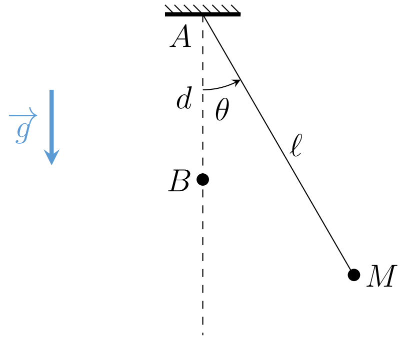
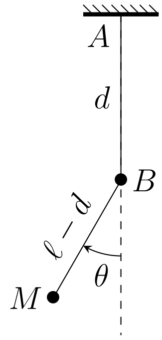
DM6 – Énergie mécanique

Exercice 1 – Un clou dans les oscillations d'un pendule

Un pendule est constitué d'un fil de longueur constante ℓ attaché à un point fixe A. À son extrémité est attaché un point matériel M de masse m. Son inclinaison par rapport à la verticale est notée θ. On néglige tout frottement.

Un clou est fixé en B, à la verticale de A à la distance d de ce point. Lorsque le pendule entre en contact avec le clou, on suppose qu'aucun transfert énergétique ne se produit (l'énergie cinétique et donc la vitesse sont continues lors du contact avec le clou). Le pendule est lâché sans vitesse initiale depuis la position $\theta = \pi/2$. L'objectif de l'exercice est de déterminer la condition sur d et ℓ pour que le pendule s'enroule autour du clou situé en B, tout en restant tendu.





On choisit de compter positivement les angles orientés dans le sens trigonométrique. Sur la figure de gauche, on a donc $\theta > 0$ et sur celle de droite $\theta < 0$.

Première partie du mouvement : $\theta > 0$

1. Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de θ.
2. En déduire l'expression de la vitesse v_0 et de la vitesse angulaire ω_0 au moment où le fil touche le clou.

Deuxième partie du mouvement : $\theta < 0$

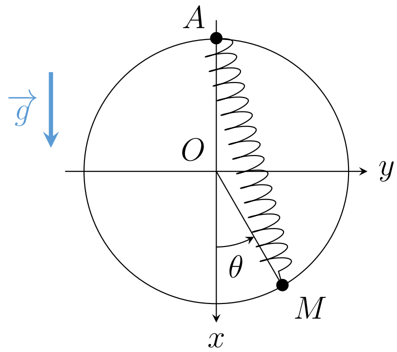
3. Établir la nouvelle expression de l'énergie mécanique du système en fonction de θ.
4. Justifier que dans cette seconde partie du mouvement, l'énergie mécanique du système est constante et vaut $\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = mg\ell$.
5. Déduire des deux questions précédentes l'expression de $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ.
6. À l'aide d'une des projections du PFD, montrer que la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e_r}$ est telle que :

$$T = mg\left(\frac{2\ell}{\ell - d} + 3\cos\theta - 2\right).$$

7. Établir la condition entre d et ℓ pour laquelle le fil reste tendu.
8. Dans le cas où cette condition est respectée, décrire qualitativement l'évolution du système.

Exercice 2 – Étude d'un oscillateur

On considère la situation représentée par le schéma ci-contre, dans laquelle une particule de masse m peut se déplacer, sans frottement, sur un cercle vertical de centre O et de rayon a. Elle est reliée au point A le plus haut du cercle par un ressort idéal de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On note θ l'angle orienté défini sur $]-\pi, \pi]$, formé entre l'axe (Ox) et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.



1. Déterminer le nombre de coordonnées utiles pour étudier le mouvement du point M, c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté du système.

2. Faire un bilan des forces en rappelant quelles forces sont conservatives ou non.

3. Déduire des questions précédentes la loi physique adaptée à l'étude de ce mouvement.

Mise en équation

4. Déterminer la longueur AM en fonction de θ, en remarquant que l'angle entre l'axe (Ox) et le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est $\theta/2$.

