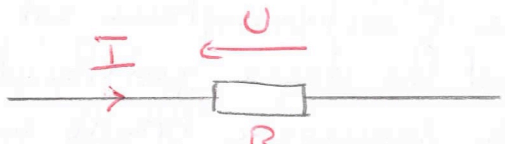
DS2.

Exercice 1.

1.



La puissance dissipée par effet Joule est : $\boxed{P_J = RI^2}$

La puissance reçue par la résistance est

$$P = UI$$

or d'après la loi d'Ohm

$$U = RI$$

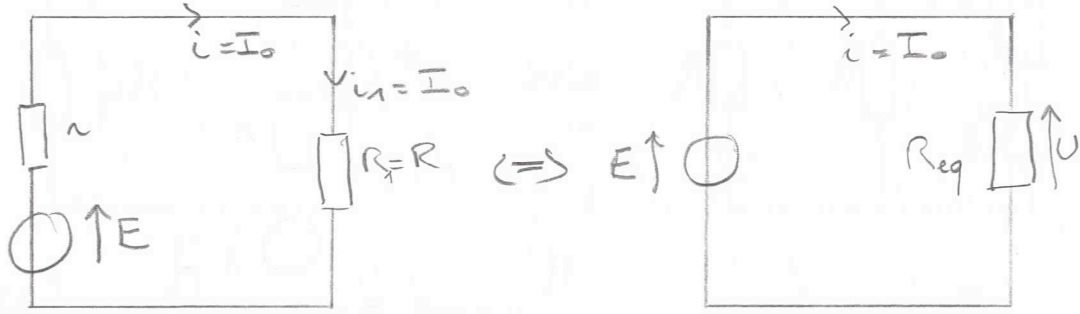
d'où

$$P = RI^2$$

Toute la puissance reçue par la résistance est dissipée sous forme de chaleur par effet Joule :

$$P_J = RI^2$$

2. Lorsque K est ouvert, le circuit est équivalent à :



Les deux résistances sont en série d'où $R_{eq} = R + r$. On a par ailleurs $i_1 = i = I_0$.

Dans le circuit équivalent, on a $U = E$

D'après la loi d'Ohm, on a

$$\boxed{I_0 = \frac{E}{R+r}}$$

On en déduit :

$$\boxed{P_{1,0} = \frac{RE^2}{(R+r)^2}}$$

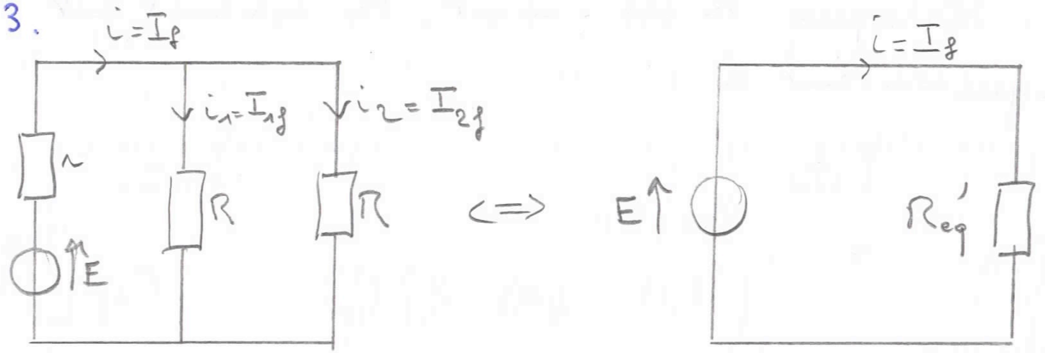
AN : $P_{1,0} = 8,0\,W$

L'interrupteur étant ouvert $i_2 = 0$

d'où

$$\boxed{P_{2,0} = 0}$$

3.



$$R_{eq} = r + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = r + \frac{R}{2} = \frac{2r+R}{2}$$

