Chapitre 6 – Cinématique du point matériel

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.

→ Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques.

→ Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.

→ Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : rectiligne, rectiligne uniforme, rectiligne uniformément accéléré.

→ Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps et établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes dans le cas où le vecteur accélération est constant.

→ Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes dans le cas d'un mouvement circulaire.

→ Repère de Frenet : caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : circulaire, circulaire uniforme et faire le lien avec les composantes polaires de l'accélération.

Questions de cours

→ Sur un schéma, définir les bases locales associées aux repères cartésien, polaire, cylindrique, de Frenet et sphérique.

→ Établir l'expression du vecteur déplacement élémentaire dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphérique et en déduire l'expression du vecteur vitesse.

→ Donner l'expression des dérivées temporelles des vecteurs de la base cylindrique et en déduire l'expression des vecteurs vitesse et accélération.

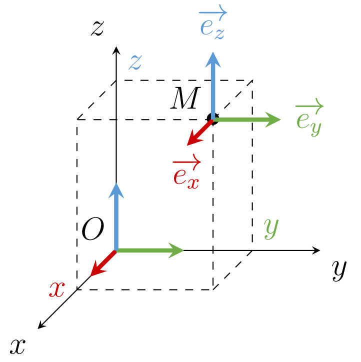
→ Dans le cas d'un mouvement circulaire, donner puis établir les composantes du vecteur accélération dans la base de Frenet à partir des expressions de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ dans la base polaire.

→ Établir les équations horaires et les équations de la trajectoire dans le cas d'un mouvement rectiligne, à accélération constante ou circulaire.

Documents

Document 1 – Systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes



Dans le système de coordonnées cartésiennes :

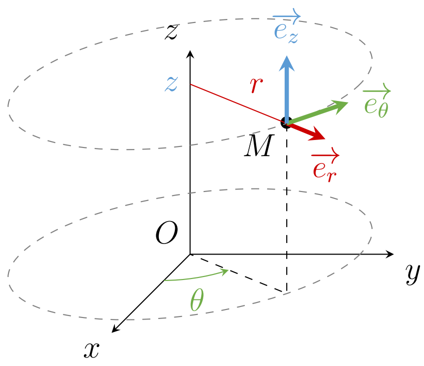
- la base de vecteurs utilisée est :

$$(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$$

- le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'exprime :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$$

Coordonnées cylindriques



Dans le système de coordonnées cylindriques :

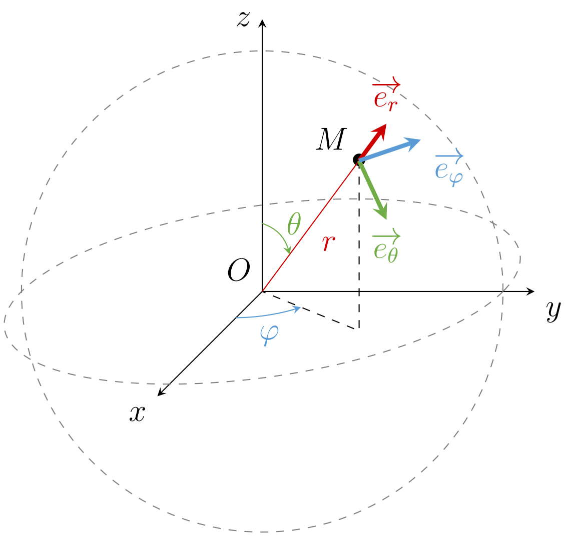
- la base de vecteurs utilisée est :

$$(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$$

- le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'exprime :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$$

Coordonnées sphériques



Dans le système de coordonnées sphériques :

- la base de vecteurs utilisée est :

$$(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$$

- le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'exprime :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$$

Document 2 – Muons et relativité restreinte – Einstein (1905), Rossi et Hall (1940)

Les muons sont des particules élémentaires instables dont les propriétés physiques sont identiques à celles de l'électron, excepté pour leur masse qui est 207 fois plus grande que celle de l'électron. Ils se désintègrent rapidement : leur durée de vie moyenne est $\tau = 2{,}2\,\mu\mathrm{s}$. Les muons sont produits dans la haute atmosphère, entre 15 et 20 km d'altitude, lorsque les rayons cosmiques, formés en grande partie de protons de très haute énergie, rencontrent les atomes d'azote et d'oxygène de l'atmosphère.

Même s'il se déplace à une vitesse proche de la vitesse de la lumière, un muon ne devrait pas parcourir une distance supérieure à $d \sim c\tau = 660\,\mathrm{m}$ avant de se désintégrer. La probabilité de détecter un muon à faible altitude doit donc être extrêmement faible. Pourtant, au niveau du sol, on a mesuré un flux correspondant à environ un muon traversant la surface d'une main par seconde.

