TD16 – Mouvement dans un champ de gravitation newtonien

On rappelle la valeur de la constante gravitationnelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

Exercice 1 – Échauffements

Les questions sont indépendantes.

1. Retrouver l'expression de la constante des aires à partir du PFD : projeter sur $\vec{e_\theta}$, multiplier par r et intégrer.
2. Exprimer l'accélération g de la pesanteur à la surface de la Terre en fonction de G, M_T et R_T. Faire l'application numérique.
   Données : masse de la Terre $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$*, rayon de la Terre* $R_T = 6{,}37 \times 10^3\,\mathrm{km}$.
3. On considère que l'orbite de la station spatiale internationale (ISS) est circulaire et située à une altitude $h = 384\,\mathrm{km}$. Déterminer sa vitesse v ainsi que sa période T en fonction uniquement de R_T, de l'accélération g de la pesanteur à la surface de la Terre et h. Faire les applications numériques.

Exercice 2 – Vitesses cosmiques

On considère un astre de masse M et de rayon R.

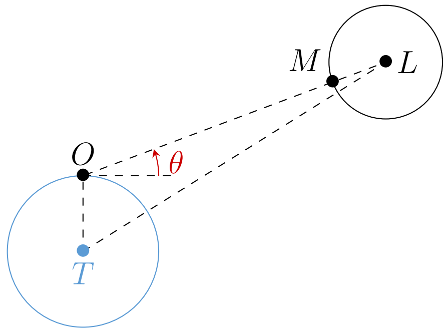
1. La première vitesse cosmique v_1 correspond à la vitesse de satellisation minimale, c'est-à-dire la vitesse d'un corps dont le rayon de l'orbite serait celui de l'astre. Exprimer v_1 en fonction de G, M et R. Faire l'application numérique pour la Terre.
2. La seconde vitesse cosmique v_2 correspond à la vitesse de libération, c'est-à-dire la vitesse minimale nécessaire pour qu'un corps, initialement immobile et situé à une distance d du centre de l'astre, puisse s'éloigner infiniment de l'astre. Exprimer v_2 en fonction de G, M et d. Faire l'application numérique pour la vitesse de libération à la surface de la Terre.
3. Un trou noir est un astre compact pour lequel la vitesse de libération à sa surface est supérieure à celle de la lumière c. Exprimer le rayon de Schwarzschild, noté R_S, correspondant au rayon maximal d'un trou noir de masse M. Faire l'application numérique pour un astre d'une masse terrestre. Commenter.
   Données : masse de la Terre $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$*, rayon de la Terre* $R_T = 6{,}37 \times 10^3\,\mathrm{km}$.

Exercice 3 – Masse de la Terre

La distance entre la Terre est la Lune est connue au centimètre près, grâce aux réflecteurs installés sur la Lune en M (cf. schéma ci-dessous) par les astronautes des missions Apollo. À travers un télescope pointé sur la Lune, un laser émet une brève impulsion dont on mesure le temps de propagation aller-retour τ depuis l'observatoire situé en O. Lorsque la hauteur angulaire θ de la Lune au dessus de l'horizon vaut 45°, on trouve $\tau = 2{,}516\,\mathrm{s}$.

1. Exprimer, puis calculer la distance OM. En déduire la distance TL sachant que $R_T = 6{,}37 \times 10^3\,\mathrm{km}$ et $R_L = 1{,}74 \times 10^3\,\mathrm{km}$.

La période de révolution sidérale de la Lune, c'est-à-dire la période du mouvement orbital lunaire mesurée dans un référentiel géocentrique, dont les axes sont dirigés vers des étoiles lointaines, vaut $T_L = 27\,\text{jours}\ 8\,\text{heures}$. On considère que l'orbite lunaire est circulaire.



2. Retrouver la troisième loi de Kepler dans ce cas.
3. En déduire la masse de la Terre.

Exercice 4 – Freinage

On étudie le mouvement d'un satellite artificiel de la Terre dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. On néglige les autres interactions que la force de gravitation entre la Terre et le satellite. On note M_T la masse de la Terre, R_T son rayon, m la masse du satellite supposée petite devant M_T et G la constante gravitationnelle. On note T_0 la période de révolution du satellite.

1. Établir la conservation du moment cinétique du satellite par rapport à la Terre.
2. En déduire que le mouvement du satellite est plan.
3. Montrer que cela permet de définir une constante des aires $\mathcal{C}$ dont on donnera l'expression.
4. On suppose que le satellite est en orbite circulaire autour de la Terre. Montrer que son mouvement est uniforme.
5. Établir l'expression de la vitesse v du satellite en fonction de G, M_T et r le rayon de l'orbite du satellite.
6. Retrouver la troisième loi de Kepler dans le cas d'une trajectoire circulaire. Faire l'application numérique pour la période d'un satellite situé sur une orbite basse à $1{,}0 \times 10^3\,\text{km}$ d'altitude.
7. Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_\text{c}$ du satellite en fonction de G, M_T, m et r.
8. Même question pour son énergie potentielle $\mathcal{E}_\text{p}$. Donner la relation entre $\mathcal{E}_\text{c}$ et $\mathcal{E}_\text{p}$.
9. En déduire l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_\text{m}$ et les relations de $\mathcal{E}_\text{m}$ avec $\mathcal{E}_\text{p}$ et $\mathcal{E}_\text{c}$.