Avec la loi d'Ohm dans le deuxième circuit, on a :

$$\boxed{I_f = \frac{2E}{R+2r}}$$

Puisque les résistances R_1 et R_2 sont égales, on a :

$$\boxed{I_{1,f} = I_{2,f} = \frac{I_f}{2} = \frac{E}{R+2r}}$$

4. Lorsque K est fermé :

$$\boxed{P_{1,f} = \frac{RE^2}{(R+2r)^2}}$$

AN : $P_{1f} = 4{,}5\ W$

5. On remarque que :

$$P_{1f} < P_{1,0}$$

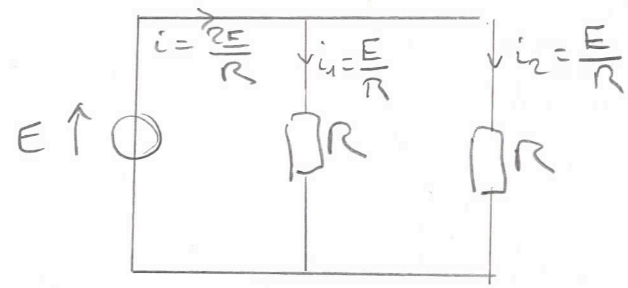
Lorsque l'interrupteur est fermé, c'est-à-dire quand les deux guirlandes sont allumées, la première brille moins que lorsque elle est seule à être allumée. Même si elle ne s'éteint jamais complètement, la guirlande 1 semblera clignoter.

6. Dans la limite où $R \gg r$, les expressions de P_{1f} et $P_{1,0}$ se simplifient :

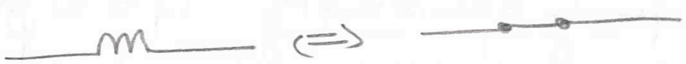
$$P_{1f} \approx P_{1,0} \approx \frac{E^2}{R}$$

Pour limiter le "clignotement" de la première guirlande, il faudrait choisir $R \gg r$.

Le générateur serait alors assimilable à une source idéale de tension E ; et le circuit serait équivalent à :

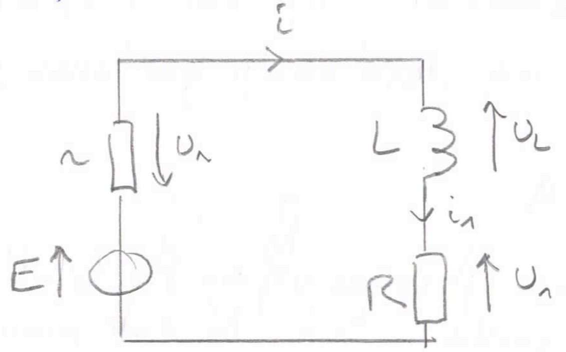


7. En régime permanent, la bobine est équivalente à un fil ;



Le circuit est alors équivalent au précédent. Les valeurs obtenues précédemment reste donc valable dans le cas présent en régime permanent.

8. Sur l'intervalle $[0, \frac{T}{2}]$, K est ouvert : on a donc le circuit suivant :



On applique la loi des maille :

$$E = u_r + u_L + u_1.$$

Par ailleurs, $i = i_1$ et avec les lois de comportement :

$$E = r\, i_1 + L \frac{di_1}{dt} + R i_1$$

$$\frac{E}{R+r} = \frac{L}{R+r} \frac{di_1}{dt} + i_1$$

La quantité $\frac{L}{R+r}$ est homogène à un temps. On pose

$$\tau_1 = \frac{L}{R+r}$$

$$\boxed{\frac{E}{R+r} = \tau_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 \quad \text{avec} \quad \tau_1 = \frac{L}{R+r}}$$

τ_1 correspond bien au temps caractéristique du régime transitoire car l'équation peut se mettre sous la forme canonique

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_1} = \frac{\left(\frac{E}{R+r}\right)}{\tau_1}$$

9. En régime permanent $\frac{di_1}{dt} = 0$

L'équation de l'énoncé devient

$$\frac{i_1}{\tau_2} = \frac{E}{L(1+\frac{r}{R})} \iff i_1 = \frac{E\tau_2}{L(1+\frac{r}{R})} = \frac{E}{R+2r}$$

On retrouve bien ; en régime permanent

$$\boxed{i_1 = \frac{E}{R+2r} = I_{1,f}}$$

10. Le temps caractéristique associé au circuit avec l'inductance L_2 est bien plus long que celui avec L_1, or τ_1 et τ_2 sont proportionnels à la valeur de l'inductance d'où

$$\boxed{L_2 > L_1}$$

On peut utiliser la méthode de la tangente, ou la méthode des 37 % lorsque K est fermé par exemple.

