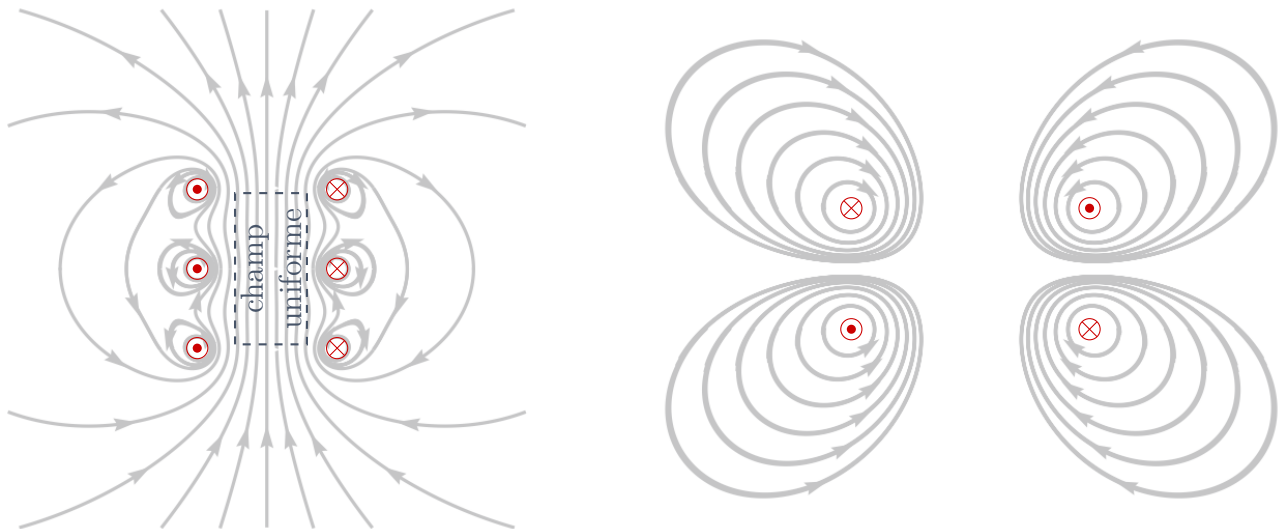


TD18 – Champ magnétique

Exercice 1 – Cartes de champ



Les zones de champ fort sont situées près des sources, les zones de champ faibles sont situées loin des sources.

Exercice 2 – Aimantation

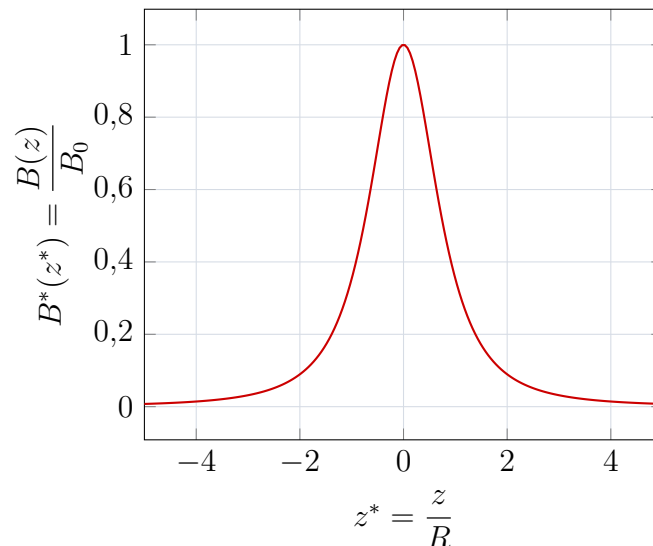
1. La dimension du moment magnétique $\vec{\mu}$ est $[\mu] = I \cdot L^2$. L'aimantation est homogène à un moment magnétique divisé par un volume : elle s'exprime donc en $A \cdot m^{-1}$.
2. Un aimant permanent a un moment magnétique de l'ordre de $10 A \cdot m^2$.
3. Pour $M = 3000 kA \cdot m^{-1}$, $\mu = \pi R^2 e M = 2,4 A \cdot m^2$.
4. Le moment magnétique d'une telle spire est $I \pi R^2 = 7,9 \mu A \cdot m^2$: il en faudrait donc 300 000 pour obtenir le même moment magnétique que l'aimant précédent.
5. Pour obtenir des aimants permanents « forts », il faut utiliser des matériaux qui ont des aimantations élevées. Pour obtenir un moment magnétique μ avec un matériaux d'aimantation M , il faut que l'aimant ait une taille caractéristique $L = (\mu/M)^{1/3}$: plus l'aimantation est grande, plus la taille de l'aimant sera faible.

