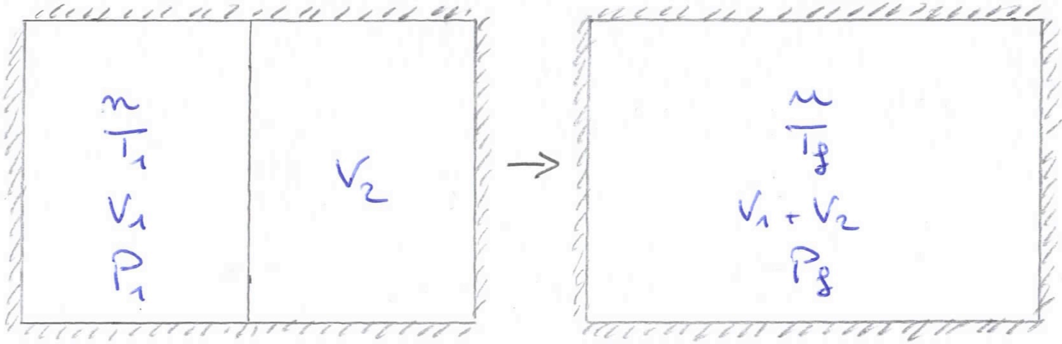
(1)

DM 9

Exercice 1.



1. On considère le système {gaz + vide} qui subit une transformation :
   - adiabatique : $Q = 0$;
   - isochore : $W = 0$.

On applique le premier principe (pas de variations macroscopique d'énergie cinétique ou potentielle) :

$\boxed{\Delta U = 0.}$ (indépendant de la nature du gaz)

2. Pour un gaz parfait $U = C_V T + cste$ d'où

$$\Delta U = C_V \Delta T = 0 \Rightarrow \Delta T = 0.$$

$\boxed{T_f = T_1}$

(2)

3. On retrouve l'expression de l'énergie interne d'un gaz parfait qui ne dépend que de la température si le terme $\frac{an^2}{V}$ est négligeable devant $n C_{V,m} T$:
   - si $\frac{n}{V} \to 0$: la densité particulaire devient très faible (gaz dilué) on peut alors négliger le volume des particules et leurs interactions.
   - si $a \to 0$: le terme de cohésion est faible, ie. on néglige les interactions entre les particules.

Dans les deux cas, on se rapproche des hypothèses du modèle du GP.

4. $C_{V,m}$ est la capacité thermique molaire ($J.K^{-1}.mol^{-1}$). Pour une transformation à volume constant (+ système fermé)

$$\boxed{C_{V,m} = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT}}$$

L'argon est un gaz monoatomique, on a

$$\boxed{C_{V,m} = \frac{3}{2}R}$$

5. Le terme $\frac{an^2}{V}$ doit être homogène à une énergie

$$\left[\frac{a n^2}{V}\right] = E$$

$$\boxed{[a] = E\,L^3\,N^{-2}}$$

a s'exprime en $J.\,m^3.\,mol^{-2}$

Rq : on peut aussi l'exprimer en fonction des dimensions de base du SI avec

$E = M.L^2T^{-2}$ et $J = kg.m^2.s^{-2}$

Attention à ne pas confondre dimension et unité !

6. On a toujours $\Delta U = 0$ pour la transformation :

$$\boxed{T_1\ ,\ V_1} \xrightarrow[\Delta U = 0]{} \boxed{T_1 + \Delta T\ ,\ 2V_1}$$

E.I. E.F.

En utilisant l'expression de l'énergie interne d'un gaz réel donnée dans l'énoncé :

$$\cancel{n}\, C_{V,m}\, \Delta T - a n^{\cancel{2}}\, \Delta\left(\frac{1}{V}\right) = 0$$

$$a n \left(\frac{1}{2V_1} - \frac{1}{V_1}\right) = C_{V,m}\, \Delta T$$

$$\boxed{a = -\frac{V_1 2 C_{V,m} \Delta T}{n}}$$

AN : $a = 0{,}135\ J.m^3 mol^{-2}$

(5)

Exercice 2

1. $$\boxed{V = \underbrace{\pi\left(\frac{d_T}{2}\right)^2 h_T}_{\text{le tronc}} + \underbrace{4\pi\left(\frac{d_M}{2}\right)^2 h_M}_{\text{2 bras + 2 jambes}} + \underbrace{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_H}{2}\right)^3}_{\text{la tête}}}$$

$$\boxed{m = \rho_{eau} V}$$ avec $\rho_{eau} = 1\,kg.L^{-1}$

AN : $V = 68\,L$ et $m = 68\,kg$

La masse obtenue est bien cohérente avec la masse d'un humain.

