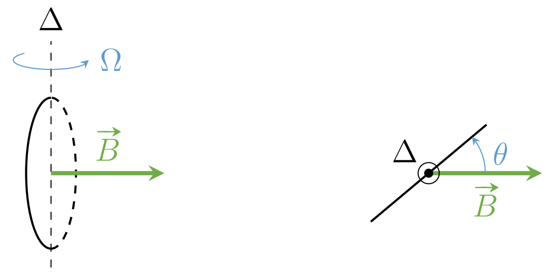
TD19 – Induction

Exercice 1 – Spire en rotation

On considère une spire conductrice circulaire de surface S et de résistance électrique r. Cette spire est mise en rotation à la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$ constante autour d'un de ses diamètres, qui définit l'axe Δ. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}$ orthogonal à Δ.



1. Établir l'expression de la f.é.m. induite dans la spire. En déduire celle du courant induit dans la spire.
2. Déterminer le moment magnétique instantané de la spire.
3. En déduire le couple de Laplace instantané puis moyen qui s'exerce sur la spire. Quel est qualitativement son effet sur le mouvement de la spire ? Aurait-on pu le prévoir sans calcul ?

Exercice 2 – Spire autour d'un solénoïde

Un solénoïde de rayon $R_1 = 2\,\text{cm}$, constitué de $n = 10$ spires par cm, est alimenté par un générateur de f.é.m. $U = 30\,\text{V}$. La résistance interne du générateur est de $1{,}2\,\Omega$ et celle du solénoïde est de $6{,}8\,\Omega$. Une spire conductrice $\mathcal{S}$, de rayon $R_2 = 4\,\text{cm}$, est placée autour du solénoïde ; elle a le même axe que celui-ci. Le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde vaut $B = \mu_0 n I$ à l'intérieur et est nul à l'extérieur.
Donnée : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$.

1. Exprimer, puis calculer la valeur du flux magnétique à travers la spire.
2. L'intensité du courant qui traverse le solénoïde décroît à partir de $t = 0$ selon la loi $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$. Quelle est l'unité de τ ?
3. Exprimer la f.é.m. induite dans la spire pour $t > 0$.
4. Justifier que le résultat obtenu est cohérent avec la loi de Lenz.

Exercice 3 – Auto-induction négligeable ?

Lorsque l'on considère une spire unique, on peut généralement négliger la f.é.m. induite devant celle qui est due à un champ extérieur, c'est-à-dire créé par une autre bobine, variable. On considère ici une spire circulaire de rayon $R = 5\,\text{cm}$ et de résistance interne $r = 1\,\Omega$. Le champ extérieur variable est uniforme, orthogonal au plan de la spire, sinusoïdal de fréquence $f = 50\,\text{Hz}$ et d'amplitude $B_0 = 50\,\text{mT}$.

1. Calculer l'amplitude de la f.é.m. induite e dans la bobine du fait du champ extérieur.
2. En déduire, en négligeant l'auto-induction, l'amplitude du courant induit.
3. Expliquer pourquoi, en négligeant l'auto-induction, on surestime le courant induit.

4. L'expression de l'inductance propre d'une spire est délicate à établir, car on ne peut utiliser une modélisation filiforme des conducteurs (dans une telle modélisation, le champ diverge au voisinage des conducteurs) et il faut donc prendre en compte le rayon du fil, que l'on note a. On donne l'expression

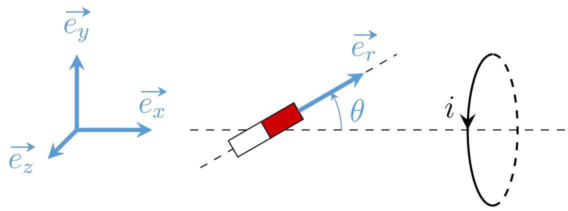
$$L = \mu_0 R \left(\ln\left(\frac{8R}{a}\right) - 2 \right).$$

Calculer l'inductance propre de cette spire avec $a = 0{,}1\,\mathrm{mm}$.

5. Calculer l'amplitude e' de la f.é.m. associée à l'auto-induction et conclure.

Exercice 4 – Fonctionnement d'un générateur

On place à une distance d un aimant sur l'axe d'une spire conductrice de résistance R, de surface S et d'inductance propre négligeable. On met en mouvement l'aimant à la vitesse angulaire constante $\dot{\theta} = \omega$, ce qui produit un champ magnétique variable dans la spire.