5. Montrer que l'énergie potentielle totale du point M vérifie une relation de la forme :

$$\frac{\mathcal{E}_\mathrm{p}(\theta)}{\mathcal{E}_0} = -\frac{mg}{ka}\cos\theta + 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\ell_0}{2a}\right)^2 = \xi(\theta),$$

où $\mathcal{E}_0$ est une constante à déterminer.

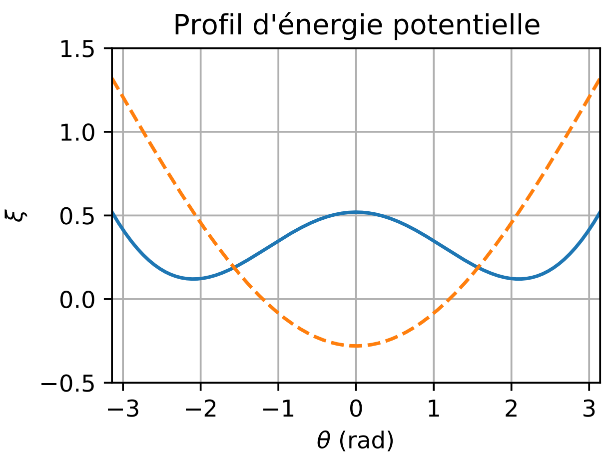
Étude de la courbe d'énergie potentielle

On se place dans le cas où $\dfrac{\ell_0}{2a} = 0{,}4$ et on pose $\eta = \dfrac{mg}{ka}$.

6. On suppose que $\eta < 1 - \dfrac{\ell_0}{2a}$. Montrer qu'il y a alors trois positions d'équilibre qui vérifient :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \text{ ou } \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\ell_0}{2a(1-\eta)}$$

Les courbes d'énergie potentielle correspondant à $\eta = 0{,}2$ et $\eta = 1{,}0$ sont représentées ci-contre.



7. Attribuer à chaque courbe du diagramme la valeur de η correspondante.

8. En déduire graphiquement la stabilité des positions d'équilibre de la question 6.

Petites oscillations au voisinage de $\theta = 0$

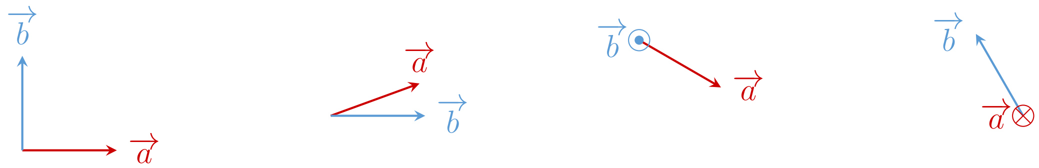
On choisit la valeur de η parmi les deux précédentes de sorte que la position $\theta = 0$ soit stable.

9. Exprimer l'énergie mécanique du système puis établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ.

10. Pour des oscillations de faible amplitude au voisinage de $\theta = 0$, linéariser cette équation à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 pour se ramener à l'équation d'un oscillateur harmonique dont on exprimera la pulsation propre en fonction de k, m, ℓ_0 et a.

Exercice 3 – Produit vectoriel

1. Reproduire les schémas ci-dessous et représenter dans chaque cas le vecteur $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$, sans soucis d'échelle.



2. Les vecteurs $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ sont ceux de la base orthonormée directe des coordonnées cartésiennes. Calculer les expressions suivantes.

- $(\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y}) \wedge \overrightarrow{e_z}$
- $(3\overrightarrow{e_x} + 2\overrightarrow{e_z}) \wedge (\overrightarrow{e_x} + 2\overrightarrow{e_y})$
- $(\overrightarrow{e_y} \wedge 3\overrightarrow{e_x}) \wedge \overrightarrow{e_z}$
- $(\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_y}) \cdot \overrightarrow{e_y}$