Matériau	Aimantation ($kA \cdot m^{-1}$)	Taille caractéristique L (mm)
AlNiCo 200	600	16
Ferrite 1000	1700	11
NdFeB	2000 à 4000	8 à 11
SmCo 5	2000 à 3000	9 à 11
SmCo 17	3500 à 5000	8 à 9

Exercice 3 – Champ créé par une spire sur son axe

1. Avec la règle du tire-bouchon : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$.
Cf. cours pour les lignes de champ.
2. Dans le triangle POM rectangle en O , avec P un point appartenant à la spire :

$$\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}, \quad \text{d'où} \quad B(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$



3. On réalise l'application numérique : à 10 cm de la spire, le champ B vaut $1,1 \times 10^{-6}$ T. Ce champ est près de 50 fois plus faible que le champ magnétique terrestre.
4. $\vec{m} = \pi R^2 I \vec{e}_z$, $m = 6,3 \times 10^{-2}$ A·m² : c'est environ 160 fois faible que le moment magnétique d'un aimant.
5. On réalise un DL à l'ordre zéro en $R/z \ll 1$:

$$\vec{B}(z) \underset{\text{DL}_0}{\approx} \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{2\pi z^3} \vec{m}.$$

★ Exercice 4 – Bobines de Helmholtz

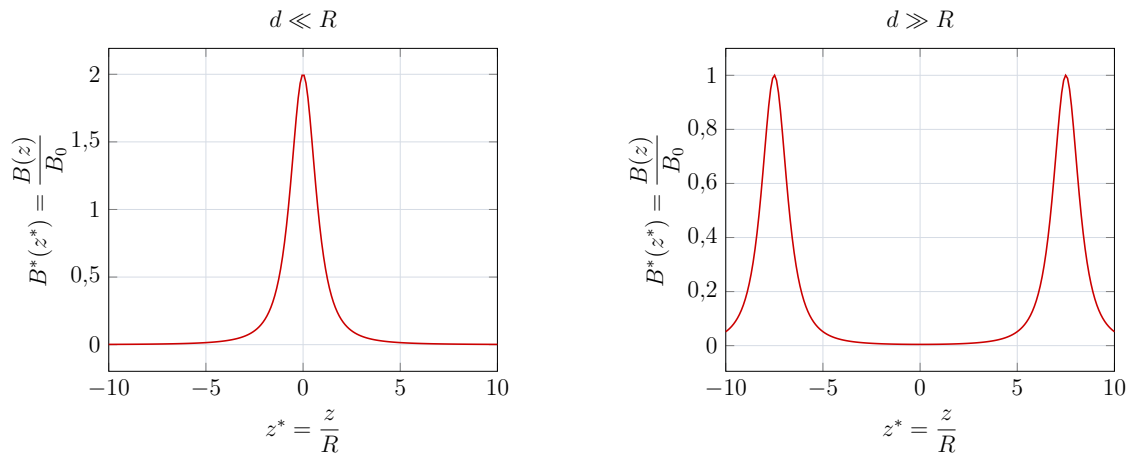
1. On a :

$$\sin \alpha_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \sin \alpha_2 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2}},$$

d'où

$$B(z) = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left(\frac{1}{\left(R^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(R^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \right)$$

2. Avec B_0 le champ créé par une bobine en son centre, on obtient les représentations graphiques ci-dessous.



3. La fonction $B(z)$ est paire : son développement limité au voisinage de zéro ne peut pas contenir de terme impairs en z ou z^3 . En utilisant la formule de Taylor :

$$B(z) \underset{z=0}{=} B(0) + z \left(\frac{dB}{dz} \right)_{z=0} + \frac{z^2}{2} \left(\frac{d^2B}{dz^2} \right)_{z=0} + \frac{z^3}{3!} \left(\frac{d^3B}{dz^3} \right)_{z=0} + o(z^3).$$

La configuration de Helmholtz permet d'obtenir une zone de champ quasi-uniforme au voisinage de son centre.

