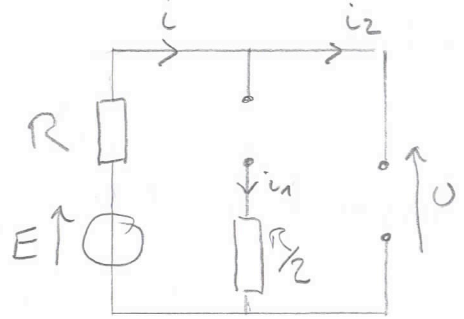
DM3 ①

Exercice 1

1- En $t = 0^-$, le circuit est équivalent à :



On en déduit $i = i_1 = i_2 = 0$ et en appliquant la loi des mailles :

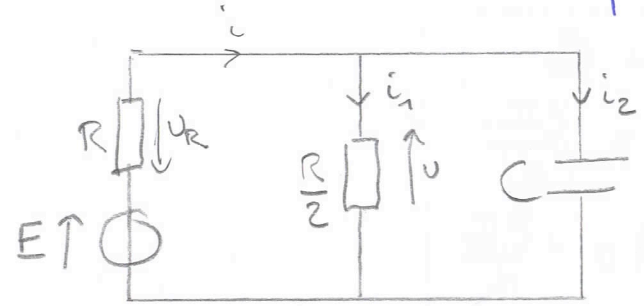
$$E = R\cancel{i}^{\,0} + u \iff u = E$$

$$\boxed{\begin{array}{l} i = i_1 = i_2 = 0 \\ u = E \end{array}}$$

2. * L'énergie stockée par le condensateur est continue, et $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u^2$ donc la tension aux bornes du condensateur est continue : on a

$$\underline{u(t=0^-) = u(t=0^+) = u(t=0) = E}$$

② En $t = 0^+$, le circuit est équivalent à :



* En appliquant la loi des mailles dans la maille de droite, on trouve que la tension aux bornes de la résistance $\frac{R}{2}$ est égale à u. On en déduit

$$\underline{i_1(t=0^+) = 2\frac{u(t=0^+)}{R} = \frac{2E}{R}}$$

* De même, dans la maille de gauche :

$$E = u_R + u$$

d'où en $t = 0^+$, $u_R(t=0^+) = E - u(t=0^+)$
$= E - E = 0$

La loi d'Ohm donne directement $\underline{i(t=0^+)=}$

* Finalement, la loi des nœuds donne

$$i = i_1 + i_2$$

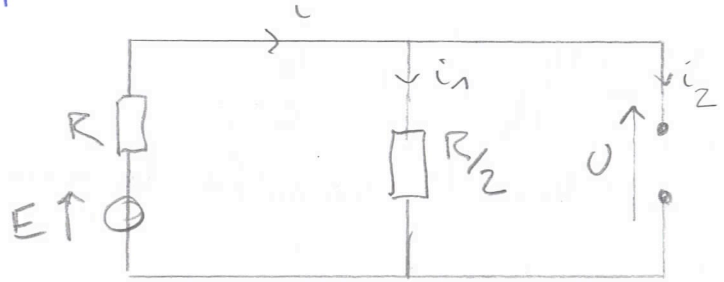
d'où, en $t = 0^+$

$$\underline{i_2(t=0^+) = i(t=0^+) - i_1(t=0^+) = 0 - \frac{2E}{R} = -\frac{2E}{R}}$$

On a donc :

$$\boxed{\begin{aligned} u(t=0^+) &= E \\ i_1(t=0^+) &= \frac{2E}{R} \\ i_2(t=0^+) &= -\frac{2E}{R} \\ i\,(t=0^+) &= 0 \end{aligned}}$$

3. En régime permanent, le circuit est équivalent à :



On reconnait un pont diviseur de tension :

$$u = E\,\frac{\frac{R}{2}}{R+\frac{R}{2}} = \frac{E\cancel{R}}{3\cancel{R}} = \frac{E}{3}$$

On a immédiatement $i_2(\infty) = 0$ car le circuit est ouvert dans cete branche

On en déduit $i(\infty) = i_1(\infty)$ dont la valeur s'obtient par exemple en appliquant la loi d'Ohm sur la résistance $\frac{R}{2}$.

$$u(\infty) = \frac{R}{2}\,i(\infty)$$

d'où

$$i(\infty) = \frac{2}{R}\,\frac{E}{3}$$

On a donc, quand $t \to \infty$:

$$\boxed{\begin{aligned} u(\infty) &= \frac{E}{3} \\ i_1(\infty) = i(\infty) &= \frac{2E}{3R} \\ i_2(\infty) &= 0 \end{aligned}}$$

