Chapitre 16 – Mouvement dans un champ de gravitation newtonien

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

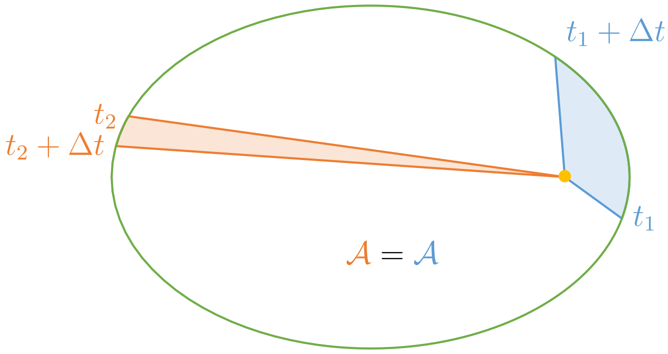
→ Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique.
→ Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
→ Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement.
→ Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.
→ Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective.
→ Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique.
→ Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien.
→ Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire.

Questions de cours

→ Énoncer les trois lois de Kepler.
→ Établir la conservation du moment cinétique et expliciter ses conséquences (planéité du mouvement et loi des aires).
→ Établir l'expression de l'énergie potentielle effective, la représenter graphiquement et discuter des différentes trajectoires possibles en fonction de la valeur de l'énergie mécanique.
→ Établir l'expression de la vitesse dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon r_0.
→ Énoncer, puis établir la troisième loi de Kepler dans le cas d'une orbite circulaire.
→ Donner les caractéristiques de l'orbite géostationnaire.

Documents

Document 1 – Conservation de la vitesse aréolaire



Document 2 – Énergie potentielle effective

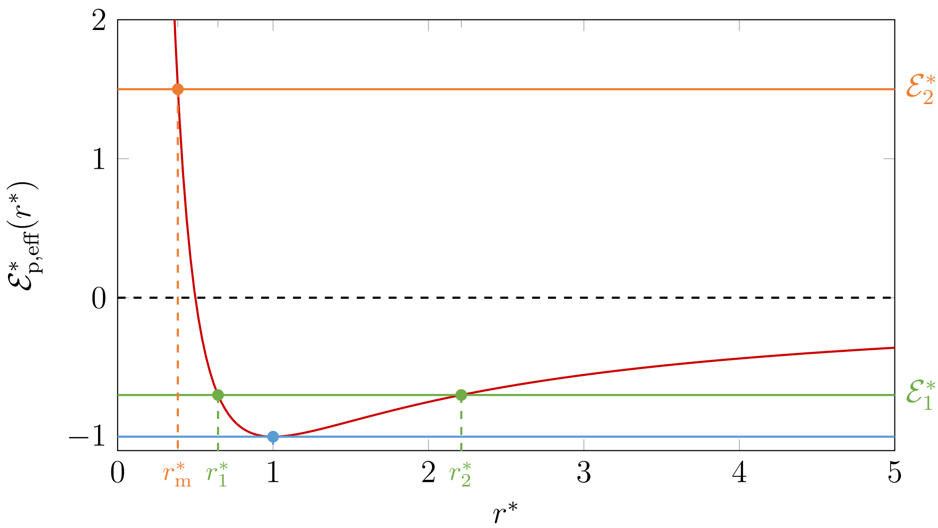


FIGURE 1 – Évolution de l'énergie potentielle effective adimensionnée en fonction de la distance r^* entre l'astre central et le point matériel. L'allure de la courbe $\mathcal{E}_{\text{p,eff}}(r)$ dépend de la valeur de la constante des aires, elle même liée aux conditions initiales.

Pour un point matériel de masse m dans un champ de gravitation newtonien créé par un astre central de masse M_O, l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{\text{p,eff}}$ permet de décrire le mouvement radial du point. Elle vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{p,eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{\mathcal{C}^2}{r^2} - G\frac{mM_O}{r},$$

où $\mathcal{C}$ est la constante des aires, r la distance entre le point matériel et l'astre central et G la constante gravitationnelle.

