TD4 – Circuits du premier ordre

Exercice 1 – Association de dipôles

1. $C_{\text{éq}} = C_1 + C_2$ et $L_{\text{éq}} = L_1 + L_2$.
2. $\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ et $\frac{1}{L_{\text{éq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$.

Exercice 2 – Décharge d'un condensateur

$u(t) = \frac{RE}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}}$ et $i(t) = -\frac{E}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}}$.

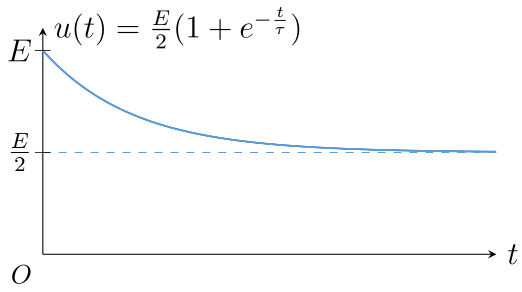
Exercice 3 – Comportement aux limites

L'expression 4 est correcte : $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

Exercice 4 – Étude d'un circuit RC

1. $\tau_{\text{théo}} = RC = 23{,}5\,\text{ms}$.
2. $\tau_{\text{exp}} \approx 48\,\text{ms}$.
3. La résistance interne du GBF doit être prise en compte : $R_{\text{GBF}} = \frac{\tau_{\text{exp}}}{C} - R = 52\,\Omega$.

Exercice 5 – Circuit RC à deux mailles

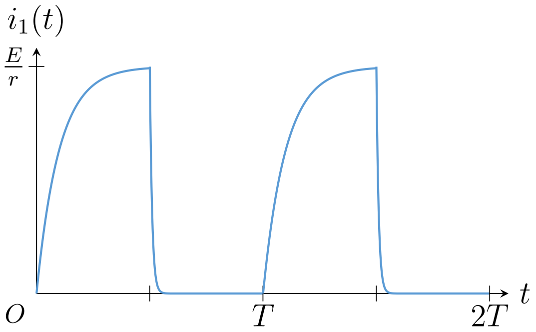


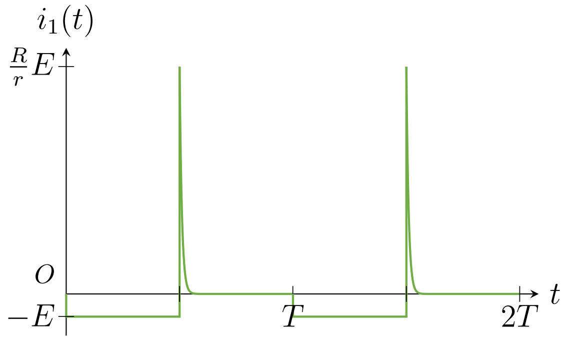
Exercice 6 – Résistance de fuite d'un condensateur

1. L'isolant séparant les deux armatures n'est pas parfait et des charges passent d'une armature à l'autre, entrainant la décharge du condensateur.
2. L'isolant imparfait peut être assimilé à une résistance. Pour modéliser le condensateur réel, cette résistance ne peut être en série avec un condensateur idéal : quand le circuit est ouvert, il ne pourrait y avoir de transfert de charge. Cette résistance R_{f} doit donc nécessairement être associée en parallèle du condensateur idéal.
3. $R_{\text{f}} = \frac{\Delta t}{C \ln 10} = 520\,\text{G}\Omega$.

Exercice 7 – Clôture électrique

1. Interrupteur ouvert : $u_R = 0$ et $i_1 = i_2 = 0$.
   Interrupteur fermé : $u_R = -E$, $i_1 = \frac{E}{r}$ et $i_2 = -\frac{E}{R}$.
2. $\frac{L}{r}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + i_1 = \frac{E}{r}$.
   $i_1(t) = \frac{E}{r}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, où $\tau = \frac{L}{r}$.
3. $i_1(t) = \frac{E}{r}e^{-\frac{t'}{\tau'}}$, avec $t' = t - \frac{T}{2}$ et $\tau' = \frac{L}{R+r}$.
4. Pour $t \in [0; \frac{T}{2}[$, $u_R(t) = -E < E$.
   Pour $t \in [\frac{T}{2}; T[$, $u_R(t) = \frac{R}{r}Ee^{-\frac{t'}{\tau'}}$. Par exemple, en $t = \frac{T}{2}$, $u_R(t = \frac{T}{2}) = \frac{R}{r}E = 100E \gg E$. Sur cet intervalle, on a $u_R > 10E$ pendant un temps $\Delta t = \tau' \ln \frac{R}{10r} = 2{,}3\,\mathrm{ms}$.
5. Pour les graphes de $i_1(t)$ et $u_R(t)$, on choisit $\frac{R}{r} = 10$ pour plus de lisibilité.





6. Sur $[0; \frac{T}{2}[$, l'énergie fournie par la batterie est $\mathcal{E}_\mathrm{b} \approx E^2(\frac{T}{2}(\frac{1}{r}+\frac{1}{R})-\frac{\tau}{r}) = 5{,}832\,\mathrm{J}$. La période de fonctionnement est donc $T_\mathrm{tot} = \frac{QE}{\mathcal{E}_\mathrm{b}}T = 3{,}86\,\mathrm{jours}$.
7. Quand l'interrupteur est fermé, l'intensité du courant dans le circuit n'est pas nulle ce qui conduit à des pertes d'énergie par effet Joule. On peut raccourcir la durée T_f pendant laquelle l'interrupteur est fermé : en choisissant $T_\mathrm{f} = 3\tau$, la bobine accumulera 95 % de l'énergie maximale obtenue en régime permanent, ce qui ne réduira que faiblement la tension maximale de l'impulsion, tout en prolongeant la durée de fonctionnement du dispositif. En effet on peut alors montrer que la batterie aura une autonomie voisine de 7,7 jours.

Exercice 8 – Décharge d'un condensateur dans un autre

1. $i + \tau\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, avec $\tau = \frac{RC_1C_2}{C_1+C_2}$.
2. $i(t) = \frac{q_0}{RC_1}e^{-\frac{t}{\tau}}$.
3. Charge des armatures du haut : $q_1 = q_0\frac{C_1}{C_1+C_2}$ et $q_2 = q_0\frac{C_2}{C_1+C_2}$.
4. $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C_1}$.
   $\mathcal{E}_\infty = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C_1+C_2}$.
   $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_\infty - \mathcal{E}_0 = -\frac{1}{2}q_0^2\frac{C_2}{C_1(C_1+C_2)} < 0$: le système a perdu de l'énergie.
5. L'énergie a été dissipée par effet Joule sous la forme d'un transfert thermique au niveau de la résistance.
   $\Delta\mathcal{E} = -\int_0^\infty Ri^2\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}q_0^2\frac{C_2}{C_1(C_1+C_2)}$.