



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИТМО»

Имитационное моделирование робототехнических систем

Отчет по первой лабораторной работе

Автор:	Терещенко Евгений Константинович
Номер ИСУ:	507632
Группа:	R4150
Преподаватель:	Ракшин Егор Александрович
Дата сдачи отчета:	7 ноября 2025 г.

Оглавление

1	Цель Работы	1
2	Ход Работы	2
2.1	Начальные условия	2
2.2	Аналитическое решение дифференциального уравнения второго порядка	2
2.3	Сравнение аналитического и численных решений	4
3	Вывод	8
	Список иллюстраций	9

1 Цель Работы

Целью данной работы является практическое применение как численных методов решения, так и аналитического подхода, для анализа динамической системы описанной дифференциальным уравнением второго порядка. В качестве численных методов в данной работе рассматриваются следующие подходы:

- Явный метод Эйлера
- Неявный Метод Эйлера
- Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Результатом работы должно стать сравнение аналитического решения заданного дифференциального уравнения второго порядка с решением полученным в результате работы каждого из численных методов упомянутых выше.

2 Ход Работы

2.1 Начальные условия

Для решения дифференциального уравнения второго порядка вида:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx + d = 0 \quad (2.1)$$

На основе таблицы указанной в описании лабораторной работы были использованы следующие значения для коэффициентов из уравнения 2.1

- $a = 7.53$
- $b = -4.12$
- $c = -3.97$
- $d = 3.26$

2.2 Аналитическое решение дифференциального уравнения второго порядка

В данном параграфе будет описано аналитическое решение уравнения 2.1 для коэффициентов обозначенных выше.

Первым делом было составлено характеристическое уравнение для изначального дифференциального уравнения второго порядка. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$7.53\ddot{x} - 4.12\dot{x} - 3.97 = 0 \quad (2.2)$$

Дискриминант D данного уравнения равен 136.5508, а корнями уравнения являются два числа: $r_2 = -0.50236$ и $r_1 = 1.0495$. Можно заметить, что один из корней больше нуля, что может свидетельствовать о неустойчивости системы.

В итоге однородное решение исходного дифференциального уравнения будет выглядеть следующим образом:

$$x_h(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad (2.3)$$

Коэффициенты A и B определяются по следующим формулам:

$$A = \frac{\dot{x} - (x - x_p) * r_2}{r_1 - r_2} \quad (2.4)$$

$$B = A - (x - x_p) \quad (2.5)$$

где x_p - это частное решение исходного уравнения

Для нахождения частного решения исходного уравнения нужно обратиться к таблице частных решений дифференциальных уравнений. Данная таблица представлена на изображении

$g(x)$	Form of y_p
1. 1 (any constant)	A
2. $5x + 7$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
5. $\sin 4x$	$A \cos 4x + B \sin 4x$
6. $\cos 4x$	$A \cos 4x + B \sin 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. $x^2 e^{5x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. $e^{3x} \sin 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \sin 4x$
11. $5x^2 \sin 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Ex^2 + Fx + G) \sin 4x$
12. $x e^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + E)e^{3x} \sin 4x$

Рис. 2.1: Таблица частных решений дифференциальных уравнений

Исходя из таблицы видно, что для коэффициента d, который в данном случае является константой, частное решение x_p тоже будет константой. При взятии первой и второй производной константа обнуляется, поэтому частное решение $x_p = \frac{d}{c} = \frac{3.26}{-3.97} = -0.82116$

В итоге константы однородного решения имеют следующие численные значения: $A = 0.2658$, $B = 0.55534$.

2.3 Сравнение аналитического и численных решений

После того как аналитическое решение исходного дифференциального уравнения второго порядка было получено, можно приступить к визуализации результатов. Для того, чтобы получить понимание о качестве аппроксимации решения дифференциального уравнения численными методами будет достаточно визуализации самих результатов и визуализации отклонения каждого численного метода (отдельно) от аналитического решения. Так же интересным является визуализация для различных шагов времени. В данном отчете будут разобраны шаги 0.1 сек и 0.01 сек.

