TD 9

Exercice 4

1. Dans un dee, un proton est soumis à la seule composante magnétique de la force de Lorentz due au champ $\vec{B}$, qui ne travaille pas. Dans un dee, le TPC donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = 0$$

où $\mathcal{E}_c$ est l'énergie cinétique du proton. On a donc $\mathcal{E}_c = \text{cste}$, soit $v = \text{cste}$.
Dans un dee le mouvement est uniforme

2. On admet que le mouvement est circulaire. Puisque que le mouvement est aussi uniforme, l'accélération du proton dans un dee est radiale et de norme $a = \frac{v^2}{R}$.

Puisque $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux :

$$\|\vec{F_L}\| = \|e\vec{v} \wedge \vec{B}\| = evB$$

et $\vec{F_L}$ est également radiale.

Le PFD donne :

$$m\frac{v^{\cancel{2}}}{R} = e\cancel{v}B$$

d'où

$$\boxed{R = \frac{mv}{eB}}$$

Le temps τ de passage dans un dee correspond à la durée nécessaire pour parcourir une distance πR à la vitesse v, soit

$$\tau = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m \cancel{v}}{eB\cancel{v}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\pi m}{eB}}$$

On remarque que τ ne dépend ni de R, ni de v. => la durée nécessaire pour faire un "tour" du cyclotron est toujours la même (si $a \ll R$).

3. La fréquence f correspond à la fréquence à laquelle les protons tournent dans le cyclotron. On a donc :

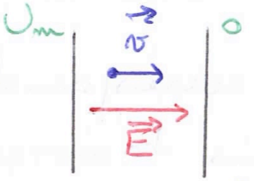
$$\boxed{f = \frac{1}{2\tau} = \frac{eB}{2\pi m}}$$

AN : $\underline{f = 23\,\text{MHz}}$.

Rq : On retrouve ici la pulsation cyclotron $\omega = 2\pi f = \frac{eB}{m}$, pulsation associée à la trajectoire circulaire d'un proton dans un champ $\vec{B}$.

4. Entre les dees, un proton est accéléré par le champ électrique associé à la différence de potentiel imposée entre les dees.

Puisque $a \ll R$, on peut négliger le temps de passage des protons dans cette zone devant $\frac{1}{f}$: on peut alors considérer le champ uniforme et stationnaire associé à la différence de potentiel U_m.



Entre les dees le proton est soumis à la seule composante électrique de la force de Lorentz : le mouvement est conservatif. Le théorème de l'énergie mécanique donne :

$$\Delta \mathcal{E}_m = \Delta \mathcal{E}_p + \Delta \mathcal{E}_c = 0 \text{ soit } \Delta \mathcal{E}_c = -\Delta \mathcal{E}_p$$

avec

$$\Delta \mathcal{E}_p = e \times 0 - e U_m = -e U_m$$

et $\Delta \mathcal{E}_c$ l'énergie cinétique acquise par le proton <u>à chaque passage</u> entre les dees.

Au bout de n passages entre les dees ($\frac{n}{2}$ tours), l'énergie cinétique du proton est donc (car $v_0 \approx 0$) :

$$\mathcal{E}_{c,n} = \frac{1}{2} m v_n^2 = n \times \Delta \mathcal{E}_c = n e U_m$$

On a donc

$$\boxed{v_n = \sqrt{\frac{2 n e U_m}{m}}}$$

et

$$\boxed{R_n = \frac{m v_n}{eB} = \sqrt{\frac{2 n m U_m}{e B^2}}}$$

5. AN : $\underline{R_2 = 6{,}1\,\text{cm}}$ et $\underline{R_{20} = 19\,\text{cm}}$

Rq : 1 tours correspond à 2 passages entre les dees. (5)

6. D'après la question précédente

$$\mathcal{E}_{c,N} = \frac{1}{2} m v_N^2 = \frac{1}{2} \cancel{m} \frac{e^2 B^2 R_N^2}{m^{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{c,N} = \frac{e^2 B^2 R_N^2}{2m}}$$

AN : $\mathcal{E}_{c,N} = 2{,}1 \; 10^{-12} \text{ J} = 13 \text{ MeV}.$

7. On a :

$$\mathcal{E}_{c,N} = N e U_m$$

d'où

$$N = \frac{\mathcal{E}_{cN}}{e U_m} = \frac{e B^2 R_N^2}{2 m U_m}$$

AN : $N = 66.$

Le proton effectue 33 tours dans le cyclotron, ce qui correspond à un temps total pour l'accélération de $66\,\tau = 1{,}4\,\mu s.$

(6)