

DS5 – Thermodynamique et RSF

Exercice 1 – Étude d'un cycle moteur peu performant

1. Dans le cadre du modèle du gaz parfait, on considère :
 - que les particules de gaz sont **ponctuelles**, c'est-à-dire que leur volume est négligeable devant le volume du gaz ;
 - qu'il n'y **pas d'interaction entres les particules**.

L'équation des gaz parfaits est $PV = nRT$, où P est la pression du gaz, V son volume, n sa quantité de matière, T sa température et R la constante des gaz parfaits.

2. Dans le cas général, pour un système en contact mécanique avec l'extérieur de pression P_{ext} et une transformation où le volume du système passe de V_i à V_f :

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P_{\text{ext}} dV.$$

Pour une transformation réversible $P = P_{\text{ext}}$, d'où

$$W_{\text{rév}} = - \int_{V_i}^{V_f} P dV.$$

3. On a pour le système {gaz} dans l'état 0 : $P_0 V_A = nRT_0$. Avec la relation de Mayer et la définition du coefficient isentropique, on obtient :

$$C_v = \frac{nR}{\gamma - 1} = \frac{P_0 V_A}{T_0} \frac{1}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} = \frac{P_0 V_A}{T_0} \frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

Transformation de l'état 0 à l'état 1

Le piston est hermétiquement fermé, le système {gaz dans le cylindre}, abrégé en {gaz}, est donc fermé.

4. Le système {gaz} subit une transformation à volume constant, il s'agit d'un **chauffage isochore réversible**.
5. Dans l'état 1, le système {piston + masse} est à l'équilibre mécanique. Il est soumis (le vecteur unitaire \vec{e}_z est orienté vers le haut) :
 - aux poids de la masse m : $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$;
 - aux forces de pression du gaz et de l'atmosphère : $\vec{F}_p = (P_1 - P_0)S\vec{e}_z$.

Le PFD en statique projeté selon \vec{e}_z donne :

$$0 = -mg + (P_1 - P_0)S, \quad \text{d'où} \quad P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}.$$

La température se déduit de l'équation des gaz parfaits :

$$T_1 = \frac{P_1 V_A}{nR}, \quad \text{d'où} \quad T_1 = T_0 \frac{P_1}{P_0} = T_0 \left(1 + \frac{mg}{P_0 S} \right).$$

A.N. : $P_1 = 1,1 \text{ bar}$ et $T_1 = 3,3 \times 10^2 \text{ K}$.

6. On applique le premier principe au système {gaz} :

$$\Delta U + \cancel{\Delta \mathcal{E}_c} + \cancel{\Delta \mathcal{E}_p} = Q_{01} + \cancel{W_{n.c.}}, \text{ avec } \Delta U = C_v(T_1 - T_0), \text{ d'où}$$

$$Q_{01} = C_v(T_1 - T_0) = \frac{P_0 V_A}{\gamma - 1} \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right).$$

A.N. : $Q_{01} = 8,25 \text{ J}$: le transfert thermique est bien positif, on fournit de l'énergie au gaz pour le chauffer.

Transformation de l'état 1 à l'état 2

7. Le gaz subit un **chauffage isobare réversible**. Il vient donc immédiatement $P_2 = P_1$.
 8. La transformation est à P et n constants donc le quotient T/V est constant. On obtient donc

$$T_2 = T_1 \frac{V_B}{V_A}.$$

A.N. : $T_2 = 1,0 \times 10^3 \text{ K}$.

9. La transformation subie par le système {gaz} est isobare, on applique le premier principe avec l'enthalpie :

$$\Delta H + \cancel{\Delta \mathcal{E}_c} = Q_{12} + \cancel{W_u}, \text{ avec } \Delta H = C_p(T_2 - T_1), \text{ d'où}$$

$$Q_{12} = C_p(T_2 - T_1) = \frac{\gamma P_0 V_A}{\gamma - 1} \left(\frac{T_2 - T_1}{T_0} \right).$$

A.N. : $Q_{12} = 2,6 \times 10^2 \text{ J}$: à nouveau, le transfert thermique est bien positif.

