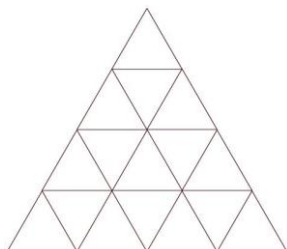
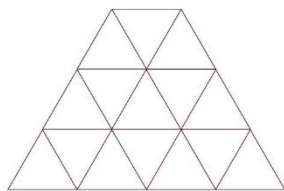


พีระมิดยอดตัด

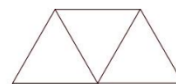
นิยามคำศัพท์ พีระมิดสูง n เกิดจากการนำเอาสามเหลี่ยมด้านเท่ามาเรียงต่อกัน กำหนดให้พีระมิดยอดตัดคือ เอาพีระมิดในรูปมาตัดยอดที่เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าด้านบนออกไป 1 ชั้น , แผ่นไม้ คือ สามเหลี่ยมด้านเท่า 3 ชั้นมาต่อกันดังรูป



พีระมิดขนาด 4



พีระมิดยอดตัดขนาด 4



สามเหลี่ยมด้านเท่า 3 อัน
เรียกว่า แผ่นไม้

ปัญหา จงพิสูจน์ว่าสำหรับค่า n ใดบ้างที่เราสามารถเอาแผ่นไม้ มาประกอบได้

พร้อมทั้งออกแบบอัลกอริทึมสำหรับการสร้างรูปพีระมิดสำหรับค่า n ต่างๆ

พิสูจน์

พิจารณาจำนวน 3 เหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมดที่เอามาสร้างพีระมิด

- $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$

และเนื่องจากพีระมิดยอดตัด คือการนำเอาพีระมิดปกติมาตัดยอดออกไป 1 ชั้น นั่นคือมีจำนวนสามเหลี่ยม ดังนี้

- $(1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)) - 1 = n^2 - 1$

พิจารณา $n^2 - 1 \pmod 3$ จะเห็นว่า

- เนื่องจาก $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ จะได้ว่า $n^2 - 1 \pmod 3 = 2$ (ถ้า $n \pmod 3 = 0$)
 - เพราะว่า $n^2 - 1 \pmod 3 \neq 0$ และขนาดของแผ่นไม้คือ 3 จึงสรุปได้ว่าถ้า $n \pmod 3 = 0$ เราจะไม่มีความสามารถสร้าง พีระมิดยอดตัด n ได้
- กรณีที่ $n \pmod 3 = 1$
 - จะได้ว่า $n^2 - 1 \pmod 3 = 0$ ซึ่งมีความเป็นไปได้ว่าเราสามารถสร้างพีระมิดยอดตัด n โดยแผ่นไม้ดังกล่าวได้
- กรณีที่ $n \pmod 3 = 2$
 - จะได้ว่า $n^2 - 1 \pmod 3 = 0$ ซึ่งมีความเป็นไปได้ว่าเราสามารถสร้างพีระมิดยอดตัด n โดยแผ่นไม้ดังกล่าวได้

ในขั้นตอนการพิสูจน์จะพิสูจน์โดยใช้ (อุปนัย) เชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้

เมื่อให้ $P(n)$ แทนข้อความ เราสามารถสร้างพีระมิตยอดตัด n ได้โดยใช้แผ่นไม้มาประกอบเป็นพีระมิตได้ ถ้า $n \bmod 3 \neq 0$ และ $n > 1$

โดยจะขอแบ่งขั้นตอนทั้งหมดเป็น 5 ขั้นตอนดังนี้

- แสดงว่า $P(2)$ เป็นจริง (case $n \bmod 3 = 2$)
- แสดงว่า $P(3)$ เป็นจริง (case $n \bmod 3 = 0$)
- แสดงว่า $P(4)$ เป็นจริง (case $n \bmod 3 = 1$)
- กำหนด $P(2), \dots, P(n)$ เป็นจริง จะแสดงว่า $P(n+1)$ เป็นจริง (เมื่อ $n \bmod 3 = 0$)
- กำหนด $P(2), \dots, P(n)$ เป็นจริง จะแสดงว่า $P(n+2)$ เป็นจริง (เมื่อ $n \bmod 3 = 0$)

