TD 13.

Exercice 4.

1. $e(t) = E_0 \cos \omega t$

$$\boxed{\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t}}$$

2. Avec un pont diviseur de tension :

$$\underline{u_c}(t) = \underline{e}(t) \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R}$$

$$\boxed{\underline{u_c}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}}$$

3. On a donc :

$$\underline{e}(t) = \left(1 - LC\omega^2 + jRC\omega\right)\underline{u}(t).$$

En RSF et en régime permanent, on a

$$\frac{d}{dt} \Leftrightarrow \times j\omega \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{dt^2} \Leftrightarrow \times (j\omega)^2 = \times(-\omega^2)$$

d'où

$$\underline{e}(t) = \left(1 + LC\frac{d^2}{dt^2} + RC\frac{d}{dt}\right)\underline{u}(t)$$

Finalement en repassant en réel :

$$e(t) = LC\frac{d^2}{dt^2}u_c(t) + RC\frac{d}{dt}u_c(t) + u_c(t)$$

$$\frac{e(t)}{LC} = \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c(t)}{LC}$$

Sous sa forme canonique, l'équation devient :

$$\boxed{\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 e}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

4. Avec les notation introduites ci-dessus

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

6. $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

G admet un maximum si le dénominateur admet un minimum, c-à-d si

$$f(x) = (1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2 \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

admet un minimum.

$$f'(x) = 2 \times 2x(x^2-1) + \frac{2x}{Q^2}$$
$$= 2x\left(2(x^2-1) + \frac{1}{Q^2}\right)$$

On cherche des racines positives $(\omega > 0)$

$$2(x^2-1) = -\frac{1}{Q^2}$$

$$x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Cette équation n'admet de solutions réelles que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. On a alors :

$$x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

car on cherche les solutions positives.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

donc il s'agit d'un minimum.

$G(\omega)$ est maximale en

$$\boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

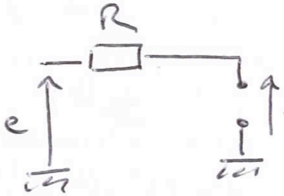
On observe une résonance en tension aux bornes du condensateur dans le circuit RLC série à une fréquence inférieure à la fréquence propre, seulement si le facteur de qualité est suffisamment grand

5. $\boxed{G(\omega_0) = Q}$ et $\boxed{\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}}$

7. Pour $Q \gg 1$ (résonance étroite), on a $\boxed{\omega_r \approx \omega_0}$

8. * En BF :

$$\underline{H}(j\omega) \underset{BF}{\approx} 1.$$

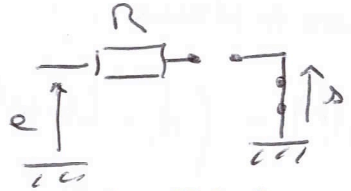


$\Rightarrow s = e$
OK

d'où $G(\omega) \approx 1$ et $\varphi(\omega) \approx 0$.

* En HF

$$\underline{H}(j\omega) \underset{HF}{\approx} -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$



$\Rightarrow s = 0$
OK

d'où $G(\omega) \approx \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \underset{\omega \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\varphi(\omega) \approx -\pi$

9. Cf. td13-exo4.py