

Chapitre 4 – Circuits du premier ordre

Plan du cours

- I Approche expérimentale**
- II Décharge du condensateur**
 - II.1** Équation différentielle
 - II.2** Évolution de la tension aux bornes du condensateur
 - II.3** Temps caractéristique
 - II.4** Bilan énergétique
- III Charge du condensateur**
 - III.1** Évolution de la tension aux bornes du condensateur
 - III.2** Bilan énergétique
- IV Cas du circuit RL**

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.
- Déterminer en fonction du temps la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge et de sa décharge.
- Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RC série.
- Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant dans un circuit RL.
- Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.
- Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RL série.

Questions de cours

- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur, ou par l'intensité du courant traversant une bobine.
- Résoudre ces équations le cas d'une ou d'une décharge.
- Justifier par un raisonnement énergétique la continuité de la tension aux bornes du condensateur, de l'intensité du courant traversant une bobine.
- Donner la valeur du temps caractéristique du régime transitoire pour un circuit RC ou un circuit RL.
- Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RC ou le circuit RL.

Plutôt que des questions de cours, il s'agit ici davantage de méthodes qu'il faut être capable d'appliquer rapidement. Inutile d'apprendre par cœur les résultats ! À l'exception de l'expression du temps caractéristique qui, lui, est à connaître par cœur.

Documents

Document 1 – Résolution d’une équation différentielle du premier ordre

On s’intéresse à la résolution d’une équation différentielle du premier ordre, vérifiée par $x(t)$, de la forme :

$$x + \tau \frac{dx}{dt} = X_1, \quad \text{ou, écrite sous sa forme canonique :} \quad \frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = \frac{X_1}{\tau}, \quad (1)$$

où τ et X_1 sont des constantes. Si X_0 est la valeur de $x(t)$ pour $t = 0$, on cherche l’unique solution qui vérifie la condition initiale $x(0) = X_0$.

1. On commence par résoudre l’équation homogène :

$$x + \tau \frac{dx}{dt} = 0.$$

La solution générale de cette équation est

$$x_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

où A est une constante.

2. On cherche ensuite une **solution particulière** $x_p(t)$. Puisque X_1 est une constante, la solution $x_p(t) = X_1$ convient.
3. La **solution générale** de l’équation différentielle 1 est la somme de la solution de l’équation homogène et de la solution particulière :

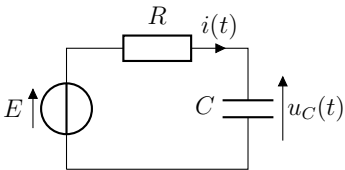
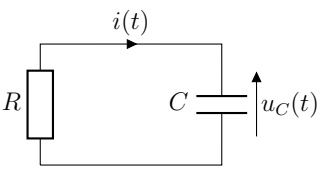
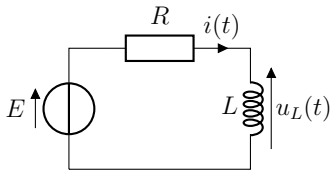
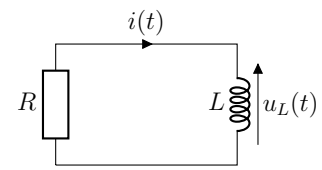
$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + X_1.$$

4. On détermine finalement la constante A en utilisant la **condition initiale** :

$$x(0) = A + X_1 = X_0 \quad \text{d'où} \quad A = X_0 - X_1.$$

5. L’**unique solution** de l’équation 1 vérifiant $x(0) = X_0$ est :

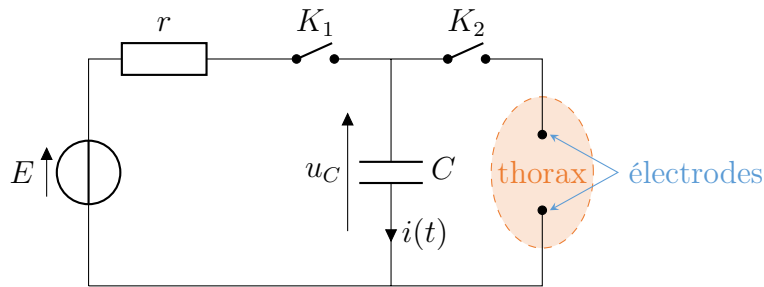
$$x(t) = (X_0 - X_1)e^{-\frac{t}{\tau}} + X_1.$$

