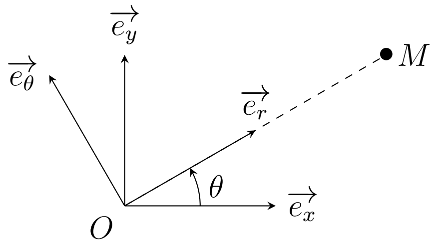
TD6 – Cinématique du point matériel

Exercice 1 – Changement de coordonnées

1. Schéma :



2. $\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y}$.
3. $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \dot\theta\cos\theta\overrightarrow{e_y} = \dot\theta\overrightarrow{e_\theta}$.
   $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\cos\theta\overrightarrow{e_x} - \dot\theta\sin\theta\overrightarrow{e_y} = -\dot\theta\overrightarrow{e_r}$.

Exercice 2 – Course de voitures radio-télécommandées

1. En posant v la vitesse maximale d'une voiture et a son accélération, la durée Δt nécessaire pour parcourir $d = 15\,\mathrm{m}$ est :

$$\Delta t = \frac{v}{2a} + \frac{d}{v}.$$

AN : $\Delta t_A = 5{,}33\,\mathrm{s}$ et $\Delta t_B = 5{,}86\,\mathrm{s}$. Anatole l'emporte.

2. La distance d' est parcourue en une durée identique par les deux voitures si :

$$d' = \frac{1}{2}\left(\frac{v_B}{a_B} - \frac{v_A}{a_A}\right)\frac{v_A v_B}{v_B - v_A} = 6{,}2\,\mathrm{m}.$$

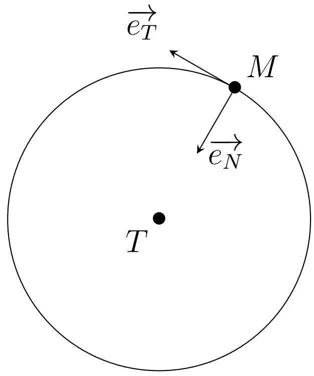
Barnabé doit choisir une distance inférieure à d' pour gagner.

Exercice 3 – May the force be with you

1. $v_0 = \dfrac{6L}{\Delta t} = 100\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.
2. L'amplitude Y_0 de la sinusoïde doit rester inférieure à $\dfrac{10gL^2}{\pi^2 v_0^2}$.
3. Déterminer l'amplitude de la sinusoïde pour que l'accélération du véhicule reste inférieure à $10g$ en valeur absolue, avec $g = 9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} = 40\,\mathrm{m}$. Il passe proche des poteaux, mais c'est un Jedi !

Exercice 4 – Satellite géostationnaire

1. Schéma :



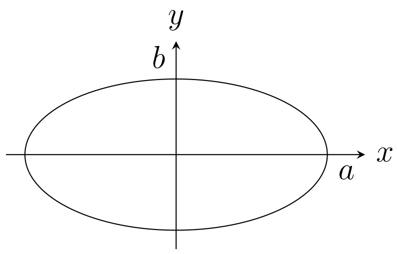
2. $v = \dfrac{2\pi r}{T}$.

3. $r = \left(\dfrac{g_0 R^2 T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 42{,}4\,\mathrm{km}$, donc $h = r - R = 36\,\mathrm{km}$.

4. $v = 3{,}1\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Exercice 5 – Mouvement elliptique

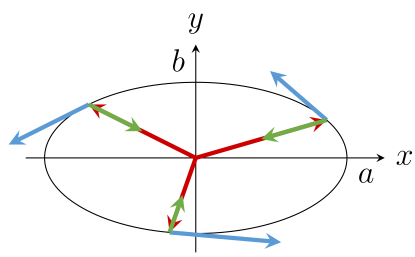
1. $\alpha = a$, $\beta = b$, $\varphi = 0$ et $\psi = -\dfrac{\pi}{2}$.



2. $\overrightarrow{OM} = a\cos\omega t\overrightarrow{e_x} + b\sin\omega t\overrightarrow{e_y}$.
$\overrightarrow{v} = -a\omega\sin\omega t\overrightarrow{e_x} + b\omega\cos\omega t\overrightarrow{e_y}$.
$\overrightarrow{a} = -a\omega^2\cos\omega t\overrightarrow{e_x} + -b\omega^2\sin\omega t\overrightarrow{e_y}$.

3. $\overrightarrow{a} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires mais de sens opposés.

4. $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{a}$:



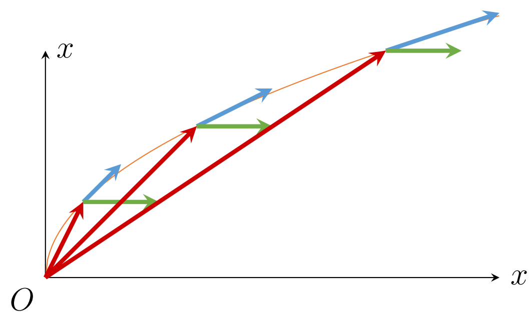
Exercice 6 – Ballon sonde

1. $\dot{z} = v_0$, $z(t) = v_0 t$.

2. $\dot{x} = \dfrac{v_0 t}{\tau}$, $x(t) = \dfrac{v_0 t^2}{2\tau}$.

3. $z(x) = \sqrt{2 v_0 \tau x}$.

4. $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{a}$:



5. $\ddot{x} = \dfrac{v_0}{\tau}$ et $\ddot{z} = 0$.