TD11 – Description d'un système thermodynamique

Donnée pour tous les exercices : constante des gaz parfait $R = 8{,}314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$.

Exercice 1 – Masse volumique de l'air

1. L'air est composé à hauteur d'environ 80 % de diazote et 20 % de dioxygène.
2. $V_{m,\mathrm{air}} = \frac{RT}{P} = 22{,}4\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$.
3. $M_{\mathrm{air}} = 0{,}2 M_{\mathrm{O_2}} + 0.8 M_{\mathrm{N_2}} = 28{,}8\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$, d'où $v_{\mathrm{air}} = \frac{V_{m,\mathrm{air}}}{M_{\mathrm{air}}} = 0{,}78\,\mathrm{m^3}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$ et $\rho_{\mathrm{air}} = \frac{1}{v_{\mathrm{air}}} = 1{,}3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$.

Exercice 2 – Pression des pneus

Attention : le manomètre indique la différence de pression entre l'air du pneu et la pression atmosphérique : la pression dans le pneu est donc $P + P_0$, où P est la pression affichée par le manomètre et P_0 la pression atmosphérique.

1. $P_2 = \frac{T_2}{T_1}(P_1 + P_0) - P_0 = 2{,}5\,\mathrm{bar}$.
2. $\Delta P = 0{,}5\,\mathrm{bar}$, soit une augmentation de 17 % entre l'hiver et l'été : il faudra ajuster la pression des pneus lors du changement de saison.

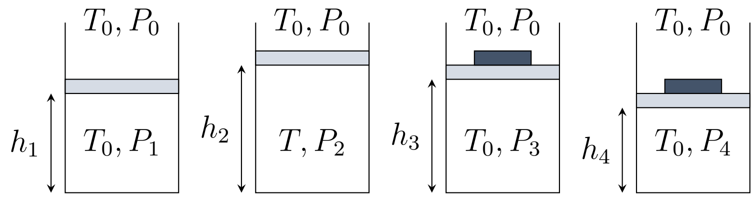
Exercice 3 – Crevaison

Un pneu de diamètre D et dont la section est de diamètre d a un volume $V = \frac{\pi^2}{4} D d^2$. À la pression $P = 1\,\mathrm{bar}$ et la température $T = 300\,\mathrm{K}$, il contient $m = \frac{PV}{RT} M_{\mathrm{CO_2}} = 14{,}5\,\mathrm{g}$ de CO_2.

Il faudrait prévoir au moins une cartouche de 16 g.

Exercice 4 – Gaz parfait dans une enceinte

1. Schémas



2. $h_1 = \frac{nRT_0}{mg + SP_0}$, $h_2 = \frac{h_1 T}{T_0}$, $h_3 = \frac{nRT}{(M+m)g + SP_0}$ et $h_4 = \frac{h_3 T_0}{T}$.

Exercice 5 – Étude d'un compresseur

1. $V_1' = \frac{P_a V_M}{P_0}$
2. $P_1 = P_a \frac{V_M}{V+V_m} + P_0 \frac{V}{V+V_m}$
3. On veut $V_1' \geqslant V_m$, d'où $P_0 \leqslant P_{\max}$ avec $P_{\max} = P_a \frac{V_M}{V_m}$
4. Une expression très sympathique (heu...) obtenue par récurrence :

$$P_n = \frac{P_a V_M}{V+V_m} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{V}{V+V_m}\right)^i + P_0 \left(\frac{V}{V+V_m}\right)^n$$
$$= \frac{P_a V_M}{V+V_m} \frac{1-\left(\frac{V}{V+V_m}\right)^n}{1-\left(\frac{V}{V+V_m}\right)} + P_0 \left(\frac{V}{V+V_m}\right)^n$$

   On a $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_{\max}$.

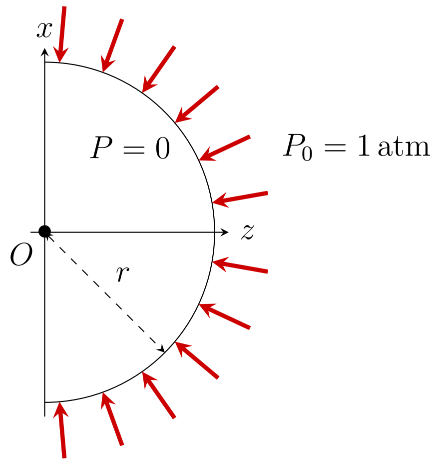
5. $P_1 = 1{,}05\,\text{bar}$ et $P_{\max} = 25\,\text{bar}$.

Exercice 6 – Hémisphères de Magdebourg (difficile)

1. **1.a.** La force nécessaire pour séparer les deux demi-cylindres ne dépend que de la section du cylindre, donc de son diamètre. En effet les forces exercées sur les parois courbes du cylindre sont dirigées perpendiculairement à l'axe du cylindre et n'empêchent pas la séparation.

   1.b. $F = P_0 \pi r^2 = 20\,\text{kN}$, équivalent au poids d'une masse de 2 tonnes.

2. Soit $\vec{e_z}$ le vecteur unitaire normal au plan équatorial séparant les deux hémisphères. Par symétrie autour de l'axe $\vec{e_z}$, la résultante des forces de pression sera dirigée selon l'axe $\vec{e_z}$: on ne s'intéresse qu'à la projection des forces de pression selon $\vec{e_z}$.
   On considère l'hémisphère représenté ci-contre. En coordonnées sphériques, l'élément de surface orienté est $\mathrm{d}\vec{S} = r\mathrm{d}\theta \times r\sin\theta \mathrm{d}\varphi \vec{e_r}$. La résultante des forces de pression sur cet élément de surface est alors $\mathrm{d}\vec{F} = -P_0 \mathrm{d}\vec{S}$.



   On projette sur $\vec{e_z}$ et on intègre de $\theta = 0$ à $\pi/2$ et de $\varphi = 0$ à 2π pour avoir la résultante des forces de pression sur l'hémisphère :

$$\vec{F}\cdot\vec{e_z} = \iint \mathrm{d}\vec{F}\cdot\vec{e_z} = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} P_0 r^2 \sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \int_{\theta=0}^{\pi/2} P_0 r^2 \frac{\sin 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

   On obtient $\vec{F}\cdot\vec{e_z} = -P_0\pi r^2$. Il faudra donc la même force pour séparer les deux hémisphères que pour séparer les deux demi-cylindres.