Afin de simplifier le problème, on suppose que l'aimant de moment $\mathcal{M}$ et à une distance fixe d de la spire crée un champ uniquement dans la direction de ses pôles :

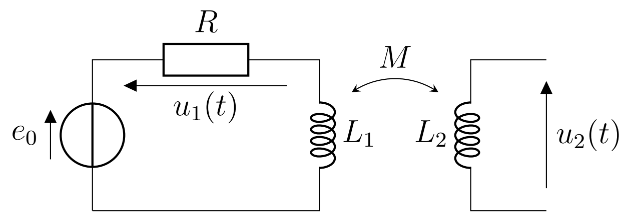
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi d^3}\vec{e_r} = B_0 \vec{e_r}.$$

1. Exprimer le flux du champ de l'aimant à travers la spire pour un angle θ quelconque.
2. Exprimer la force électromotrice induite par le mouvement de l'aimant.
3. En déduire l'intensité du courant dans la spire, ainsi que la puissance électrique $\mathcal{P}_{\text{élec}}$ fournie à celle-ci.
4. Qualitativement, quel va être l'effet de la f.é.m. de la spire sur l'aimant ?
5. Après calcul du moment magnétique de la spire, calculer le moment des actions de Laplace $\vec{\Gamma}$ produites par la spire sur l'aimant.
6. Exprimer la puissance mécanique $\mathcal{P}_{\text{méca}} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega}$ qui en découle. Commenter ce résultat en regard de la question 3.

Exercice 5 – Mesure d'une inductance mutuelle

Le montage ci-dessous permet de mesurer le coefficient d'inductance mutuelle entre deux bobines. Les deux bobines sont côte à côte, comme sur la figure.

La première bobine est montée en série avec une résistance $R = 100\,\Omega$ et un générateur de tension e_0 harmonique de fréquence $f = 2{,}0\,\mathrm{kHz}$. Les tensions u_1 et u_2 sont mesurées grâce à un oscilloscope supposé idéal, c'est-à-dire de résistance d'entrée infinie.



1. Quelle est l'intensité circulant dans la bobine 2 ? D'après la loi de comportement habituelle de la bobine, que vaudrait alors la tension u_2 ? Pourquoi cette loi n'est elle pas applicable telle quelle ici ?
2. Exprimer la tension u_2 en fonction de M et u_1.
3. Calculer M sachant que les tensions lues à l'oscilloscope ont des amplitudes $U_1 = 3{,}00\,\mathrm{V}$ et $U_2 = 0{,}50\,\mathrm{V}$.
4. On fait tourner la bobine sur elle-même dans le plan de la paillasse. Indiquer sans calcul comment est modifiée la valeur de M lorsque l'angle de rotation vaut 180° ? 90° ? Même question si l'on aligne les axes des deux bobines.

Exercice 6 – Table de cuisson

Dans la cuisson à induction, le chauffage du fond métallique des récipients de cuisson peut être réalisé au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable.

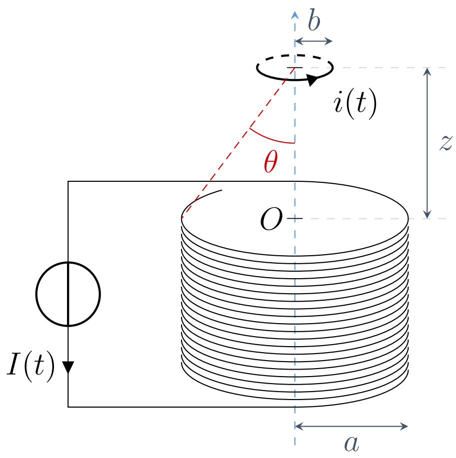
Logé dans une table en céramique, un bobinage alimenté en courant sinusoïdal, appelé inducteur, génère ce champ. L'inducteur a un rayon de 5 cm et compte vingt spires de cuivre de résistance électrique $R_1 = 18\,\mathrm{m\Omega}$ et d'auto-inductance $L_1 = 30\,\mathrm{\mu H}$. Il est alimenté par une tension harmonique v_1 de pulsation $\omega = 2\pi \times 25\,\mathrm{kHz}$. Du point de vue électromagnétique, on modélise le fond de casserole par une spire circulaire unique, fermée sur elle-même, appelée induit. L'induit a une résistance $R_2 = 8{,}3\,\mathrm{m\Omega}$ et une auto-inductance $L_2 = 0{,}24\,\mathrm{\mu H}$. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par couplage inductif entre l'inducteur et l'induit d'inductance mutuelle $M = 2\,\mathrm{\mu H}$.