2. $$\boxed{S = \pi d_T h_T + 4\pi d_M h_M + 4\pi\left(\frac{d_H}{2}\right)^2}$$

AN : $S = 1,6\,m^2$

3. Par définition :

$$\boxed{Q_p = S\,\Phi_s\,\Delta t}$$

4. $$\boxed{Q_p = S\,h\,(T_e - T_o)\,\Delta t}$$

Avec : $T_e = 20°C$

$T_o = 37°C$

$\Delta t = 24\,h = 86400\,s.$

(6)

AN : $Q_p = -9,2\,MJ$

5. L'énergie Q_a vient de l'alimentation (et de la respiration qui apporte le dioxygène nécessaire aux réactions chimiques qui permettent de libérer l'énergie thermique). Il faut compenser les pertes Q_p d'où :

$$\boxed{Q_a = -Q_p.}$$

6. Par définition $1\,kcal = 4,18\,kJ$ d'où :

$Q_a = 2,2\;10^3\,kcal$

Selon le site Vidal.fr les apports journaliers recommandés (AJR) sont :

- entre 1800 et 2200 kcal pour une femme adulte
- entre 2400 et 2600 kcal pour un homme adulte.

La valeur estimée précédemment correspond bien à ces valeurs.

7. On considère le système {corps} assimilé à une phase condensée (eau). Entre les instants t et $t + dt$, on a :

$$dH = m\,c\,dT = S\,\Phi_s\,dt$$

Rq : L'enthalpie est à privilégier ici car l'évolution est à minima monobare avec équilibre à l'EI et à l'EF. Cependant compte tenu des hypothèses de la PC11, utiliser l'énergie interne conduit au même résultat.

On a donc :

$$mc\,dT = S h (T_e - T)\,dt$$

d'où

$$\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{Sh}{mc} T = \frac{Sh}{mc} T_e}$$

Le temps caractéristique est :

$$\boxed{\tau = \frac{mc}{Sh}}$$ AN : $\underline{\tau = 12,5\ h}$

8. Solution particulière : $T_p(t) = T_e$

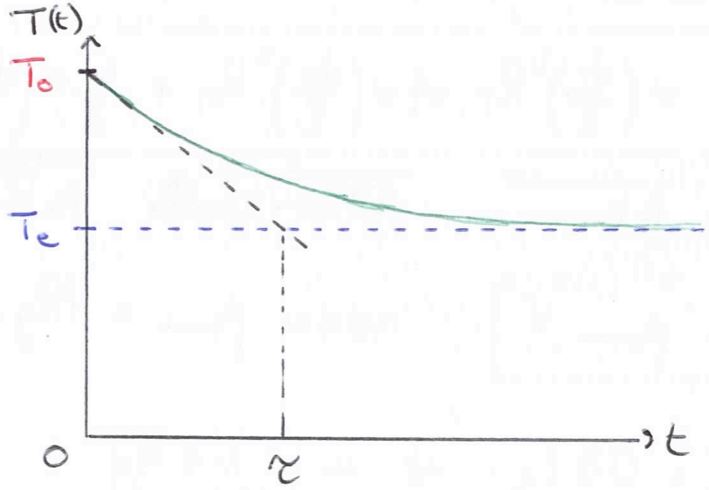
Solution de l'éq° hom. : $T_h(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$

À l'instant initial $t=0$, $T(0) = T_0$

$$T(t=0) \underset{sol^o}{=} A + T_e \underset{CI}{=} T_0 \quad \text{d'où } A = T_0 - T_e$$

Finalement :

$$\boxed{T(t) = (T_0 - T_e) e^{-\frac{t}{\tau}} + T_e}$$



Il est possible de dater précisément l'heure du décès pendant une durée de l'ordre de τ après la mort.

