

DS4 – Mécanique et ondes

Durée : 4h.

L’usage de la calculatrice est autorisée.

RCO Des questions de cours sont identifiées dans le sujet par le sigle **RCO** dans la marge.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l’initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d’explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Toute démarche engagée, même non aboutie, et toute prise d’initiative seront valorisées.

★ Quelques questions sont difficiles : elles sont repérées par le symbole ★ dans la marge. N’y passez pas un temps déraisonnable.

Données

charge élémentaire :	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
électronvolt :	$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$
masse d’un nucléon :	$m_n = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
masse d’un électron :	$m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
constante de Boltzmann :	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
constante des gaz parfaits :	$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Formule de Taylor-Young

Au voisinage du point x_0 , on rappelle :

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{d^2f}{dx^2}(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!}$$

Exercice 1 – Propagation du son

Propagation du son

« Lorsque nous parlons, nos cordes vocales mettent en mouvement l'air qui les entoure. L'air étant élastique, chaque couche d'air se comporte comme un ressort. La couche d'air comprimé se détend et comprime la couche qui la suit dans le sens de propagation du son, etc. »

- RCO 1. Quelle grandeur physique peut-on associer à une onde acoustique ?
- RCO 2. Le son est une onde mécanique. Que peut-on alors dire de son milieu de propagation ? Donner deux autres exemples d'ondes mécaniques (mais non acoustiques).
- RCO 3. Donner l'intervalle de fréquences correspondant au domaine des ondes sonores audibles par l'homme. Qu'appelle-t-on ultrasons ?
4. Lorsque la porte de la salle de classe est ouverte, on entend très clairement l'enseignant parler depuis l'extérieur, même si l'on n'est pas en face de la porte. Proposer une explication en vous appuyant sur des estimations raisonnables des paramètres pertinents.

Principe du sonar

On suppose dans cette partie que la mer est un milieu homogène dans lequel le son se propage rectilignement. À 20°C , la vitesse du son dans l'eau de mer est de $c_{\text{mer}} = 1,50 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Un sonar (« SOund NAvigation and Ranging ») est un dispositif de détection utilisant les ondes acoustiques comme signal détectant. L'avant d'un sous-marin est équipé d'un sonar lui permettant d'éviter d'entrer en collision avec un autre sous-marin. Le sonar est constitué d'un émetteur d'ondes sonores et d'un récepteur capable d'identifier l'écho de l'onde précédemment émise. On note O l'avant du sous-marin équipé du sonar et (Ox) l'axe du sous-marin, correspondant à l'axe de propagation de l'onde sonore. Un second sous-marin est à la distance L du premier, dans la configuration représentée ci-dessous.

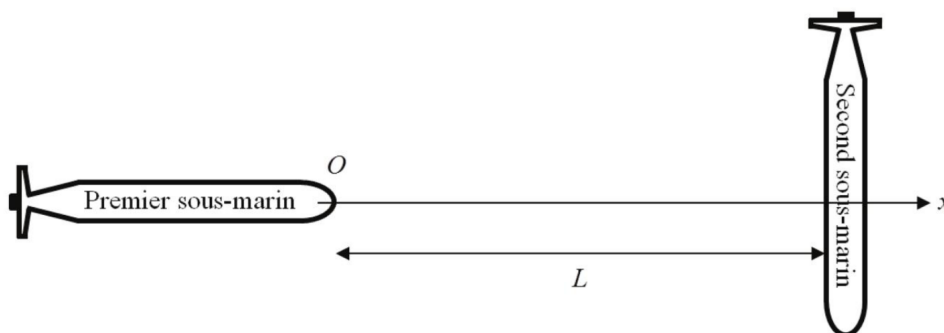


FIGURE 1 – Les sous-marins, vus du dessus.

5. Expliquer le principe de fonctionnement d'un sonar. On pourra s'aider d'un schéma.
6. L'émetteur produit une très brève impulsion sonore. Le récepteur en reçoit l'écho au bout d'une durée $\tau = 500 \text{ ms}$. En déduire l'expression de la distance L à laquelle se situe le second sous-marin. Faire l'application numérique.

