Chapitre 5 – Circuits du deuxième ordre

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

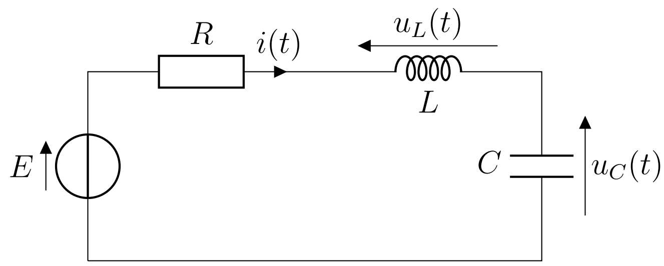
→ Établir l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'une grandeur électrique dans un circuit LC ; la résoudre compte-tenu des conditions initiales.
→ Réaliser un bilan énergétique pour le circuit LC.
→ Écrire sous forme canonique l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'une grandeur électrique dans un circuit RLC afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
→ Identifier la nature de la réponse libre en fonction de la valeur du facteur de qualité.
→ Déterminer la réponse dans le cas d'un régime libre ou indiciel en recherchant les racines du polynôme caractéristique et en tenant compte des conditions initiales.
→ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.
→ Réaliser un bilan énergétique pour un circuit RLC série.

Questions de cours

→ Établir l'équation différentielle vérifiée par une des grandeurs électriques dans un circuit LC (App. 1).
→ Résoudre cette équation pour des conditions initiales données.
→ À partir de l'expression analytique d'une solution donnée par le colleur, représenter graphiquement l'évolution temporelle de cette solution, en faisant apparaitre la période, l'amplitude et la valeur moyenne, ainsi que leur lien avec l'expression analytique.
→ Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur d'un RLC série et la résoudre.
→ Écrire, sans démonstration, la forme canonique d'une équation différentielle d'oscillateur amorti. Lister les différentes formes que peuvent prendre les solutions en fonction de la valeur du facteur de qualité.

Documents

Document 1 – Résolution d'une équation différentielle du second ordre



Dans le circuit RLC série représenté ci-dessus, la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur, sa charge électrique $q(t)$ et l'intensité du courant $i(t)$ vérifient l'équation d'un oscillateur amorti :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 f = \text{cte}, \text{ où } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Prenons l'exemple de l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ dans un circuit RLC série avec source. Sous sa forme canonique, l'équation s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E.$$

Solution de l'équation homogène

Comme pour le premier ordre, on commence par résoudre l'équation homogène :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = 0,$$

dont les solutions sont de la forme e^{rt}, avec $r \in \mathbb{C}$ racine du **polynôme caractéristique** :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0, \text{ de discriminant } \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 (1 - 4Q^2).$$

On peut alors distinguer trois régimes suivant le signe de Δ :

- si $\Delta > 0$, *i.e.* $Q < \frac{1}{2}$, le polynôme caractéristique admet deux racines réelles $r_\pm$:

  $$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 - 4Q^2} < 0.$$

  La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors :

  $$u_{C,\mathrm{h}}(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t}, \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes à déterminer.}$$

  Ce régime correspond à un **amortissement fort** : on parle alors de régime **apériodique**.

- si $\Delta = 0$, *i.e.* $Q = \frac{1}{2}$, le polynôme caractéristique admet une racine double r :

  $$r = -\frac{\omega_0}{2Q} < 0.$$

  La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors :

  $$u_{C,\mathrm{h}}(t) = (At + B)e^{rt}, \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes à déterminer.}$$

  On parle alors de régime **critique**.

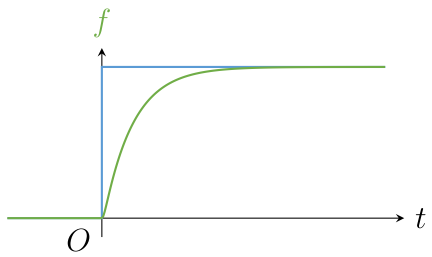
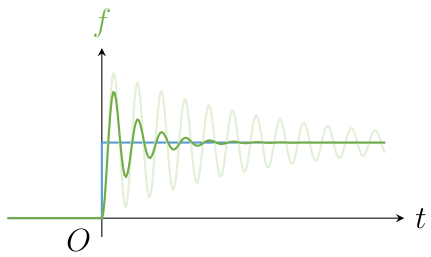
- si $\Delta >$, *i.e.* $Q > \frac{1}{2}$, le polynôme caractéristique admet deux racines complexes $r_\pm$:

  $$r_\pm = -\mu \pm j\Omega, \text{ avec } \mu = \frac{\omega_0}{2Q} \text{ et } \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

  La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors :

  $$u_{C,\mathrm{h}}(t) = e^{-\mu t}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) = Ce^{-\mu t}\cos(\Omega t + \varphi),$$

  où (A, B) et (C, φ) sont des couples de constantes à déterminer. Ce régime correspond à un **amortissement faible** : on parle alors de régime **pseudo-périodique**, de **pseudo-période** $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ et **pseudo-pulsation** Ω, différente de ω_0.
  Dans le cas où l'amortissement est très faible, c'est-à-dire pour $Q \gg 1$, la pseudo-pulsation est très proche de la pulsation propre ($\Omega \approx \omega_0$) et le nombre d'oscillations pendant le régime transitoire est de l'ordre de Q.