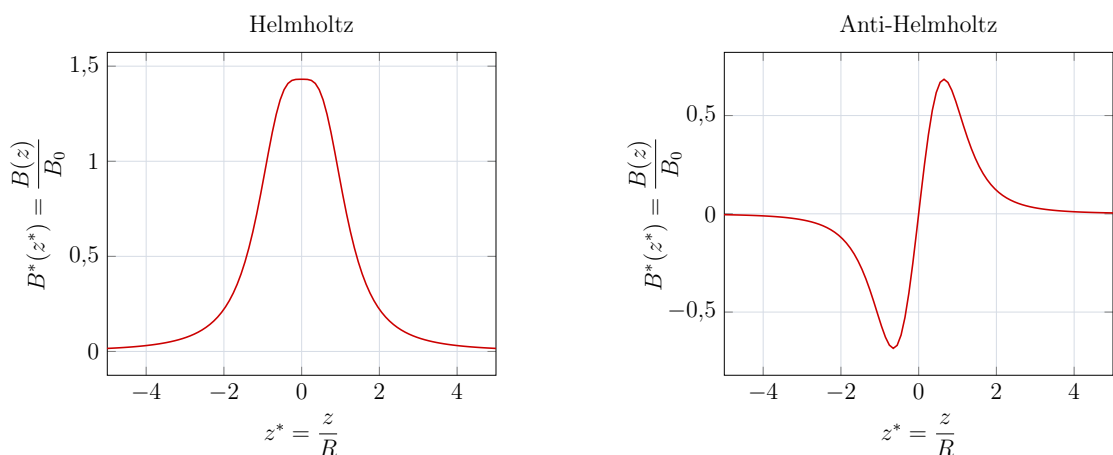
4. Au centre de la configuration de Helmholtz, on a

$$B(0) = \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{\mu_0 NI}{R} = 2,2 \times 10^{-4} \text{ T}.$$

5. En inversant le sens du courant dans l'une des deux bobines, $B(z)$ devient impaire. On obtient une zone, au centre de la configuration de anti-Helmholtz, où le gradient de champ magnétique est uniforme, avec cette fois

$$B(z) = z \left(\frac{dB}{dz} \right)_{z=0} + o(z^2).$$

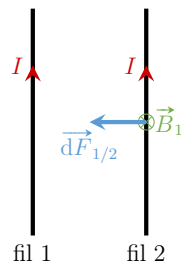
Pour comparaison, on représente le champ B créé sur l'axe d'une configuration de Helmholtz et d'une configuration anti-Helmholtz.



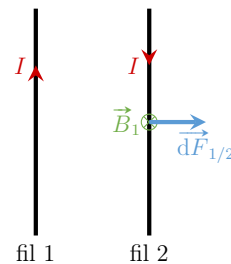
Exercice 5 – Force de Laplace entre deux fils parallèles

- La force de Laplace subie par une portion de fil s'exprime $\vec{dF}_{\text{Lap}} = I \vec{d\ell} \wedge \vec{B}$, où le champ \vec{B} est le champ extérieur, c'est-à-dire celui créé par l'autre fil. Sur les schémas ci-dessous, on représente le champ \vec{B}_1 créé par le fil 1 au niveau du fil 2 et la force de Laplace $\vec{dF}_{1/2}$ subie par une portion du fil 2.

Courants dans le même sens



Courants de sens opposés



Il faut donc que les courants dans les deux fils soient dans le même sens pour que les fils s'attirent.

- Dans le repère cylindrique associé au fil 1, la force subie par une portion de longueur ℓ du fil 2 est

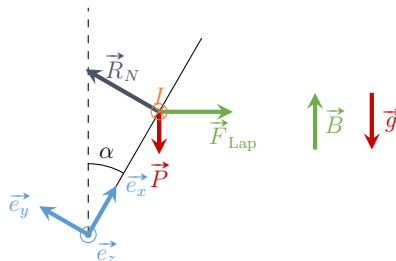
$$\vec{F}_{\text{Lap}} = -\frac{\mu_0 I^2 \ell}{2\pi a} \vec{e}_r.$$

L'intensité de cette force est proportionnelle au carré de l'intensité.

