DS5 – Themodynamique et RSF

Durée : 4h.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

RCO Des questions de cours sont identifiées dans le sujet par le sigle RCO dans la marge.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'expliciter clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Toute démarche engagée, même non aboutie, et toute prise d'initiative seront valorisées.

Données

capacité thermique massique de l'eau :	$c = 4{,}18\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$
constante des gaz parfaits :	$R = 8{,}314\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$
unités de pression :	$1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$

On rappelle :

- la relation de Mayer, liant les capacités thermiques molaires, respectivement à pression $C_{\mathrm{p,m}}$ et volume constant $C_{\mathrm{v,m}}$: $C_{\mathrm{p,m}} - C_{\mathrm{v,m}} = R$;
- l'expression du coefficient isentropique $\gamma = \dfrac{C_{\mathrm{p,m}}}{C_{\mathrm{v,m}}}$;
- qu'il est possible de fabriquer une machine thermique en faisant subir à un fluide une suite de transformations de manière à réaliser des cycles. Au cours de chaque cycle, **si le fluide reçoit un travail négatif, la machine thermique est un moteur**.

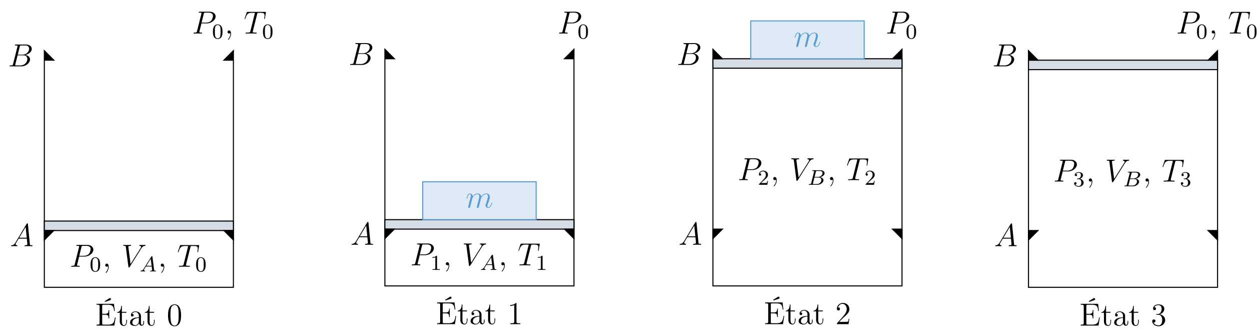
Exercice 1 – Étude d'un cycle moteur peu performant (24 points)

RCO **1.** Rappeler les hypothèses associées au modèle du gaz parfait, ainsi que l'équation d'état des gaz parfaits.

RCO **2.** Donner l'expression générale du travail W des forces de pression reçu par un système qui subit une transformation quelconque. Que devient cette expression dans le cas d'une transformation réversible ?

Dans toute la suite de l'exercice, les gaz seront assimilés à des gaz parfaits et toutes les transformations seront supposées réversibles.

Le dispositif étudié est constitué d'un cylindre aux parois diathermanes (perméables aux transferts thermiques), fermé par un piston. Le piston, de masse négligeable et de section S, peut glisser sans frottement entre deux cales A et B. On considère la suite de transformations représentées ci-dessous.



Données : $V_B = 1{,}00\,\mathrm{L}$, $V_A = 330\,\mathrm{mL}$, $T_0 = 300\,\mathrm{K}$, $P_0 = 1{,}00\,\mathrm{bar}$, $m = 10{,}0\,\mathrm{kg}$, $S = 100\,\mathrm{cm}^2$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ *et* $\gamma = 1{,}4$ *pour l'air.*

Initialement, le piston est en A, le cylindre renferme un volume V_A d'air, de coefficient isentropique γ, à la température et à la pression de l'extérieur respectivement T_0 et P_0. Le gaz est alors dans l'état 0 caractérisé par P_0, V_A et T_0.

- À partir de l'état 0, on place une masse m sur le piston et on chauffe très doucement le gaz par un moyen approprié, non représenté sur le schéma, jusqu'à ce que le piston décolle juste de la cale A. Le gaz est alors dans l'état 1 : P_1, V_A, T_1.
- On maintient le chauffage jusqu'à ce que le piston arrive juste en B, le gaz est alors dans l'état 2 : P_2, V_B, T_2.
- Le chauffage est alors arrêté, on ôte m et on laisse refroidir l'ensemble jusqu'à ce que le piston décolle juste de B. Le gaz est alors dans l'état 3 : P_3, V_B, T_3.
- On laisse enfin refroidir l'ensemble jusqu'à la température T_0, le piston revient en A et le gaz dans l'état 0 : le cycle est terminé.