Du fait de leur vitesse v très élevée (certains voyagent à plus de 99 % de la vitesse de la lumière !), les effets relativistes ne sont pas négligeables :

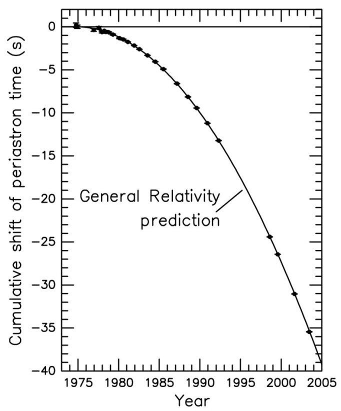
- d'une part, le temps semble s'écouler plus lentement dans le référentiel lié à un muon que dans le référentiel du laboratoire (dilatation du temps) : le temps de vie τ' mesuré dans le référentiel du laboratoire s'en retrouve allongé selon la relation $\tau' = \gamma\tau$;
- d'autre part, la distance parcourue par le muon semble plus faible dans son référentiel que la distance d' mesurée dans le référentiel du laboratoire (contraction des longueurs), selon la relation $d' = d/\gamma$.

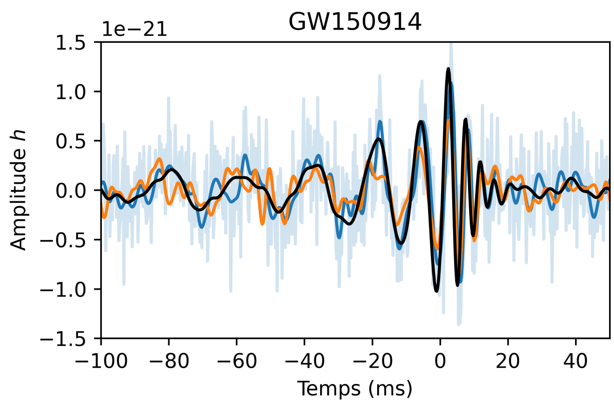
On a ici introduit le facteur de Lorentz γ, défini par :

$$\gamma = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

dont la valeur ne diffère notablement de 1 que lorsque v devient très proche de c.

Document 3 – Ondes gravitationnelles et relativité générale, Einstein (1915), Hulse et Taylor (1993)





PSR B1913+16 est un pulsar binaire découvert en 1974 par les physiciens Hulse et Taylor. Leurs mesures montrent un décroissance de la période orbitale (figure de gauche), indiquant que les deux astres se rapprochent : le système perd progressivement de l'énergie. Puisqu'il n'y a pas de frottement dans l'espace, cette dissipation ne s'explique pas avec la mécanique classique.

Cependant, la relativité générale prédit que des masses accélérées émettent des ondes gravitationnelles (des déformations de l'espace-temps) : c'est ce rayonnement gravitationnel qui permet d'expliquer la perte d'énergie du système. Grâce à leurs mesures, Hulse et Taylor ont obtenus le prix Nobel de physique en 1993.

La première observation directe d'ondes gravitationnelles (GW150914, figure de droite) a été réalisée en 2015 grâce à l'interféromètre gravitationnel LIGO. Le prix Nobel de physique de 2017 récompensait le travail ayant mené à cette découverte.

Document 4 – GPS et relativité(s)

Le fonctionnement du GPS repose sur des mesures très précises d'intervalles de temps. Grâce aux horloges atomiques embarquées dans chacun des satellites du système, un utilisateur peut ainsi déterminer sa position avec une incertitude de l'ordre de 10 m. Cette précision n'est possible qu'après avoir pris en compte les effets relativistes (entre autres) :

- du fait de son mouvement rapide autour de la Terre, l'horloge du satellite est **retardée** par rapport à un observateur au sol : ce décalage, lié à la relativité restreinte, est de 7 µs par jour ;
- par ailleurs, puisque le champ gravitationnel au niveau du satellite est plus faible qu'au sol, l'horloge du satellite est **avancée** par rapport à un observateur au sol : ce décalage, lié à la relativité générale, est de 45 µs par jour.

Le temps donné par l'horloge du satellite avance donc de $\delta t = 38\,\mu\text{s}$ par jour par rapport à un utilisateur au sol. Sans correction, cela entrainerait une erreur systématique de positionnement et donc une dérive de $c\delta t = 11{,}4\,\text{km}$ par jour !