À partir de l'instant $t = 0$, le sonar émet l'impulsion sonore pseudo-sinusoidale représentée ci-dessous pendant une durée $\Delta t = 400 \mu\text{s}$.

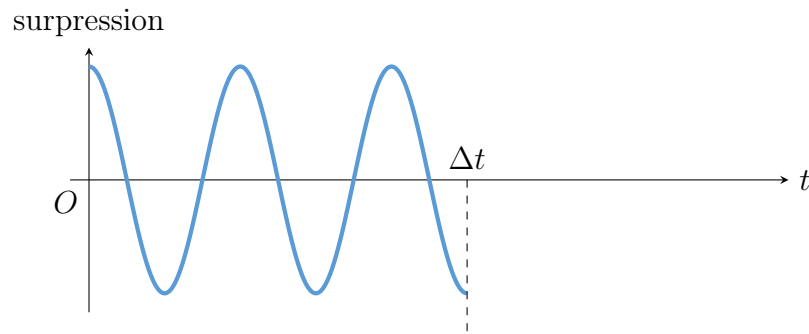


FIGURE 2 – Impulsion pseudo-sinusoidale correspondant au signal envoyé par le sonar.

7. Déterminer, en la justifiant, la valeur numérique de la fréquence f de l'onde émise par le sonar.

On s'intéresse à la propagation spatiale de l'impulsion sonore : on la représente alors dans le système d'axes représenté ci-dessous.

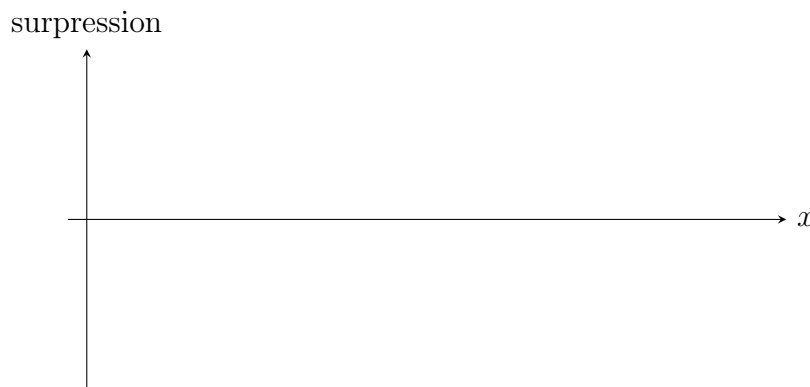


FIGURE 3 – Propagation spatiale.

8. Exprimer et calculer numériquement la longueur spatiale Δx de l'impulsion.
9. Reproduire sur la copie le système d'axes de la figure 3 et y représenter l'impulsion sonore à l'instant $t = 10,0$ ms. Calculer numériquement les positions du début (ou front) de l'impulsion et de sa fin.

Un détecteur d'ondes sonores est placé sur le second sous-marin, sur l'axe (Ox) .

10. Représenter sur la copie l'évolution de l'amplitude enregistrée par ce détecteur au cours du temps. Calculer numériquement, en justifiant précisément, les instants auxquels le détecteur reçoit le début et la fin de l'impulsion et on repérera ces instants sur l'axe horizontal qu'on graduera.

Son et température

Dans le cas où l'on modélise l'air par un gaz parfait, la vitesse c du son dans l'air dépend de la température T par une relation de la forme

$$c = \sqrt{\gamma} R^n T^p M^q,$$

où $\gamma = 1,4$ est le coefficient isentropique de l'air (sans dimension), R la constante des gaz parfaits, T la température et $M = 29,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ la masse molaire de l'air.

11. Déterminer la dimension de la constante des gaz parfaits R . En déduire les exposants n , p et q .
12. Calculer numériquement l'ordre de grandeur de la vitesse c_0 du son à la température $T_0 = 17^\circ\text{C}$.
13. Montrer que pour une variation $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ de la température de l'air par rapport à T_0 , la variation $\Delta c = c - c_0$ de la vitesse du son peut s'écrire

$$\Delta c \approx c_0 \frac{\Delta T}{2T_0}$$

Justifier l'approximation réalisée. Faire l'application numérique.

