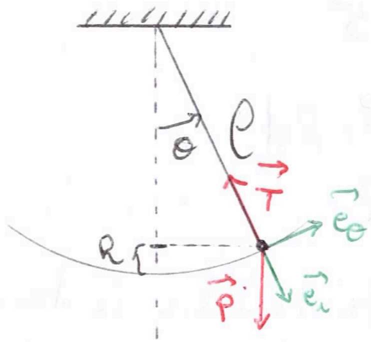
DM 6

Exercice 1.

1



$h = \ell - \ell\cos\theta$, d'où, en prenant la référence d'énergie potentielle de pesanteur en $\theta = 0$:

$$\boxed{\mathcal{E}_p = mg\ell(1-\cos\theta)}$$

Dans le système de coordonnées polaires

$\vec{OM} = \ell\vec{e_r}$

$\vec{v} = \ell\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$\vec{a} = \ell\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - \ell\dot{\theta}^2\vec{e_r}$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta)}$$

2. En l'absence de frottement, le mouvement est conservatif, d'où $\Delta\mathcal{E}_m = 0$.

- A l'instant initial :

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathcal{E}_p = mg\ell$

$\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_c = 0$

- À l'instant final (le fil touche le clou).

$\theta = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_p = 0$

$\dot{\theta} = \omega_0 \Rightarrow \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\omega_0^2$

On a donc :

$g\ell = \frac{1}{2}v_0^2$ d'où $\boxed{v_0 = \sqrt{2g\ell} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}}$

3. La situation est analogue à la précédent en remplaçant ℓ par $\ell - d$:

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(\ell-d)^2\dot{\theta}^2 + mg(\ell-d)(1-\cos\theta)}$$

4. Le mouvement est conservatif, y compris lors du contact avec le clou : l'énergie mécanique est conservée et reste constamment égale à sa valeur initiale : $\mathcal{E}_m = mg\ell$.

5. On a donc :

$$\frac{1}{2}(\ell-d)^2\dot{\theta}^2 + g(\ell-d)(1-\cos\theta) = g\ell$$

soit :

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g\ell}{(\ell-d)^2} - \frac{2g}{\ell-d}(1-\cos\theta)}$$

6. $\vec{T} = -T\vec{e_r}$

$\vec{P} = mg(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta})$

Le PFD selon $\vec{e_r}$ donne :

$$-m(\ell-d)\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta$$

$$T = m\left[(\ell-d)\dot{\theta}^2 + g\cos\theta\right]$$

$$= m\left[\frac{2g\ell}{(\ell-d)} - 2g(1-\cos\theta) + g\cos\theta\right]$$

$$\boxed{T = mg\left(\frac{2\ell}{\ell-d} + 3\cos\theta - 2\right)}$$

7. Le fil reste tendu si $T > 0$, or T est minimale en $\theta = \pi$, donc si $T(\pi) > 0$ le fil sera toujours tendu.

$$T(\pi) = mg\left(\frac{2\ell}{\ell-d} - 5\right)$$

est positif si

$$\frac{2\ell}{\ell-d} > 5$$

$\Leftrightarrow 2\ell > 5\ell - 5d$

$\Leftrightarrow 5d > 3\ell$

Le fil reste tendu à tout instant si :

$$\boxed{d > \frac{3\ell}{5}}$$

8. Le système est alors dans un état libre et va tourner autour du clou. Puisque le diamètre du clou n'est pas nul en réalité, le fil va s'enrouler autour.

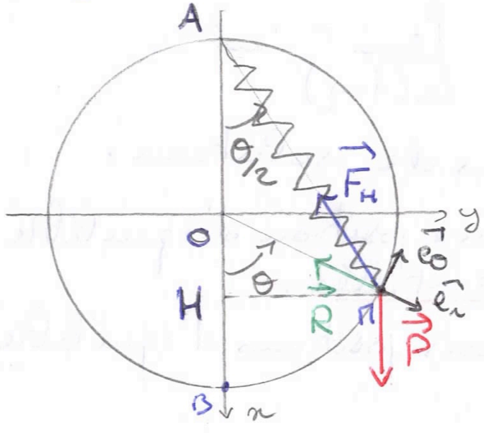
Exercice 2.