Rendement

10. La transformation $2 \rightarrow 3$ est un **refroidissement isochore réversible** et la transformation $3 \rightarrow 0$ est un **refroidissement isobare réversible**. La condition d'équilibre mécanique impose $P_3 = P_0$.
 11. Les transformations $0 \rightarrow 1$ et $2 \rightarrow 3$ sont isochores, d'où $W_{01} = W_{23} = 0$. Les transformations $1 \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 0$ sont isobares d'où,

$$W_{12} = -P_1(V_B - V_A) \text{ et } W_{30} = -P_0(V_A - V_B).$$

Finalement, avec $W_{\text{cycle}} = W_{01} + W_{12} + W_{23} + W_{30}$:

$$W_{\text{cycle}} = -\frac{mg}{S}(V_B - V_A).$$

A.N. : $W_{\text{cycle}} = -6,6 \text{ J} < 0$. Le travail reçu par le gaz est négatif, il s'agit bien d'un cycle moteur.

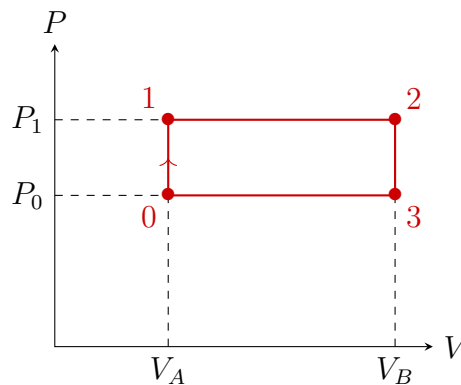
12. De manière générale, le rendement est défini comme le rapport entre l'énergie utile et l'énergie couteuse :

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_{\text{utile}}}{\mathcal{E}_{\text{couteuse}}}.$$

Ici, l'énergie couteuse est celle à fournir pour chauffer le gaz, c'est-à-dire $Q_{01} + Q_{12}$, tandis que l'énergie utile est l'énergie mécanique fournie par le gaz, c'est-à-dire $-W_{\text{cycle}} = |W_{\text{cycle}}|$.

A.N. : $\eta = 2,5\%$. Le rendement est effectivement très faible !

13. Dans le diagramme de Clapeyron (l'échelle verticale n'est pas respectée) :



Le cycle est parcouru dans le sens horaire, l'aire algébrique \mathcal{A} du cycle est donc positive et égale à $(P_1 - P_0)(V_B - V_A)$. Finalement :

$$W_{\text{cycle}} = -\mathcal{A} = -(P_1 - P_0)(V_B - V_A) = -\frac{mg}{S}(V_B - V_A).$$

Exercice 2 – Eau chaude sanitaire

Puisque l'on s'intéresse à une phase condensée incompressible et indilatable dans cet exercice, que le système (sans autre information de l'énoncé) subi des transformations au minimum monobares avec équilibre à l'E.I. et à l'E.F., on privilégie l'utilisation de l'enthalpie.

Mise en service

1. On applique le premier principe au système {eau} de volume V :

$$\Delta H + \cancel{\Delta \mathcal{E}_c} = Q + \cancel{W_u}, \text{ avec } Q = \mathcal{P}_e \Delta t \text{ et } \Delta H = \rho V c (T_c - T_f), \text{ d'où}$$

$$\Delta t = \frac{\rho V c}{\mathcal{P}_e} (T_c - T_f).$$

A.N. : $\Delta t = 3,3 \times 10^2 \text{ min} < \tau_c$. On trouve une valeur inférieure à la donnée constructeur, ce qui peut s'expliquer par le fait que la capacité thermique du chauffe-eau n'a pas été prise en compte.

2. On applique cette fois le premier principe au système {eau + chauffe-eau}, en considérant le transfert thermique reçu pendant τ_c :

$$\Delta H + \cancel{\Delta \mathcal{E}_c} = \mathcal{P}_e \tau_c + \cancel{W_u}, \text{ avec } \Delta H = c(\rho V + \mu)(T_c - T_f), \text{ d'où}$$

$$\mu = \frac{\mathcal{P}_e \tau_c}{c(T_c - T_f)} - \rho V.$$

A.N. : $\mu = 10 \text{ kg}$.

3. On considère le système $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$, avec $\Sigma_1 = \{(V - V_1) \text{ d'eau} + \text{chauffe-eau}\}$ et $\Sigma_2 = \{V_1 \text{ d'eau}\}$. La température de Σ_1 passe de T_c à T_1 tandis que celle de Σ_2 passe de T_f à T_1 . La transformation est adiabatique, le premier principe donne, en utilisant l'extensivité de l'enthalpie :

$$\Delta H_1 + \Delta H_2 = 0, \text{ d'où } T_1 = \frac{(\rho(V - V_1) + \mu)T_c + \rho V_1 T_f}{\mu + \rho V}.$$

A.N. : $T_1 = 56^\circ\text{C}$.

