$

$$\boxed{P_1 = P_0 \frac{V+v_m}{V+V_M}}$$

3. On considère l'air contenu dans le raccord et la pompe, entre KK' et MM' qui subit la transformation

$$\begin{matrix} P_0 \\ T_0 \\ v_m \end{matrix} \xrightarrow[\text{fermé, GP}]{\text{isotherme}} \begin{matrix} P_L \\ T_0 \\ V_M \end{matrix}$$

On a donc :

$$P_0 v_m = P_L V_M$$

d'où

$$\boxed{P_L = \frac{P_0 v_m}{V_M}}$$

AN : $P_L = 50$ mbar.

4. $$P_1 = P_0 \underbrace{\left(\frac{V}{V+V_M}\right)}_{b} + P_0 \underbrace{\left(\frac{v_m}{V+V_M}\right)}_{a\frac{v_m}{V_M}}$$

$$\boxed{P_1 = b P_0 + a P_L}$$

5. Le clapet CR s'ouvre quand la pression dans la pompe est égale à P_1, soit, toujours en utilisant la conservation du produit PV

cette fois pour l'air entre KK' et LL' à la pression P_0.

$$\boxed{\begin{array}{c} P_0 \\ v_m \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} P_1 \\ V' \end{array}}$$

piston en LL'

piston en $\Pi\Pi'$ lors de l'ouverture de CR

Le clapet CR s'ouvre quand le volume V' de la pompe est tel que

$$V' = \frac{P_0 v_m}{P_1}$$

À partir de là, on considère le système {air dans l'enceinte + pompe} qui subit la transformation :

$$\boxed{\begin{array}{c} P_1 \\ V+V' \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} P_2 \\ V+V_\Pi \end{array}}$$

$$P_1\left(V + \frac{P_0 v_m}{P_1}\right) = P_2(V+V_\Pi)$$

$$P_2 = P_1 \frac{V}{V+V_\Pi} + P_0 \frac{v_m}{V+V_\Pi}$$

En fonction de P_1, P_L, a et b :

$$P_2 = bP_1 + aP_L$$

puis en fonction de : P_0, P_L, a et b :

$$\boxed{P_2 = b^2 P_0 + aP_L(1+b)}$$

6. Par récurrence, on obtient :

$$\boxed{P_q = b^q P_0 + aP_L \sum_{i=0}^{q-1} b^i}$$

7. En utilisant la formule de l'énoncé :

$$P_q = b^q P_0 + aP_L\left(\frac{1-b^q}{1-b}\right)$$

puis avec $a = 1-b$:

$$\boxed{P_q = b^q P_0 + P_L(1-b^q)}$$

8. On isole q à partir de l'expression obtenue :

$$b^q(P_0 - P_L) = -P_L + P_q$$

$$b^q = \frac{P_q - P_L}{P_0 - P_L} \quad \left.\begin{array}{l} P_0 > P_L \\ P_q > P_L \end{array}\right)$$

$$q \ln b = \ln \frac{P_q - P_L}{P_0 - P_L}$$

$$\boxed{q = \frac{1}{\ln b} \ln \frac{P_q - P_L}{P_0 - P_L}}$$

AN :

$\frac{P_q - P_L}{P_0 - P_L}$	q
10^{-1}	~ 47
10^{-2}	~ 94
10^{-3}	~ 142

9. En reprenant les raisonnements des questions précédentes :

» le clapet CR s'ouvre quand le volume V'' de la pompe vaut

$$V'' = \frac{P_0 v_m}{P}$$

» en considérant la transformation subie par le système {air dans $V + V''$}

$$\begin{matrix} P \\ V + V'' \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} P + \Delta P \\ V + V_M \end{matrix}$$

on a $\quad P\left(V + \frac{P_0 v_m}{P}\right) = (P + \Delta P)(V + V_M)$

$$PV + P_0 v_m = P(V + V_M) + \Delta P(V + V_M)$$

$$\Delta P = \underbrace{bP - P}_{-aP} + aP_L$$

$$\frac{\Delta P}{P_L - P} = a \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{\Delta P}{P - P_L} = -a}$$

10. La loi des GP à l'état initial donne

$$P_0 V = n_0 R T_0$$

puis quand la pression dans l'enceinte vaut P

$$PV = n R T_0$$

d'où

$$\frac{n_0}{P_0} = \frac{n}{P} \quad \text{et} \quad \boxed{n = n_0 \frac{P}{P_0}}$$

Lors de la transformation où la pression dans l'enceinte passe de P à $P + \Delta P$, la quantité de matière dans l'enceinte passe de n à $n + \Delta n$. De même que précédemment, on a

$$n + \Delta n = n_0 \frac{P + \Delta P}{P_0}$$

d'où $\boxed{\Delta n = n_0 \frac{\Delta P}{P_0}}$

Puis, en fonction des quantités demandées :

$$\boxed{\Delta n = n_0 a \frac{P_L - P}{P_0}}$$

Au fur et à mesure que P se rapproche de P_L, $\frac{dn_-}{dq} \to 0$. (on extrait de moins en moins de gaz de l'enceinte à chaque coup de pompe).

11. Durant un intervalle de temps dt, la quantité de matière n dans l'enceinte varie de dn. Cette variation est due à ce qui est extrait : $\frac{dn_-}{dt} \times dt$ par la pompe et ce qui rentre par la fuite $\frac{dn_+}{dt} \times dt$ ce qui se traduit par :

$$dn = \Big(\underbrace{\frac{dn_+}{dt}}_{>0} + \underbrace{\frac{dn_-}{dt}}_{<0}\Big) dt$$

En régime permanent, c'est à dire quand la pression P_L' est atteinte, $dn = 0$, ce qui revient à dire que ce qui rentre par la fuite est extrait par la pompe :

$$\frac{dn_-}{dt} = -\frac{dn_+}{dt} \qquad \text{avec } \frac{dn_-}{dt} = \frac{dq}{dt} \times \frac{dn_-}{dq}$$

En remplaçant par les expressions obtenues précédemment, avec $P = P_L'$

$$\frac{dq}{dt} \times an_0 \frac{P_L - P_L'}{P_0} = -\frac{dn_+}{dt}$$

$$\boxed{P_L' = \frac{P_0}{an_0 \frac{dq}{dt}} \frac{dn^+}{dt} + P_L}$$

Rq : ce n'est pas l'expression demandée mais elle est plus facilement interprétable. On voit

- P_L' est supérieure à P_L
- P_L' est d'autant plus élevée que la fuite $\frac{dn_+}{dt}$ est importante.
- P_L' est d'autant plus proche de P_L que la pompe est rapidement actionnée ($\frac{dq}{dt}$ grand)

Tous ces points sont compatibles avec ce que l'on s'attend à obtenir

L'expression demandée est :

$$\boxed{P_L' = P_0 \left(\frac{1}{an_0} \frac{dn_+}{dq} + \frac{v_m}{V_T} \right)}$$

Rq : la notation Δn introduite à la question 10 laisse penser qu'il s'agit de la variation de n associée à un coup de pompe : on a bien $\Delta n < 0$. Pourtant l'énoncé parle de quantité "extraite" qui devrait être positive.

L'essentiel ici est d'être cohérent, notamment lors du bilan de la question 11.