ขั้นตอนที่ 1) แสดงว่า $P(2)$ เป็นจริง

เนื่องจากค่า $n=2$ จะได้ว่ารูปพีระมิตนั้นคือ แผ่นไม้พอดิ

นั่นคือ สามารถสร้างพีระมิตยอดตัด 2 ได้โดยใช้ แผ่นไม้ ได้

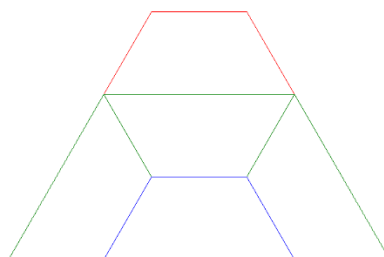
ขั้นตอนที่ 2) แสดงว่า $P(3)$ เป็นจริง

จาก พีระมิตยอดตัด n จะสร้างได้ถ้า $n \bmod 3 \neq 0$

นั่นคือ $p \rightarrow q$, $p = \text{false}$

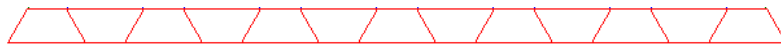
จะได้ว่า $p \rightarrow q$ เป็น true

ขั้นตอนที่ 3) แสดงว่า $P(4)$ เป็นจริง ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า เราสามารถสร้างพีระมิตยอดตัด 4 ได้ดังนี้



จากการวางแผ่นไม้ในลักษณะดังกล่าว ทำให้สามารถแผ่นไม้เพื่อสร้างพีระมิตยอดตัด 4 ได้

ก่อนอื่นพิจารณา สามเหลี่ยมด้านเท่าที่วางเรียงตัวกัน n ชั้นเมื่อ $n \bmod 3 = 0$



จะเห็นได้ชัดว่าเราสามารถวางแผ่นไม้ลงไปได้เลยทันทีโดยกลับด้านสลับกันไปจนจบ

ขั้นตอนที่ 4) กำหนด $P(2), \dots, P(n)$ เป็นจริง จะแสดงว่า $P(n+1)$ เป็นจริง (เมื่อ $n \bmod 3 = 0$)

พิจารณาจำนวนสามเหลี่ยมแฉกล่างสุดของ ของ พีระมิดยอดตัด n

- จะได้ว่าจำนวนสามเหลี่ยม แฉกล่างนี้ คือ $2n - 1$

พิจารณาจำนวนสามเหลี่ยมแฉกล่างสุดของ ของ พีระมิดยอดตัด $n + 1$

- จะได้ว่าจำนวนสามเหลี่ยม แฉกล่างนี้ คือ $2(n+1) - 1 = 2n + 1$

จะเห็นว่ามีความเป็นไปได้ว่า เราสามารถ ใส่สามเหลี่ยมด้าน 3 ชั้นเท่าดังกล่าวลงไปได้

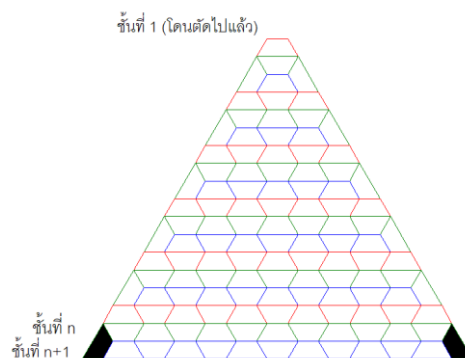
- เพราะ $(2n-1) + (2n+1) = 4n$ ซึ่ง $n \bmod 3 = 0$

เนื่องจาก $P(n-1)$ จริง นั่นคือสามารถ เขียนพีระมิดยอดตัด $n-1$ ได้

- นั่นคือ ถ้าเราสามารถวางสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปเข้าไปใน 2 แถวสุดท้ายของพีระมิดได้ (แถวที่ $n, n+1$) เราจะสามารถสร้างพีระมิดยอดตัดนี้โดยใช้แผ่นไม้ได้

พิจารณา ชั้นที่ $n, n+1$ แบบตัดปลายซ้ายขวาออก

- จะเห็นว่า จำนวนสามเหลี่ยมที่เหลือในทั้งสองแถว $\bmod 3 = 0$
- และเนื่องจากแต่ละแถววางตัวเป็นเส้นตรง และ $\bmod 3 = 0$ จึงทำให้สามารถวางแผ่นไม้ได้เลย !



ซึ่งจะสังเกตได้ว่าปลายทั้งสองข้างที่ตัดไป ก็สามารถวางแผ่นไม้ได้เหมือนกัน

จึงสามารถสรุปได้ว่า แผ่นไม้สามารถสร้างพีระมิดยอดตัด $n+1$ ได้ ถ้า $n \bmod 3 = 0$

ขั้นตอนที่ 5) กำหนด $P(2), \dots, P(n)$ เป็นจริง จะแสดงว่า $P(n+2)$ เป็นจริง (เมื่อ $n \bmod 3 = 0$)

จาก ขั้นตอนที่ 4) เราจะได้ว่า $P(n+1)$ เป็นจริง นั้นหมายความว่า เราสามารถสร้าง พีระมิดยอดตัด $n+1$ ได้