Exercice 3.

1. On s'intéresse à un système fermé formé de n moles d'un GP.

* isotherme : $T = cste$ d'où $PV = nRT = cste$ dans le diagramme de Clapeyron, cela correspond à $P \propto \frac{1}{V}$. Il s'agit d'une détente d'où $\Delta P < 0$ et/ou $\Delta V > 0$

$\Rightarrow$ détente isotherme : courbe ④

* isobare : $P = cste$ avec $\Delta T < 0$ car refroidissement donc $\Delta V < 0$

$\Rightarrow$ refroidissement isobare : courbe ①

* isochore : $V = cste$ avec $\Delta P > 0$ car compression :

$\Rightarrow$ compression isochore : courbe ③

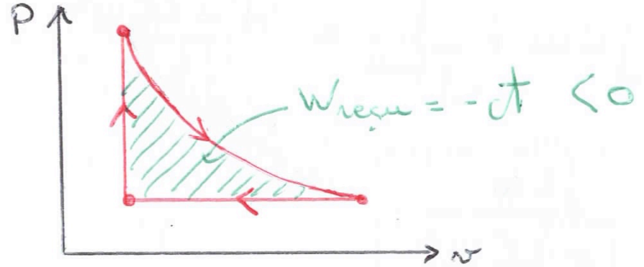
La transformation ② correspond à une compression isotherme.

2. Le travail reçu est du signe opposé à ΔV d'où :

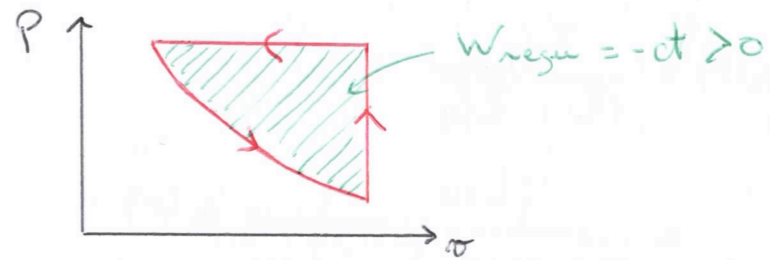
$$W_1 > 0, \quad W_2 > 0, \quad W_3 = 0, \quad W_4 < 0$$

Rq : l'identification du travail reçu à $-\int P dV$ est possible car les évolutions sont supposées réversibles.

3. Pour un cycle moteur, le travail reçu est négatif. On peut en obtenir un avec les transformations ①, ③ et ④ :

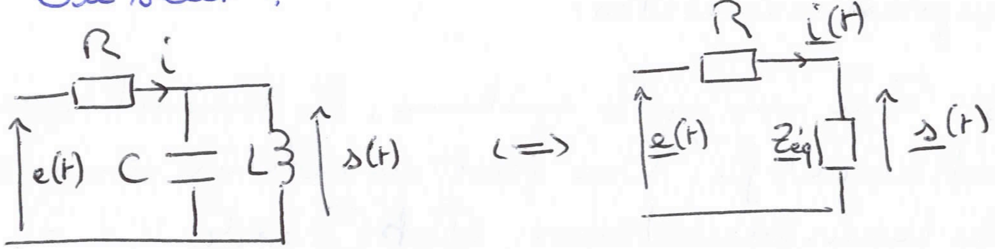


4. Le cycle ①, ④ et ③ est récepteur :



Exercice 4.

1. On veut :



$$\frac{1}{\underline{Z_{éq}}} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega} = \frac{1-LC\omega^2}{jL\omega}$$

$$\boxed{\underline{Z_{éq}} = \frac{jL\omega}{1-LC\omega^2}}$$

2. On reconnait un pont diviseur de tension :

$$\underline{s}(t) = \frac{\underline{Z_{éq}}}{R+\underline{Z_{éq}}}\,\underline{e}(t)$$

$$= \frac{jL\omega}{R-RLC\omega^2+jL\omega}\,\underline{e}(t)$$

$$\boxed{\underline{s}(t) = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{(1-LC\omega^2)+j\frac{L}{R}\omega}\,\underline{e}(t)}$$

