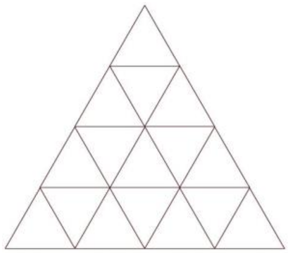
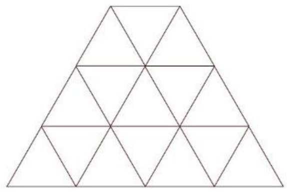
6231339321 นายปิยะพัทธ์ ภิญโญ

พีระมิดยอดตัด

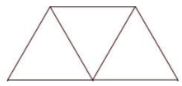
<u>นิยามคำศัพท์</u> พีระมิดสูง n เกิดจากการนำเอาสามเหลี่ยมด้านเท่ามาเรียงต่อกัน กำหนดให้พีระมิดยอดตัดคือ เอาพีระมิดในรูปมาตัดยอดที่เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าด้านบนออกไป 1 ชิ้น , แผ่นไม้ คือ สามเหลี่ยมด้านเท่า 3 ชิ้นมาต่อกันดังรูป



พีระมิดขนาด 4



พีระมิดยอดตัดขนาด 4



สามเหลี่ยมด้านเท่า 3 อัน เรียกว่า แผ่นไม้

<u>ปัญหา</u> จงพิสูจน์ว่าสำหรับค่า n ใดบ้างที่เราสามารถเอาแผ่นไม้ มาประกอบได้

พร้อมทั้งออกแบบอัลกอรึทึมสำหรับการสร้างรูปพิระมิดสำหรับค่า n ต่างๆ

<u>พิสูจน์</u>

พิจารณาจำนวน 3 เหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมดที่เอามาสร้างพีระมิด

- $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2$

และเนื่องจากพีระมิดยอดตัด คือการนำเอาพีระมิดปกติมาตัดยอดออกไป 1 ชิ้น นั่นคือมีจำนวนสามเหลี่ยม ดังนี้

- $(1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1)) - 1 = n^2 - 1$

พิจารณา $n^2 - 1 \bmod 3$ จะเห็นว่า

- เนื่องจาก $n^2-1 = (n-1)(n+1)$ จะได้ว่า $n^2-1 \bmod 3 = 2$ (ถ้า $n \bmod 3 = 0$)
  - เพราะว่า $n^2-1 \bmod 3 \neq 0$ และขนาดของแผ่นไม้คือ 3 จึงสรุปได้ว่าถ้า $n \bmod 3 = 0$ เราจะไม่มีทางสร้าง พีระมิดยอมตัด n ได้
- กรณีที่ $n \bmod 3 = 1$
  - จะได้ว่า $n^2-1 \bmod 3 = 0$ ซึ่ง<u>มีความเป็นได้</u>ว่าเราสามารถสร้างพีระมิดยอดตัด n โดยแผ่นไม้ดังกล่าวได้
- กรณีที่ $n \bmod 3 = 2$
  - จะได้ว่า $n^2-1 \bmod 3 = 0$ ซึ่ง<u>มีความเป็นได้</u>ว่าเราสามารถสร้างพีระมิดยอดตัด n โดยแผ่นไม้ดังกล่าวได้

ในขั้นตอนการพิสูจน์จะพิสูจน์โดยการใช้ (?อุปนัย) เชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้

เมื่อให้ P(n) แทนข้อความ เราสามารถสร้างพีระมิดยอดตัด n ใดๆได้โดยใช้แผ่นไม้มาประกอบเป็นพีระมิดได้ ถ้า n mod 3 ≠ 0 และ n > 1

โดยจะขอแบ่งขั้นตอนทั้งหมดเป็น 5 ขั้นตอนดังนี้

- แสดงว่า P(2) เป็นจริง (case n mod 3 = 2)
- แสดงว่า P(3) เป็นจริง (case n mod 3 = 0)
- แสดงว่า P(4) เป็นจริง (case n mod 3 = 1)
- กำหนด P(2) , … , P(n) เป็นจริง จะแสดงว่า P(n+1) เป็นจริง (เมื่อ n mod 3 = 0)
- กำหนด P(2) , … , P(n) เป็นจริง จะแสดงว่า P(n+2) เป็นจริง (เมื่อ n mod 3 = 0)