$I_{1,0} - I_{1f} = 0,5\,A$ et $0,5 \times 0,37 \approx 0,185\,A$

On cherche l'instant pour lequel i_1 vaut $1,685\,A$ après avoir fermé l'interrupteur. Graphiquement, on lit

$$\tau_2 \approx 0,038\,s = 38\,ms$$

D'après la relation donnée à la question 9

$$\boxed{L_1 = \frac{(R+2r)\tau_2}{\left(1+\frac{r}{R}\right)} \approx 0,1\,H}$$

11. Pour limiter le clignotement de la guirlande 1, on veut que l'intensité i_1 soit quasi constante. En effet, la puissance lumineuse fournie est proportionnelle à la puissance électrique reçue qui s'exprime

$$P = R\,i_1^2$$

On choisira donc l'inductance L_2 pour laquelle i_1 est très stable.

12. Graphiquement, on lit : $i_1 \approx 1,76\,A$

Puisqu'on ne demande qu'une estimation on gardera

$$i_1 \approx 1,8\,A$$

La puissance fournie P_b par la batterie dépend du régime. Si K est ouvert $i = i_1$

$$P_{b,o} = E\,i_1$$

Si K est fermé, on a :

$$P_{b,f} = E(i_1 + i_2)$$

Pendant son fonctionnement, la batterie fournie une énergie

$$\mathcal{E}_{tot} = (P_{b,o} + P_{b,f})\frac{\Delta t}{2}$$

(9)

Sur la batterie, on peut lire que la charge de la batterie est :

$$Q_{tot} = 12\,Ah = 43200\,C$$

L'énergie stockée par la batterie est donc

$$\mathcal{E}_{tot} = E Q_{tot}$$

(on suppose qu'elle est complètement chargée au début du fonctionnement du circuit)

On a donc

$$(\mathcal{P}_{b,o} + \mathcal{P}_{b,f})\frac{\Delta t}{2} = E Q_{tot}$$

d'où

$$\Delta t = \frac{2 E Q_{tot}}{\mathcal{P}_{b,o} + \mathcal{P}_{b,f}} = \frac{Q_{tot}}{i_1 + \frac{i_2}{2}}$$

AN : $\Delta t = 17280\,s \approx 4{,}8\,h$

Le circuit a une autonomie d'environ 4,8h, ce qui est assez faible : mieux vaudra brancher la guirlande sur secteur

(10)

Puisque les intensités sont quasi-constante, le rendement énergétique s'exprime :

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_{tot}} \approx \frac{\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_b}$$

Où : $\mathcal{E}_1$ est l'énergie reçue par R_1
$\mathcal{E}_2$ est l'énergie " " R_2
$\mathcal{P}_1$ est la puissance " " R_1
$\mathcal{P}_2$ " " " R_2
$\mathcal{P}_b$ " " fournie par la batterie.

$\mathcal{P}_1 = R i_1^2$ car R_1 est allumée en permanence

$\mathcal{P}_2 = \frac{R i_2^2}{2}$ car R_2 clignote.

$$\mathcal{P}_b = \frac{\mathcal{P}_{b,o} + \mathcal{P}_{b,f}}{2} = E\left(i_1 + \frac{i_2}{2}\right)$$

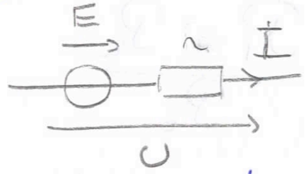
AN : $\eta = \frac{R}{E}\,\frac{\left(i_1^2 + \frac{i_2^2}{2}\right)}{i_1 + \frac{i_2}{2}} \approx 56\,\%$

Près de la moitié de l'énergie est dissipée dans la résistance interne de la batterie. (cf exercice 7 du TD3)

Rq : $\mathcal{P}_2 = \frac{R i_2^2}{2} \neq R\left(\frac{i_2}{2}\right)^2$

Exercice 2.

1 Générateur de Thévenin :



Loi de comportement :

$$\boxed{U = E - rI}$$

U : volts (V) ; E : volts (V) ; r : ohm (Ω) ; I : ampères (A)

2. Pour un GBF : $r = 50\,\Omega$

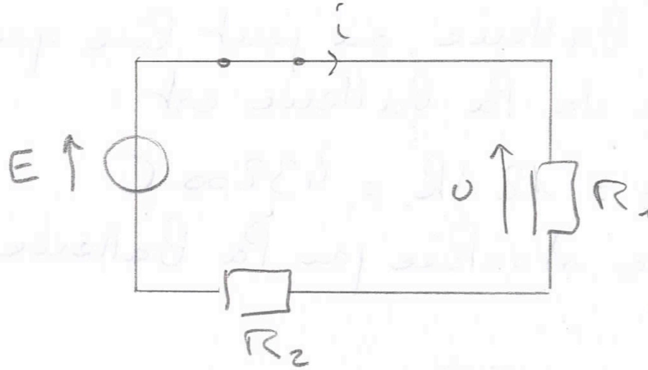
Pour une source de tension continue : $r \sim 1\,\Omega$.