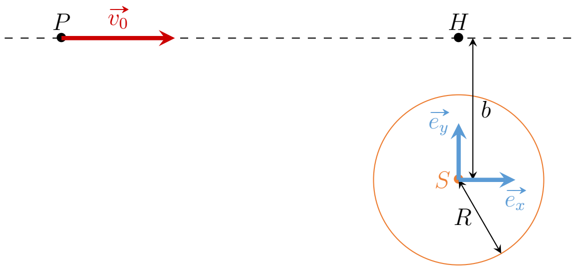
Les satellites en orbite basse subissent des frottements de la part des hautes couches de l'atmosphère. On modélise l'action des hautes couches de l'atmosphère par une force de frottement proportionnelle à la masse du satellite et à sa vitesse au carré : $\vec{f} = -\alpha m v \vec{v}$ où α est le coefficient de frottement positif. Cette force est suffisamment faible pour que la trajectoire soit quasi-circulaire. Dans ces conditions, les expressions des différentes énergies en fonction de r restent valables mais r varie lentement dans le temps.

10. À l'aide du TEM, établir l'équation différentielle vérifiée par r.
11. Sans résoudre, montrer que r ne peut que diminuer.
12. En déduire un résultat surprenant sur l'évolution de la vitesse du satellite.

Ces frottements limitent la durée de vie des satellites en les faisant lentement chuter sur Terre. Un satellite situé sur une orbite à $1{,}0 \times 10^3\,\text{km}$ d'altitude descend d'environ $2{,}0\,\text{m}$ par jour.

Exercice 5 – Paramètre d'impact

Le Soleil S de masse M et de rayon R est supposé fixe dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen $\mathcal{R} = (S, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Un point matériel P de masse m pénètre dans le système solaire avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$: loin (à l'infini) de S la trajectoire est rectiligne dirigée selon une droite qui passe à une distance b de S, appelée paramètre d'impact.



Le point P est repéré par ses coordonnées polaires d'origine S. On suppose qu'il n'est soumis qu'à l'attraction du Soleil. On cherche une condition sur b pour qu'il n'y ait pas de collision entre S et P.

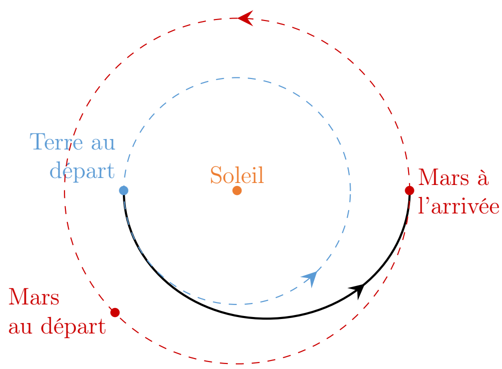
1. Montrer que la grandeur $r^2\dot{\theta}$ se conserve au cours du mouvement. Comment s'appelle cette constante ? Montrer que cette grandeur vaut bv_0.
2. Donner l'expression de l'énergie mécanique dans le cas d'un champ de gravitation newtonien.
3. Construire une énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{\text{p,eff}}(r)$ et la représenter graphiquement.
4. Placer sur le graphe l'énergie mécanique du point P. Décrire la trajectoire du point P. Faire un schéma.
5. Justifier que la vitesse est orthogonale au vecteur position lorsque la distance SP est minimale.
6. En utilisant la loi de conservation de la question 1, établir une relation entre v_0, b, la distance minimale d'approche r_{min} et $v_1 = v(r_{\text{min}})$.
7. En utilisant une autre loi de conservation, que l'on justifiera, établir une relation entre v_0, r_{min}, v_1, M et la constante gravitationnelle G.
8. En déduire une condition sur b pour que P évite le Soleil.

Exercice 6 – Voyage vers Mars

Cet exercice est à traiter avec les seules données de l'énoncé.

Schématiquement, la Terre et Mars décrivent des cercles de rayons r_T et $r_M = 1{,}523\,7 r_T$ dans le sens gauche vu du Pôle Nord de la Terre. Dans le référentiel héliocentrique, la vitesse de la Terre est $v_T = 30\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ et sa période orbitale est $T_T = 1\,\text{an}$.

La trajectoire la plus économique pour aller de la Terre à Mars correspond à une orbite elliptique tangente aux deux extrémités de son grand-axe à l'orbite de Terre et à celle de Mars.



1. Quelle vitesse v_P possède le véhicule sur cette orbite à son périhélie ?

On tire de la surface terrestre un projectile avec une vitesse v_0 par rapport au référentiel géocentrique.

2. Déterminer la vitesse de libération (Ex. 2) v_L de la Terre.

3. Exprimer la vitesse v_∞ du projectile dans le référentiel géocentrique quand il est à une distance de la Terre grande par rapport au rayon terrestre et petite par rapport à la distance Terre – Soleil en fonction de v_0 et v_L.

