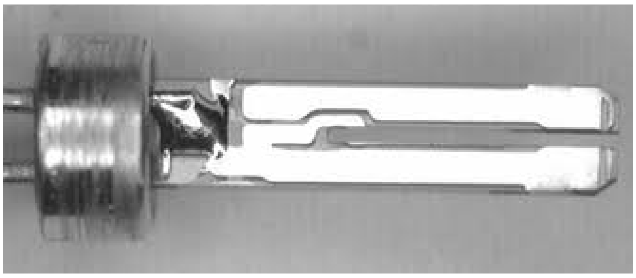
TP7 – Régimes transitoires du deuxième ordre



Le comportement de nombreux systèmes soumis à une perturbation peut être modélisé par une équation différentielle du deuxième ordre. Ce peut être le cas de la régulation de la température d'une pièce ou encore du mouvement du diapason en quartz représenté ci-contre.

On se propose d'étudier les caractéristiques de tels systèmes à l'aide d'un circuit modèle.

Objectifs

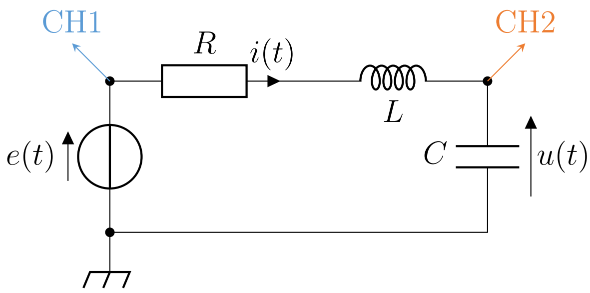
→ Mesurer une tension à l'osciloscope numérique.
→ Simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
→ **Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.**

Étude préliminaire

On considère le circuit représenté ci-contre. Le GBF est utilisé pour produire un échelon $e(t)$ tel que :

$$e(t) = \begin{cases} -E \text{ si } t < 0\,; \\ E \text{ si } t >= 0, \end{cases}$$

avec $E = 5\,\mathrm{V}$.



1. On dispose d'une bobine d'inductance $L = 45\,\mathrm{mH}$. Déterminer les valeurs de la capacité C et de la résistance R à utiliser pour obtenir un circuit de *fréquence* propre $f_0 \approx 35\,\mathrm{kHz}$ et de facteur de qualité $Q \approx 15$.
2. Calculer l'écart relatif $\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0}$ entre la pulsation propre ω_0 et la pseudo-pulsation ω, et l'exprimer en pourcent. Commenter la valeur obtenue.
3. Montrer que le décrément logarithmique défini dans le document 1 vérifie : $\delta = \dfrac{T}{\tau}$.
4. En déduire que dans le cas étudié ici, $Q \approx \dfrac{\pi}{\delta}$.
5. Montrer que l'estimation de l'incertitude-type de type A $u_A(R)$ réalisée par le programme du document 3 est cohérente avec une estimation de l'incertitude-type de type B $u_B(R)$ réalisée à partir des mesures.

   Adapter ce programme pour préparer les estimations d'incertitudes à réaliser pendant la séance.

Différents régimes du circuit RLC

ANA REA

6. Réaliser le circuit RLC représenté précédemment, avec une fréquence propre $f_0 \approx 35\,\text{kHz}$. Mettre en œuvre un protocole permettant d'observer le régime apériodique et le régime pseudo-périodique dans le cas où le circuit est soumis à l'échelon de tension $e(t)$. On notera la valeur des composants utilisés dans chaque régime.

APPEL PROF 1 REA

Caractérisation du régime transitoire pseudo-périodique

APP ANA REA VAL COM

7. On choisit maintenant les valeurs de R, L et C conformément à la question 1. Proposer et mettre en œuvre un protocole permettant de déterminer les caractéristiques du régime transitoire de ce circuit.

Consignes :

- la rédaction du compte-rendu s'appuiera sur l'aide fournie (Doc. 2) ;
- les résultats seront accompagnés de leur incertitude-type ;
- une comparaison quantitative entre les résultats de mesure et des valeurs de référence est attendue.

Documents

Document 1 – Décrément logarithmique

Soit x une grandeur qui vérifie l'équation d'un oscillateur harmonique avec un second membre constant. La solution générale peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi) e^{-t/\tau} + X_\infty,$$

où X_0, X_∞, ω, φ et τ sont des constantes.

