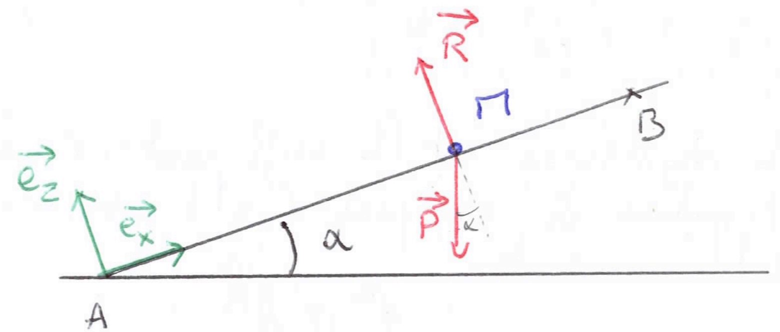
DM5 (1)

Exercice 1

1. Système : bloc de glace, assimilé à son centre de masse M, de masse m.

Référentiel : terrestre, considéré galiléen.



Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = mg(-\cos\alpha\,\vec{e_z} - \sin\alpha\,\vec{e_x})$
- Réaction de la rampe : $\vec{R}_{rampe} = R_N\,\vec{e_z}$ (pas de frottements donc $R_T = 0$)

Etude cinématique :

$\vec{AM} = X\,\vec{e_x}$ (pas de mouvement selon $\vec{e_z}$).

$\vec{v} = \dot{X}\,\vec{e_x}$

$\vec{a} = \ddot{X}\,\vec{e_x}$

(2)

On applique le PFD (m = cste) et on utilise sa projection selon $\vec{e_x}$:

$$\cancel{m}\ddot{X} = -\cancel{m}g\sin\alpha$$

En posant $v(t) = \dot{X}(t)$, comme indiqué dans l'énoncé :

$$\dot{v} = -g\sin\alpha$$

$$v(t) = -g\sin\alpha\, t + \text{cste}$$

$$v(t=0) \underset{\text{sol}}{=} \text{cste} \underset{\text{CI}}{=} v_A$$

Finalement :

$$\boxed{v(t) = v_A - g\sin\alpha\, t}$$

2. Dans le triangle BAO : $AB = \dfrac{R}{\tan\alpha}$

En intégrant encore l'expression de $v(t)$ trouvée précédemment, avec $X(t=0)=0$

$$\boxed{X(t) = v_A t - \frac{g}{2}\sin\alpha\, t^2}$$

On cherche l'instant t_B tel que

$$X(t_1) = AB = \frac{R}{\tan\alpha}$$

ce qui revient à résoudre l'équation

$$\frac{g}{2}\sin\alpha\, t_B^2 - v_A t_B + \frac{R}{\tan\alpha} = 0,$$

qui admet des solutions réelles si :

$$\Delta = v_A^2 - \frac{2gR\sin\alpha}{\tan\alpha} \geq 0.$$

c'est-à-dire, si

$$v_A^2 \geq \underbrace{2gR\cos\alpha}_{v_p^2}$$

On garde la solution positive

$\boxed{v_p = \sqrt{2gR\cos\alpha}}$ AN : $v_p = 5{,}8\ m.s^{-1}$

3. $$t_B = \frac{v_A \pm \sqrt{v_A^2 - v_p^2}}{g\sin\alpha}$$

On garde la solution avec le signe "−" (la plus petite des deux), l'autre correspondant au deuxième passage de M en B, si le bloc continuait à monter sur la rampe avant de redescendre.

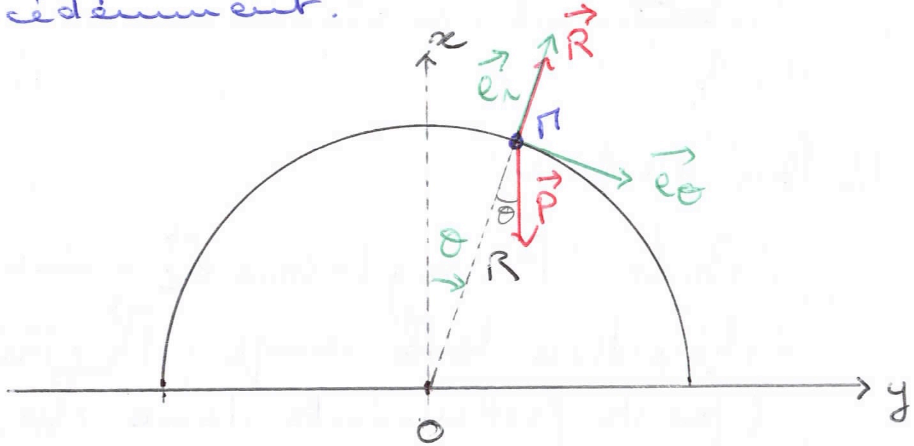
$$\boxed{t_B = \frac{v_A - \sqrt{v_A^2 - v_p^2}}{g\sin\alpha}}$$

