TD8 – Énergie mécanique

Exercice 1 – Distance de freinage

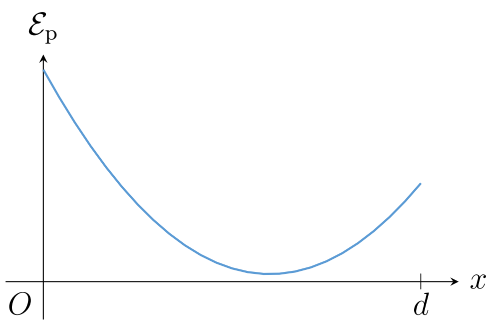
1. Avec le TEC, on trouve $W = -0{,}14\,\mathrm{MJ}$.
2. $W = -Fd$, d'où $F = 9{,}6\,\mathrm{kN}$.
3. En supposant que la norme de la force est la même, avec le TEC, on trouve $d' \approx 30\,\mathrm{m} = 2d$, ce qui cohérent puisque $70/50 = 1{,}4 \approx \sqrt{2}$.
4. Le TEC donne $\Delta\mathcal{E}_\mathrm{c} = -Fd$, et $\mathcal{E}_\mathrm{c} \propto v^2$. La distance de freinage est la distance nécessaire pour dissiper l'énergie cinétique de la voiture, or cette distance est proportionnelle à $\mathcal{E}_\mathrm{c}$ donc proportionnelle au carré de la vitesse.

Exercice 2 – Mouvement sur un cercle

1. On retrouve l'équation du pendule simple : $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{R}\theta = 0$.
2. En utilisant la projection du PFD selon $\overrightarrow{e_r}$ et la conservation de l'énergie mécanique, on obtient le résultat demandé $N = m\left[\dfrac{v_0^2}{R} + g(3\cos\theta - 2)\right]$.
3. N doit rester positive, ce qui donne $v_0 > v_\mathrm{min} = \sqrt{5gR}$.
4. L'angle pour lequel $N = 0$ est $\theta = \arccos\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{v_0^2}{3gR}\right)$.

Exercice 3 – Masse doublement retenue

1. $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) = \dfrac{1}{2}k_1(x-\ell_0)^2 + \dfrac{1}{2}k_2(d-x-\ell_0)^2$



2. $x_\text{éq} = \dfrac{k_2 d + (k_1-k_2)\ell_0}{k_1+k_2}$. On retrouve bien $x_\text{éq} = d/2$ pour $k_1 = k_2$.
3. $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}c^2}(x_\text{éq}) = k_1 + k_2 > 0$: position d'équilibre stable.
4. $\ddot{x} + \dfrac{k_1+k_2}{m}x = \dfrac{k_1+k_2}{m}x_\text{éq}$.
5. $x(t) = x_\text{éq} + \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t$, avec $\omega = \sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}$.

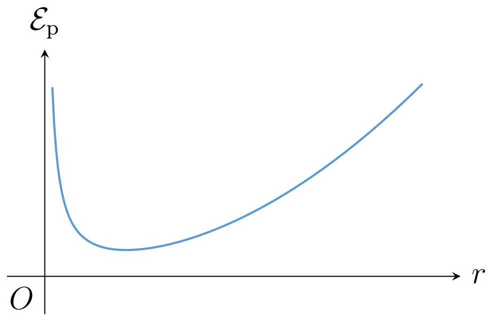
Exercice 4 – Étude d'une force

Une particule de masse m astreinte à se déplacer sur un axe $(O, \overrightarrow{e_r})$ est soumise à la force :

$$\overrightarrow{F}(r) = \left(-kr + \frac{a}{r^2}\right)\overrightarrow{e_r},$$

où a et k sont des constantes positives.

1. Le terme $-kr$ est analogue à une force de rappel élastique, qui ramène la masse vers O. Le terme $\frac{a}{r^2}$ est analogue à la force électrostatique entre deux particules de même charge. C'est une force répulsive, qui éloigne m de O.
2. La position $r_{\text{éq}}$ telle que la force est nulle est $r_{\text{éq}} = \left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{3}}$.
3. On peut écrire $\overrightarrow{F} = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{e_r}$, avec $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{a}{r}$.
4. On retrouve une unique position d'équilibre. Le système est forcément dans un état lié car il est piégé dans un puits de potentiel.



5. À l'aide d'un DL à l'ordre 2 avec la formule de Taylor-Young, appliquée au voisinage de $r_{\text{éq}}$, on retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique analogue à un système masse ressort, avec un ressort de raideur $\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r^2}(r_{\text{éq}}) = 3k$, d'où $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$.

Exercice 5 – Profil d'énergie potentielle

1. On a une position d'équilibre stable en $x = 0$ et deux positions d'équilibre instable en $x \approx \pm 1\,\mathrm{m}$.
   Une telle vitesse n'existe pas : puisqu'il n'y a pas de frottements, $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ est conservée. Si le système peut franchir l'un des maximums d'énergie potentielle, il franchira nécessairement le deuxième : il est alors dans un état libre.
2. La profondeur du puits est $\mathcal{E}_0 \approx 0{,}7\,\mathrm{J}$, ce qui correspond à $v_1 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0}{m}} \approx 1{,}7\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.
   Pour $\mathcal{E}_\mathrm{m} = 0{,}3\,\mathrm{J}$, l'amplitude des oscillations est $\approx 0{,}7\,\mathrm{m}$.
3. En $x = -5\,\mathrm{m}$, $\mathcal{E}_\mathrm{p} \approx 0$, donc $v_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_\mathrm{m}}{m}} \approx 1{,}1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Graphiquement, on lit $x_2 \approx -1{,}5\,\mathrm{m}$.
4. Pour passer de $x = -\infty$ à $x = +\infty$, il lui faut une énergie mécanique supérieure à $\sim 0{,}45\,\mathrm{J}$, ce qui correspond à $v_3 \approx 1{,}3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Au fond du puits, on a $v_4 = v_1$: avec une vitesse initiale v_3, le système arrive au maximum d'énergie potentielle avec une vitesse nulle.