3. On a :

$$\left(1-LC\omega^2+j\frac{L}{R}\omega\right)\underline{s}(t) = j\frac{L}{R}\,\underline{e}(t)$$

Puisque $j\omega \Leftrightarrow \frac{d}{dt}$ et $-\omega^2 = (j\omega)^2 \Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2}$

$$\left(1+LC\frac{d^2}{dt^2}+\frac{L}{R}\frac{d}{dt}\right)\underline{s}(t) = \frac{L}{R}\frac{d}{dt}\underline{e}(t)$$

En repassant en réel et en divisant par LC on obtient :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{ds}{dt} + \frac{s}{LC} = \frac{1}{RC}\frac{de}{dt}$$

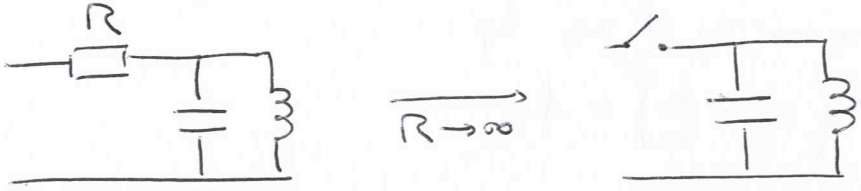
Sous sa forme canonique, l'équation s'écrit

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \frac{\omega_0}{Q}\frac{de}{dt}$$

Par identification :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

On remarque que l'expression de Q est l'inverse de celle du circuit RLC série. En particulier Q augmente avec R. Cela se comprend bien dans la limite où $R \to +\infty$. On obtient alors l'équation d'un oscillateur harmonique, ce que l'on retrouve avec un circuit équivalent.



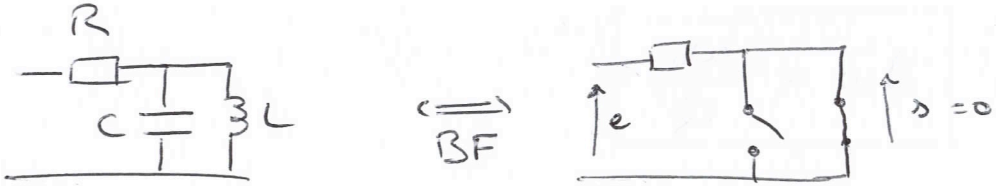
circuit LC
oscillateur harmonique électrique.

4. Avec $\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{s}(t) = \underline{S_m} e^{j\omega t}$
on obtient immédiatement avec les expressions précédentes de ω_0 et Q :

$$\boxed{\underline{S_m} = E_0 \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)+j\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

5. * En BF : $\underline{S_m} \underset{BF}{\approx} E_0 j \frac{\omega}{Q\omega_0}$ d'où

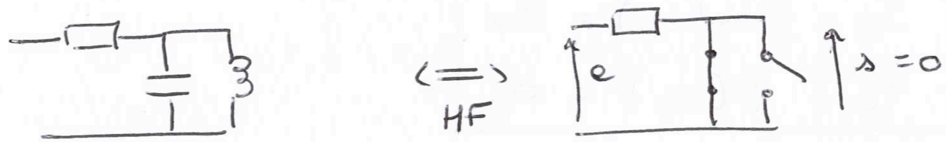
$$S_m \xrightarrow[\omega\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(\underline{S_m}) \xrightarrow[\omega\to 0]{} \frac{\pi}{2}$$



⟹ cohérent.

* En HF : $\underline{S_m} \underset{HF}{\approx} -E_0 j \frac{\omega_0}{Q\omega}$

$$S_m \xrightarrow[\omega\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \varphi \xrightarrow[\omega\to+\infty]{} -\frac{\pi}{2}$$



⟹ cohérent.