1. Puisque le système évolue sur un cercle, la connaissance de $\theta(t)$ suffit à décrire l'évolution du système. Il s'agit d'un mvt à 1 degré de liberté.

2. Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta})$
- Réaction : $\vec{R} = \vec{R_N} = R_N\,\vec{e_r}$
- Force de rappel : $\vec{F_H}$ (pas nécessaire de l'exprimer)

Le poids et la force de rappel sont des forces conservatives, la réaction normale du support ne travaille pas. Il n'y a pas de frottement : le mouvement est conservatif.



3. Puisque l'énergie mécanique est conservée, le théorème de l'énergie mécanique est le plus adapté ici.

4. Dans le triangle $OH\Pi$ rectangle en H

$$H\Pi = a\sin\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

puis dans le triangle $AH\Pi$ rectangle en H

$$\boxed{A\Pi = \frac{H\Pi}{\sin\frac{\theta}{2}} = 2a\cos\frac{\theta}{2}}$$

(on peut aussi remarquer que $A\Pi B$ est rectangle en Π)

5. L'énergie potentielle totale comprend l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{pp}$ et l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{pe}$:

$$\mathcal{E}_{pp} = mga(1-\cos\theta) + \text{cste}' = -mga\cos\theta + \text{cste}''$$

$$\mathcal{E}_{pe} = \frac{1}{2}k\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)^2 + \text{cste}'''$$

d'où :

$$\mathcal{E}_p = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)^2 + \text{cste}$$

$$= ka^2\left(-\frac{mg}{ka}\cos\theta + 2\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{l_0}{2a}\right)\right) + \text{cste}$$

En choisissant $\mathcal{E}_0 = ka^2$ et cste $= 0$ on retrouve bien :

$$\boxed{\frac{\mathcal{E}_p(\theta)}{\mathcal{E}_0} = -\frac{mg}{ka}\cos\theta + 2\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{l_0}{2a}\right)^2}$$

6. Les positions d'équilibres sont telles que $\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = 0$, ce qui revient à $\frac{d\xi(\theta)}{d\theta} = 0$

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{mg}{ka}\sin\theta - 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{l_0}{2a}\right)$$

$$= 2\frac{mg}{ka}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{l_0}{2a}\right)$$

En posant $\eta = \frac{mg}{ka}$, on obtient

$$\frac{d\xi}{d\theta} = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\times(\eta - 1) + \frac{l_0}{2a}\right)$$

$\frac{d\xi}{d\theta}$ est nul si $\sin\frac{\theta}{2} = 0$ ou

$$(\eta - 1)\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{l_0}{2a}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{l_0}{2a(1-\eta)}$$

Sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$,

$\sin\frac{\theta}{2} = 0$ admet une solution : $\theta = 0$

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{l_0}{2a(1-\eta)}$ admet deux solutions

$$\theta = \pm 2\arccos\left(\frac{l_0}{2a(1-\eta)}\right)$$

(on a bien $\left|\frac{l_0}{2a(1-\eta)}\right| < 1$ car $\eta < 1 - \frac{l_0}{2a}$)

Il existe bien 3 positions d'équilibre sur $]-\pi, \pi]$ définies par :

$$\boxed{\sin\frac{\theta}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{l_0}{2a(1-\eta)}}$$

7. Pour $\eta = 1{,}0$, la condition $\eta < 1 - \frac{l_0}{2a}$ n'est pas respectée et

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{l_0}{2a(1-\eta)}$$

n'admet pas de solution.

$\eta = 1$: une position d'équilibre : courbe en pointillés.

$\eta = 0{,}2$: trois positions d'équilibre : courbe pleine

8.

