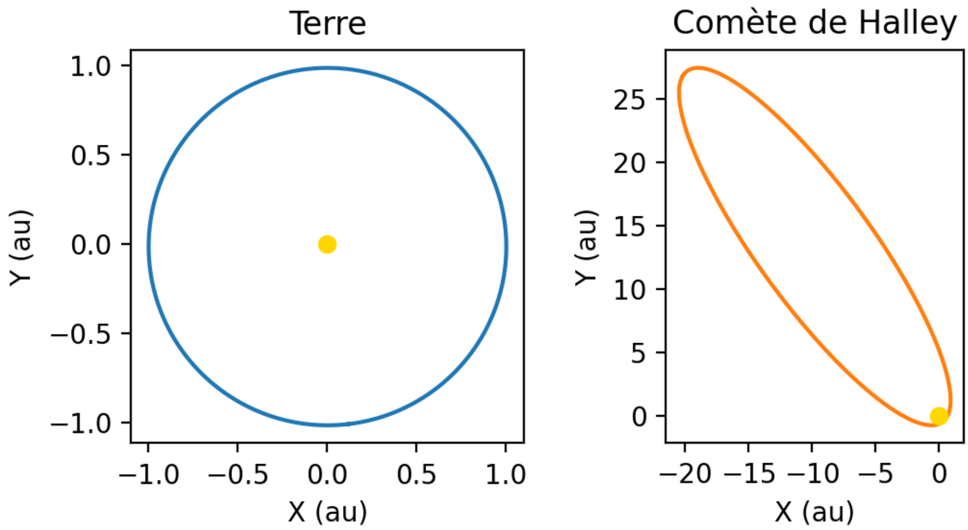
Outils mathématiques pour la physique

1 Équations algébriques

Exercice 1 – Équation de Kepler



Dans le cadre d'une approche simplifiée, pour obtenir l'évolution temporelle de la position d'une planète en orbite autour du Soleil, on est amené à résoudre l'équation de Kepler :

$$E - e\sin E = M.$$

M est un paramètre angulaire fictif dont l'évolution temporelle est simple et e est l'excentricité de l'orbite. On cherche la valeur du paramètre angulaire E qui repère la position de la planète. Dans le cas général, cette équation n'admet pas de solution analytique : il faut la résoudre numériquement ou graphiquement.

1. Résoudre l'équation de Kepler pour la Terre ($e \approx 0$) à la date pour laquelle $M = \frac{\pi}{4}$.
2. Résoudre graphiquement cette équation pour la comète de Halley ($e \approx 0{,}97$) à la date pour laquelle $M = \frac{\pi}{4}$.

Un petite manipulation mathématique permet d'exprimer l'équation de Kepler sous la forme $f(E) = g(E)$, où f est une fonction affine et g une fonction périodique.

2 Équations différentielles

3 Intégration – Dérivation

3.1 Fonctions usuelles

3.2 Développements limités

3.2.1 Formule de Taylor

Pour simplifier certaines situations, il est courant d'effectuer un développement limité (DL). En physique, on se limitera à des DL à l'ordre 2 en utilisant la formule de Taylor-Young.

Au voisinage de x_0, on peut écrire $x = x_0 + \delta x$. Pour une grandeur physique f qui dépend de x, on a ainsi :

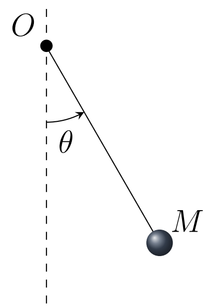
$$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0} \delta x + \left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_0} \frac{\delta x^2}{2}$$

3.2.2 Développements limités usuels

Quelques DL au voisinage de 0 sont à connaitre par cœur !

Fonction	**DL au voisinage de 0**
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x$
e^x	$1 + x$
$\ln(1+x)$	x
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2}$
$\sin x$	x

Exercice 2 – Pendule simple



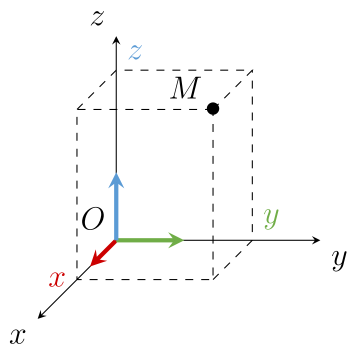
Le pendule simple est un exemple classique qui ne possède pas de solution analytique simple. Un DL permet de le rendre soluble.