6. On a :

$$\underline{S_m} = \frac{E_0}{1+\left(\frac{Q\omega_0}{j\omega}-\frac{Q\omega}{j\omega_0}\right)} = \frac{E_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

d'où

$$S_m = \frac{E_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Le dénominateur est minimal en $\omega = \omega_0$

De plus, on a montré :

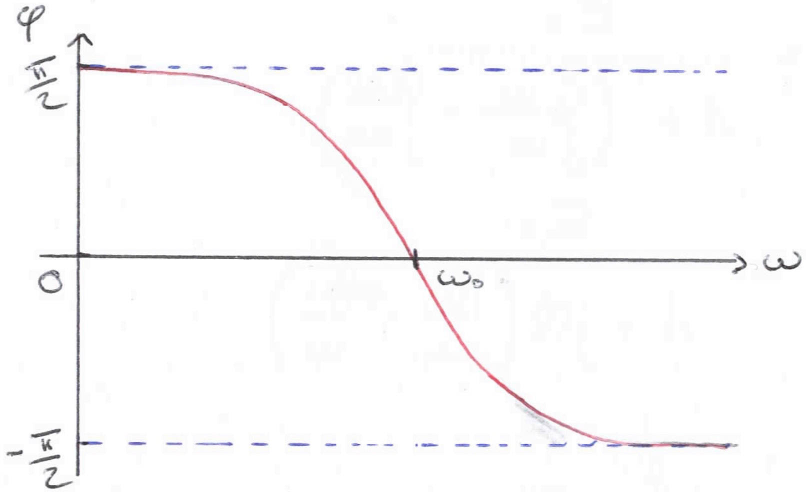
$$S_m \xrightarrow[\omega\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad S_m \xrightarrow[\omega\to+\infty]{} 0$$

Donc S_m atteint toujours un maximum en $\omega = \omega_0$.

On a alors :

$$\boxed{\begin{aligned} S_0 &= S_m(\omega_0) = E_0 \\ \varphi_0 &= \varphi(\omega_0) = 0. \end{aligned}}$$

7. Avec les valeurs obtenues aux questions 5 et 6, on peut tracer l'allure de $\varphi(\omega)$.



8. Rq : la condition $Q \gg 1$ n'est en fait pas nécessaire.

Puisque $S_0 = E_0$, on cherche les pulsations ω_1 et ω_2 (positives) qui vérifient

$$S_m(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

Avec l'expression obtenue précédemment (question 6) et en posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ cela revient à trouver x_1 et x_2 tq :

$$Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{x} = \pm \frac{1}{Q}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 \mp \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4$$

$$x = \underbrace{\frac{\pm \frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}}{2}}_{>0} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{\pm \frac{1}{Q} - \sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}}{2}}_{<0}$$

On cherche des solutions positives d'où

$$\omega_{1,2} = x_{1,2}\,\omega_0 = \left(\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1} \pm \frac{1}{2Q}\right)\omega_0$$

Finalement avec $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ on obtient

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$$

9. Par lecture graphique, on lit :

$$f_0 = 10{,}7 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad \Delta f = 530 \text{ Hz}$$

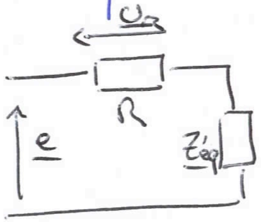
* $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ d'où $C = \dfrac{1}{L\omega_0^2}$ avec $\omega_0 = 2\pi f_0$

$$C = \frac{1}{L\, 4\pi^2 f_0} \qquad \text{AN : } \underline{C = 20 \text{ nF}}$$

* $\omega_0 Q = \dfrac{R}{L}$ d'où $R = L\omega_0 Q = L\dfrac{\omega_0^2}{\Delta\omega}$

$$R = L\, 2\pi \frac{f_0^2}{\Delta f} \qquad \text{AN : } \underline{R = 15 \text{ k}\Omega}$$

10. On reprend le circuit :



Avec un pont diviseur de tension :

$$\underline{u_R} = \frac{R}{R + \underline{Z}'_{éq}}\,\underline{e} = \frac{R}{R + \frac{jL\omega}{1-LC\omega^2}}\,\underline{e}$$

$$\underline{u_R} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + j\frac{L}{R}\omega}\,\underline{e}$$

$$= \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}\,\underline{e}$$

En $\omega = \omega_0$, on remarque que $\underline{u_R} = 0$ càd que la tension aux bornes de la résistance est nulle : cela correspond à une anti-résonance.