Exercice 2 – Viseur de casque TopOwl

Le viseur de casque TopOwl, destiné aux pilotes d'hélicoptères, permet d'afficher des informations supplémentaires de manière à améliorer la sécurité et l'efficacité des pilotes. Ces images sont obtenues en projetant sur la visière les images originelles formées sur les écrans fluorescents de deux tubes cathodiques.



Chaque tube cathodique (cylindre de 10 cm de longueur et de 2 cm de diamètre) est disposé sur le côté du casque. Chacun produit la même image, une pour chaque œil.

On ne s'intéresse qu'à un tube cathodique et on étudie la déviation verticale du faisceau d'électrons produit dans le tube par un canon à électrons. Un schéma du tube cathodique est représenté ci-dessous.

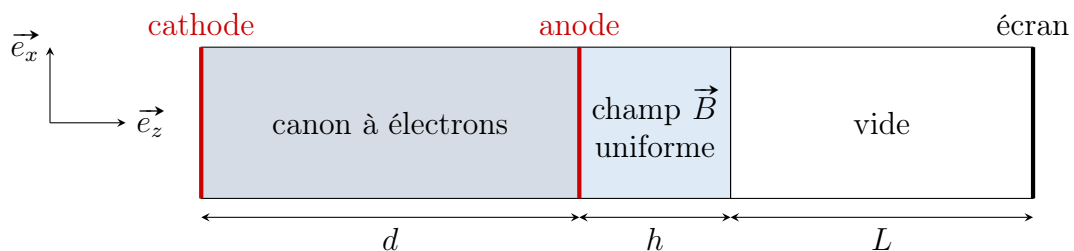


FIGURE 4 – Schéma d'un tube cathodique.

Canon à électrons

Le canon à électrons est constitué d'une électrode métallique plane (la cathode) qui, chauffée, émet des électrons. La cathode est au potentiel V_c . Les électrons de masse m_e sont émis avec une vitesse négligeable et sont accélérés par un champ électrique \vec{E} uniforme produit par la différence de potentiel entre la cathode et l'anode au potentiel V_a . L'anode est percée d'un trou en son centre pour laisser passer le faisceau d'électrons.

On choisit l'origine du repère (Oxz) au niveau du centre de l'**anode** et on note d la distance entre la cathode et l'anode. On suppose que le faisceau d'électron est orienté selon \vec{e}_z .

- RCO 1. Nommer et exprimer la force \vec{F}_E subie par un électron, en fonction de la charge élémentaire e et du champ \vec{E} .
2. Sur un schéma, représenter le vecteur vitesse \vec{v}_0 au niveau de l'anode et le champ électrique accélérateur \vec{E} . En déduire le signe de $V_a - V_c$. On donne $U = |V_a - V_c| = 2,0 \text{ kV}$.
3. Exprimer la vitesse $v_0 = ||\vec{v}_0||$ en fonction de U , m_e et e . Faire l'application numérique. Commenter.

Déviation du faisceau

L'électron pénètre en O avec la vitesse \vec{v}_0 dans la région $z \in [0, h]$ avec $h = 5,0 \text{ mm}$, où règne un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_y$ uniforme et stationnaire, avec $B = ||\vec{B}||$.

- RCO 4. Reproduire les vecteurs \vec{e}_x et \vec{e}_z définis sur la figure 4 et ajouter le vecteur \vec{e}_y de manière à ce que la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ soit directe.
- RCO 5. Exprimer la force \vec{F}_B subie par l'électron, en fonction de sa vitesse \vec{v} , e et \vec{B} .
6. Montrer que le mouvement est uniforme dans cette région.
7. Sur un schéma, représenter \vec{v}_0 , \vec{B} et la force subie par l'électron en O .
8. On admet que la trajectoire est circulaire. Retrouver l'expression du rayon de la trajectoire.
9. Exprimer les composantes de l'accélération \ddot{x} et \ddot{z} en fonction de e , B , m_e , \dot{x} et \dot{z} .
- ★ 10. On suppose $\dot{x} \ll \dot{z}$. Quelle est alors la valeur de \dot{z} ? En déduire l'expression des coordonnées \dot{x}_S et \dot{z}_S de la vitesse en sortie de la zone de champ magnétique, ainsi que les coordonnées x_S et z_S du point de sortie de la zone de champ magnétique.