4. On reprend le circuit de la question 2.

On applique la loi des mailles :

$$E = Ri + u$$

puis la loi des noeuds,

$$E = R(i_1 + i_2) + u$$

puis la loi d'Ohm et la loi de comportement du condensateur.

$$E = R\left(\frac{u}{\frac{R}{2}} + C\frac{du}{dt}\right) + u$$

$$= \frac{2u}{\cancel{R}}\cancel{R} + RC\frac{du}{dt} + u$$

$$= 3u + RC\frac{du}{dt}$$

Finalement, en divisant par RC

$$\frac{E}{RC} = \frac{u}{\frac{RC}{3}} + \frac{du}{dt}$$

On reconnait la forme de l'énoncé, en posant $\tau = \frac{RC}{3}$:

$$\boxed{\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{3\tau} \quad \text{avec } \tau = \frac{RC}{3}}$$

5. On commence par résoudre l'équation homogène :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0$$

dont la solution générale est

$$u_H(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

où A est une constante.

Puisque le second membre est constant, on cherche une solution particulière constante :

$$u_p(t) = B$$

En injectant dans l'équation différentielle

$$0 + \frac{B}{\cancel{\tau}} = \frac{E}{3\cancel{\tau}}$$

d'où $B = \frac{E}{3}$

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{3}$$

Or, d'après la question 2, on sait que $u(t=0^+) = E$:

$$A + \frac{E}{3} = E \quad \text{d'où} \quad A = \frac{2E}{3}$$

Finalement :

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{3}\left(1 + 2e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

⑦

6. La loi de comportement du condensateur donne :

$$i_2(t) = C\frac{du}{dt} = -\frac{2CE}{3\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{2E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Aux bornes de la résistance $\frac{R}{2}$, la loi d'Ohm donne

$$i_1(t) = \frac{2u}{R} = \frac{2E}{3R}\left(1+2e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

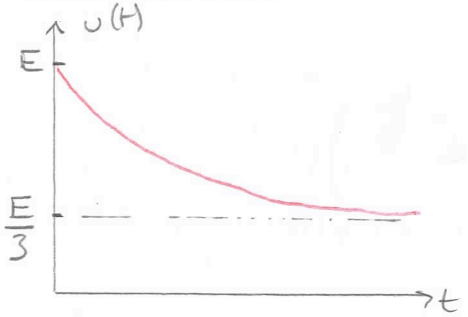
Finalement, avec la loi des mailles :

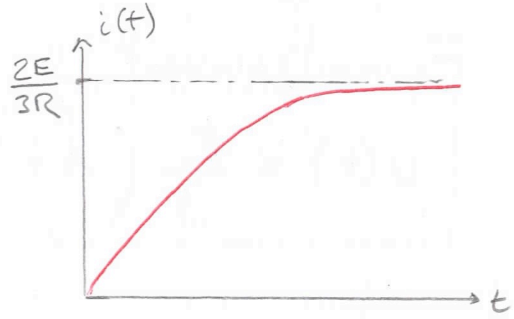
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

$$= -\frac{2E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{2E}{3R}\left(1+2e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$= \frac{2E}{3R} - \frac{2E}{3R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{2E}{3R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$





⑧

7. $\mathcal{E}_c(0) = \frac{1}{2}CE^2$

$\mathcal{E}_c(\infty) = \frac{1}{2}C\frac{E^2}{9}$

$$\Delta\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}CE^2\left(\frac{1}{9}-1\right)$$

$$= -\frac{1}{2}CE^2\frac{8}{9}$$

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_c = -\frac{4}{9}CE^2}$$

$\Delta\mathcal{E}_c < 0$: le condensateur s'est déchargé

8. Le graphe représenté sur l'énoncé est celui de $i(t)$

On lit $i(\infty) \simeq 1{,}7\,mA$ d'où :

$$\frac{2E}{3R} = i(\infty) \Rightarrow R = \frac{2E}{3i(\infty)} = 2{,}0\,k\Omega$$

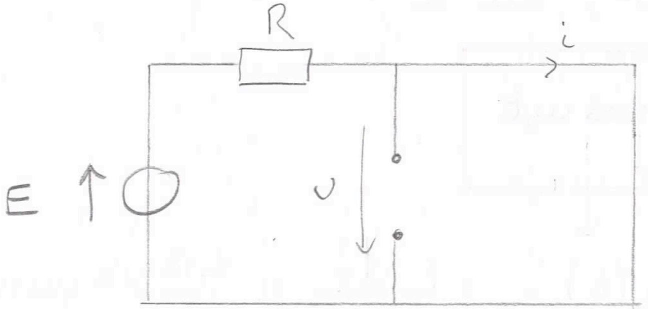
Avec la méthode des 63 %, on trouve

$\tau = 2{,}8 \times 10^{-5}\,s$ d'où $C = \frac{3\tau}{R} \simeq 42\,nF$

$$\boxed{R = 2{,}0\,k\Omega \text{ et } C = 42\,nF}$$

Exercice 2.