4. On injecte l'expression de t_B dans la solution obtenue à la question 1.

$$v_B = v(t_B) = \cancel{v_A} - \left(\cancel{v_A} - \sqrt{v_A^2 - v_p^2}\right)$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{v_A^2 - v_p^2}}$$

5. Le système et le référentiel sont identiques à ce qui a été énoncé précédemment.



Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = mg(-\cos\theta\,\vec{e_r} + \sin\theta\,\vec{e_\theta})$
- Réaction : $\vec{R}_{sf} = \vec{R_N} = R_N\,\vec{e_r}$

Etude cinématique :

$$\vec{OM} = R\,\vec{e_r} \qquad (R = \text{cste})$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\vec{e_r}$$

On applique le PFD (m = cste)

selon $\vec{e_r}$: $\boxed{-mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + R_N}$

selon $\vec{e_\theta}$: $\boxed{mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta}$

6. Le PFD selon $\vec{e_\theta}$ s'intègre facilement

$$\cancel{m}R\ddot{\theta} = \cancel{m}g\sin\theta \quad \times\dot{\theta}$$

$$R\dot{\theta}\ddot{\theta} = g\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(R\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(-g\cos\theta\right)$$

On peut ensuite intégrer, en veillant à intégrer avec les bonnes bornes : on intègre entre $t=0$ et $t=\tau$, l'instant $t=0$ ayant été redéfini comme l'instant où le point M arrive sur l'igloo, c'est à dire au niveau du point B.

On a alors :

$$\theta(t=0) = -\alpha < 0.$$

$$v(t=0) = R\dot{\theta}(t=0) = v_B \quad \text{d'où} \quad \dot{\theta}(t=0) = \frac{v_B}{R}$$

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt}\left(R\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right)dt = \int_0^\tau \frac{d}{dt}\left(-g\cos\theta\right)dt$$

$$\left[R\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right]_0^\tau = \left[-g\cos\theta\right]_0^\tau$$

$$\frac{R}{2}\left(\dot{\theta}^2(t=\tau) - \dot{\theta}^2(t=0)\right) = -g\left(\cos\theta(t=\tau) - \cos\theta(t=0)\right)$$

$$\frac{R}{2}\left(\dot{\theta}^2(\tau) - \frac{v_B^2}{R^2}\right) = -g\left(\cos\theta(\tau) - \cos\alpha\right)$$

$$\dot{\theta}^2(\tau) = \frac{2g}{R}\left(\cos\alpha - \cos\theta(\tau)\right) + \frac{v_B^2}{R^2}$$

Puisque $\dot{\theta} > 0$, on a finalement

$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{v_B^2}{R^2} + \frac{2g}{R}\left(\cos\alpha - \cos\theta\right)}}$$

7. On utilise la projection du PFD selon $\vec{e_r}$, et on injecte la solution obtenue précédemment.

$$R_N = + mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2$$

$$R_N = + mg\cos\theta - mR\left(\frac{v_B^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(\cos\alpha - \cos\theta)\right)$$

$$\boxed{= + mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha) - m\frac{v_B^2}{R}}$$

8. Sur l'intervalle $[-\alpha, 0]$

$\underset{\text{M en B}}{-\alpha}$, $\underset{\text{au sommet de l'igloo}}{0}$

R_N est une fonction croissante de θ (donc minimale en $\theta = -\alpha$). Le glaçon ne décolle pas si R_N ne s'annule pas : Il suffit donc que $R_N(-\alpha) > 0$