Dans les deux cas, on a bien

$r \ll R_1$ et $r \ll R_2$

On peut donc négliger la résistance interne du générateur et l'assimiler à une source idéale de tension.

3. En $t = 0^-$, le régime permanent est atteint, le circuit est équivalent à



en $t = 0^-$

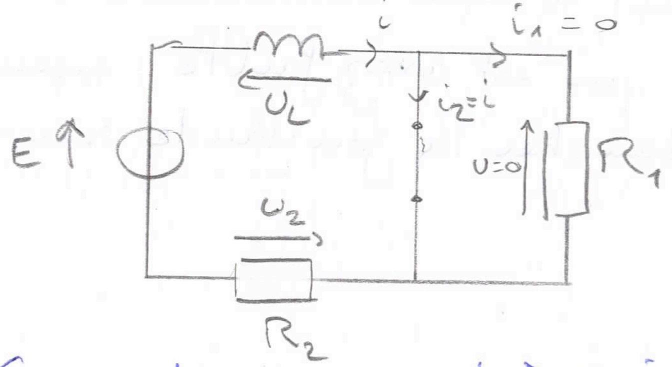
On a donc :

$$\boxed{i = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad \text{en } t = 0^-.}$$

4. Pour $t \geq 0$, l'interrupteur est fermé la résistance R_1 est court-circuitée. On a donc $u(t \geq 0) = 0$

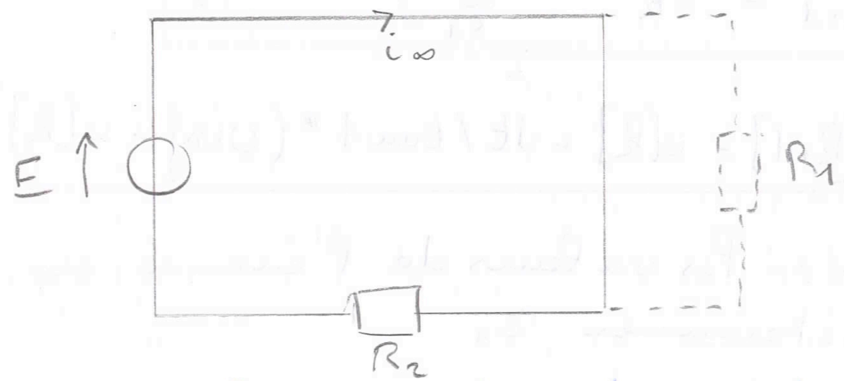
D'après la loi d'Ohm ; le courant i_1 traversant la résistance est donc nul :

$$\boxed{i_1(t) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0}$$



On a donc pour $t \geq 0$ $i = i_2$

5. Pour $t \to \infty$, le circuit devient :



On a alors immédiatement :

$$\boxed{i_\infty = \frac{E}{R_2}}$$

6. On reprend le schéma de la question 4
On applique la loi des maille puis les lois de comportement.

$$E = u_L + u_2$$

$$E = L\frac{di}{dt} + R_2 i$$

Sous sa forme canonique :

$$\boxed{\frac{E}{L} = \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R_2}}$$

En régime permanent, $\frac{di}{dt} = 0$ d'où $E = R_2 i_\infty$. On retrouve bien $i_\infty = \frac{E}{R_2}$

