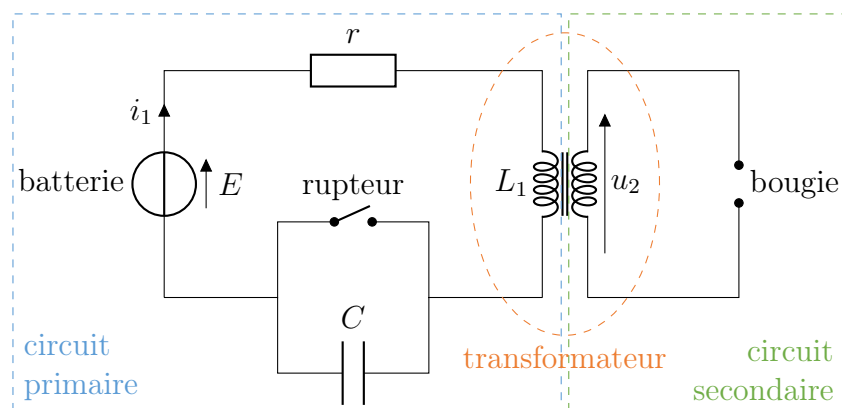


## DM4 – Bougie d'allumage (deuxième partie)

### Exercice 1 – Bougie d'allumage

Dans un moteur à essence, l'inflammation du mélange air-carburant est provoquée par une étincelle qui se produit entre les bornes d'une bougie d'allumage. Cette étincelle apparaît seulement lorsque la valeur absolue de la tension aux bornes de la bougie d'allumage est supérieure à 10 kV. On peut modéliser le circuit d'allumage par le schéma représenté ci-dessous.



La batterie de f.é.m.  $E = 12\text{ V}$  est considérée comme une source idéale de tension. La bobine du circuit primaire est modélisée par une inductance  $L_1$  en série avec une résistance  $r = 6,0\ \Omega$ . Le rupteur est un interrupteur commandé par le mouvement mécanique du moteur.

Le rôle du transformateur est d'obtenir une tension de sortie  $u_2$  aux bornes de la bougie très élevée. Cette tension est liée à l'intensité du courant dans le circuit primaire  $i_1$  :

$$u_2 = \alpha \frac{di_1}{dt},$$

où  $\alpha$  est une constante positive. Aucune autre connaissance concernant le fonctionnement du transformateur n'est nécessaire pour résoudre l'exercice.

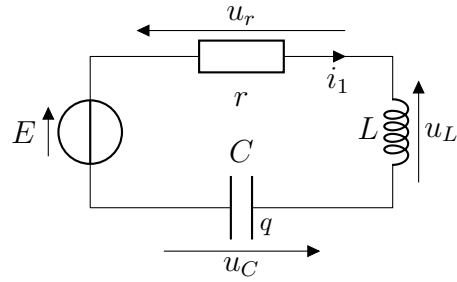
L'objectif de l'exercice est d'étudier les conditions de formation d'une étincelle au niveau de la bougie d'allumage.

#### Circuit primaire sans condensateur

Dans la première partie, on avait vu que lors de l'ouverture du rupteur, il se forme une étincelle au niveau de la bougie, mais aussi une étincelle aux bornes du rupteur. Cette dernière est problématique car elle endommage rapidement le rupteur.

### Circuit primaire avec condensateur

Pour empêcher la formation d'une étincelle aux bornes du rupteur au moment de son ouverture, un condensateur est branché en dérivation aux bornes du rupteur. À l'instant  $t = 0$ , le rupteur s'ouvre : le circuit primaire peut alors être modélisé selon le schéma représenté ci-contre.