4. D'après le texte introductif, les besoins en ECS à 40°C s'élèvent à environ 56 L par personne et par jour : pour l'appartement il en faudra donc 112 L par jour, soit 41 m^3 d'ECS à 40°C par an.

En négligeant les pertes thermiques, la consommation énergétique due à la production d'ECS, correspond à l'énergie qu'il faut fournir pour réchauffer le volume $V_u = 41 \text{ m}^3$ d'eau froide de la température T_f jusqu'à $T_u = 40^\circ\text{C}$. Le premier principe appliqué à ce volume d'eau donne finalement la consommation énergétique Q_{ECS} recherchée :

$$Q_{\text{ECS}} = \rho V_u c (T_u - T_f).$$

A.N. : $Q_{\text{ECS}} = 4,3 \text{ MJ} = 1,2 \times 10^3 \text{ kW} \cdot \text{h}$, ce qui correspond à environ 10 % de la consommation énergétique moyenne d'un appartement de 50 m^2 habité par deux personnes. Il s'agit bien d'un poste de dépense conséquent.

Pertes thermiques

5. Les trois modes de transfert thermique sont :

- la conduction ;
- la convection ;
- le rayonnement.

6. Par définition, puisque $\Phi > 0$:

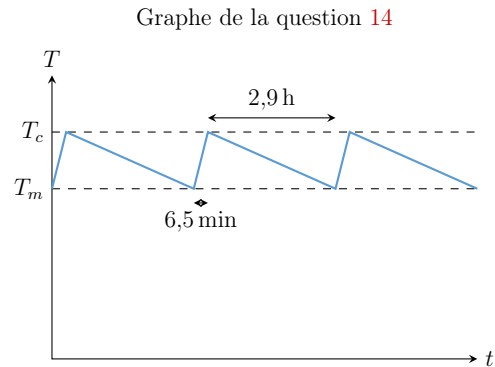
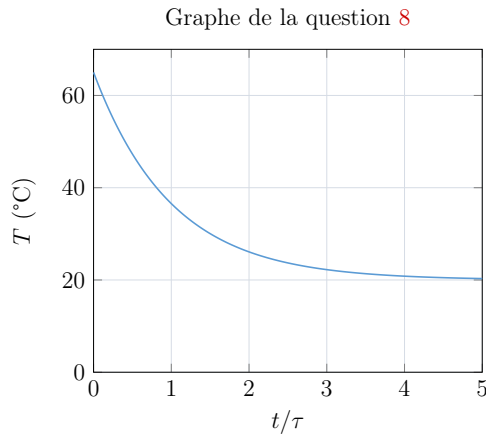
$$\Phi = \frac{T_c - T_0}{R_{\text{th}}} = \lambda S \frac{T_c - T_0}{e}.$$

A.N. : $\Phi = 61 \text{ W}$.

7. On considère le système $\{V \text{ d'eau}\}$ (on néglige la capacité thermique du chauffe-eau) et on applique le premier principe entre t et $t + dt$ où la température varie de dT :

$$c\rho V dT = -\frac{\lambda S}{e}(T - T_0)dt, \text{ d'où } \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_0}{\tau}, \text{ où } \tau = \frac{ec\rho V}{\lambda S}.$$

8. En prenant $T(0) = T_c$, on obtient $T(t) = (T_c - T_0)e^{-t/\tau} + T_0$. Cf. Fig. 1.
9. La constante de temps τ vaut environ 5,3 jours : au bout d'une semaine, le régime permanent n'est pas encore atteint et la température de l'eau est encore voisine de 30 °C. Le chauffe est bien isolé thermiquement : une fois chauffée, la température de l'eau décroît très lentement.

FIGURE 1 – Représentations graphiques de $T(t)$.

