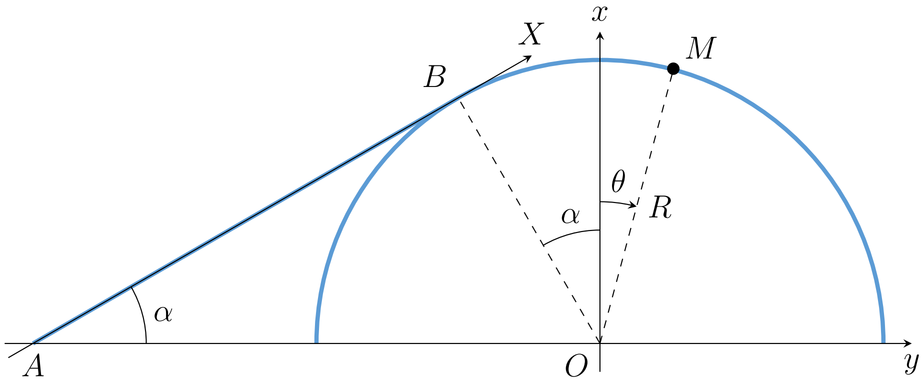
DM5 – Tremplin polaire

Exercice 1 – Tremplin (22 points)

Un bloc de glace de masse $m = 5{,}0\,\mathrm{kg}$, assimilé à son centre de masse M est lancé sur un tremplin, composé d'une rampe rectiligne posée sur un igloo hémisphérique de rayon $R = 2{,}0\,\mathrm{m}$, de telle sorte que la rampe forme un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale et est tangente à la surface de l'igloo en B. On admet que le mouvement a lieu dans le plan (Oxy) et on note $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ l'accélération de la pesanteur.



À l'instant $t = 0$, le glaçon est lancé depuis le point A, avec une vitesse $\overrightarrow{v_A} = v_A\overrightarrow{e_X}$, où $\overrightarrow{e_X}$ est le vecteur unitaire orienté selon l'axe (AX), puis il glisse sur le tremplin, sans frottement.

Mouvement sur la rampe

1. Déterminer l'expression de la vitesse $v(t) = \overrightarrow{v}(t)\cdot\overrightarrow{e_X}$ sur la rampe.
2. Montrer que le point B est atteint seulement si v_A est supérieure à une vitesse limite v_l que l'on exprimera en fonction des données. Faire l'application numérique.

On suppose $v_A > v_l$.

3. Exprimer la date t_B à laquelle le glaçon atteint le point B.
4. Exprimer la norme v_B de la vitesse en B.

Mouvement sur l'igloo

On s'intéresse maintenant au mouvement du glaçon sur l'igloo, une fois le point B dépassé. La position du point M est alors repérée dans la base polaire, par l'angle θ dont l'orientation positive est choisie dans le sens horaire.

5. Établir deux équations différentielles vérifiées par l'angle θ en projetant le PFD sur les vecteurs de la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$. On soignera la rédaction de la réponse.
6. Intégrer l'une de ces équations pour établir l'expression de $\dot\theta$ en fonction de θ.
   Aide : $\ddot\theta = A\sin\theta$ s'intègre facilement en multipliant les deux membres par $\dot\theta$.
7. Montrer que la réaction normale du support $\overrightarrow{R_N} = R_N\overrightarrow{e_r}$ s'écrit :

$$R_N = -\frac{mv_B^2}{R} + mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha).$$

8. Donner une condition sur v_B, puis sur v_A pour laquelle le glaçon ne décolle pas avant le sommet de l'igloo. Faire l'application numérique.

9. Déterminer finalement l'expression de la position θ_d, valeur de θ pour laquelle le glaçon quitte la piste. Faire l'application numérique pour $v_A = 7{,}0\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Représenter alors qualitativement la trajectoire du glaçon.