Результаты представлены на изображениях ниже:

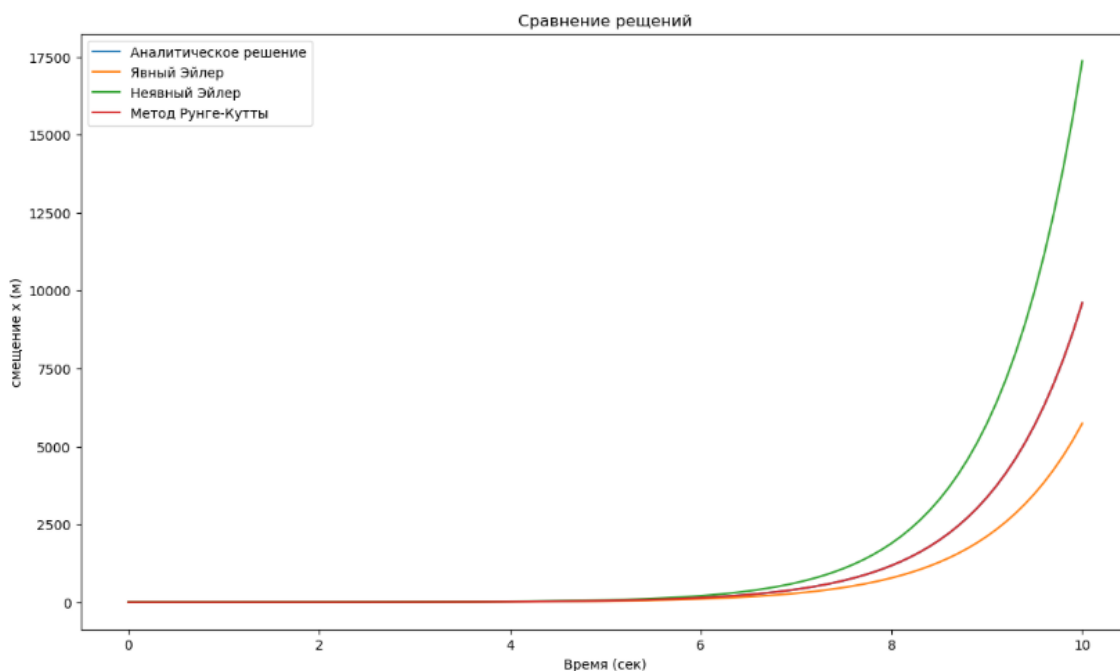


Рис. 2.2: Результаты для шага $h = 0.1$

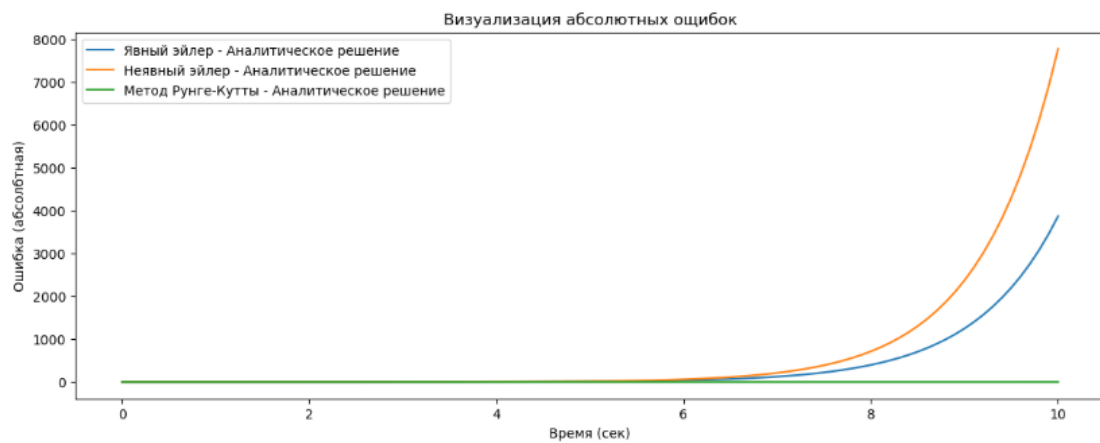


Рис. 2.3: Ошибки для шага $h = 0.1$ сек

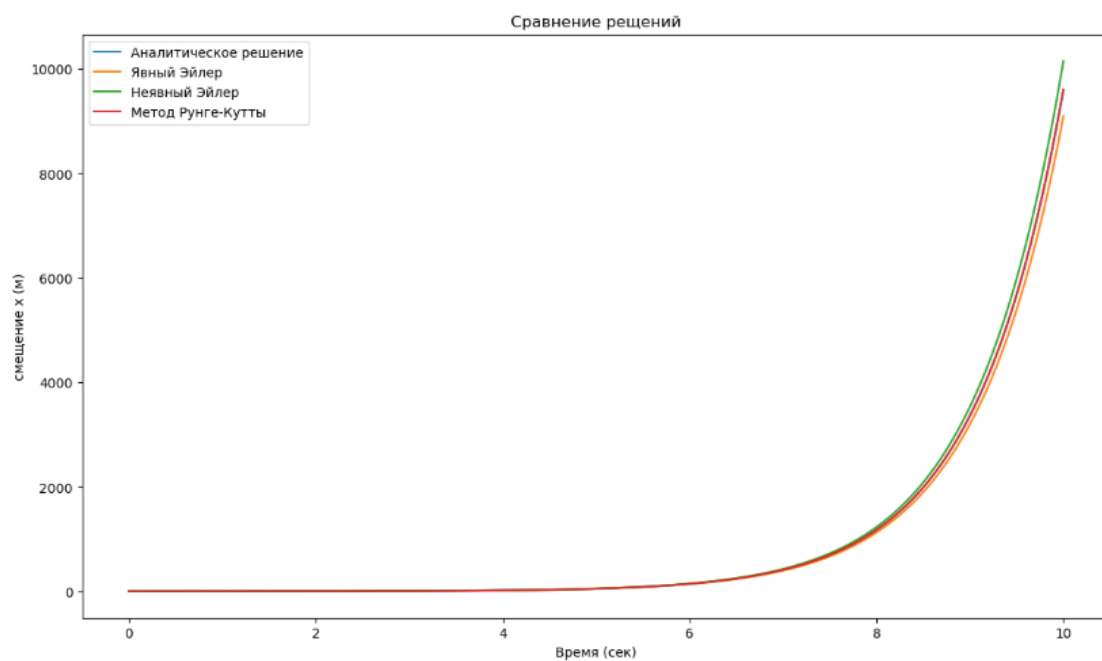


Рис. 2.4: Результаты для шага $h = 0.01$

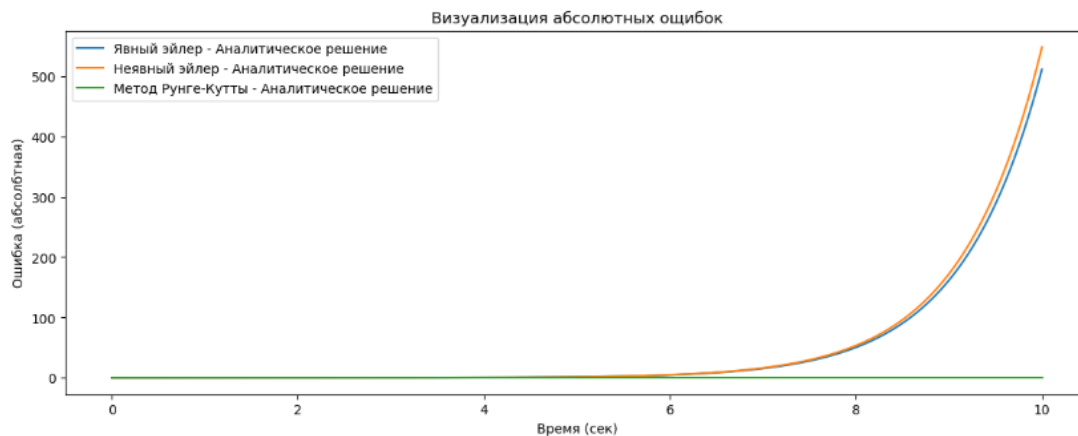


Рис. 2.5: Ошибки для шага $h = 0.01$ сек

Из графиков видна тенденция к экспоненциальному росту для всех решений. Это напрямую связано со слагаемым $e^{1.05t}$, которое содержится в решении дифференциального уравнения. Также, исходя из визуализированных результатов видно, что при десятикратном уменьшении временного шага точность для явного и неявного методов Эйлера пропорционально увеличивается (то есть отклонение от аналитического метода уменьшается). Из графиков видно, что для исходной нестабильной системы (т.к. один из корней характеристического уравнения >0) метод явного Эйлера систематически недооценивает рост (график для данного метода ниже чем график аналитического решения), а неявного Эйлера переоценивает его (график для данного метода выше, чем кривая аналитического решения).

Лучше всех показал себя метод Рунге-Кутты 4 порядка, который практически совпадает с аналитическим решением для обоих временных шагов. На графиках ниже отдельно представлена ошибка данного метода для $h = 0.1$ сек и $h=0.01$ сек.