Applications

Application 1 – Collision entre deux véhicules

Un passant, immobile par rapport au sol, assiste à la collision (sans gravité) entre deux véhicules. Sur le constat, il représente la situation comme sur le schéma ci-contre.

Le conducteur de la voiture 1 n'est pas d'accord avec cette version : pour lui c'est la voiture 2 qui lui est rentrée dedans. Le conducteur de la voiture 2 défend la situation inverse : la voiture 1 lui est rentrée dedans.

Commenter cette situation en vous appuyant sur des schémas.

Application 2 – Trajectoire cartésienne

On considère un point M dont les coordonnées cartésiennes dépendent du temps :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 4t+7 \\ t(2-t) \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$, ainsi que sa norme.
2. En déduire l'expression du vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.
3. Calculer les coordonnées du vecteur accélération $\overrightarrow{a}$, ainsi que sa norme.
4. Calculer l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'axe (Ox) à l'instant $t = 1$.

Application 3 – Samare

On s'intéresse au mouvement hélicoïdal d'un point situé à l'extrémité de l'ailette du fruit de l'érable (la samare).

En coordonnées cylindriques, avec R, ω et v_0 trois constantes, il est donné par :

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = \omega t \\ z = -v_0 t \end{cases}$$

1. Donner l'expression du vecteur vitesse.
2. La vitesse est-elle constante ? Comment qualifier ce mouvement ?
3. Exprimer le vecteur accélération.

Application 4 – Excès de vitesse

Un conducteur roule à vitesse constante $v_0 = 100\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ sur une route départementale rectiligne. Un gendarme repère l'automobiliste et démarre sa moto à l'instant $t = 0$ où la voiture passe à sa hauteur. Il accélère uniformément et atteint la vitesse de $v_1 = 90\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ au bout de $\Delta t = 10\,\mathrm{s}$, tout en continuant à accélérer. On suppose que les véhicules se déplacent dans la direction et le sens de $\overrightarrow{e_x}$ et que le gendarme se trouve initialement à l'origine du repère.

1. Exprimer les vecteurs accélérations $\overrightarrow{a_a}(t)$ et $\overrightarrow{a_g}(t)$ de l'automobiliste et du gendarme.
2. Exprimer les distances $x_a(t)$ et $x_g(t)$ parcourues par l'automobiliste et le gendarme.
3. Exprimer, puis calculer le temps τ nécessaire au gendarme pour rattraper l'automobiliste.
4. Exprimer, puis calculer la distance D alors parcourue.
5. Exprimer, puis calculer la vitesse v_f du gendarme lors de l'interception.

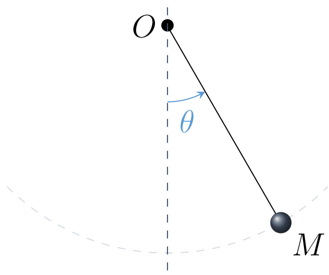
Application 5 – Lancer du poids

On souhaite étudier la trajectoire du poids lancé par l'athlète américain Ryan Crouser le 18 juin 2021, qui lui a permis de battre le record du monde avec un jet à $d = 23{,}37\,\text{m}$. On assimile le projectile à un point matériel M repéré dans le repère cartésien à deux dimensions $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ par ses coordonnées x et z. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, il quitte la main du lanceur à une hauteur $h = 2{,}60\,\text{m}$, avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ formant un angle α par rapport à l'horizontale. Après le lancer, le poids est en chute libre, c'est-à-dire que son accélération est constante : $\overrightarrow{a} = -g\overrightarrow{e_z}$.

1. Faire un schéma.
2. Exprimer les composantes de la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ en fonction de sa norme v_0 et de α. On supposera par ailleurs qu'en $t = 0$, $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$.
3. Donner les équations différentielles vérifiées par $\ddot{x}$ et $\ddot{z}$.
4. Les intégrer pour obtenir l'expression du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ et l'équation horaire du mouvement.
5. En déduire l'équation de la trajectoire.
6. Exprimer d en fonction de h, v_0, g et α.

Application 6 – Étude cinématique du pendule simple

Le mouvement d'un point matériel M accroché à un fil de longueur l suspendu au point O s'inscrit sur une portion de cercle de rayon l et de centre O. La position du point M est repérée par l'angle θ défini sur la figure ci-contre. Lorsque les oscillations sont de faible amplitude, on observe que $\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t$.



1. Quel système de coordonnées est le plus adapté à l'étude de ce mouvement ? Représenter la base locale associée sur un schéma.
2. Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération dans cette base.
3. Donner l'expression du vecteur accélération en coordonnées cartésiennes.