- A.N. : $F_{\text{Lap}} = 5,8 \times 10^{-4} \text{ N}$.
- $I = \sqrt{\frac{2\pi a F_{\text{Lap}}}{\mu_0 \ell}} = 1 \text{ A}$.
- La situation décrite précédemment correspond à la définition historique de l'ampère.

Exercice 6 – Rail de Laplace incliné

- Pour maintenir le barreau, le courant qui le traverse doit être dans le sens opposé au vecteur \vec{e}_z .



- On applique le PFD au barreau. La projection selon \vec{e}_x donne, à l'équilibre

$$0 = -mg \cos \alpha + I_0 \ell B \sin \alpha, \quad \text{d'où} \quad I_0 = \frac{mg}{\ell B} \frac{1}{\tan \alpha} = 7,6 \text{ A}.$$

- Les forces se compensent selon \vec{e}_x (et selon \vec{e}_y), l'accélération est nulle. Le barreau a un mouvement rectiligne uniforme.

Exercice 7 – Équilibre d'une aiguille aimantée

Le moment d'un couple ne dépend pas du point par rapport auquel il est calculé. On suppose que le moment de l'aimant est orienté de la gauche vers la droite (du pôle sud de l'aimant en blanc vers le pôle nord en rouge) pour que les moment du couple magnétique et du poids soient de sens opposés, sans quoi l'équilibre est impossible. En appliquant le TMC au barreau aimanté par rapport au point O, la condition d'équilibre se traduit par

$$\vec{0} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} + \vec{OG} \wedge m\vec{g}, \quad \text{soit} \quad d = \frac{\mu B}{mg}.$$

Exercice 8 – Effet Hall et force de Laplace

1. En présence d'un champ magnétique, le poids est négligeable : on ne considère que la composante magnétique de la force de Lorentz. Compte tenu de l'orientation du courant indiquée sur la figure, la vitesse des électrons est selon $-\vec{e}_x$. On a donc :

$$\vec{F}_L = -e(-u\vec{e}_x \wedge B\vec{e}_z) = -euB\vec{e}_y.$$

En supposant B positif, les électrons sont déviés vers la face A qui se charge négativement. La face B se charge positivement par manque d'électrons.

2. En régime permanent, les composantes électriques et magnétiques de la force de Lorentz se compensent et la vitesse des électrons est dirigée selon $-\vec{e}_x$ (sens opposé au sens conventionnel du courant) :

$$\vec{0} = -e(E\vec{e}_y - u\vec{e}_x \wedge B\vec{e}_z), \quad \text{d'où} \quad E = -uB.$$

On a bien $E < 0$ ce qui est cohérent avec les charges des faces déterminées précédemment.

3. La résultante des forces subies par les électrons du conducteur est nulle en régime permanent. En revanche, quand le barreau est immobile, les ions positifs du réseau cristallin sont soumis à la seule composante électrique de la force de Lorentz due au champ de Hall : le barreau subit une force dirigée selon \vec{e}_y qui accélère le barreau selon \vec{e}_y : c'est la force de Laplace.
4. Un ion du réseau, de charge $+e$ subit la force de Lorentz : $\vec{F}_{\text{ion}} = eE\vec{e}_y = -euB\vec{e}_y$.
5. En notant n la densité volumique de charges, on a

$$\vec{dF} = nSd\ell\vec{F}_{\text{ion}} = -neuSd\ell B\vec{e}_y.$$

6. Par définition, $I = \frac{dq}{dt}$, où dq est la charge qui traverse la section S du conducteur, **comptée positivement pour une charge positive allant dans le sens conventionnel du courant**. On en déduit : $I = neuS$.

La force élémentaire de Laplace s'exprime

$$\vec{dF}_{\text{Lap}} = I\vec{d\ell} \wedge \vec{B} = neuSd\ell B(\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z) = -neuSd\ell B\vec{e}_y = \vec{dF}.$$

On retrouve bien l'expression précédente.