



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИТМО»

---

# Имитационное моделирование робототехнических систем

## Отчет по второй лабораторной работе

---

Автор:	Терещенко Евгений Константинович
Номер ИСУ:	507632
Группа:	R4150
Преподаватель:	Ракшин Егор Александрович
Дата сдачи отчета:	10 ноября 2025 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Цель Работы</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Ход работы</b>	<b>2</b>
2.1	Вывод уравнения, описывающего систему . . . . .	2
2.2	Аналитическое решение дифференциального уравнения второго порядка . . . . .	3
2.3	Сравнение аналитического и численных решений . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Вывод</b>	<b>8</b>
	<b>Список иллюстраций</b>	<b>9</b>

# 1 Цель Работы

Целью данной работы является моделирование динамики системы, состоящей из тела массой  $m$ , взаимодействующего с пружиной жёсткостью  $k$  и демпфером с коэффициентом демпфирования  $b$ , закреплённых на горизонтальной поверхности. В данной работе при помощи уравнения Эйлера–Лагранжа должно быть выведено дифференциальное уравнение, описывающее систему. Далее это уравнение решается аналитически, а также его динамика моделируется численно. В качестве численных методов в данной работе рассматриваются следующие подходы:

- Явный метод Эйлера
- Неявный метод Эйлера
- Метод Рунге–Кутты четвёртого порядка

Результатом работы должно стать сравнение аналитического решения заданного дифференциального уравнения второго порядка с решениями, полученными в результате работы каждого из указанных выше численных методов.

## 2 Ход работы

### 2.1 Вывод уравнения, описывающего систему

Прежде всего нужно промоделировать исходную систему. В роли модели выступает дифференциальное уравнение второго порядка, вывод которого будет приведён ниже.

Для моделирования системы первым делом нужно записать уравнение Эйлера–Лагранжа, имеющее следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q \quad (2.1)$$

, где  $L$  — **Лагранжиан**, который определяется как разность кинетической и потенциальной энергий в системе, то есть  $L = K(x, \dot{x}) - P(x)$

$Q$  — **внешние силы в системе**, которые для консервативных систем равны нулю, а в случае исходной системы равны диссипации энергии за счёт демпфирования. В данном случае  $Q = b\dot{x}$

Кинетическая энергия в данной системе может быть рассчитана как

$$K(x, \dot{x}) = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad (2.2)$$

Потенциальная энергия в случае исходной системы задаётся лишь пружиной и может быть рассчитана как

$$P(x) = \frac{kx^2}{2} \quad (2.3)$$

В итоге, подсчитав две частные производные и производную по времени, указанные в уравнении 2.1, а также подставив выражение для  $Q$ , получаем следующее дифференциальное уравнение, описывающее динамику системы:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (2.4)$$

, где, исходя из условий задачи:

- $m=0.2$  кг
- $k = 19.4$  Н/м
- $b= 0.025$  Н·с/м

## 2.2 Аналитическое решение дифференциального уравнения второго порядка

В данном параграфе будет описано аналитическое решение уравнения 2.4 для коэффициентов, обозначенных выше.

Поскольку данный процесс был детально описан в предыдущей лабораторной работе, в этот раз решение не будет разобрано так подробно. В данной работе будет рассмотрена специфика решения конкретного уравнения, которая в случае подставленных коэффициентов, указанных в задании, примет вид:

$$0.2\ddot{x} + 0.025\dot{x} + 19.4x = 0 \quad (2.5)$$

Дискриминант  $D$  данного уравнения является отрицательным и равен -15.52. Данный результат свидетельствует о том, что корнями являются 2 комплексно-сопряжённых корня:

- $r_1 = -0.0625 + 9.849i$
- $r_2 = -0.0625 - 9.849i$

На комплексной плоскости корни расположены следующим образом:

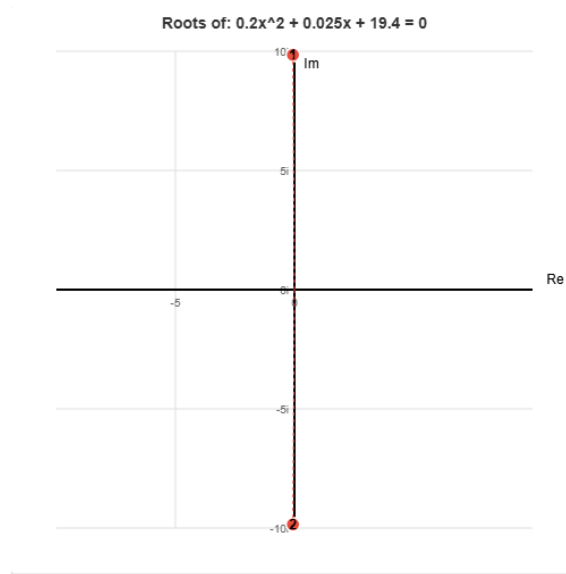


Рис. 2.1: Корни характеристического уравнения

Из визуализации видно, что оба корня находятся в левой части комплексной плоскости, что является свидетельством стабильности системы, то есть колебания системы со временем будут затухать. Обратив внимание на отрицательный дискриминант можно судить о **недодемпфированной** системе, то есть система будет постепенно затухать, но колебаться.

## 2.3 Сравнение аналитического и численных решений

Вывод в конце предыдущей секции может быть наглядно визуализирован. В данной секции будет представлена визуализация решения как аналитическим, так и численными методами.

Результаты представлены на изображениях ниже:

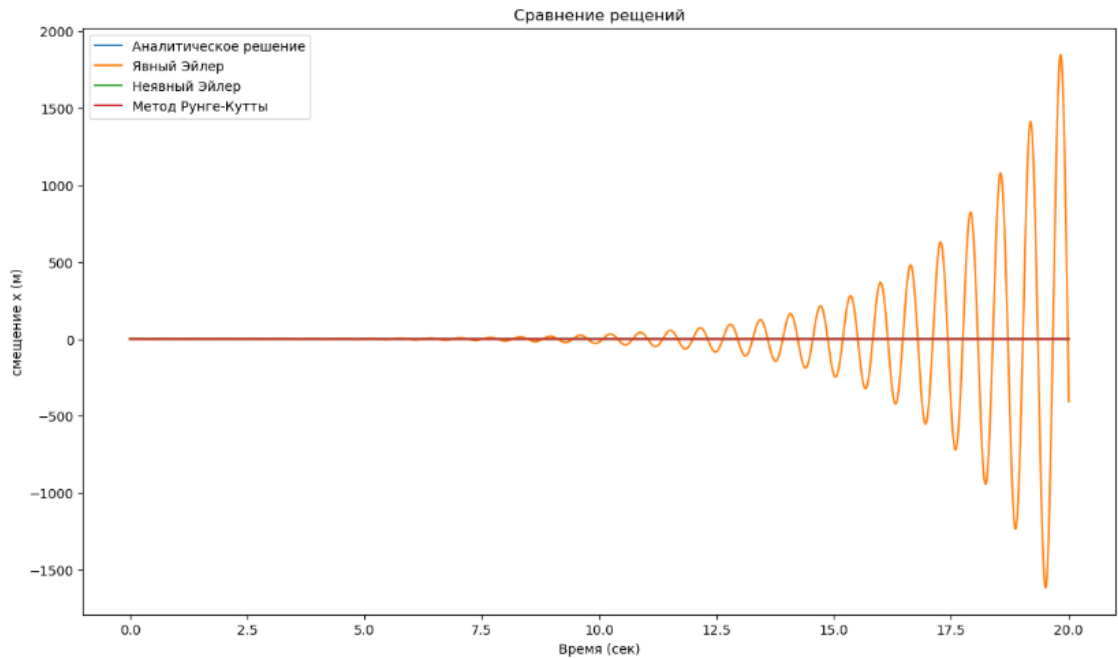


Рис. 2.2: Результаты для временного шага  $h = 0.01$  с

Из графика 2.2 видно, что при шаге  $h = 0.01$  с метод явного Эйлера показывает ужасные результаты, рассчитывая систему как нестабильную. Для наглядности приведём график для такого же временного шага без учёта решения, полученного методом явного Эйлера