ขั้นตอนที่ 1) แสดงว่า P(2) เป็นจริง

เนื่องจากค่า n=2 จะได้ว่ารูปพีระมิดนั้นคือ แผ่นไม้พอดี

นั่นคือ สามารถสร้างพีระมิดยอดตัด 2 ได้โดยใช้ แผ่นไม้ ได้

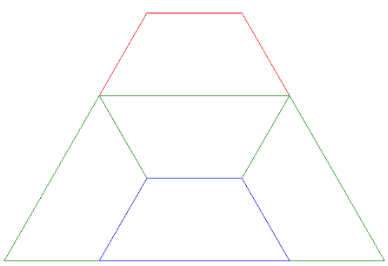
ขั้นตอนที่ 2) แสดงว่า P(3) เป็นจริง

จาก พีระมิดยอดตัด n จะสร้างได้ถ้า n mod 3 ≠ 0

นั่นคือ p -> q , p = false

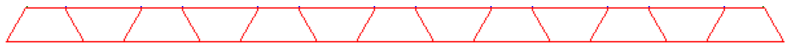
จะได้ว่า p -> q เป็น true

ขั้นตอนที่ 3) แสดงว่า P(4) เป็นจริง ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า เราสามารถสร้างพีระมิดยอดตัด 4 ได้ดังนี้



จากการวางแผ่นไม้ในลักษณะดังกล่าว ทำให้สามารถแผ่นไม้เพื่อสร้างพีระมิดยอดตัด 4 ได้

<u>ก่อนอื่น</u>พิจารณา สามเหลี่ยมด้านเท่าที่วางเรียงตัวกัน n ชิ้นเมื่อ n mod 3 = 0



จะเห็นได้ชัดว่าเราสามารถวางแผ่นไม้ลงไปได้เลยทันทีโดยกลับด้านสลับกันไปจนจบ

<u>ขั้นตอนที่ 4)</u> กำหนด P(2) , … , P(n) เป็นจริง จะแสดงว่า P(n+1) เป็นจริง (เมื่อ n mod 3 = 0)

พิจารณาจำนวนสามเหลี่ยมแถวล่างสุดของ ของ พีระมิดยอดตัด n

- จะได้ว่าจำนวนสามเหลี่ยม แถวนี้ คือ 2n - 1

พิจารณาจำนวนสามเหลี่ยมแถวล่างสุดของ ของ พีระมิดยอดตัด n + 1

- จะได้ว่าจำนวนสามเหลี่ยม แถวนี้ คือ 2(n+1) – 1 = 2n + 1

จะเห็นว่า<u>มีความเป็นไปได้</u>ว่า เราสามารถ ใส่สามเหลี่ยมด้าน 3 ชิ้นเท่าดังกล่าวลงไปได้

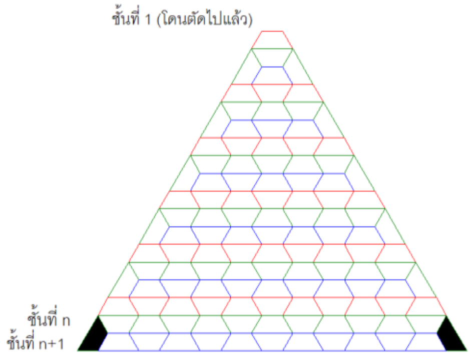
- เพราะ (2n-1) + (2n+1) = 4n ซึ่ง n mod 3 = 0

เนื่องจาก P(n-1) จริง นั่นคือสามารถ เขียนพีระมิดยอดตัด n-1 ได้

- นั่นคือ ถ้าเราสามารถวางแผ่นไม้ไปใน 2 แถวสุดท้ายของพีระมิดได้ (แถวที่ n,n+1) เราจะสามารถสร้างพีระมิดยอดตัดนี้โดยใช้แผ่นไม้ได้

พิจารณา ชั้นที่ n , n +1 แบบตัดปลายซ้ายขวาออก

- จะเห็นว่า จำนวนสามเหลี่ยมที่เหลือในทั้งสองแถว mod 3 = 0
- และเนื่องจากแต่ละแถววางตัวเป็นเส้นตรง และ mod 3 = 0 จึงทำให้สามารถวาง<u>แผ่นไม้</u> ได้เลย !



ซึ่งจะสังเกตได้ว่าปลายทั้งสองข้างที่ตัดไป ก็สามารถวางแผ่นไม้ได้เหมือนกัน

จึงสามารถสรุปได้ว่า แผ่นไม้สามารถสร้างพีระมิดยอดตัด n+1 ได้ ถ้า n mod 3 = 0

<u>ขั้นตอนที่ 5)</u> กำหนด P(2) , … , P(n) เป็นจริง จะแสดงว่า P(n+2) เป็นจริง (เมื่อ n mod 3 = 0)

จาก ขั้นตอนที่ 4) เราจะได้ว่า **P(n+1)** เป็นจริง นั่นหมายความว่า เราสามารถสร้าง พีระมิดยอดตัด **n+1** ได้

ดังนั้นถ้าหากเราสามารถวางแผ่นไม้ในชั้น **n+2** ได้จะได้ว่า เราสร้างพีระมิดยอดตัด n+2 ได้ ถ้า n mod 3 = 0

