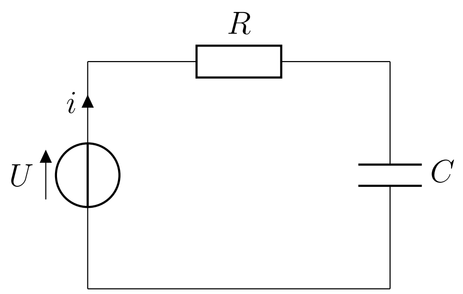
TD0 – Analyse dimensionnelle

Exercice 1 – Charge d'un condensateur

Un générateur de tension est utilisé pour charger à l'aide d'une tension U un condensateur de capacité C à travers une résistance de valeur R. La charge $q(t)$ du condensateur, initialement déchargé, est

$$q(t) = CU\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$



1. Déterminer et justifier la dimension du paramètre τ.
2. Le paramètre τ est lié à R et C. Parmi les équations ci-dessous, déterminer celle qui est correcte. Justifier.
   - $\tau = RC$
   - $\tau = R/C$
   - $\tau = (RC)^{-1}$
   - $\tau = C/R$

Exercice 2 – Homogénéité

Déterminer si les équations suivantes sont homogènes.

1. La trajectoire d'un corps de masse m et de vitesse initiale v_0, soumis à l'accélération de pesanteur g :
$$x(t) = v_0 t^2 + \frac{1}{2} g t.$$
2. La troisième loi de Kepler dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon R, mettant en jeu la période de révolution T, la masse du Soleil $M_\odot$ et la constante gravitationnelle G :
$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}.$$
3. La trajectoire d'un proton de charge e et de vitesse initiale v_0 que l'on accélère entre les deux armatures d'un condensateur, distantes de d, aux bornes duquel on applique une tension U :
$$x(t) = \frac{eUt^2}{2d} + v_0 t.$$

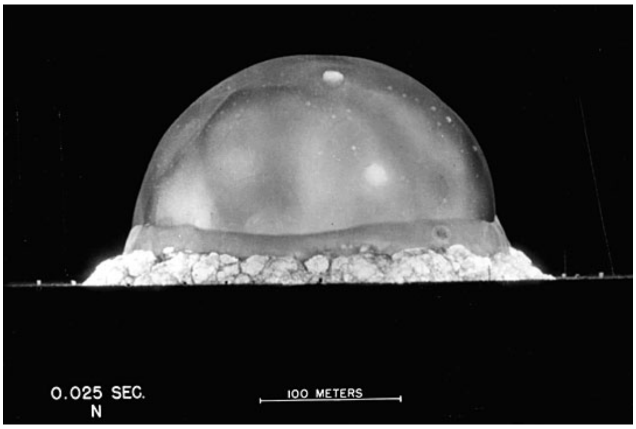
Exercice 3 – Gaz parfaits

L'équation des gaz parfaits lie la pression p, le volume V, la quantité de matière n et la température T grâce à la constante des gaz parfaits notée R :

$$pV = nRT.$$

Retrouver l'unité S.I. de la constante des gaz parfaits.

Exercice 4 – Trinity



La première explosion d'une bombe atomique remonte au 16 juillet 1945 avec l'essai baptisé « Trinity ». Si l'énergie de la bombe restera classée secret-défense, le gouvernement américain divulgua les photos de l'explosion après la fin de la guerre en 1947.

À partir de ces photos, le physicien Geoffrey Taylor publia un article en 1950 dans lequel il propose une estimation de l'énergie libérée lors de l'explosion, équivalente à 16 800 tonnes de TNT.

On considère que le rayon $r(t)$ de l'explosion ne dépend que de l'énergie E de la bombe, de la masse volumique de l'air $\rho = 1{,}25\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$ et du temps t écoulé depuis l'explosion.

1. Rappeler l'expression de la dimension de chacune des quatre grandeurs impliquées en fonction des dimensions de base.
2. On admet que l'énergie peut s'écrire sous la forme $E = k \times r^{\alpha} \times t^{\beta} \times \rho^{\gamma}$, où k est une constante sans dimension. Déterminer les valeurs des coefficients α, β et γ par analyse dimensionnelle. Donner l'expression de $r(t)$.
3. À l'aide des données expérimentales (Fig. 1) et en supposant que $k = 1$, estimer l'énergie E de la bombe en joules, puis en tonnes de TNT.
   L'énergie libérée par l'explosion d'une tonne de TNT est de $4{,}2\,\mathrm{GJ}$.

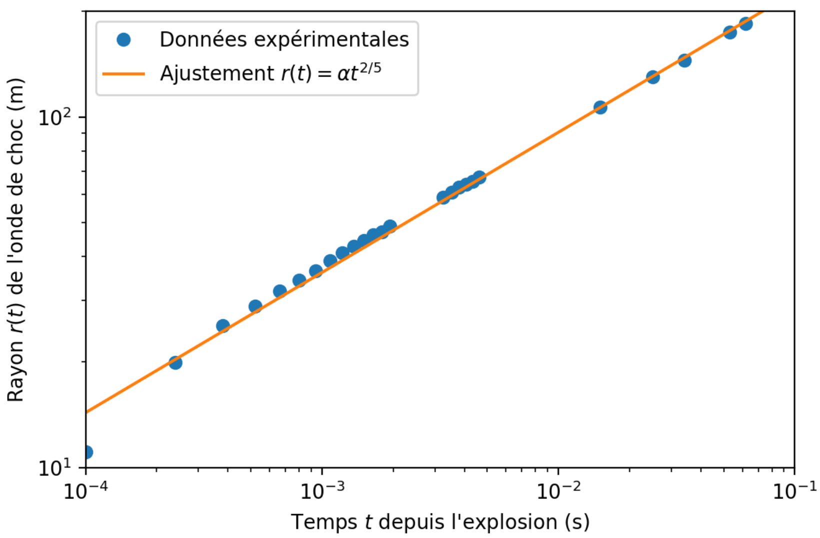


Figure 1 – Évolution du rayon de l'onde de choc dans les instants suivant l'explosion.