Facteur de qualité	$Q < \frac{1}{2}$	$Q = \frac{1}{2}$	$Q > \frac{1}{2}$
Régime	apériodique	critique	pseudo-périodique
Racines du polynôme $r_\pm$	$-\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}$	$r = -\frac{\omega_0}{2Q}$	$\mu \pm j\Omega = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$
Solution de l'équation homogène	$Ae^{r_+t} + Be^{r_-t}$	$(At + B)e^{rt}$	$e^{-\mu t}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$
Durée du régime transitoire	quelques $\frac{1}{\lvert r_+\rvert}$	quelques $\frac{1}{\lvert r\rvert}$	quelques $\frac{1}{\mu}$
Évolution temporelle (échelon)			

Solution particulière

Avec un second membre constant, la solution particulière est simplement :

$$u_{C,\mathrm{p}}(t) = E.$$

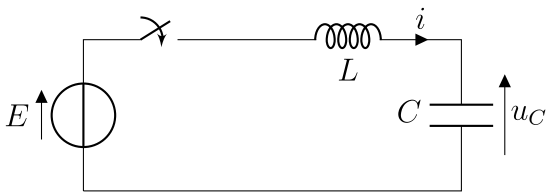
Utilisation des conditions initiales

Comme pour le premier ordre, la solution générale s'obtient en sommant de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière. Les coefficients A et B (où C et φ) s'obtiennent finalement en utilisant les conditions initiales :

- la tension aux bornes du condensateur est continue : $u_C(t = 0^-) = u_C(t = 0^+)$;
- le courant parcourant la bobine est continu : $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^-) = \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+)$.

Applications

Application 1 – Équation différentielle associée à un circuit LC série



On considère le circuit représenté ci-contre, composé d'un générateur idéal de tension de f.é.m. E, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ pour $t > 0$.
2. Donner la dimension de $\sqrt{LC}$.
3. Comment pourrait-on obtenir l'équation différentielle vérifiée par la charge du condensateur $q(t)$? Et par l'intensité du courant $i(t)$?

Application 2 – Solution oscillante

Les solutions de l'équation homogène d'un oscillateur harmonique s'écrivent sous la forme :

$$u_C(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \sin(\omega_0 t + \psi) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t).$$

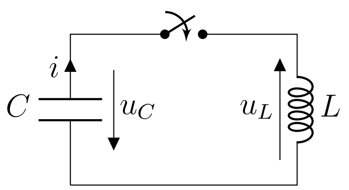
1. Vérifier que la fonction $u_C(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de l'équation homogène de l'oscillateur harmonique.
2. Montrer que la deuxième forme est aussi solution et préciser la relation entre φ et ψ.
3. Montrer que la dernière forme est équivalente à la première, puis à la deuxième en utilisant les formules d'addition des cosinus et sinus.

Application 3 – Détermination des conditions initiales

On reprend la situation décrite dans l'application 1. On suppose qu'avant la fermeture de l'interrupteur, le condensateur est déchargé et que l'intensité du courant est nulle.

1. Justifier que l'intensité $i(t)$ et la tension $u_C(t)$ sont continues.
2. En déduire les deux conditions initiales portant sur $u_C(t)$ et sa dérivée première.
3. Donner l'expression de la solution $u_C(t)$.
4. Représenter graphiquement $u_C(t)$ et faire apparaitre la période T, l'amplitude U_1 et la valeur moyenne de ce signal U_0. Exprimer ces paramètres en fonctions de E, L et C.

Application 4 – Conservation de l'énergie

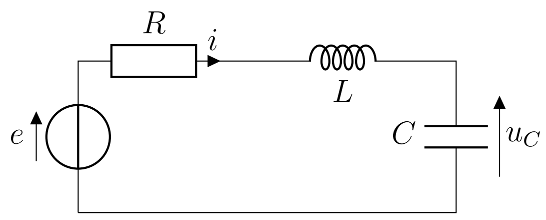


On considère le circuit représenté ci-contre. Le condensateur est initialement chargé sous une tension E. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Donner l'expression de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ et de l'intensité du courant $i(t)$ pour $t > 0$.

2. En déduire l'expression de l'énergie $\mathcal{E}_C(t)$ stockée par le condensateur et celle $\mathcal{E}_L(t)$ emmagasiné par la bobine en fonction du temps.
3. Les représenter sur un même graphe et montrer qu'à tout instant $\mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \mathcal{E}_0$, où $\mathcal{E}_0$ est l'énergie stockée par le condensateur avant la fermeture de l'interrupteur.

Application 5 – Équation différentielle de l'oscillateur amorti



On considère le circuit RLC série représenté ci-contre. Le générateur impose un échelon de tension parfait, c'est-à-dire :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ pour $t > 0$.
2. L'écrire sous sa forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E.$$

Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.

3. Quelle est la dimension de Q ?

Application 6 – Résistance critique

On reprend le circuit de l'application 5 et on donne $L = 1{,}0\,\mathrm{mH}$ et $C = 47\,\mathrm{nF}$.

1. Exprimer et calculer la valeur de la résistance critique R_c correspondant au régime critique.
2. Donner la condition sur R pour laquelle le régime transitoire présente des oscillations.

Application 7 – Solutions de l'oscillateur amorti

On reprend la situation décrite dans l'application 5 et les valeurs des composants données dans l'application 6.

1. Justifier que les conditions initiales portant sur $u_C(t)$ et sa dérivée première s'expriment :

$$u_C(t = 0^+) = 0 \text{ et } \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0.$$

2. Donner l'expression de $u_C(t)$ dans le cas où $R = 2R_c$.
3. En déduire l'expression de $i(t)$.
4. Représenter graphiquement $u_C(t)$.
5. Faire de même pour $R = \frac{R_c}{10}$.