1. En $t=0^-$, le circuit est équivalent à



On en déduit :

$$\boxed{u=0 \quad \text{et} \quad i=\frac{E}{R} \quad \text{en } t=0^-}$$

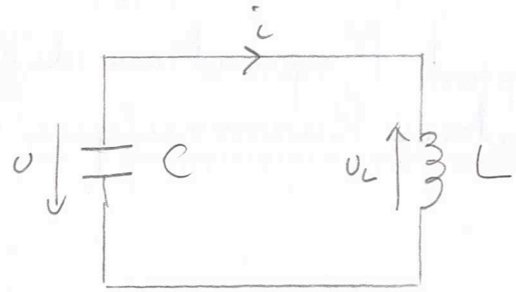
2. L'énergie est continue d'où :

- $\mathcal{E}_C=\frac{1}{2}Cu^2$ donc u est continue
- $\mathcal{E}_L=\frac{1}{2}Li^2$ donc i est continue.

On a donc :

$$\boxed{u(t=0^+)=0 \quad \text{et} \quad i(t=0^+)=\frac{E}{R}}$$

3. Pour $t>0$, le circuit est équivalent à :



On applique la loi des mailles :

$$u+u_L=0.$$

Or $u_L=L\frac{di}{dt}$ d'où

$$u+L\frac{di}{dt}=0.$$

En multipliant par C et en dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$C\frac{du}{dt}+LC\frac{d^2i}{dt^2}=0.$$

On reconnait la loi de comportement du condensateur. En divisant par LC on obtient finalement :

$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2}+\omega_0^2\, i=0 \quad \text{avec} \quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0

4. La solution générale s'écrit sous la forme :

$$i(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

où A et B sont des constantes

La question 2 nous donne :

$$i(t=0) = A\,\underbrace{\cos(\omega_0\times 0)}_{\to 1} + B\,\underbrace{\sin(\omega_0\times 0)}_{\to 0} = \frac{E}{R}$$

$$= A = \frac{E}{R}$$

D'autre part, avec la loi des mailles :

$$u_L(t=0^+) = -u(t=0^-) = 0$$

et $u_L = L\dfrac{di}{dt}$ d'où :

$$\frac{di}{dt}(t=0^+) = 0$$

$$\frac{di}{dt} = -A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t$$

d'où, en $t=0$:

$$\frac{di}{dt}(t=0) = B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Finalement, on a :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\cos\omega_0 t}$$

5. $u(t) = -u_L(t) = -L\dfrac{di}{dt} = \dfrac{LE}{R}\omega_0\sin\omega_0 t$

$$\boxed{u(t) = \frac{LE}{R}\omega_0\sin\omega_0 t}$$

6. On sait que l'énergie stockée par le condensateur est :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu^2$$

et pour la bobine :

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$$

L'énergie totale stockée dans le circuit est donc :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$$

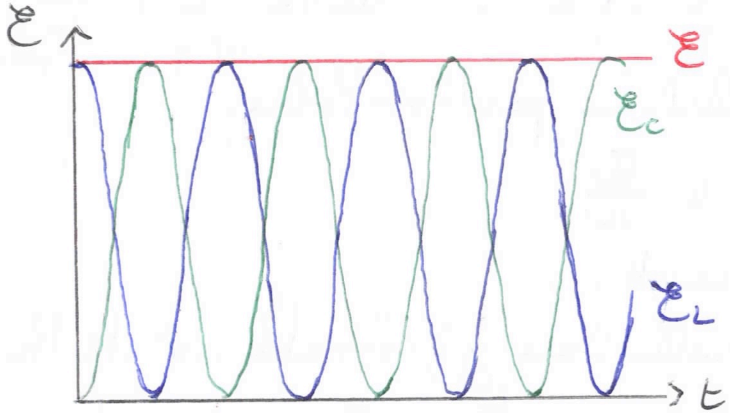
$$= \frac{1}{2}C\left(\frac{LE}{R}\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2\sin^2\omega_0 t + \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2\cos^2\omega_0 t$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\cancel{C}\frac{L^{\cancel{2}}E^2}{R^2\cancel{L}\cancel{C}}\sin^2\omega_0 t + \frac{LE^2}{2R^2}\cos^2\omega_0 t$$

$$= \frac{LE^2}{2R^2}\big(\underbrace{\sin^2\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t}_{1}\big)$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{LE^2}{2R^2}}$$

L'énergie est conservée et correspond à tout instant à l'énergie initialement stockée dans la bobine.