RCO **3.** Exprimer les capacités thermiques à pression et à volume constants C_p et C_v du gaz en fonction de la quantité de matière n de gaz enfermé, R, γ, puis en fonction de P_0, V_A, T_0 et γ.

Transformation de l'état 0 à l'état 1

4. Donner la nature de la transformation subie par le gaz.

5. Exprimer la pression P_1 et la température T_1 en fonction de P_0, T_0, m, g, S. Faire l'application numérique.

6. Exprimer le transfert thermique Q_{01} reçu par le gaz au cours de cette transformation en fonction de C_v ou C_p, T_1 et T_0, puis P_0, T_1, T_0, V_A et γ. Faire l'application numérique.

Transformation de l'état 1 à l'état 2

7. Donner la nature de la transformation subie par le gaz. Déterminer P_2.

8. Exprimer la température T_2 en fonction de T_1, V_A, V_B. Faire l'application numérique.

9. Exprimer le transfert thermique Q_{12} reçu par le gaz au cours de cette transformation en fonction de C_v ou C_p, T_1, T_2 puis P_0, T_1, T_0, T_2, V_A et γ. Faire l'application numérique.

Rendement

10. Donner la nature des transformations $2 \to 3$ et $3 \to 0$ subies par le gaz. Déterminer la pression P_3.

11. Exprimer le travail W_cycle reçu par le gaz au cours du cycle, en fonction de m, g, V_A, V_B et S. Faire l'application numérique et commenter son signe.

Les moteurs thermiques à essence ou diesel actuels ont un rendement de l'ordre de 40 % (contre jusqu'à 98 % pour les moteurs électriques !). Le rendement η du moteur étudié ici est défini par :

$$\eta = \frac{|W_\mathrm{cycle}|}{Q_{01} + Q_{12}}.$$

12. Donner une définition du rendement justifiant cette relation. Faire l'application numérique.

13. Tracer l'allure du diagramme de Clapeyron d'un cycle. Retrouver, d'après le diagramme, le travail W_cycle calculé précédemment.

Exercice 2 – Eau chaude sanitaire (30 points)

> Plus de la moitié des logements produisent leur eau chaude sanitaire (ECS) de manière indépendante. L'électricité est la première source de production d'ECS des résidences principales. Avec la réglementation thermique 2012 qui impose une réduction très importante des besoins de chauffage, la part de la consommation liée à l'ECS est en passe de devenir l'un des premiers postes de consommation dans les bâtiments résidentiels neufs. Les besoins en ECS sont établis à 40 °C, température moyenne d'utilisation de l'ECS. Les besoins journaliers par personne sur une année sont en moyenne de (56 ± 23) L à 40 °C.
>
> *Source : ademe.fr*

On considère un appartement où vivent deux étudiants en collocation. L'eau chaude sanitaire (ECS) est produite par un chauffe-eau dont les caractéristiques techniques sont données ci-dessous. Il s'agit d'un cylindre contenant un réservoir d'eau de volume V, isolé par une épaisseur e de laine de roche de conductivité thermique $\lambda = 0{,}036\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Le réservoir est alimenté par le circuit d'eau froide à la température $T_f = 15\ °\mathrm{C}$. Une résistance chauffante permet de maintenir la température de l'eau du réservoir à une température $T_c = 65\ °\mathrm{C}$.

La résistance thermique R_th de la paroi du chauffe-eau est définie par

$$R_\mathrm{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

où S est la surface extérieure de la paroi (on ne comptera que la surface latérale du cylindre et pas celle de ses extrémités).

Caractéristiques techniques du chauffe-eau

- capacité : $V = 150\,\mathrm{L}$;
- hauteur : $h = 120\,\mathrm{cm}$;
- diamètre : $d = 50\,\mathrm{cm}$;
- épaisseur d'isolant : $e = 5\,\mathrm{cm}$;
- puissance : $\mathcal{P}_e = 1\,600\,\mathrm{W}$;
- temps de chauffe de $15\,°\mathrm{C}$ à $65\,°\mathrm{C}$: $\tau_c = 349\,\mathrm{min}$.