4. Dans quelle direction et dans quel sens faut-il le tirer pour se diriger vers Mars le plus économiquement possible ?

5. On donne $v_\infty = v_P - v_T$. En déduire la valeur correspondante v_0.

6. Calculer la durée τ en année de l'aller Terre – Mars.

Exercice 7 – Résolution de problème

La lumière du Soleil met huit minutes et dix neuf secondes à nous parvenir. En déduire la masse du Soleil.

Exercice 8 – Gravity – Oral CCP

Dans le film Gravity, des astronautes effectuent une mission de maintenance sur le télescope spatial Hubble lorsque leur navette est détruite. Leur seul espoir semble être de rejoindre la Station spatiale internationale, l'ISS. Le but de cet exercice est de définir dans quelles conditions ce voyage spatial est possible. On suppose que le télescope Hubble et l'ISS sont en orbite circulaire basse autour de la terre, respectivement à $h_H = 600\,\mathrm{km}$ et $h_S = 400\,\mathrm{km}$ au-dessus de la Terre, dans le même plan. Le rayon de la terre est $R_T = 6\,400\,\mathrm{km}$; G est la constante universelle de gravitation.

1. Exprimer la force de gravitation exercée par la Terre, de masse M_0, sur l'astronaute et son équipement, de masse m. Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation.
2. En exprimant le principe fondamental de la dynamique pour un système en rotation uniforme, établir la troisième loi de Kepler. Exprimer l'énergie mécanique de l'astronaute sur son orbite, en fonction de G, m, M_0 et du rayon de l'orbite r.
3. Déterminer numériquement la période T_S de l'ISS, sachant que la période du télescope vaut $T_H = 97\,\mathrm{min}$. En déduire numériquement la vitesse du télescope v_H, puis celle de la station spatiale v_S sur leur orbite respective.

Pour rejoindre la station spatiale, l'astronaute envisage une orbite de transfert elliptique, dont l'apogée de distance r_H par rapport au centre de la Terre est sur l'orbite du télescope, et le périgée de distance r_S par rapport au la terre est sur l'orbite de l'ISS.

4. Représenter la trajectoire suivie par l'astronaute.
5. Exprimer l'énergie mécanique de l'astronaute sur cette trajectoire en fonction de G, M_0, m, r_H et r_S.
6. Exprimer la vitesse de l'astronaute à l'apogée, en fonction de r_H, T_H et r_S. Par analogie, en déduire l'expression de la vitesse au périgée en fonction de r_S, T_S et r_H. Calculer les valeurs numériques. Techniquement comment l'astronaute peut-il gérer sa vitesse ?
7. Quelle est la durée de ce voyage ?

python Exercice 9 – Équation de Kepler

On considère un point matériel soumis au champ de gravitation créé par un astre central massif. Le point matériel est repéré par ses coordonnées r et θ dans le repère polaire. À partir des équations du mouvement, il est possible d'obtenir une expression analytique [1] pour l'évolution de $r(\theta)$, une conique d'équation

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

caractérisée par son excentricité e.

1. Pour les plus curieux, la démonstration passe par l'utilisation des formules de Binet. On démontre ainsi la première loi de Kepler pour un état lié.

L'évolution temporelle de la position, donc l'obtention de $\theta(t)$, est plus délicate à obtenir. Elle nécessite de résoudre, pour chaque instant t, l'équation de Kepler, établie en 1609 :

$$u - e\sin u = \frac{2\pi}{T}t, \tag{1}$$

où u est l'anomalie excentrique (un angle qui permet ensuite d'obtenir θ), $e \in [0, 1[$ l'excentricité de l'ellipse et T la période de révolution. Il s'agit d'une équation dite transcendante, dont il n'existe pas de solution analytique. Il est toutefois possible de la résoudre numériquement.

On souhaite résoudre l'équation 1 à un instant $t = T/3$.

1. Avec Python, représenter graphiquement $g(u) = u - e\sin u$ pour $e = 0{,}5$. Estimer graphiquement la valeur de u solution de l'équation 1.
2. Donner deux valeurs u_- et u_+, telles que l'équation 1 admette une solution $u \in [u_-, u_+]$.

La solution u est une racine de la fonction $f(u) = g(u) - \frac{2\pi}{T}t$ et les valeurs $f(u_-)$ et $f(u_+)$ sont de signes opposés.

3. Déterminer numériquement la valeur de u à l'aide de la fonction `bisect` de la bibliothèque `scipy.optimize`.
4. Retrouver cette valeur par une méthode dichotomique. On utilisera la même précision par défaut que `bisect`, c'est-à-dire 2×10^{-12}.

On peut ensuite représenter l'évolution temporelle des positions successives d'un astre en itérant cette résolution pour plusieurs instants t entre 0 et T, sachant que les angles θ et u vérifient

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{u}{2}\right).$$

`scipy.optimize.bisect(f, a, b) :` renvoie la racine de la fonction `f` sur l'intervalle [`a`, `b`]. La fonction `f` doit être continue et `f(a)` et `f(b)` de signes opposés.