En prévision d'une résolution numérique, on introduit l'énergie potentielle effective adimensionnée $\mathcal{E}^*_{\text{p,eff}}$ en choisissant la distance r_0 pour laquelle $\mathcal{E}_{\text{p,eff}}$ est minimale et $\mathcal{E}_0 = -\mathcal{E}_{\text{p,eff}}(r_0)$ comme échelles de distance et d'énergie. On a alors $r^* = r/r_0$ et

$$\mathcal{E}^*_{\text{p,eff}}(r^*) = \frac{\mathcal{E}_{\text{p,eff}}\,(r^*)}{\mathcal{E}_0} = \frac{1}{r^{*2}} - \frac{2}{r^*} \quad \text{où} \quad r_0 = \frac{\mathcal{C}^2}{GM_O} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_0 = G\frac{mM_O}{2r_0}.$$

Document 3 – Nature des trajectoires

	États liés		États de diffusion	
Énergie mécanique $\mathcal{E}_\mathrm{m}$	$-\mathcal{E}_0$	$]-\mathcal{E}_0, 0[$	0	$]0, \infty[$
r accessibles	r_0	$[r_1, r_2]$	$[r_0/2, \infty[$	$[r_m, \infty[$
Trajectoire	Circulaire	Elliptique	Parabolique	Hyperbolique

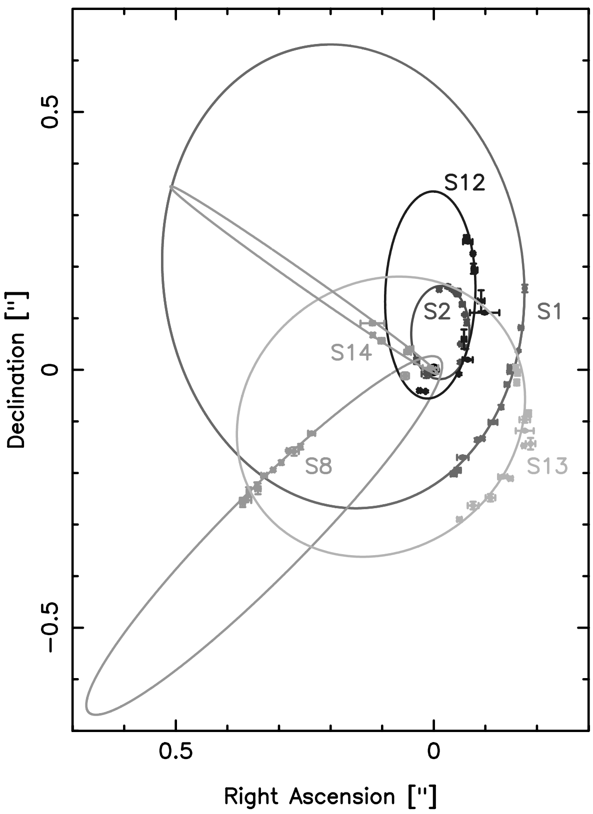
La nature de la trajectoire dépend des conditions initiales, qui déterminent la valeur de la constante des aires et de l'énergie mécanique du système.

Document 4 – Balance cosmique

En exploitant la troisième loi de Kepler, il est possible de déterminer la masse d'un astre « simplement » en analysant la trajectoire d'un objet qui orbite autour. On peut par exemple déterminer la masse du Soleil ($M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg) en analysant le mouvement des planètes du système solaire, mais aussi estimer celle du trou noir Sagittarius A* (Sgr A*) situé au centre de la Voie lactée, grâce aux étoiles qui orbitent autour.