On appelle décrément logarithmique de x la quantité δ définie par :

$$\delta = \ln \frac{x(t) - X_\infty}{x(t+T) - X_\infty} = \frac{T}{\tau} \quad \text{avec} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

sa mesure est simple expérimentalement, par exemple en repérant les maximums des oscillations de x et constitue un moyen rapide d'accéder au temps caractéristique τ de la décroissance de l'amplitude des oscillations.

Document 2 – Aide à la rédaction du compte-rendu

COM

APP

1. **Problématisation :** identifier le problème à résoudre et le formuler sous la forme d'une problématique en utilisant le vocabulaire scientifique adapté.

ANA

2. **Hypothèse :** formuler une hypothèse justifiée : « Je pense que ... car ... ».

APP ANA REA VAL

3. **Protocole :** mettre en place un protocole pour vérifier l'hypothèse et répondre à la problématique ou l'objectif donné, en commençant par une brève description (en quelques ligne) de ce qu'il est prévu de faire. Le protocole peut ensuite contenir :
   - une ou plusieurs expériences, qui devront s'accompagner :
     - d'une liste du matériel ;
     - de schémas, clairs et légendés ;
     - d'observations et/ou de mesures associées à leurs incertitudes.
   - un ou des calculs, qui devront être présentés en donnant :
     - la loi, le modèle utilisé et la formule littérale associée ;
     - les conversions ;
     - le résultat de l'application numérique.
   - un raisonnement, une étude de documents, etc.

VAL

4. **Conclusion :** elle apporte la réponse au problème étudié, mais aussi :
   - un retour critique sur l'hypothèse ;
   - une comparaison des résultats obtenus à une valeur de référence quand elle est disponible ;
   - des perspectives d'amélioration du protocole, si nécessaire.

Document 3 – Estimation de l'incertitude sur une mesure de résistance

On mesure simultanément la tension U aux bornes d'une résistance R et l'intensité I du courant la traversant. La documentation des instruments permet de déterminer les imprécisions constructeur. Une mesure unique donne :

$$U = 12{,}05\,\mathrm{V} \quad \text{avec} \quad \Delta U = 0{,}02\,\mathrm{V} \quad \text{et} \quad I = 125{,}1\,\mathrm{mA} \quad \text{avec} \quad \Delta I = 0{,}5\,\mathrm{mA}.$$

Le programme ci-dessous permet d'estimer l'incertitude-type sur la mesure de R en simulant un grand nombre de mesures de U et I, en supposant que ces mesures sont réparties uniformément dans les intervalles $[U-\Delta U, U+\Delta U]$ et $[I-\Delta I, I+\Delta I]$. On effectue ainsi une estimation de l'incertitude de type A.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

#######################
# RÉSULTATS DES MESURES
#######################
u       =  12.05    # tensions aux bornes de la résistance en volts
delta_u =   0.02    # imprécision sur la mesure de U en volts
i       = 125.1e-3  # intensité du courant en ampères
delta_i =   0.5e-3  # imprécision sur la mesure de I en ampères

#########################
# SIMULATION DE N MESURES
#########################
N = 10000
# N mesures de u équiréparties dans l'intervalle [u-du, u+du]
u_sim = rd.uniform(u-delta_u, u+delta_u, N)
# N mesures de i équiréparties dans l'intervalle [i-di, i+di]
i_sim = rd.uniform(i-delta_i, i+delta_i, N)

# fonction utilisée pour le calcul de la grandeur à partir des mesures
def resistance(u,i):
    return u/i      # loi d'ohm

r_sim = resistance(u_sim, i_sim) # calcul des N valeurs de R
val_r = np.mean(r_sim)           # moyenne des valeurs de R simulées
std_r = np.std(r_sim, ddof=1)    # écart-type expérimental

#######################
# AFFICHAGE DU RÉSULTAT
#######################
print("valeur de la résistance : R    = " + str(val_r) + " ohms")
print("incertitude-type        : u(R) = " + str(std_r) + " ohms")
```

`numpy.random.uniform(a, b, N)` : renvoie un tableau de `N` valeurs aléatoires, uniformément réparties entre `a` et `b`.