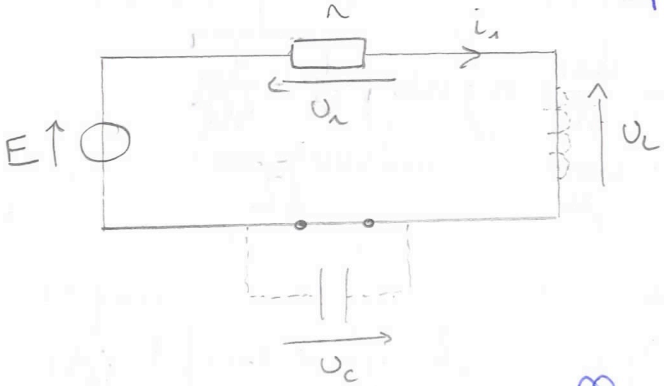
DM4

1. En $t = 0^-$, le circuit est équivalent à :

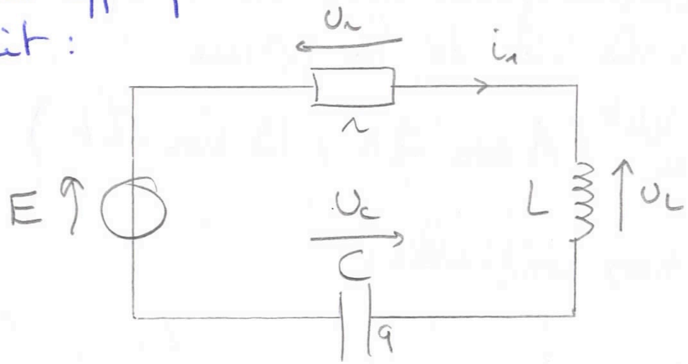


La tension u_c est donc nulle. La tension aux bornes du condensateur est continue (car l'énergie est continue et $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} C u_c^2$) d'où

$$\underline{u_c(t=0^-) = u_c(t=0^+) = 0}$$

Il ne peut donc pas y avoir d'étincelle aux bornes du rupteur en présence du condensateur.

2. On applique la loi des mailles dans le circuit :



$$E = u_r + u_L + u_c \quad \text{) Lois de comportement}$$

$$= r i_1 + L \frac{di_1}{dt} + u_c \quad \text{) } i_1 = \frac{dq}{dt} \text{ et } q = C u_c$$

$$= r \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} \quad \text{) } \times \frac{1}{L}$$

$$\frac{CE}{CL} = \frac{r}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC}$$

Par identification, on a :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q_0 = CE \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{r}{L} \quad \text{d'où } Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 Q_0 \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}} \text{ et } Q_0 = CE}$$

3. D'après la question 1, $u_c(t=0^+) = 0$, or $C u_c = q$ d'où $\underline{q(t=0^+) = 0}$.

L'intensité du courant traversant la bobine est continue (car l'énergie est continue et $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i_1^2$) d'où :

$$\underline{i_1(t=0^-) = i_1(t=0^+) = I_1}$$

et $i_1(t) = \frac{dq}{dt}(t) \Rightarrow \frac{dq}{dt}(t=0^+) = I_1$

4. Avec le condensateur, le régime transitoire qui suit l'ouverture de l'interrupteur présente des oscillations : c'est un régime pseudo-périodique.

On observe que sur le graphique, $|u_2(t)|$ est supérieure à 10 kV au voisinage des maxima des deux premières pseudo périodes, ce qui formera quatre étincelles aux bornes de la bougie.

5. Le régime transitoire observé correspond à un régime pseudo-périodique. On a donc :

$$\boxed{Q > \frac{1}{2}}$$

6. Equation homogène :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

Le polynôme caractéristique est :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) < 0$$

Les racines sont complexes :

$$r_\pm = \underbrace{-\frac{\omega_0}{2Q}}_{\mu} \pm j\underbrace{\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}_{\Omega}$$

On pose :

$$\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Les solutions sont de la forme :

$$q_H(t) = e^{-\mu t}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$$

* Solution particulière :

$q_p(t) = D$ où D est une constante.

$$0 + 0 + \omega_0^2 D = \omega_0^2 Q_0 \Rightarrow D = Q_0$$

* La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = e^{-\mu t}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t) + Q_0$$

* Conditions initiales :

$$\left.\begin{array}{l} q(t=0) = 0 \\ q(t=0) = A + Q_0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -Q_0$$ (5)

$$\frac{dq(t=0)}{dt} = I_1$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = e^{-\mu t}\left((-A\mu + B\Omega)\cos \Omega t + (-\mu B - A\Omega)\sin \Omega t \right)$$

$$\frac{dq}{dt}(t=0) = -A\mu + B\Omega$$

$$\Rightarrow -A\mu + B\Omega = I_1 \qquad B = \frac{I_1 + A\mu}{\Omega}$$

Finalement :

$$\boxed{q(t) = e^{-\mu t}\left(-Q_0 \cos \Omega t + \frac{I_1 - Q_0\mu}{\Omega}\sin \Omega t\right) + Q_0 \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

7. On a immédiatement

$$\frac{dx}{dt}(t) = y(t)$$

et puisque $\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$, l'équation vérifiée par la charge $q(t)$ peut s'écrire sous la forme : (6)

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt}(t) = y(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{\omega_0}{Q}y(t) - \omega_0^2 x(t) + \omega_0^2 Q_0 \\ \text{avec } x(t) = q(t) \text{ et } y(t) = \frac{dq}{dt}(t) \end{array}}$$

8.
```
def charge_primaire(V, t):
    x, y = V
    dx = y
    dy = -w0/Q*y - w0**2*x + w0**2*Q0
    return [dx, dy]
```

9. Pour $\underline{\omega_0 = 1570\ s^{-1}}$ et $\underline{Q = 13}$, on obtient une courbe similaire à celle de la question 4.

En effet, la pseudo période est 4 ms et puisque le facteur de qualité est grand devant $\frac{1}{2}$, la pseudo pulsation est environ égale à la pulsation propre :

$$\omega_0 \simeq \Omega \simeq \frac{2\pi}{T}$$

10 La solution numérique et la solution analytique obtenue à la question 6 se superposent parfaitement, ce qui indique :

- qu'il n'y a pas d'erreur de calcul
- que la résolution numérique est adaptée à ce problème.

11. —

Avec les valeurs de ω_0 et Q obtenues à la question 9, on peut obtenir des estimations de L et C :

$$L = \frac{r Q}{\omega_0} \simeq 50 \text{ mH} \qquad C = \frac{1}{r Q \omega_0} \simeq 8{,}2 \mu F$$