La figure ci-dessous représente les relevés de position de quelques étoiles en orbite autour de Sgr A* (Schödel et al., 2003). L'analyse de leurs trajectoire permet de déterminer la masse du trou noir, voisine de quatre million de masses solaires.

eso.org



Document 5 – Satellites géostationnaires

Près de 3 000 satellites artificiels sont actuellement opérationnels et en orbite autour de la Terre. Ils trouvent de très nombreuses applications scientifiques, civiles ou militaires : télécommunications, GPS, prévisions météorologiques, tests fondamentaux, etc.

On distingue plusieurs orbites adaptées à différents usages :

- orbite basse, entre 300 km et 2 000 km d'altitude ;
- orbite moyenne, située à une altitude de 20 000 km ;
- l'orbite géostationnaire, située à 36×10^3 km d'altitude.

L'orbite géostationnaire est particulièrement peuplée (500 satellites) : le lancement de nouveaux satellites sur cette orbite requiert une précision de l'ordre de 50 km.

eoxc-apps2.bd.esri.com

Applications

Application 1 – Conservation du moment cinétique

On s'intéresse à une comète de masse m ayant une trajectoire elliptique autour du Soleil. Elle passe au plus près de l'étoile en un point P appelé périhélie, situé à une distance d_P du Soleil. Dans le référentiel héliocentrique, elle a alors une vitesse $\overrightarrow{v_P}$.

1. Rappeler la définition du référentiel héliocentrique.
2. Que peut-on dire du moment cinétique $\overrightarrow{L}_O$ de la comète par rapport au centre du Soleil ? Exprimer sa norme en coordonnées cylindriques, puis en fonction des données de l'énoncé.
3. Commenter l'évolution de la vitesse angulaire au cours du mouvement.

Application 2 – Conservation de l'énergie mécanique

On considère un système constitué d'un point matériel M (par exemple une planète) de masse m en rotation autour d'un point O fixe (par exemple une étoile) de masse $M_O \gg m$. On étudie le mouvement de M dans le référentiel lié à O, supposé galiléen.

1. Montrer que l'énergie mécanique de M est conservée.
2. Retrouver ce résultat en partant du PFD.
3. Exprimer l'énergie mécanique de M en coordonnées cylindriques.

Application 3 – Caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération

On considère une particule de masse m soumise au champ de gravitation newtonien créé par un astre de masse $M_O \gg m$ situé en O. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié à O, supposé galiléen, le mouvement de la particule est circulaire de centre O et de rayon r_0 dans le plan (xOy).

1. Rappeler l'expression des vecteurs vitesse et accélération en coordonnées cylindriques dans ce cas.
2. Justifier que le mouvement est uniforme.
3. Exprimer la norme de la vitesse en fonction de G, M_O et r_0.
4. Faire l'application numérique en considérant le mouvement de la Terre en orbite autour du Soleil. Comparer cette valeur à celle obtenue par une autre méthode en exploitant les données et vos connaissances.

Données : masse du Soleil $M_S = 2{,}0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, *rayon de l'orbite terrestre* $r_T = 150 \times 10^6\,\mathrm{km}$, *constante gravitationnelle* $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

Application 4 – Troisième loi de Kepler dans le cas d'une orbite circulaire

On reprend la situation de l'application 3.

1. Donner deux expressions de la vitesse v_0 de la particule, en fonction de G, M_O et r_0, puis en fonction de r_0 et de la période de révolution T d'autre part.
2. Retrouver la troisième loi de Kepler.

Application 5 – Orbite géostationnaire

On considère un satellite géostationnaire, assimilé à son centre de masse M.

1. Déterminer le rayon de la trajectoire, puis l'altitude du satellite.

2. Comparer le résultat obtenu à l'animation du Doc. 5.

Données : masse de la Terre $M_T = 5{,}972 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$*, rayon de la Terre* $R_T = 6\,371\,\mathrm{km}$*, constante gravitationnelle* $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$*. Un jour sidéral dure* $23\,\mathrm{h}\ 56\,\mathrm{min}\ 4\,\mathrm{s}$.