$\mathcal{E}_C$ et $\mathcal{E}_L$ varient avec la même période que $\cos^2\omega_0 t$. Or

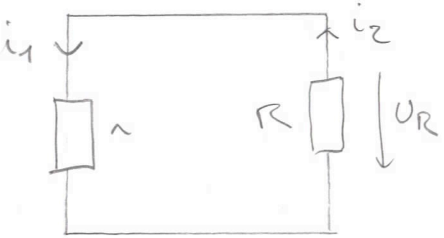
$$\cos^2\omega_0 t = \frac{1+\cos 2\omega_0 t}{2}$$

La période $T_\mathcal{E}$ est donc :

$$T_\mathcal{E} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}\omega_0} = \frac{\pi}{\omega_0}$$

Exercice 3.

1. * K ouvert : le circuit est équivalent à

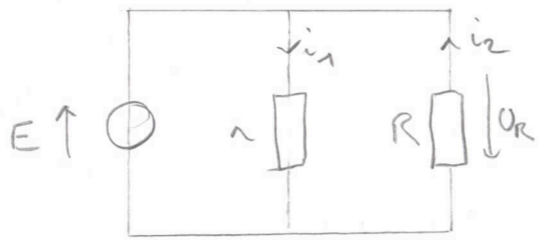


(en régime permanent)

On a donc

$$\boxed{i_1 = i_2 = 0 \quad \text{et} \quad u_R = 0}$$

* K fermé : en régime permanent, le circuit est équivalent à :



- la loi des mailles donne : $E = -u_R$
- la loi d'Ohm donne :

$$i_1 = \frac{E}{r} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{-E}{R}$$

On a donc,

$$\boxed{i_1 = \frac{E}{r} \quad i_2 = -\frac{E}{R} \quad \text{et} \quad u_R = -E}$$

2. La loi des mailles donne, pour $t \in [0, \frac{T}{2}]$

$$E = u_L + r i_1$$

$$\boxed{E = L\frac{di_1}{dt} + r i_1} \quad \text{ou} \quad \frac{E}{r} = \frac{L}{r}\frac{di_1}{dt} + i_1$$

* On résout l'équation homogène :

$$i_{1,H}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{r}$$

et A une constante

* La solution particulière

$$i_{1,p}(t) = \frac{E}{r}$$

convient.

* La solution générale est de la forme

$$i_1(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{r}$$

* À $t=0$, on a $i_1(t=0) = 0$ d'où

$$A + \frac{E}{r} = 0 \quad \text{et} \quad A = -\frac{E}{r}$$

* Finalement :

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E}{r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{r}}$$

3. Avec les valeurs de l'énoncé, on a

$\tau = \frac{L}{r} = 0,1s$.

En $t = \frac{T}{2} = 5\tau$, on peut considérer que le régime permanent était établi avant l'ouverture de l'interrupteur. On a donc

$i_1(t=\frac{T}{2}) = \frac{E}{r}$

Une fois K ouvert, l'équation différentielle devient :

$u_L + (R+r)\,i_1 = 0$ car $i_1 = i_2$.

$L\frac{di_1}{dt} + (R+r)\,i_1 = 0$

En posant $\tau' = \frac{L}{R+r}$, la solution est de la forme :

$i_1(t) = A' e^{-\frac{t}{\tau'}}$

Puisque $i_1(t)$ est continue,

$i_1(t=\frac{T}{2}) = \frac{E}{r} = A' e^{-\frac{T}{2\tau'}}$

d'où : $A' = \frac{E}{r} e^{+\frac{T}{2\tau'}}$

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E}{r}\, e^{-\frac{1}{\tau'}(t-\frac{T}{2})}}$$

⚠ Ici, la condition initiale est exprimée en $t = \frac{T}{2}$ et pas en $t=0$.

4. Pour $t \in [0, \frac{T}{2}[$, $u_R(t) = -E$.

Pour $t \in [\frac{T}{2}, T[$, $u_R(t) = R\,i_1(t)$.

En $t = \frac{T}{2}$, on a :

$$\boxed{u_R(\frac{T}{2}) = \frac{RE}{r} > E}$$ car $R > r$

Toujours pour $t \in [\frac{T}{2}, T[$, on cherche l'instant t_1 tel que $u_R(t_1) = 10E$.