Circuit	RC		RL	
Schéma				
Grandeur électrique				
Temps caractéristique				
Équation différentielle				
Condition initiale				
Solution				
Bilan énergétique				
Énergie stockée				

Applications

Application 1 – Défibrillateur (1)

Le défibrillateur automatisé externe (DAE) est un dispositif médical qui limite significativement le risque de mortalité en cas d'arrêt cardiaque, au moyen de décharges électriques délivrées au cœur. Le DAE peut être modélisé selon le montage représenté ci-dessous.



Le fonctionnement du DAE peut se décomposer en deux étapes :

- la **charge**, où K_1 est fermé et K_2 est ouvert : le condensateur ($C = 470 \mu\text{F}$) du DAE est chargé par un générateur haute-tension ($E = 1\,500 \text{ V}$) ;
 - la **décharge**, où K_2 est fermé et K_1 est ouvert : le condensateur est déchargé pour produire le choc électrique reçu par le patient.
1. On suppose que K_1 est fermé depuis suffisamment longtemps pour que le régime permanent soit atteint (K_2 est ouvert). Représenter le schéma électrique simplifié équivalent au DAE dans ce cas et en déduire l'expression de la tension u_C en fonction de E .
 2. Exprimer, puis calculer l'énergie $\mathcal{E}_{C,0}$ stockée par le condensateur.

Application 2 – Défibrillateur (2)

À l'instant $t = 0$, l'opérateur ferme l'interrupteur K_2 (K_1 est ouvert) pour administrer le choc électrique au patient. Lors de la décharge, on assimile le thorax du patient à un conducteur ohmique de résistance $R = 50 \Omega$.

1. Faire un schéma électrique équivalent au DAE lors de la décharge.
2. Utiliser la loi des mailles pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur, pour $t > 0$.
3. Donner la dimension de RC . Faire l'application numérique.
4. Que devient cette équation en régime permanent ? En déduire les valeurs de $u_C(t)$ et $i(t)$ en régime permanent.
5. Retrouver ces valeurs à partir d'un circuit électrique équivalent.

Application 3 – Défibrillateur (3)

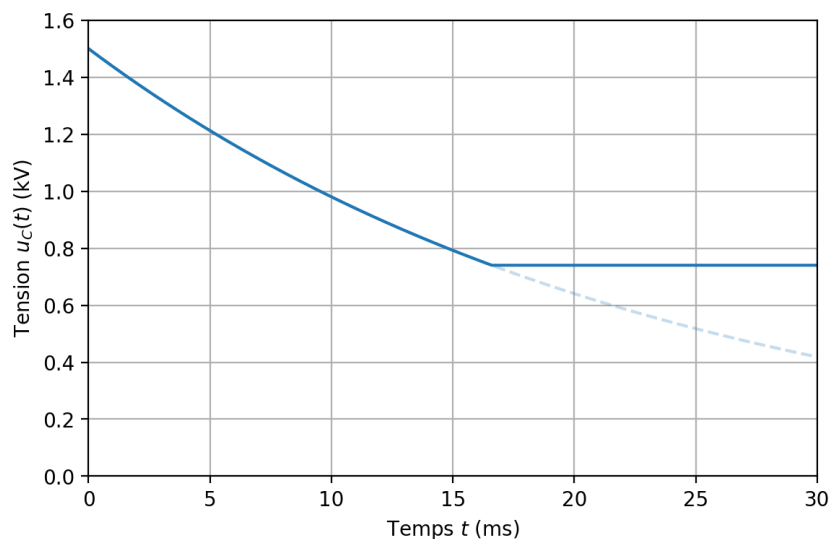
1. On s'intéresse au régime transitoire. Donner la solution générale de cette équation.
2. Que peut-on dire de la tension $u_C(t)$ lors de la fermeture de K_1 ? En déduire la condition initiale vérifiée par $u_C(t)$.
3. Donner la solution $u_C(t)$.