7. ⊛ La solution générale de l'equation homogène est de la forme :

$$i_h(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

⊛ On cherche une solution particulière constante :

$$i_p(t) = B.$$

$$E = R_2 B \Rightarrow B = \frac{E}{R_2}$$

⊛ La solution générale est

$$i(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R_2}$$

⊛ D'après la question 3 $i(t=0^-) = \frac{E}{R_1+R_2}$
or l'intensité du courant qui traverse une bobine est continue d'où

$$i(t=0^+) = \frac{E}{R_1+R_2}$$

$$i(t=0) = A + \frac{E}{R_2} = \frac{E}{R_1+R_2}$$

$$A = \frac{E}{R_1+R_2} - \frac{E}{R_2} = E\left(\frac{1}{R_1+R_2} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$= E\left(\frac{\cancel{R_2} - (R_1 + \cancel{R_2})}{R_2(R_1+R_2)}\right)$$

$$= -\frac{E}{R_2}\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)$$

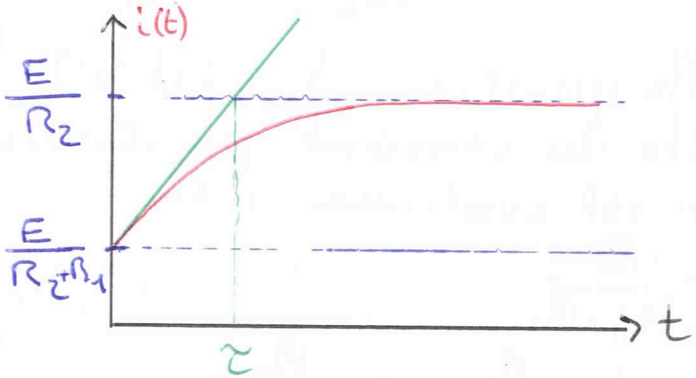
$$i(t) = -\frac{E}{R_2}\frac{R_1}{R_1+R_2}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R_2}$$

En factorisant par $\frac{E}{R_2}$, on retrouve bien la forme donnée dans l'énoncé :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R_2}\left(1 - \frac{R_1}{R_1+R_2}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

$\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$ d'où $\lim_{t\to\infty} i(t) = \frac{E}{R_2}$.

8.



9. D'après l'équation différentielle donnée dans l'énoncé :

$$\frac{du}{dt} = \frac{u_\infty - u}{\tau_1}$$

et avec $\frac{du}{dt}(t_k) \simeq \frac{u_{k+1} - u_k}{\delta t}$

$$\boxed{u_{k+1} = u_k + \frac{\delta t}{\tau_1}(u_\infty - u_k)}$$

10. u[k+1] = u[k] + dt / tau1 * (uinf - u[k])

11. Avec les valeurs de l'énoncé, on peut déterminer τ_1 :

$$\tau_1 = \frac{L}{R_1+R_2} = 67\ \mu s$$

Quand $\delta t = 0{,}1$ ms, on remarque que $\delta t > \tau_1$ et que la résolution numérique présente des oscillations qui ne sont pas attendues pour un régime transitoire du premier ordre : la résolution numérique n'est pas satisfaisante. ($u(t)$ varie trop rapidement en comparaison du pas de temps choisi) Toutefois la valeur u_∞ est correcte.

Avec $\delta t = 0{,}1\ \mu s \ll \tau_1$, la résolution numérique donne une évolution de $u(t)$ cohérente avec le régime transitoire du premier ordre attendu.

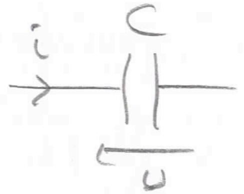
12. L'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire est donné par $\underline{5\tau_1}$

13. On peut lire graphiquement que la valeur finale u_∞ semble atteinte au bout de $\sim 0{,}3$ ms (on ne regarde que la courbe obtenue avec $\delta t = 0{,}1 \mu s$).

D'après la valeur obtenue précédemment, on a $5\tau_1 \simeq 0{,}33$ ms

Les deux valeurs sont bien sûr cohérentes : la durée du régime transitoire est de l'ordre de $\underline{0{,}3 \text{ ms}}$.

14.



$$\boxed{i = C\frac{du}{dt}}$$

15. En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. Le circuit est alors équivalent au précédent : les grandeurs électriques du circuit sont inchangées en régime permanent.