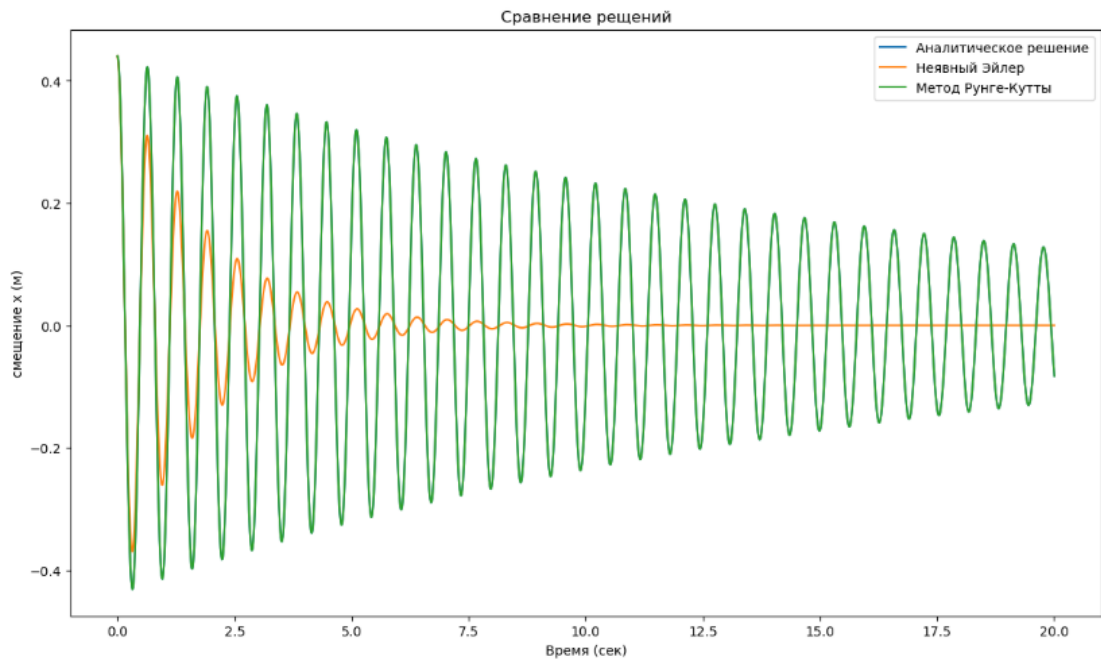


Рис. 2.3: Результаты для временного шага  $h = 0.01$  с без учёта явного метода Эйлера

Исходя из графика 2.3 видно, что уже при шаге, равном 0.01 секунды, результаты метода Рунге–Кутты практически идеально совпадают с результатами аналитического метода. Для большей наглядности покажем разность значений, полученных методом Рунге–Кутты и аналитическим методом. Стоит отметить, что метод неявного Эйлера для данного шага дискретизации выдаёт неверный результат, сводя систему раньше, чем система сходится при аналитическом методе.

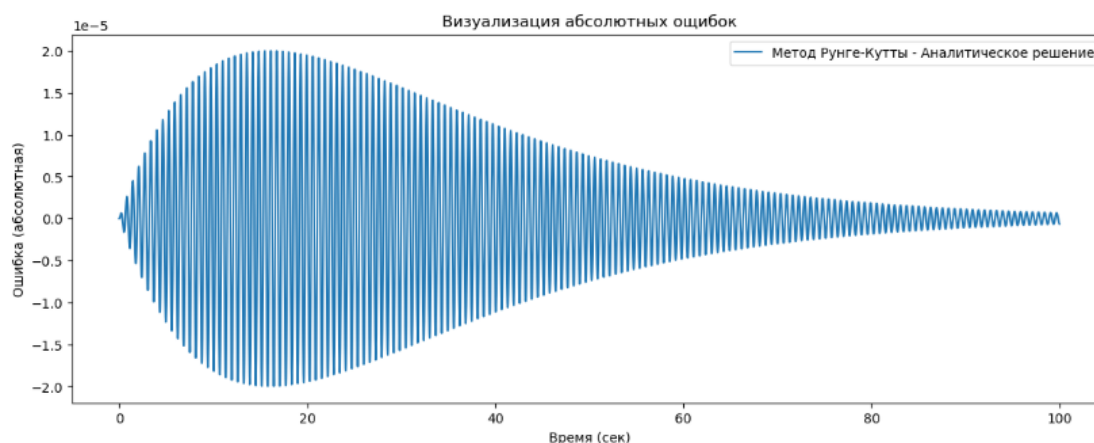


Рис. 2.4: Ошибка между методом Рунге–Кутты и аналитическим решением для временного шага  $h = 0.01$

Для дальнейшего анализа снизим временной шаг до значения, равного 0.0001 секунды. Для удобства восприятия кривая решения методом Рунге–Кутты не будет включена в следующие графики, поскольку данный метод показал свою оптимальность при большем шаге дискретизации.