η	0,2	1,0
$\sin\frac{\theta}{2}=0$	instable	stable.
$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{l_0}{2a(1-\eta)}$	stables	

9. $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ avec, dans le cas où $\eta = 1$:

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2$$

$$\mathcal{E}_p = k a^2 \left(-\cos\theta + 2\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{l_0}{2a}\right)^2\right)$$

Puisque le mouvement est conservatif $\mathcal{E}_m = \text{cste}$ et $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$. Calculons chaque terme :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \frac{1}{2} m a^2\, 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = m a^2 \dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dt} = k a^2\left[\dot{\theta}\sin\theta + 2\times\cancel{2}\times\left(-\frac{\dot{\theta}}{\cancel{2}}\sin\frac{\theta}{2}\right)\times\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{l_0}{2a}\right)\right]$$

$$= k a^2 \dot{\theta}\left(\sin\theta - 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{l_0}{2a}\right)\right).$$

En simplifiant par $a^2\dot{\theta}$, $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$ s'écrit

$$m\ddot{\theta} + k\left(\sin\theta - 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{l_0}{2a}\right)\right) = 0$$

En remarquant que $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ et en divisant par m, on obtient finalement

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\frac{l_0}{a}\sin\frac{\theta}{2} = 0.}$$

10. Au voisinage de $\theta = 0$, $\sin\frac{\theta}{2} \simeq \frac{\theta}{2}$

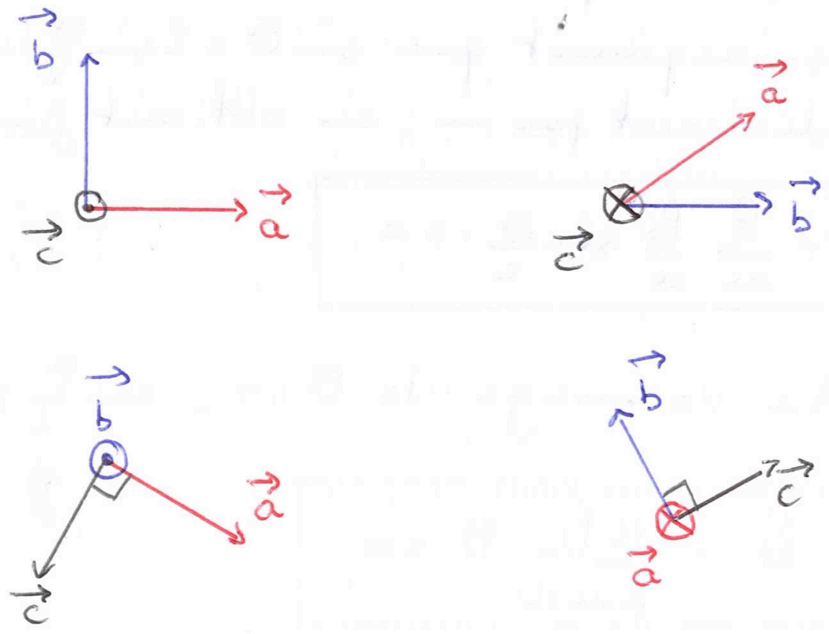
d'où $$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{k l_0}{2ma}\theta = 0}$$

On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k l_0}{2ma}}}$$

Exercice 3.

1.



2. $(\vec{e_x}+\vec{e_y})\wedge\vec{e_z} = \underbrace{\vec{e_x}\wedge\vec{e_z}}_{-\vec{e_y}} + \underbrace{\vec{e_y}\wedge\vec{e_z}}_{+\vec{e_x}} = \vec{e_x}-\vec{e_y}$

$$(3\vec{e_x}+2\vec{e_z})\wedge(\vec{e_x}+2\vec{e_y}) = \vec{0}+6\vec{e_z}+2\vec{e_y}+(-4\vec{e_x})$$
$$= -4\vec{e_x}+2\vec{e_y}+6\vec{e_z}$$

$$\underbrace{(\vec{e_y}\wedge 3\vec{e_x})}_{-3\vec{e_z}}\wedge\vec{e_z} = \vec{0}$$

(vecteur nul)
ne pas oublier la flèche

$$\underbrace{(\vec{e_z}\wedge\vec{e_y})}_{-\vec{e_x}}\cdot\vec{e_y} = 0.$$

(zéro : scalaire nul)
sans flèche.