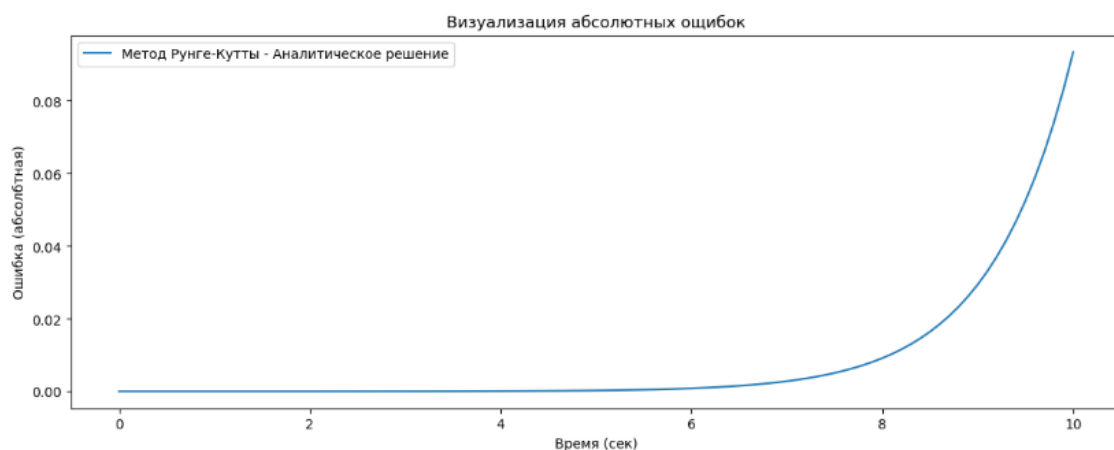


Рис. 2.6: Ошибки метода Рунге-Кутты для шага $h = 0.1$ сек

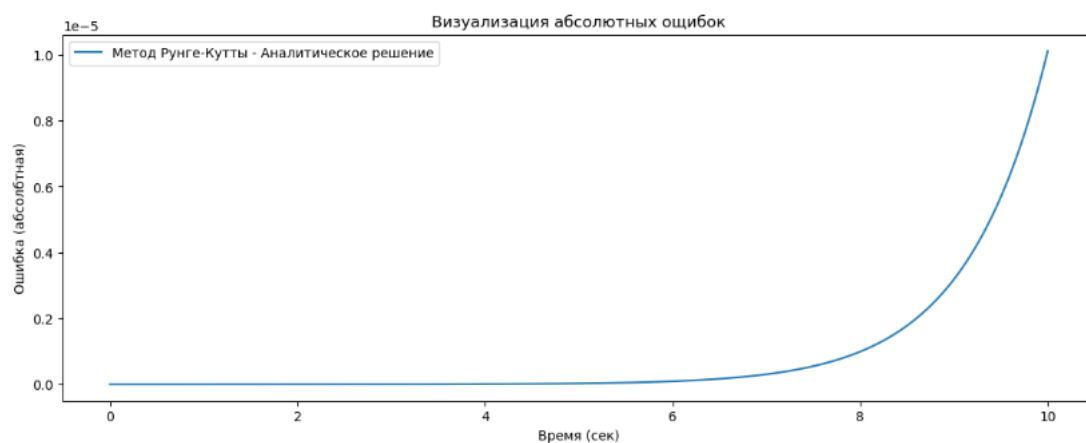


Рис. 2.7: Ошибки метода Рунге-Кутты для шага $h = 0.01$ сек

Исходя из графиков 2.7 и 2.6 так же видно, что при уменьшении временного шага отклонение от аналитического решения пропорционально уменьшается.

3 Вывод

В ходе данной работы была произведена симуляции динамики системы описанной уравнением вида:

$$7.53\ddot{x} - 4.12\dot{x} - 3.97x + 3.26 = 0 \quad (3.1)$$

В первую очередь данное уравнение было решено аналитически, то есть было получено как однородное, так и частное решения исходного уравнения, которое затем было сравнено с численными решениями такой же системы. В результате анализа результатов было замечено, что изменение временного шага пропорционально влияет на отклонение численных методов от аналитического решения. Поскольку один из корней дифференциального уравнения второго порядка является положительным (и больше единицы) система является неустойчивой, то есть любые начальные отклонения и численные ошибки не затухают, а лишь "раздуваются" вследствие наличия экспоненциального слагаемого $e^{1.05t}$.

Исходя из визуальных результатов можно сделать вывод о том, что метод явного Эйлера переоценивает рост решения, а метод неявного Эйлера недооценивает его.

Максимально точным является метод Рунге-Кутты 4 порядка, ошибка которого для временного шага $h = 0.1$ секунды составила менее 0.1.

Список иллюстраций

2.1	Таблица частных решений дифференциальных уравнений	3
2.2	Результаты для шага $h = 0.1$	4
2.3	Ошибки для шага $h = 0.1$ сек	5
2.4	Результаты для шага $h = 0.01$	5
2.5	Ошибки для шага $h = 0.01$ сек	6
2.6	Ошибки метода Рунге-Кутты для шага $h = 0.1$ сек	7
2.7	Ошибки метода Рунге-Кутты для шага $h = 0.01$ сек	7