Mise en service

Dans cette partie seulement, on considère que la paroi du chauffe-eau est parfaitement calorifugée : on néglige les transferts thermiques autres que celui de la résistance chauffante. Lors de l'emménagement des étudiants, le chauffe-eau est plein d'eau froide à la température T_f depuis très longtemps.

1. Exprimer, puis calculer la durée Δt qu'il faudrait pour porter l'eau contenue dans le chauffe-eau à la température T_c en fonction de V, T_f, T_c, $\mathcal{P}_e$, de la capacité thermique massique c de l'eau et de sa masse volumique ρ. Commenter.

2. Exprimer, puis calculer la valeur en eau μ du chauffe-eau, c'est-à-dire la masse d'eau qui aurait la même capacité thermique que le chauffe-eau seul, en fonction de ρ, c, V, T_f, T_c, $\mathcal{P}_e$ et τ_c.

3. Une fois que l'eau est à la température T_c le chauffe-eau s'éteint temporairement. Un volume $V_1 = 30\,\mathrm{L}$ d'eau chaude est utilisé pour le premier grand ménage de l'appartement, remplacé dans le réservoir par le même volume d'eau froide. Exprimer, puis calculer la température T_1 de l'eau du réservoir avant que le chauffe-eau ne se rallume.

4. Proposer une estimation de la consommation énergétique annuelle moyenne due à la production d'ECS dans l'appartement des étudiants. On exprimera le résultat en kilowatt-heure ($\mathrm{kW \cdot h}$).

Dans toute la suite, on négligera la capacité thermique du chauffe-eau puisque $\mu \ll \rho V$.

Pertes thermiques

Lorsque le chauffe-eau est allumé, la température de l'eau est constante et égale à T_c. La température de la pièce est supposée constante et égale à $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$.

RCO **5.** Rappeler les trois modes de transfert thermique.

6. Donner l'expression du flux thermique Φ à travers la paroi du chauffe-eau ($\Phi > 0$) en fonction de e, λ, S et des températures nécessaires. Faire l'application numérique.

7. Avant de partir pour une semaine de vacances bien méritées, les deux étudiants éteignent le chauffe-eau. Déterminer alors l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$. On fera apparaitre un temps caractéristique τ dont on donnera l'expression en fonction des paramètres du problème.

8. La résoudre et représenter graphiquement $T(t)$.

9. En rentrant et avant même de rallumer le chauffe-eau, les étudiants sont surpris de constater que l'eau est encore chaude. Commenter.

Régulation de température

On suppose dans la suite que le refroidissement n'est dû qu'au transfert thermique à travers la paroi : les deux étudiants sont en cours, ils ne consomment pas d'eau chaude.

10. En régime permanent, déterminer la puissance avec laquelle il faudrait alimenter la résistance chauffante pour que la température de l'eau du réservoir reste égale à T_c.

La régulation de la température $T(t)$ de l'eau du réservoir fonctionne en réalité en tout ou rien :

- la résistance chauffante est d'abord alimentée à la pleine puissance du chauffe-eau tant que $T(t) < T_c$;
- dès que $T(t) \geqslant T_c$, l'alimentation de la résistance chauffante est coupée, et ce tant que $T(t) > T_m = 64\,°\mathrm{C}$;
- dès que $T(t) \leqslant T_m$, l'alimentation de la résistance chauffante est rallumée et le cycle recommence.

11. Donner l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$ sur un intervalle $[t_0, t_1]$ où la résistance est alimentée, avec les instants t_0 et t_1 tels que $T(t_0) = T_m$ et $T(t_1) = T_c$.

12. La résoudre et donner l'expression de $T(t)$. Déterminer la durée de cette phase, soit $t_1 - t_0$.

13. Exprimer, puis calculer la durée $t_2 - t_1$ pendant laquelle la résistance n'est plus alimentée, où t_2 est tel que $T(t_2) = T_m$.

14. Représenter graphiquement $T(t)$ sur quelques cycles de fonctionnement de la régulation de température.

Exercice 3 – Horloge à quartz – EPITA (23 points)

La première horloge à quartz est conçue en 1927 par les laboratoires Bell. La première montre-bracelet est commercialisée en 1969.