ดังนั้นถ้าหากเราสามารถวางแผ่นไม้ในชั้น $n+2$ ได้จะได้ว่า เราสร้างพีระมิดยอดตัด $n+2$ ได้ ถ้า $n \bmod 3 = 0$

งานของเราในขั้นตอนนี้คือ วางแผ่นไม้ในชั้น $n+2$

พิจารณาจำนวน สามเหลี่ยมชั้นที่ $n+2$

- จะได้จำนวน $2(n+2) - 1 = 2n - 3$ ซึ่งหาร 3 ลงตัว

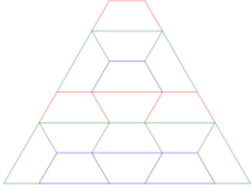

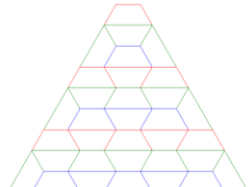

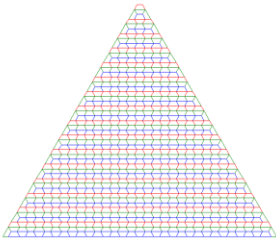
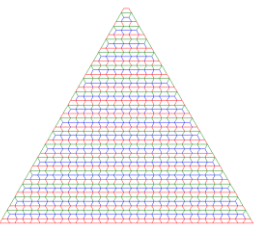
จากการที่ ชั้น $n+2$ วางตัวเป็นเส้นตรงและหาร 3 ลงตัว นั่นคือ สามารถวางไม้ลงไปได้เลย

จึงสามารถสรุปได้ว่า แผ่นไม้สามารถสร้างพีระมิดยอดตัด $n+2$ ได้ ถ้า $n \bmod 3 = 0$

จากเงื่อนไขทั้ง 5 จึงสามารถสรุปได้โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ว่า

เราสามารถสร้างพีระมิดยอดตัด n โดยใช้แผ่นไม้ได้ ถ้า $n \bmod 3 \neq 0$

จากการวางในรูปแบบตายตัว ของขั้นตอน 4) , 5) จะได้ดังนี้ จะได้ตัวอย่างดังนี้

N	พีระมิต $n + 1$	พีระมิต $n + 2$
6		
9		
48		

กำหนดลักษณะในส่วนของ pseudocode เนื่องจากเราสามารถหารูปแบบที่แน่นอนของการวางแผนไม่ได้ งานทั้งหมดของการ algorithm จึงขึ้นอยู่กับ งานของการสร้างพีระมิตโดยใช้แผ่นไม้ (ในส่วนของการแสดงผล) โดยเป็นไปตามเงื่อนไข 4) , 5)

```
# input : n is number

if n % 3 == 0 :

    print("Can not generate")

    return false

else :

    # วนลูปเพื่อไปวางแผนไม้ในแต่ละชั้นตามรูปแบบที่กำหนด

    for 2 <= l <= n :

        if ( n %3 == 0 ) : วางแผ่นไม้ตามเงื่อนไขข้อ 4 (ขั้นตอน 5) และวางแผนไม้ตรงกลางจนเต็ม

        else if (n%3 == 1) : หน้าและหลังจะถูกวางไม้จากชั้นก่อนหน้าแล้ว งานที่เหลือคือ วางแผ่นไม้สลับจบเต็ม

        elise if (n%3 == 2) : วางแผ่นไม้สลับขึ้นลงตามเงื่อนไขข้อ 5 (ขั้นตอน 5)

    return true
```

วิเคราะห์ เนื่องจากเรามีรูปแบบการวางที่แน่นอนอยู่แล้ว งานทั้งหมดจะขึ้นกับการวาดรูป

- การตรวจสอบว่าสามารถสร้างได้หรือไม่ $\Theta(1)$ (เช็คว่า หาร 3 ลงตัวหรือไม่)
- งานในการวาดรูปซึ่งวาดแต่สามเหลี่ยมขึ้นมาตามเงื่อนไข สมมติว่าสามารถสามเหลี่ยมหนึ่งขึ้นด้วยงาน $O(1)$ สามเหลี่ยมทั้งหมดที่ต้องวาดมี n^2-1 ชั้น ดังนั้นใช้ $O(n^2)$

โดยรวม algorithm ดังกล่าวทำงานได้ภายในเวลา $O(n^2)$

เพื่อความเข้าใจในการวางแผนไม้ในรูปแบบดังกล่าวมากยิ่งขึ้น สามารถเข้าไปดูโค้ดการสร้าง พีระมิตยอดตัดโดยใช้ แผ่นไม้ ได้ในลิงค์ https://github.com/remove158/cutpyramid/blob/main/question_3.py

Using Python , Turtle