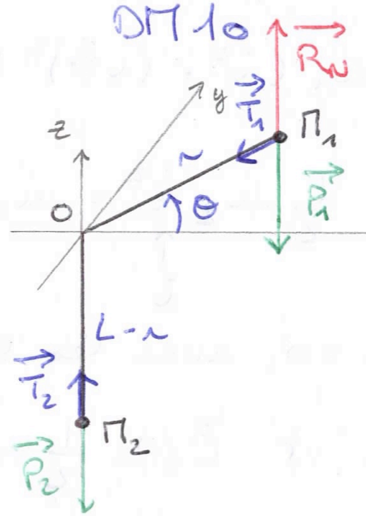
DM 10

1.



2. $\vec{OM_1} = r\,\vec{e_r}$ $(z=0)$

$\vec{v_1} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$\vec{OM_2} = z\,\vec{e_z}$

$\vec{v_2} = \dot{z}\,\vec{e_z}$

3. $L = OM_1 + OM_2$ d'où $\boxed{L = r - z}$

⚠ $z < 0$.

4. On a ; à $t=0$

$r = r_0$

$\dot{r} = 0$

$\theta = 0$

$\dot{\theta} = \dfrac{v_0}{r_0}$

$z = r_0 - L$ et $\dot{z} = 0$.

5. Le mouvement de M_1 est un mouvement à deux degrés de liberté (r et θ), celui de M_2 n'en possède qu'un (z).
Il faut donc trois équations

6. Système : $\{M_1\}$
Référentiel terrestre supposé galiléen.
Schéma : cf quest. 1.
Bdf : - Poids : $\vec{P_1} = m_1\vec{g}$
- Réaction normale du support $\vec{R_N} = R_N\vec{e_z}$
- Tension du fil $\vec{T_1} = -T\,\vec{e_r}$

Le mouvement de M_1 est plan en $z=0$
les forces $\vec{P_1}$ et $\vec{R_N}$ se compensent. On a

$\vec{L_O}(M_1) = m_1\vec{OM_1} \wedge \vec{v_1} = m_1 r^2\dot{\theta}\,\vec{e_z}$

$\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{T_1}) = \vec{0}$ (force centrale).

On applique le TMC en O (fixe) et on projette sur $\vec{e_z}$:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1 r^2\dot{\theta}\right) = 0 \quad \text{d'où} \quad r^2\dot{\theta} = \text{cste}.$$

Avec les conditions initiales établies à la question 4, on obtient

$$\boxed{C = r^2\dot{\theta} = r_0 v_0}$$

7.* Système $\{M_1\}$
Puisque le mouvement est plan en $z=0$ la seule force dont le travail n'est pas nul

est la tension du fil $\vec{T_1}$. On applique le TPC :

$$\frac{d\mathcal{E}_{c1}}{dt} = \vec{T_1}\cdot\vec{v_1} = -T\dot{r} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_{p1} = 0$$

où $\mathcal{E}_{c1}$ est l'énergie cinétique de M_1 et et $\mathcal{E}_{p1}$ son énergie potentielle.

→ Système $\{M_2\}$, soumis à son poids $\vec{P_2}$ et à la tension du fil $\vec{T_2}$. D'après l'énoncé $\|\vec{T_2}\| = \|\vec{T_1}\|$. Le TPC donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_{c2}}{dt} = \vec{T_2}\cdot\vec{v_2} + \vec{P_2}\cdot\vec{v_2} = T\dot{z} \underbrace{- m_2 g\dot{z}}_{-\frac{d\mathcal{E}_{p2}}{dt}}$$

Or $\dot{z} = \frac{d}{dt}(r-L) = \dot{r}$ d'où

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_{c2}+\mathcal{E}_{p2}) = T\dot{r}$$

Finalement, on a

$$\frac{d\mathcal{E}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2) = -T\dot{r} + T\dot{r} = 0$$

L'énergie mécanique de l'ensemble $\{M_1+M_2\}$ est conservée.

8. On a

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{c1} = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right)$$

et

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{c2} + \mathcal{E}_{p2} = \frac{1}{2}m_2 \underset{\uparrow\atop \dot{r}}{\dot{z}}{}^2 + m_2 g \underset{\uparrow\atop r-L}{z}$$

Par ailleurs, en $t=0$, avec les CI de la quest. 4

$$\mathcal{E}_1(0) = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_2(0) = m_2 g(r_0-L)$$

d'où finalement :

$$\frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + m_2 g(r-L) = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 + m_2 g(r_0-L)$$

soit :

$$\boxed{\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1 r^2\dot{\theta}^2 + m_2 g(r-L) = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 + m_2 g(r_0-L)}$$

