TD7 – Dynamique du point matériel

Exercice 1 – Centres de masse dans le système solaire

1. On détermine la position du barycentre G du système {Soleil, Terre}. En notant S le centre du Soleil, on trouve $GS = \frac{M_T}{M_S+M_T} D_{\text{Terre – Soleil}} = 450\,\text{km} \ll R_S$. G et S peuvent raisonnablement être confondus.
2. Pour le barycentre G' du système {Soleil, Jupiter}, on trouve $G'S = \frac{M_J}{M_S+M_J} D_{\text{Jupiter – Soleil}} = 8 \times 10^5\,\text{km} \approx R_S \ll D_{\text{Jupiter – Soleil}}$. Si l'on s'intéresse au mouvement de Jupiter, on peut raisonnablement confondre G' et S, mais ce n'est plus le cas si l'on s'intéresse au mouvement du Soleil.

Exercice 2 – Un marteau sur la Lune

Cf. correction détaillée.

1. $\ddot{z} = \dfrac{-g}{6}$
2. $z(t) = -\dfrac{g}{12} t^2 + h_0$.
3. $t_1 = \sqrt{\dfrac{12 h_0}{g}} = 1{,}35\,\text{s}$ et $v_1 = \dfrac{g}{6} t_1 = 2{,}2\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Exercice 3 – Ça par exemple ! Quel bond !

Cf. correction détaillée.

1. $\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \times t \\ z(t) = -\dfrac{1}{2} g_L t^2 + v_0 \sin\alpha \times t \end{cases}$
2. $z(x) = -\dfrac{1}{2} g_L \dfrac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x \tan\alpha$
3. $L = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g_L} = \dfrac{6 v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$
4. Sur Terre, $L = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \dfrac{L}{6}$, d'où $L = 6\,\text{m}$.

Exercice 4 – Parabole de sûreté

Cf. correction détaillée.

1. $y(x) = -\dfrac{1}{2} g \dfrac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x \tan\alpha$
2. $d = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. d est maximale pour $\alpha = 45°$.
3. $y_{\max} = y\left(\dfrac{d}{2}\right) = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

4. $y = -\dfrac{x^2}{4h} - \dfrac{x^2}{4h}\tan^2\alpha + x\tan\alpha$, h correspondant à la hauteur maximale à laquelle il est possible d'envoyer le projectile pour une vitesse donnée, c'est-à-dire pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
5. Les points de coordonnées (x, y) sont situés sous la parabole de sûreté, d'équation $y = h - \dfrac{x^2}{4h}$.

Exercice 5 – Descente à ski

1. $R_N = mg\cos\alpha$.
2. $v_l = \dfrac{mg}{\lambda}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha = 53\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 190\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.
3. $v(t) = v_l(1 - e^{-t/\tau})$, avec $\tau = \dfrac{m}{\lambda}$.
4. $t_1 = \tau\ln 2 = 5{,}5\,\mathrm{s}$.
5. $\Delta t = \dfrac{v_l}{2g(100\mu\cos\alpha - \sin\alpha)} = 0{,}95\,\mathrm{s}$ et $d = \dfrac{v_l}{4}\Delta t = 12{,}5\,\mathrm{m}$.
6. $[K] = \mathrm{M\cdot L^{-3}} = K$ s'exprime en $\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.
7. $v_l' = \sqrt{\dfrac{mg\sqrt{2}}{KS}} = 68\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 245\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.
   $||\overrightarrow{f}|| = 1{,}1\,\mathrm{kN} \gg ||\overrightarrow{R_T}|| = 28\,\mathrm{N}$: on peut négliger les frottements avec la piste.

Exercice 6 – Oscillations d'un anneau

1. Selon $\overrightarrow{e_r}$: $-mR\dot{\theta}^2 = -R_N + mg\cos\theta$.
   Selon $\overrightarrow{e_\theta}$: $mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$.
2. $\dot{\theta}^2 = \dfrac{2g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0$.
3. $\overrightarrow{R_N} = -mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)\overrightarrow{e_r}$.
4. $\theta_1 = 0$.
5. $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$, avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$.
6. $\theta(t) = \theta_0\cos\omega_0 t$.

Exercice 7 – Chaussette dans un sèche-linge

L'angle θ est repéré par rapport à la verticale descendante (comme pour le pendule).

1. $\overrightarrow{a} = -R\omega^2\overrightarrow{e_r}$, avec $\omega = \dfrac{2\pi\times 50}{60} \approx 5{,}2\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ la vitesse angulaire du tambour.
2. $\overrightarrow{R}_{\text{tambour}} = mg[-(\cos\theta + \dfrac{R}{g}\omega^2)\overrightarrow{e_r} + \sin\theta\overrightarrow{e_\theta}]$.
3. La composante selon $\overrightarrow{e_r}$ s'annule pour $\theta = \arccos\left(-\dfrac{R\omega^2}{g}\right) = 134°$.
4. La chaussette décolle de la paroi du tambour, la suite du mouvement est une chute libre dans le tambour : la chaussette suit une trajectoire parabolique jusqu'à retomber sur la paroi du tambour.