1. En s'appuyant sur un schéma électrique équivalent, établir les équations électriques couplées vérifiées par i_1 et i_2, relatives aux deux circuits.
2. En déduire l'expression littérale de la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{I_2}/\underline{I_1}$.
3. En déduire l'impédance d'entrée $\underline{Z_e} = \underline{V_1}/\underline{I_1}$ du système.
4. En remarquant que la pulsation ω est bien plus grande que R_1/L_1 et R_2/L_2, simplifier les deux expressions précédentes et calculer numériquement leur module.
5. On soulève la casserole. Indiquer qualitativement comment varie l'amplitude du courant appelé par l'inducteur.

★ Exercice 7 – Lévitation magnétique

On considère un solénoïde de rayon a, dont l'axe (Oz) est placé verticalement, alimenté par un générateur délivrant un courant d'intensité $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. On place au-dessus une bobine courte, assimilée à une spire de rayon $b \ll a$, de résistance R et d'inductance propre L. On observe que pour certains paramètres, la spire reste immobile au-dessus du solénoïde.

https://youtu.be/txmKr69jGBk



On se place en coordonnées cylindriques. Le champ $\vec{B} = B_r \vec{e_r} + B_z \vec{e_z}$ créé par le solénoïde (de rayon a) a deux composantes $B_r(r,z)$ et $B_z(r,z)$. Le long de l'axe de symétrie, on peut montrer que $B_r(r=0,z) = 0$, et

$$B(r=0,z) = \mu_0 n I \frac{1-\cos\theta}{2},$$

où l'angle θ est défini sur le schéma et n est le nombre de spires par unité de longueur. On supposera que pour $r \ll a$, le champ B_z ne dépend pas de r.

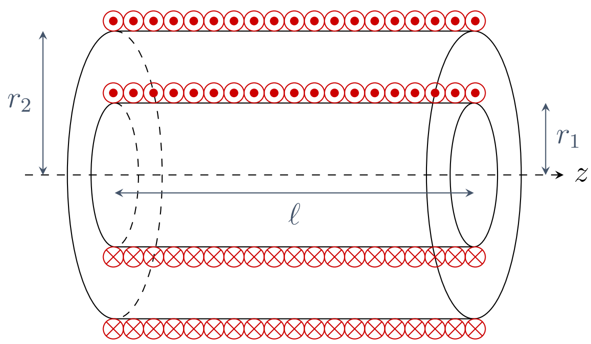
1. Exprimer $\tan\theta$ et en déduire une expression de $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}$ en fonction de z et a.
2. Expliquer qualitativement que le phénomène observé relève de l'induction électromagnétique et justifier la possibilité théorique d'une lévitation.
3. On écrit $i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi)$. Calculer la f.é.m. induite par le champ du solénoïde dans la spire. Obtenir une équation différentielle sur l'intensité i. On introduira le coefficient d'inductance mutuelle M pour simplifier l'expression.
4. En régime permanent forcé, utiliser les notations complexes pour exprimer i_m et $\tan\varphi$ en fonction des paramètres du problème.
5. Calculer la force de Laplace résultant de la composante B_z du champ du solénoïde.
6. On admet que proche de l'axe (Oz), la composante radiale B_r du champ magnétique vaut

$$B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}(r=0,z).$$

   En déduire la force de Laplace s'exerçant sur la spire.
7. Montrer qu'en moyenne, il peut exister un équilibre stable pour la spire (on s'intéressera à la stabilité verticale). Commenter les dépendances en les différents paramètres.
8. Que devient l'énergie fournie par le générateur ?

Exercice 8 – Solénoïdes imbriqués – Oral CCP

Deux solénoïdes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ de même axe (Oz), de même longueur ℓ et de rayons r_1 et $r_2 > r_1$ sont emboîtés l'un dans l'autre. Ils présentent tous deux le même nombre de spires N. On suppose que la longueur ℓ est très supérieure aux rayons. La bobine intérieure est parcourue par un courant $i_1(t) = I\cos(\omega t)$, avec $I = 1\,\mathrm{A}$. La bobine extérieure est en court-circuit.



1. Déterminer les coefficients d'induction propre L_1, L_2, et le coefficient d'induction mutuelle M.
2. En négligeant les résistances internes des fils, déterminer le courant $i_2(t)$ qui parcourt la bobine extérieure. Quelle est son amplitude ?
3. Que vaut le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde central ?