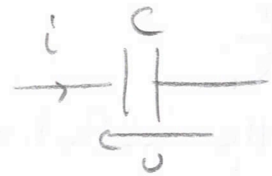
16. L'énergie stockée par le condensateur est :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} C u^2}$$

farads (F)

volts (V)

joules (J)



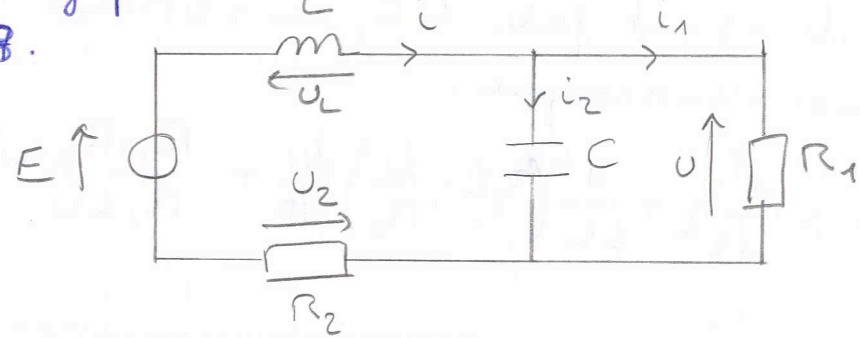
La puissance reçue par le condensateur est

$$P = ui = uC\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}Cu^2\right)}_{\mathcal{E}_c}$$

car $P = \dfrac{d\mathcal{E}}{dt}$.

17 cf p 21.

18.



Loi des mailles :

$$E = u_L + u + u_2$$

Lois de comportement

$$E = L\frac{di}{dt} + u + R_2 i$$

(19)

Loi des noeuds :

$$i = i_1 + i_2$$

Lois de comportement :

$$i = C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R_1}$$

On injecte cette relation dans la loi des mailles :

$$E = LC\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R_1}\frac{du}{dt} + u + R_2C\frac{du}{dt} + \frac{R_2}{R_1}u$$

$$E = LC\frac{d^2u}{dt^2} + \left(R_2C + \frac{L}{R_1}\right)\frac{du}{dt} + \left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)u$$

En divisant par LC, on obtient la forme canonique :

$$\frac{E}{LC} = \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{LC}\left(R_2C + \frac{L}{R_1}\right)\frac{du}{dt} + \frac{R_1+R_2}{R_1LC}u$$

soit

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{E}{LC} \quad \text{avec : } \omega_0 = \sqrt{\frac{R_1+R_2}{R_1LC}} \text{ et } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{LC}\left(R_2C + \frac{L}{R_1}\right)}$$

(20)

19. On suppose $R_1 \gg R_2$ et $R_2C \gg \frac{L}{R_1}$

$$\omega_0 \simeq \sqrt{\frac{R_1}{R_1LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{car } R_1 + R_2 \simeq R_1$$

$$\frac{\omega_0}{Q} \simeq \frac{1}{LC}\left(R_2C + \frac{L}{R_1}\right) \simeq \frac{R_2}{L}$$

d'où $Q \simeq \frac{L}{R_2}\omega_0 = \frac{1}{R_2}\sqrt{\frac{L}{C}}$

20. Si $Q < \frac{1}{2}$, le régime transitoire est apériodique.

$Q = \frac{1}{2}$, " critique

$Q > \frac{1}{2}$, " " pseudo périodique

21. $\frac{1}{2} = \frac{1}{R_2}\sqrt{\frac{L}{C}} \iff \sqrt{C} = \frac{2}{R_2}\sqrt{L}$

$$\boxed{C = \frac{4}{R_2^2}L}$$ AN : $C = 1{,}6\ 10^{-7}$ F

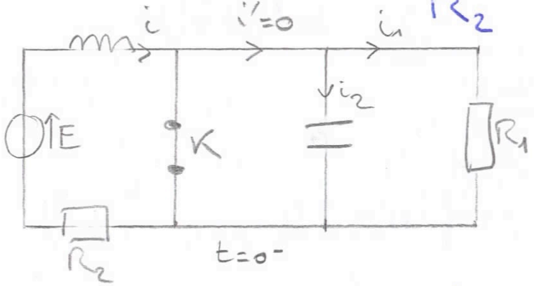
En choisissant cette valeur pour C, la tension aux bornes de R_1 ne dépasse jamais u_∞ et le régime permanent est atteint rapidement.