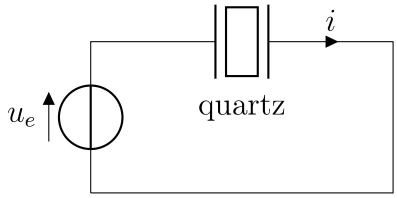
Le quartz est un cristal piézoélectrique : lorsqu'il est soumis à une différence de potentiel, il se déforme, et inversement, s'il est contraint mécaniquement alors une différence de potentiel apparaît entre ses faces. Un cristal de quartz taillé en diapason – comme sur la figure ci-contre – vibre mécaniquement à une fréquence bien précise. Il est inséré dans un circuit électronique, avec une électrode métalisée sur chacune de ses faces.

Cette précision dans la fréquence de vibration, associée au couplage électrique par l'effet piézoélectrique, permet d'obtenir des circuits électroniques résonants avec des facteurs de qualité très élevés, et donc des oscillateurs très précis.

Étude du quartz

Pour étudier la résonance très sélective du quartz, on le place dans le montage ci-dessous. On dispose également d'un dispositif, non représenté, qui délivre une tension U_s égale à l'amplitude de l'intensité du courant i multipliée par une résistance $R = 47\,\mathrm{k}\Omega$: si $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$, alors $U_s = R i_0$.

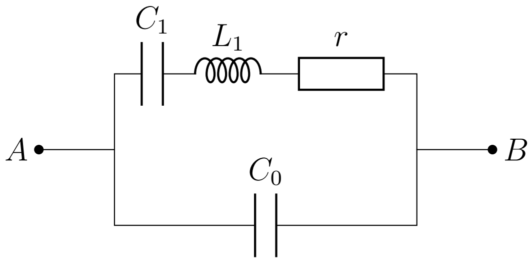
L'étude se fait en régime sinusoïdal forcé, et on utilise le formalisme complexe. On note les grandeurs complexes en les soulignant. Par exemple, $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$ est représenté par $\underline{i}(t) = i_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$.



1. Justifier que $\underline{i} = \dfrac{u_e}{\underline{Z}_q}$, où $\underline{Z}_q$ est l'impédance électrique du quartz.

RCO 2. Rappeler sans démonstration l'expression des impédances d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C.

Le comportement du quartz peut être modélisé par un condensateur C_0 (capacité des électrodes séparées par un diélectrique et des fils de liaison) en parallèle avec un circuit série r, L_1 et C_1 qui correspond aux grandeurs liées à la déformation du quartz. Ce circuit r, L_1, C_1 représente le couplage électromécanique lié à l'effet piézoélectrique.



On étudie les résonances, donc la recherche des pulsations ω telles que l'amplitude de i soit importante, donc telles que $1/|\underline{Z}_q|$ tende vers des valeurs importantes.

Pour repérer la résonance, on néglige d'abord tout effet dissipatif : dans les deux questions qui suivent, $r = 0$.

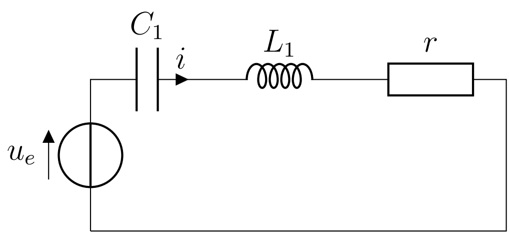
3. Montrer que l'impédance $\underline{Z}_q$ équivalente au dipôle AB vérifie

$$\frac{1}{\underline{Z}_q} = jC_{\text{éq}}\omega \frac{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2}, \text{ avec } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}},$$

et ω_2 et $C_{\text{éq}}$ dont on donnera les expressions en fonction de C_0, C_1 et L_1.