Application 4 – Défibrillateur (4)

1. Représenter graphiquement la solution $u_C(t)$ trouvée précédemment.
2. Faire apparaître graphiquement le temps caractéristique τ associé à la décharge du condensateur et donner la valeur du rapport $\frac{u_C(\tau)}{E}$.
3. Exprimer l'instant t_d à partir duquel le condensateur est complètement déchargé, c'est-à-dire quand la tension à ses bornes est inférieure à 1 % de sa valeur initiale.

Application 5 – Défibrillateur (5)

En réalité, l'interrupteur K_2 s'ouvre automatiquement pour interrompre la décharge quand une énergie électrique $W = 400 \text{ J}$ a été délivrée au patient. L'évolution de la tension aux bornes du condensateur lors d'un choc est représentée ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement la date t_1 à laquelle s'arrête la décharge partielle du condensateur et la valeur de la tension $u_C(t_1)$ à cette date.
2. Exprimer, puis calculer $u_C(t_1)$ et t_1 à l'aide d'un raisonnement énergétique.
3. À l'aide d'un bilan énergétique, montrer que l'intégralité de cette énergie est dissipée par effet Joule.

Application 6 – Défibrillateur (6)

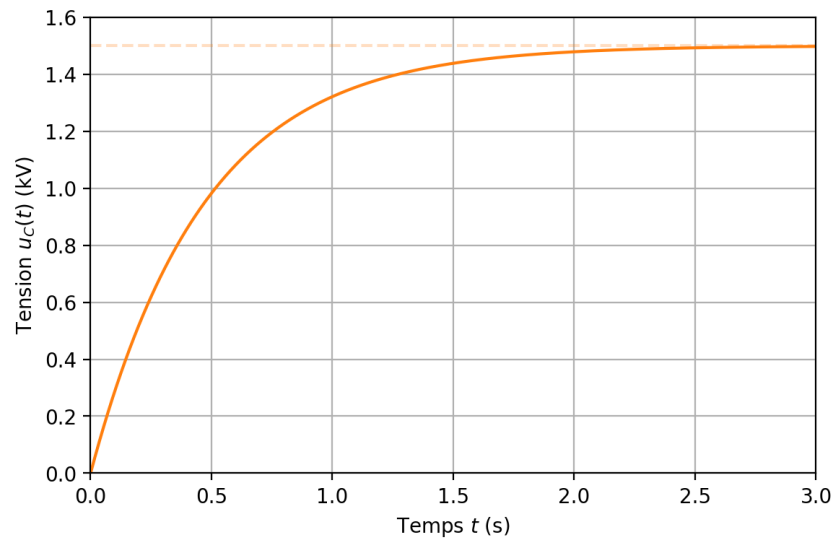
On s'intéresse maintenant à la charge du condensateur. À l'instant t_0 on ferme l'interrupteur K_1 (K_2 est ouvert).

1. Représenter le schéma électrique équivalent au DAE lors de la charge.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$.
3. Résoudre cette équation, en supposant que le condensateur était complètement déchargé avant la fermeture de l'interrupteur K_1 . On choisira la nouvelle origine des temps à $t = t_0$.

L'évolution de la tension aux bornes du condensateur pendant la charge est représentée ci-dessous.

4. Déterminer graphiquement le temps caractéristique τ' de la charge du condensateur.

5. En déduire la valeur de la résistance r .



Application 7 – Défibrillateur (7)

À l'aide d'un bilan énergétique, montrer que lors de la charge du condensateur, le générateur doit fournir deux fois plus d'énergie que celle qui est stockée dans le condensateur complètement chargé.