$$R_N(-\alpha) = mg\cos\alpha - m\frac{v_B^2}{R}$$

$$= m\left(g\cos\alpha - \frac{v_A^2 - v_f^2}{R}\right)$$

$$= m\left(g\cos\alpha - \frac{v_A^2}{R} + 2g\cos\alpha\right)$$

$$= \frac{m}{R}\left(3Rg\cos\alpha - v_A^2\right)$$

On doit donc avoir

$$\boxed{v_A < \sqrt{3Rg\cos\alpha}}$$

ou $v_B < \sqrt{Rg\cos\alpha}$

AN : $\underline{v_f' = \sqrt{3Rg\cos\alpha} = 7{,}1\ m.s^{-1}}$

9. On cherche la valeur de θ pour laquelle R_N s'annule.

$$R_N(\theta_d) = 0$$

$$\cancel{m}g(3\cos\theta_d - 2\cos\alpha) = \cancel{m}\frac{v_B^2}{R}$$

$$3\cos\theta_d = \frac{v_B^2}{Rg} + 2\cos\alpha$$

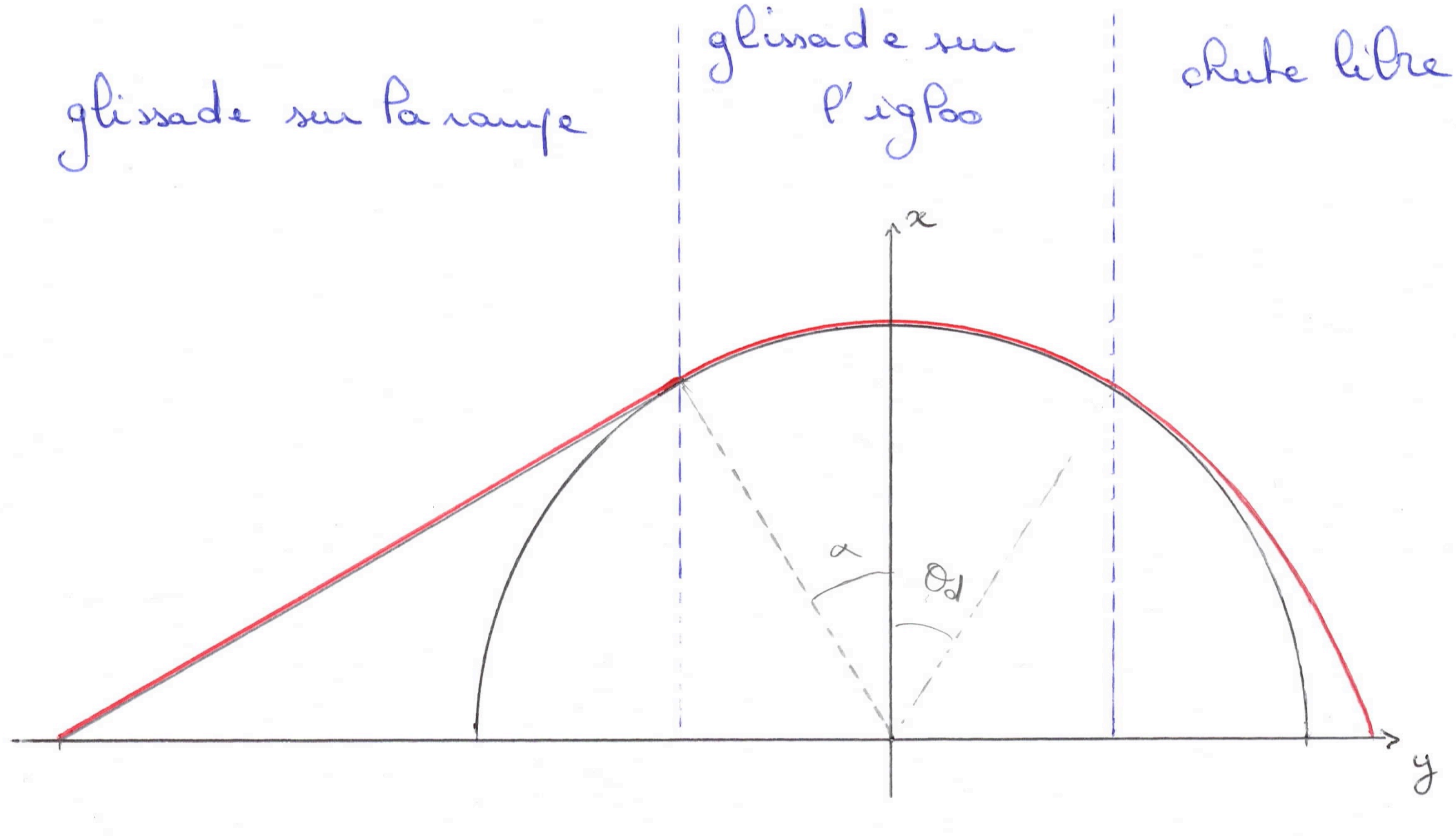
$$= \frac{\left(\sqrt{v_A^2 - v_f^2}\right)^2}{Rg} + 2\cos\alpha$$

$$= \frac{v_A^2}{Rg} - 2\cos\alpha + 2\cos\alpha$$

d'où $\boxed{\theta_d = \arccos\left(\frac{v_A^2}{3Rg}\right)}$ AN : $\underline{\theta_d = 34^\circ}$

Le glaçon est en chute libre après θ_d. (ici on a bien $v_A < v_f'$)

9



glissade sur la rampe
glissade sur l'igloo
chute libre
x
y
α
θ_d