Régulation de température

10. En régime permanent, les pertes sont exactement compensées par la puissance \mathcal{P}_r fournie par la résistance chauffante, soit : $\mathcal{P}_r = \Phi$.
11. On peut négliger le flux thermique Φ devant la puissance fournie de la résistance chauffante. Le premier principe appliqué au système $\{V \text{ d'eau}\}$ entre t et $t+dt$ où la température varie de dT donne

$$c\rho V dT = P_e dt, \text{ d'où } \frac{dT}{dt} = \frac{\mathcal{P}_e}{c\rho V} \text{ pour } t \in [t_0, t_1].$$

12. En tenant compte des conditions initiales en $t = t_0$, on obtient :

$$T(t) = \frac{\mathcal{P}_e}{c\rho V}(t - t_0) + T_m \text{ pour } t \in [t_0, t_1], \text{ d'où } t_1 - t_0 = \frac{c\rho V}{\mathcal{P}_e}(T_c - T_m).$$

A.N. : $t_1 - t_0 = 6,5 \text{ min}$.

13. Quand la résistance n'est plus alimentée, on retrouve la même situation qu'aux questions 7 et 8, en prenant cette fois comme origine des temps t_1 , d'où

$$T(t) = (T_c - T_0)e^{-(t-t_1)/\tau} + T_0 \text{ pour } t \in [t_1, t_2].$$

En $t = t_2$, la température est à nouveau T_m , soit

$$t_2 - t_1 = \tau \ln \left(\frac{T_c - T_0}{T_m - T_0} \right).$$

A.N. : $t_2 - t_1 = 2,9 \text{ h}$.

14. Cf. Fig. 1.

Exercice 3 – Horloge à quartz – EPITA

Étude du quartz

1. En utilisant la loi des mailles, on trouve que la tension aux bornes du quartz est u_e . En RSF à la pulsation ω après passage en complexe, par définition de l'impédance :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u_e}}{\underline{Z_q}}.$$

2. On a, en convention récepteur :

$$\underline{Z_R} = R \quad \underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega} \quad \underline{Z_L} = jL\omega.$$

3. En considérant $r = 0$, on a :

$$\frac{1}{\underline{Z_q}} = jC_0\omega + \frac{1}{\frac{1}{jC_1\omega} + jL_1\omega} = \dots = jC_{\text{eq}}\omega \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2},$$

avec

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1} L_1}} \quad C_{\text{eq}} = C_0 + C_1.$$

4. On remarque que $\frac{1}{|\underline{Z_q}|} \rightarrow \infty$ pour $\omega = \omega_1$: l'amplitude de i diverge, donc

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}.$$

5. Dans le nouveau circuit, on a :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u_e}}{r + jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}} = \dots = \frac{\underline{u_e}/r}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right)}, \text{ avec } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \text{ et } Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

6. À résonance, $i = \frac{u_e}{r}$, d'où $U_s = Ri_0 = \frac{R}{r}u_0$ et

$$r = \frac{Ru_0}{U_s}.$$

A.N. : on lit $U_s = 4,3 \text{ V}$, d'où finalement $r = 2,2 \text{ k}\Omega$.

7. Sur le graphe, on lit $f_1 = 32\,768 \text{ Hz}$ et $\Delta f = 1,5 \text{ Hz}$. A.N. : $Q = 22\,000$.

8. À partir des expressions de ω_1 et Q données précédemment :

$$L_1 = \frac{rQ}{\omega_1} \quad C_1 = \frac{1}{\omega_1 r Q}.$$

9. A.N. : $L_1 = 200 \text{ H}$. Cette valeur est très élevée en comparaison des valeurs d'inductances utilisées en TP, qui sont de l'ordre de la dizaine de mH. Ce n'est pas un problème puisqu'il s'agit d'un composant fictif, permettant de modéliser la réponse mécanique du quartz.

Utilisation dans une montre

10. En régime libre, la durée du régime transitoire est de l'ordre de Q/f_1 soit 1 s avec les valeurs obtenues précédemment. Ce n'est pas suffisant pour une horloge !
11. Grâce à des circuits logiques, il est facile de diviser la fréquence d'un signal par deux. En utilisant plusieurs diviseurs de fréquence, on pourra obtenir un signal à 1 Hz correspondant à un battement par seconde.
12. L'imprécision cumulée sur une journée est de $24 \times 60 \times 60 \times 1 \times 10^{-6} = 86$ ms.
13. C'est bien supérieur à la précision atteinte par les horloges à quartz indiquées dans la figure (*Je ne sais pas à quelle figure ils font référence...*). Un moyen simple de contrôle est de placer le quartz dans une enceinte contrôlée en température.