งานของเราในขั้นตอนนี้คือ วางแผ่นไม้ในชั้น **n+2**

พิจารณาจำนวน สามเหลี่ยมชั้นที่ **n+2**

- จะได้จำนวน 2(n+2) -1 = 2n -3 ซึ่งหาร 3 ลงตัว

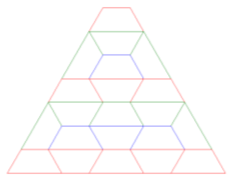
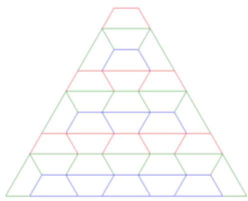
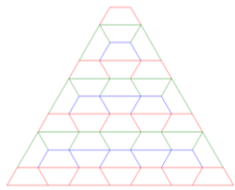
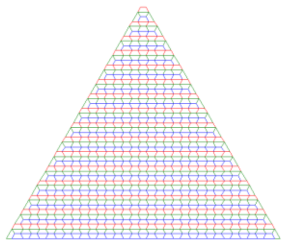
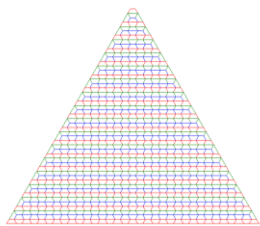
จากการที่ ชั้น **n+2** วางตัวเป็นเส้นตรงและหาร 3 ลงตัว นั่นคือ สามารถวางไม้ลงไปได้เลย

จึงสามารถสรุปได้ว่า แผ่นไม้สามารถสร้างพีระมิดยอดตัด n+2 ได้ ถ้า n mod 3 = 0

<u>จากเงื่อนไขทั้ง 5 จึงสามารถสรุปได้โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ว่า</u>

เราสามารถสร้างพีระมิดยอดตัด **n** โดยใช้แผ่นไม้ได้ ถ้า **n mod 3** $\neq$ **0**

<u>จากการวางในรูปแบบตายตัว ของขั้นตอน 4) , 5) จะได้ดังนี้ จะได้ตัวอย่างดังนี้</u>

N (ซึ่งทำให้วางแผ่นไม้ไม่ได้)	พีระมิด n +1	พีระมิด n +2
6		
9		
48		

กำหนดลักษณะในส่วนของ pseudocode เนื่องจากเราสามารถหารูปแบบที่แน่นอนของการวางแผ่นไม้ได้ งานทั้งหมดของการ algorithm จึงขึ้นอยู่กับ งานของการสร้างพีระมิดโดยใช้แผ่นไม้ (ในส่วนของการแสดงผล) โดยเป็นไปตามเงื่อนไข 4) , 5)

```
# input : n is number
# output : พีระมิดสามเหลี่ยมตัด (GUI)
if n % 3 == 0 :
        print("Can not generate")
        return false
else :
        # วนลูปเพื่อไปวางแผ่นไม้ในแต่ละชั้นตามรูปแบบที่กำหนด
        for 2 <= i <= n :
                if ( i %3 == 0 ) :  วางแผ่นไม้ตามเงื่อนไขข้อ 4 (ขั้นตอน 4) และวางแผ่นไม้ตรงกลางจนเต็ม
                else if (i%3 == 1) : หน้าและหลังจะถูกวางไม้จากชั้นก่อนหน้าแล้ว งานที่เหลือคือ วางแผ่นไม้สลับจบเต็ม
                else if (i%3 == 2) :  วางแผ่นไม้สลับขึ้นลงตามเงื่อนไขข้อ 5 (ขั้นตอน 5)
        return true
```

วิเคราะห์ เนื่องจากเรามีรูปแบบการวางที่แน่นอนอยู่แล้ว งานทั้งหมดจะขึ้นกับการวาดรูป

- การตรวจสอบว่าสามารถสร้างได้หรือเปล่า $\Theta(1)$ (เช็คว่า หาร 3 ลงตัวหรือเปล่า)
- งานในการวาดรูปซึ่งวาดแต่สามเหลี่ยมขึ้นมาตามเงื่อนไข สมมุติว่าสามารถสามเหลี่ยมหนึ่งชิ้นด้วยงาน $O(1)$ สามเหลี่ยมทั้งหมดที่ต้องวาดมี n^2-1 ชิ้น ดังนั้นใช้ $O(n^2)$, เกิดจาก n ชั้นชั้นละ < 2i ชิ้น

โดยรวม algorithm ดังกล่าวทำงานได้ภายใต้เวลา $O(n^2)$

เพื่อความเข้าใจในการวางแผ่นไม้ในรูปแบบดังกล่าวมากยิ่งขึ้น สามารถเข้าไปดูโค้ดการสร้าง พีระมิดยอดตัดโดยใช้ แผ่นไม้ ได้ในลิงค์ https://github.com/remove158/cutpyramid/blob/main/question_3.py

Using Python , Turtle