1. On suppose qu'avant d'être ouvert, le rupteur était fermé depuis un temps très long. En comparant la tension aux bornes du rupteur à l'instant précédant son ouverture et à l'instant suivant immédiatement l'ouverture, justifier que la présence du condensateur empêche la formation d'une étincelle au niveau du rupteur.
2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la charge  $q$  du condensateur pour  $t > 0$  peut s'écrire sous la forme :

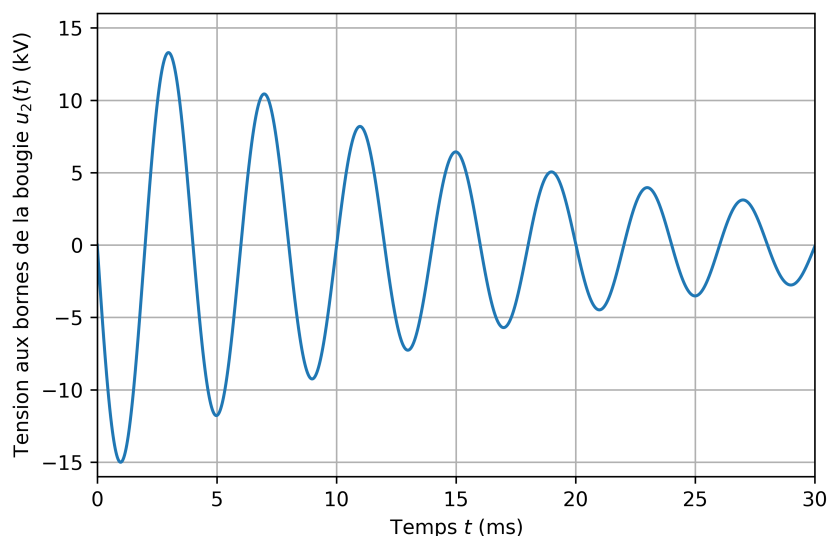
$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 Q_0,$$

où  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $Q_0$  sont des constantes dont on donnera l'expression en fonction de  $r$ ,  $L$ ,  $C$  et  $E$ .

On suppose dans un premier temps que la bobine est idéale, c'est-à-dire que  $r = 0$ .

3. Que devient l'équation différentielle établie à la question 2 ?
4. On suppose que pour  $t < 0$ , l'intensité du courant  $i_1$  est constante et vaut  $I_0$ . Justifier qu'à l'instant  $t = 0^+$ ,  $q(0^+) = 0$  et  $\frac{dq}{dt}(0^+) = I_0$ .
5. Donner l'expression de  $q(t)$  pour  $t > 0$ .
6. Représenter graphiquement l'évolution de  $q(t)$ .

On revient au cas où  $r \neq 0$ . L'allure de la variation temporelle de la tension  $u_2(t)$  réellement observée aux bornes de la bougie est représentée ci-dessous.



7. Qualifier le régime observé. En déduire une borne inférieure à la valeur du facteur de qualité  $Q$ .
8. Expliquer, grâce à la courbe précédente, pourquoi en présence du condensateur, on observe un train d'étincelles aux bornes de la bougie.
9. Écrire l'équation différentielle établie à la question 2 sous la forme de deux équations différentielles du premier ordre couplées vérifiées par  $x(t) = q(t)$  et  $y(t) = \frac{dq}{dt}(t)$ .
10. Écrire sur la copie la fonction `charge_primaire(V,t)` associée à ce système, permettant une résolution numérique avec la fonction `odeint` de `scipy.integrate`.

## Annexe 1 – Fonction `odeint`

`scipy.integrate.odeint`( $F$ ,  $V_0$ ,  $\mathbf{t}$ ) : intègre un système d'équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$\frac{dV}{dt} = F(V, t).$$

### Paramètres :

$F$  : fonction qui calcule la dérivée de  $V$  en  $t$  ;

$V_0$  : conditions initiales sur  $V$  ;

$\mathbf{t}$  : liste des instants auxquels calculer  $V$ .

### Renvoie :

$V$  : tableau contenant `len( $\mathbf{t}$ )` vecteurs  $V$ , calculés au instants de  $\mathbf{t}$ .