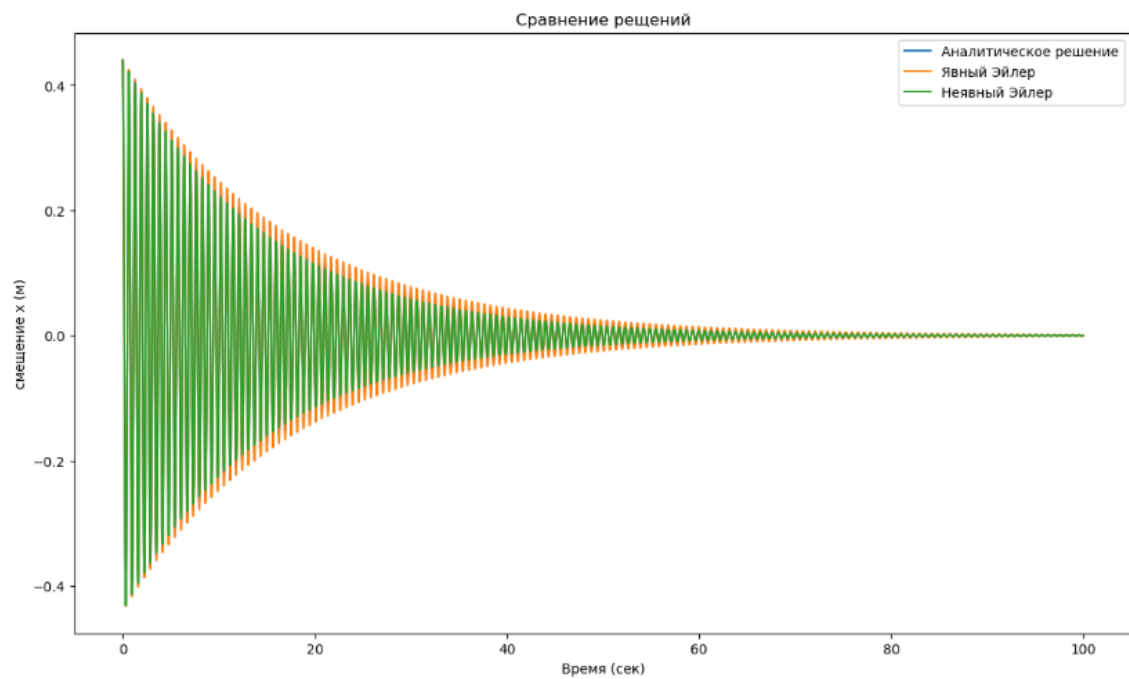


Рис. 2.5: Сравнение решений явным и неявным методами Эйлера с аналитическим решением при временном шаге  $h = 0.0001$  с

В целом видна тенденция того, что процесс демпфирования системы длится примерно 75 секунд.

### 3 Вывод

В ходе данной работы было произведено моделирование системы, состоящей из тела массой  $m$ , а также пружины и демпфера. В ходе моделирования посредством уравнения Эйлера–Лагранжа было выведено дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее динамику системы. Данное уравнение имеет следующий вид:

$$0.2\ddot{x} + 0.025\dot{x} + 19.4 = 0 \quad (3.1)$$

В ходе аналитического решения данного уравнения было установлено, что система является недодемпфированной, то есть система стабилизируется со временем, но испытывает колебания.

В результате аналитическое решение было сравнено с решениями, полученными численными методами. Было установлено, что частота дискретизации (временной шаг) играет существенную роль для решения численными методами, в особенности явными и неявными методами Эйлера. Решение, полученное методом Рунге–Кутты, показало хорошее совпадение с аналитическим решением, поскольку ошибка, представленная на графике 2.4, является пренебрежимо малой.

В конечном итоге стоит заметить, что решения, полученные численными методами, согласуются с аналитическим решением (в особенности при высокой частоте дискретизации), что подтверждает корректность модели.

## Список иллюстраций

2.1	Корни характеристического уравнения . . . . .	4
2.2	Результаты для временного шага $h = 0.01$ с . . . . .	5
2.3	Результаты для временного шага $h = 0.01$ с без учёта явного метода Эйлера . . . . .	5
2.4	Ошибка между методом Рунге–Кутты и аналитическим решением для временного шага $h = 0.01$ . . . . .	6
2.5	Сравнение решений явным и неявным методами Эйлера с аналитическим решением при временном шаге $h = 0.0001$ с . . . . .	7