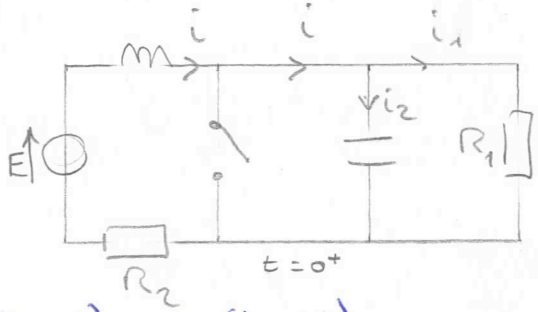
11. La tension aux bornes du condensateur est continue, or $u(t=0^-)=0$ car l'interrupteur est fermé et court-circuite le condensateur :

$$\underline{u(t=0^+)=0}$$

Puisqu'on a redéfini l'instant $t=0$ comme celui de l'ouverture de K, l'intensité $i(t=0^-)$ dans la bobine n'est plus celle de la question 3 ! L'intensité du courant traversant la bobine étant continue, on a $i(t=0^-)=i(t=0^+)$ et puisque K est fermé en $t=0^-$, on a

$$i(t=0^-)=\frac{E}{R_2}.$$





En $t=0^+$, $\underbrace{i(t=0^+)}_{\frac{E}{R_2}}=\underbrace{i_1(t=0^+)}_{\frac{u(t=0^+)}{R_1}=0}+\underbrace{i_2(t=0^+)}_{C\frac{du}{dt}(t=0^+)}$

d'où le résultat demandé.

12. $Q=\frac{1}{2}$, on est en régime critique, le polynôme caractéristique

$$r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2$$

admet une racine double :

$$r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=r^2+2\omega_0 r+\omega_0^2$$
$$=(r+\omega_0)^2$$

$r=-\omega_0$ est solution de

$$r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0.$$

* La solution générale de l'équation différentielle homogène est :

$$u_h(t)=(At+B)e^{-\omega_0 t}$$

* La solution particulière est constante :

$$u_p(t)=D.$$

$$\frac{D}{LC}=\frac{E}{LC}\Rightarrow D=E.$$

* La solution générale est de la forme

$$u(t)=(At+B)e^{-\omega_0 t}+E$$

* $u(t=0)=B+E=0\Rightarrow B=-E$

$$\frac{du}{dt}=Ae^{-\omega_0 t}+(At+B)(-\omega_0)e^{-\omega_0 t}$$

$$\frac{du}{dt}(t=0)=A-B\omega_0=\frac{E}{R_2C}\Rightarrow A=\frac{E}{R_2C}-E\omega_0$$

23

$$A = E\omega_0\left(\frac{1}{R_2 C\omega_0} - 1\right)$$

$$= E\omega_0\left(\underbrace{\frac{1}{R_2}\sqrt{\frac{L}{C}}}_{Q} - 1\right) = -\frac{E\omega_0}{2}$$

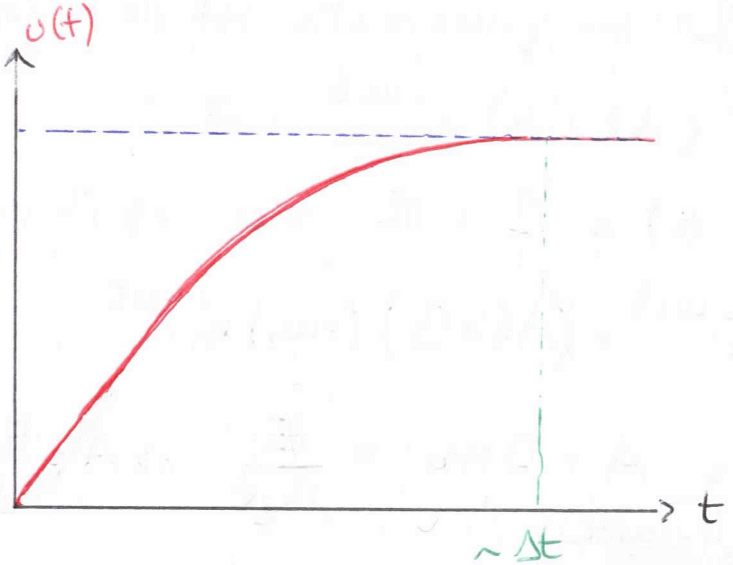
On a donc :

$$\boxed{u(t) = -E\left(1 + \frac{\omega_0}{2}t\right)e^{-\omega_0 t} + E}$$

23. La durée du régime transitoire est de l'ordre de $\frac{5}{\omega_0}$

$$\boxed{\Delta t \simeq \frac{5}{\omega_0} = 5\sqrt{LC}}$$ AN : $\Delta t = 2\,ms.$

24



Annexe 1 – Évolution de l'intensité du courant parcourant la guirlande R_1