1. Retrouver l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ.
2. En effectuant un DL, retrouver l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique dont on exprimera la pulsation propre ω_0 en fonction de l et g.

4 Géométrie

4.1 Systèmes de coordonnées

4.1.1 Coordonnées cartésiennes



Dans le système de coordonnées cartésiennes :

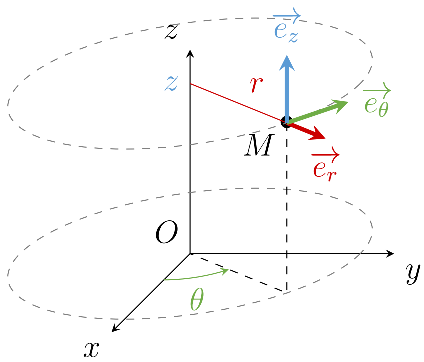
- la base de vecteurs utilisée est :

$$(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$$

- le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'exprime :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$$

4.1.2 Coordonnées cylindriques



Dans le système de coordonnées cylindriques :

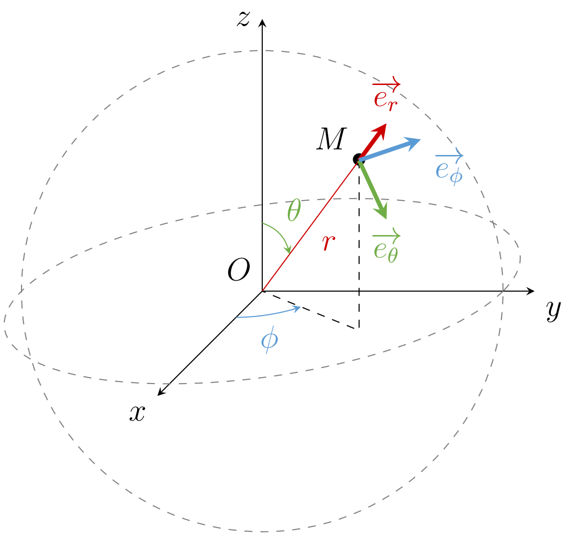
- la base de vecteurs utilisée est :

$$(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$$

- le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'exprime :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$$

4.1.3 Coordonnées sphériques



Dans le système de coordonnées sphériques :

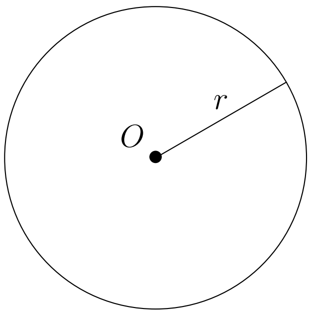
- la base de vecteurs utilisée est :

$$(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\phi})$$

- le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'exprime :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$$

4.2 Périmètre, aire et volume

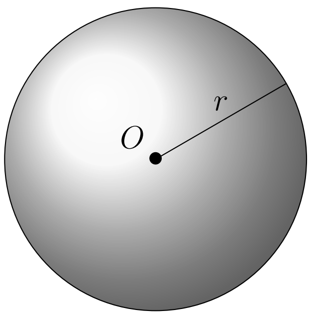


- Périmètre du cercle :

$$\mathcal{P}_{\text{cercle}} = 2\pi r$$

- Aire du disque :

$$\mathcal{A}_{\text{disque}} = \pi r^2$$

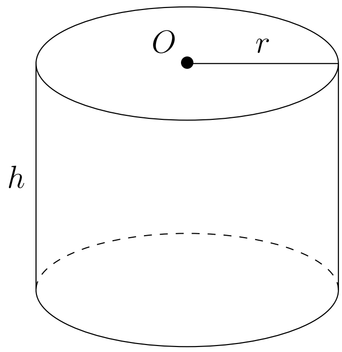


- Aire de la sphère :

$$\mathcal{A}_{\text{sphère}} = 4\pi r^2$$

- Volume d'une boule :

$$\mathcal{V}_{\text{boule}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$



- Volume d'un cylindre :

$$\mathcal{V}_{\text{cylindre}} = \pi r^2 \times h$$

5 Trigonométrie