$u_R(t_1) = \frac{RE}{r} e^{-\frac{1}{\tau'}(t_1-\frac{T}{2})} = 10E$

$e^{-\frac{1}{\tau'}(t_1-\frac{T}{2})} = \frac{r}{R} \times 10$

$-\frac{1}{\tau'}(t_1-\frac{T}{2}) = \ln\frac{10r}{R}$

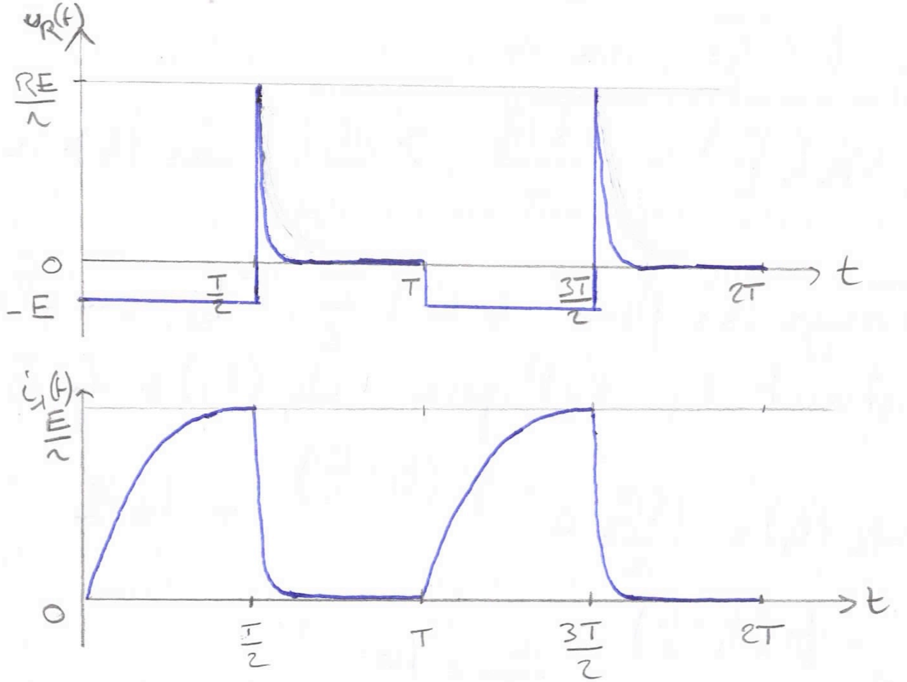
$t_1 - \frac{T}{2} = -\tau' \ln\frac{10r}{R} = \tau' \ln\frac{R}{10r}$

La durée pour laquelle $u_R(t) > 10E$ est donc

$$\boxed{\Delta t = t_1 - \frac{T}{2} = \tau' \ln \frac{R}{10r}}$$ avec $\tau = \frac{L}{R+r}$

AN : $\Delta t \simeq 2,3$ ms.

5.



6. Sur l'intervalle $[0, \frac{T}{2}]$, la batterie fournie une énergie $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \int_0^{\frac{T}{2}} E\,(i_1(t) - i_2(t))\,dt$$

$$\mathcal{E} = \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{E}{r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \frac{E}{R} \right) E\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{E^2}{r} + \frac{E^2}{R} \right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} -\frac{E^2}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} dt$$

$$= E^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \frac{T}{2} + \left[\tau \frac{E^2}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$\simeq E^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \frac{T}{2} - \frac{E^2 \tau}{r}$$

car $e^{-\frac{t}{\tau}} \simeq 0$ pour $t = \frac{T}{2}$.

Pour $t \in [\frac{T}{2}, T[$ la pile ne fournit pas d'énergie au système.

Sur un cycle, la batterie fournit une énergie

$$\mathcal{E} = E^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \frac{T}{2} - \frac{E^2 \tau}{2}.$$

L'énergie totale stockée dans la pile est

$$\mathcal{E}_{tot} = QE.$$

La durée de fonctionnement de la pile est donc :

$$T_{tot} = \underbrace{\frac{\mathcal{E}_{rot}}{\mathcal{E}}}_{\text{Nombre de cycles}} \times \underset{\uparrow}{T}$$

durée d'un cycle.

L'application numérique donne :

$\mathcal{E}_{rot} = 1{,}9\ MJ$

$\mathcal{E} = 5{,}8\ J$

$T_{tot} = 3{,}86$ jours.

La batterie pourra faire fonctionner la lotrue pendant 3,86 jours.

7. cf correction TD4