4. En déduire l'expression de la fréquence f_1 de résonance en intensité du circuit d'étude du quartz.

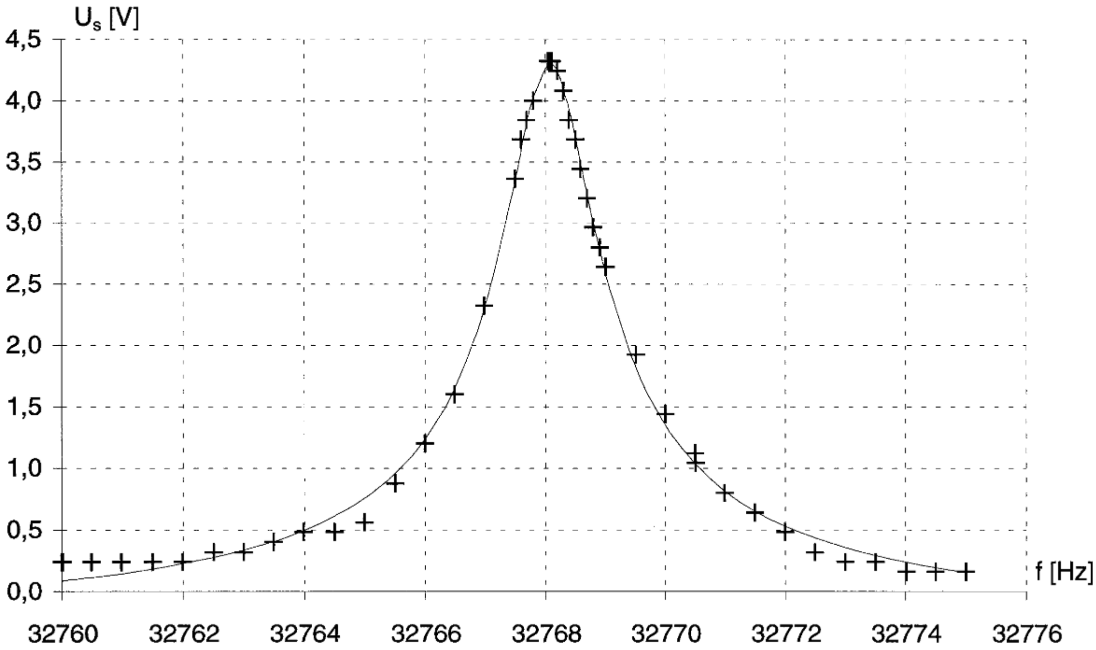
Les questions qui précèdent montrent que c'est la branche L_1, C_1, r qui est responsable de la résonance. Pour simplifier, on étudie donc le quartz en enlevant dans le modèle la capacité C_0. On obtient alors le circuit ci-contre.



5. Montrer que

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}_e/r}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_1} - \dfrac{\omega_1}{\omega}\right)}, \text{ avec } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \text{ et } Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

La courbe ci-dessous donne, pour chaque point, la valeur de U_s pour une fréquence f donnée du signal $u_e(t)$. On rappelle que $U_s = Ri_0$. L'amplitude du signal u_e est $u_0 = 0{,}20\,\mathrm{V}$.



Source : Deiber et al., Bull. U. Phys. 799, 1997

On donne également l'expression de l'acuité d'une résonance dans le cas étudié ici : $Q = f_r/\Delta f$, où f_r est la fréquence de résonance et Δf la largeur de la bande passante. Cette dernière est définie comme $\Delta f = |f_+ - f_-|$, avec f_+ et f_- les deux fréquences telles que l'amplitude de sortie soit égale à l'amplitude de sortie maximale divisée par $\sqrt{2}$.

6. En exploitant ce graphique, donner une valeur de la résistance r.

7. Donner également une valeur du facteur de qualité Q.

On retiendra les valeurs approchées $r = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $Q = 20\,000$ et $\omega_1 = 2 \times 10^5\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

8. Donner les expressions de L_1 et C_1 en fonction de Q, r et ω_1.

9. En déduire la valeur de L_1. Commenter.

Utilisation dans une montre

Le quartz permet ainsi de concevoir un filtre passe-bande avec un facteur de qualité très élevé.

10. Si on laisse le circuit précédent osciller de façon libre, donner une estimation du temps pendant lequel les oscillations perdurent. Ceci est-il raisonnable pour fabriquer une horloge ?

Le quartz est en réalité inséré dans un circuit dit « oscillateur », qui entretient ses oscillations. Le facteur de qualité élevé permet d'avoir un signal quasi-harmonique dont la fréquence est précisément contrôlée et vaut, dans le cas présent, 32 768 Hz.

11. On peut remarquer que $32\,768 = 2^{15}$. Quelle peut être la raison d'un tel choix pour la fabrication d'une montre ?

Précision

La fréquence de résonance du quartz varie en fonction de la température, avec typiquement une variation relative $\Delta f/f \approx 10^{-6}$ pour un écart de $10\,°\mathrm{C}$.

12. Quelle est alors l'imprécision en seconde cumulée sur une journée de fonctionnement ?

13. Comparer ceci aux données du début de l'énoncé. Sachant que les précisions reportées sur cette figure sont pour des horloges de laboratoire de précision, quelle précaution simple a-t-elle pu être mise en œuvre pour pallier les variations de température ?