Entre la sortie de la zone de déviation et l'écran, l'électron traverse une zone de longueur $L = 2,0 \text{ cm}$ où le champ magnétique est nul.

11. Quelle est la trajectoire de l'électron dans cette zone?
12. Faire un schéma donnant l'allure globale de la trajectoire de l'électron dans le champ magnétique puis dans la zone de champ nul jusqu'à l'écran.
- ★ 13. Le spot obtenu sur l'écran peut être dévié au maximum de $\pm 4,5 \text{ mm}$ selon \vec{e}_x . Calculer numériquement la valeur maximale de B .

Retour sur l'approximation

On souhaite vérifier la validité de l'approximation réalisée à la question 10.

- ★ 14. En reprenant les équations obtenues à la question 9 et sans faire d'approximation, montrer que $v_z = \dot{z}$ vérifie une équation différentielle du second ordre. Donner l'expression de $v_z(t)$, en prenant comme origine $t = 0$ l'instant où l'électron est en O . On posera $\omega_c = eB/m_e$.
- ★ 15. En déduire que le temps de vol Δt de l'électron dans la zone de champ magnétique non nul est donné par l'équation

$$\sin(\omega_c \Delta t) = \frac{\omega_c h}{v_0}.$$

- ★ 16. Exprimer alors la composante $v_{z,S}$ de la vitesse à la sortie de la zone de champ magnétique non nul. Conclure.

Exercice 3 – Inversion de la molécule d'ammoniac

Attention : Dans cet exercice, la notation $V(x)$ fait référence à l'énergie potentielle et non au potentiel électrique !

La molécule d'ammoniac $^{14}\text{NH}_3$ se présente sous la forme d'une pyramide symétrique, l'atome d'azote étant à son sommet. Les trois atomes d'hydrogène définissent le plan de référence. La position de l'atome d'azote est repérée par l'abscisse x telle que $|x|$ soit la distance de l'atome au plan de référence (Oyz) (Fig. 5).

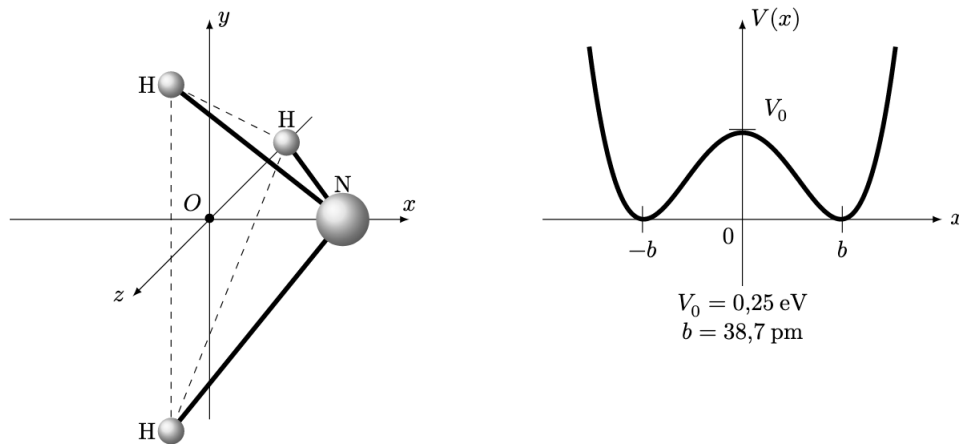


FIGURE 5 – Géométrie et énergie potentielle de la molécule d'ammoniac.