9. En remarquant que $r^2\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^2}$, on retrouve

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,eff}(r)$$

où

$$\boxed{\mathcal{E}_{p\,eff}(r) = \frac{1}{2}m_1\frac{C^2}{r^2} + m_2 g(r-L)}$$

10. $$\mathcal{E}_0^* = \frac{\mathcal{E}_0}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2}\left(\frac{1}{2} m_1 v_0^2 + m_2 g \underbrace{(r_0 - L)}_{-2r_0}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{E}_0^* = 1 - 2\alpha}$$

$$\mathcal{E}^*_{p,eff}(r^*) = \frac{\mathcal{E}_{peff}(r)}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m_1}\frac{C^2}{r^2}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m_1} v_0^2} + \underbrace{\frac{r_0}{r_0}\frac{m_2 g r}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2}}_{\alpha r^*} - \underbrace{\frac{m_2 g \overset{3r_0}{L}}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2}}_{3\alpha}$$

où $r^* = \frac{r}{r_0}$. Le premier terme devient

$$\frac{C^2}{r^2 v_0^2}\,\frac{r_0^2}{r_0^2} = \frac{C^2}{r_0^2 v_0^2} \times \frac{r_0^2}{r^2} = \frac{1}{r^{*2}}$$

On a finalement:

$$\boxed{\mathcal{E}^*_{p,eff}(r^*) = \alpha(r^* - 3) + \frac{1}{r^{*2}}}$$

11 On calcule $\mathcal{E}_0^*$ avec les deux expressions trouvées à la question 8. Le terme de droite a déjà été obtenu à la question 10. Le terme de gauche devient:

$$\mathcal{E}_0^* = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} + \underbrace{\frac{\mathcal{E}_{peff}(r)}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2}}_{\mathcal{E}_{peff}^*(r^*)}$$

$$= 4\frac{\dot{r}^2}{v_0^2} + \mathcal{E}^*_{peff}(r^*)$$

Or:

$$4\frac{\dot{r}^2}{v_0^2} = 4\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{r}{v_0}\right)\right)^2$$

$$= 4\left(\frac{dt^*}{dt}\frac{d}{dt^*}\left(\frac{r}{v_0}\right)\right)^2 \quad \text{avec } t^* = \frac{t}{t_0} = \frac{t v_0}{r_0}$$

$$= 4\left(\frac{\cancel{v_0}}{r_0}\frac{d}{dt^*}\left(\frac{r}{\cancel{v_0}}\right)\right)^2$$

$$= 4\left(\frac{dr^*}{dt^*}\right)^2$$

Finalement, on a bien:

$$\boxed{4\left(\frac{dr^*}{dt^*}\right)^2 + \alpha(r^* - 3) + \frac{1}{r^{*2}} = 1 - 2\alpha}$$

La deuxième équation s'obtient en dérivant la première par rapport à t^*

$$\frac{d}{dt^*}\left(4\left(\frac{dr^*}{dt^*}\right)^2 + \alpha(r^* - 3) + \frac{1}{r^{*2}}\right) = \frac{d}{dt^*}(1 - 2\alpha)$$

$$2 \times 4\frac{d^2 r^*}{dt^{*2}} \times \frac{dr^*}{dt^*} + \alpha\frac{dr^*}{dt^*} - 2\frac{dr^*}{dt^*}\frac{1}{r^{*3}} = 0$$

7

Finalement, en simplifiant par $\frac{dr^*}{dt^*}$

$$\boxed{\frac{d^2 r^*}{dt^{*2}} = -\frac{\alpha}{8} + \frac{1}{4r^{*3}}}$$

Le cas $\frac{dr^*}{dt^*} = 0$ correspond à une trajectoire circulaire, qui ne nécessite pas de résoudre numériquement l'équation différentielle.

12. On a $r^2\dot\theta = r_0 v_0$ d'une part et

$$r^2\dot\theta = r^2\frac{d\theta}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt^*}\frac{dt^*}{dt} = r^2\dot\theta^*\frac{v_0}{r_0}$$

Finalement

$$1 = \frac{r^2\dot\theta}{r_0 v_0} = \frac{r^2\dot\theta^*}{r_0^2}\frac{\cancel{v_0}}{\cancel{v_0}} = r^{*2}\dot\theta^*$$

On a bien :

$$\boxed{\dot\theta^* = \frac{1}{r^{*2}}}$$

13. En combinant les réponses des questions 4 (pour les CI) 11 et 12 pour les eq° diff, on a

$$\begin{cases} \ddot r^* = -\frac{\alpha}{8} + \frac{1}{4r^{*3}} \\ \dot\theta^* = \frac{1}{r^{*2}} \end{cases} \qquad CI : \begin{cases} r^*(0) = 1 \\ \dot r^*(0) = 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases}$$

8

Rq : θ est déjà une grandeur sans dimension. On note toutefois

$$\dot\theta^* = \frac{d}{dt^*}\theta$$

pour bien différencier de $\dot\theta = \frac{d}{dt}\theta$

14. La courbe $r^*(t^*)$ est périodique, tout comme celle de $\dot\theta^*(t^*)$. (période $T^* \approx 20$)

15. On a

$$\begin{cases} x^* = r^*\cos(\theta^*) \\ y^* = r^*\sin(\theta) \end{cases}$$

La trajectoire de M_1 est contenue entre deux cercles de rayons $r_1^* = 1$ et $r_2^* \approx 2{,}75$

La trajectoire n'est pas fermée : c'est une conséquence du terme αr^{*2} dans l'énergie potentielle effective.

Rq : On obtient des trajectoires fermées pour des forces centrales :

- newtoniennes (cf chap 16)
- élastiques (ressort).

quelles que soient les conditions initiales.

Ici la tension du fil n'est ni newtonienne ni élastique.