1. Interpréter la forme, la symétrie et les points particuliers de la courbe d'énergie potentielle $V(x)$.
2. Décrire qualitativement l'évolution de l'abscisse x de l'atome d'azote, initialement situé en $x = b$ et possédant une énergie cinétique $V_0/3$. Sur l'annexe 1 à rendre avec la copie, faire apparaître les positions x_1 et x_2 pour lesquelles la vitesse \dot{x} est nulle.

La molécule d'ammoniac peut se trouver dans deux états de conformation, selon que l'atome se trouve du côté $x > 0$ (conformation D, Fig. 6) ou du côté $x < 0$ (conformation G). Les deux états sont séparés par une barrière de potentiel $V_0 = 0,25 \text{ eV}$. On appelle inversion le passage d'une conformation à l'autre, lorsque l'atome d'azote traverse la barrière d'énergie due aux trois atomes d'hydrogène.

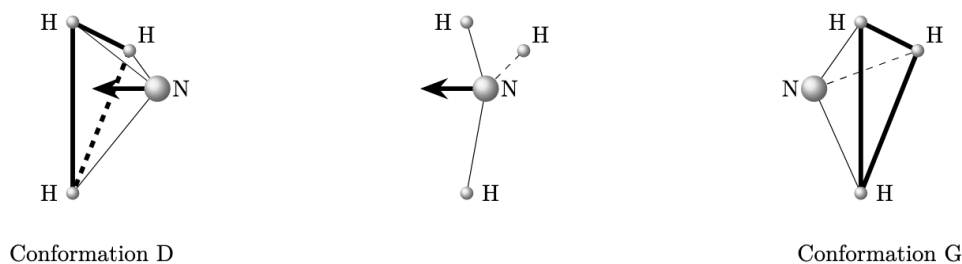


FIGURE 6 – Inversion de la molécule d'ammoniac.

3. Donner la condition sur l'énergie mécanique de l'atome d'azote \mathcal{E}_m pour laquelle la molécule peut s'inverser et passer librement d'une conformation à l'autre.

RCO

4. Rappeler l'expression générale de la force $\vec{F}(x)$ associée à une énergie potentielle $V(x)$.
5. Sur l'annexe 1 à rendre avec la copie, indiquer le sens de la force $\vec{F}(x)$ dans quatre domaines que l'on identifiera.

On suppose que l'énergie potentielle $V(x)$ est de la forme

$$V(x) = V_0 \left(\frac{x^2}{b^2} - 1 \right)^2.$$

6. Déterminer l'expression de la force $\vec{F}(x)$ exercée sur l'atome d'azote.

RCO

7. Rappeler la condition portant sur l'énergie potentielle qui permet d'obtenir les positions d'équilibre du système et leur stabilité. Retrouver les abscisses des points particuliers identifiés à la question 1 et justifier leur stabilité.
8. En supposant que \vec{F} est la seule force qui s'applique sur l'atome d'azote, que peut-on dire de l'énergie mécanique de l'atome d'azote ? Comment qualifier ce mouvement ?

On souhaite étudier les oscillations de l'atome d'azote au voisinage de sa position d'équilibre stable dans la configuration D.

9. À quelle position cela correspond-il ? Préciser le sens de l'expression « au voisinage de » en donnant la quantité ε qui doit rester très petite devant 1.
10. À l'aide d'un développement limité à l'ordre deux, donner l'expression approchée de l'énergie potentielle au voisinage de cette position.
11. En déduire l'équation du mouvement vérifiée par x . Comment appelle-t-on l'équation obtenue ?
12. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 des oscillations, puis de la fréquence propre f_0 . Calculer numériquement f_0 .

On admet que l'énergie mécanique de la molécule est de l'ordre de $k_B T$, où k_B est la constante de Boltzmann et T la température.

13. L'inversion de la molécule d'ammoniac est-elle possible à température ambiante ? À partir de quelle température T_0 cette inversion peut-elle s'effectuer ? Commenter.

On constate expérimentalement que l'inversion est possible à « basses températures ». Pour l'expliquer, il est nécessaire de sortir du cadre de la mécanique classique et de considérer le comportement quantique de la molécule.

Annexe 1 – Profil d'énergie potentielle de la molécule d'ammoniac

