

2017

APUNTES DE MATEMÁTICAS

(cálculo en R y repaso)

Pepe Aranda

pparanda@fis.ucm.es

<https://teorica.fis.ucm.es/pparanda>

Departamento de Métodos Matemáticos

Facultad de Físicas. UCM

<https://www.ucm.es/ft2mm>

Índice

Bibliografía

Sobre las versiones de los apuntes

1. Preliminares

1.1 Conjuntos. Lenguaje matemático	1
1.2 \mathbb{N} , \mathbb{Z} y \mathbb{Q} . mcd y mcm. Progresiones. Binomio de Newton	4
1.3 El conjunto \mathbb{R} . Desigualdades. Valor absoluto	8
1.4 Repaso de las funciones elementales	13
1.5 El conjunto \mathbb{C} . Operaciones con complejos	20

2. Sucesiones, límites y continuidad en \mathbb{R}

2.1 Sucesiones de números reales	23
2.2 Límites de funciones. Funciones continuas	29
2.3 Teoremas sobre funciones continuas en intervalos	35

3. Derivadas en \mathbb{R}

3.1 Definición y cálculo	37
3.2 Teoremas sobre funciones derivables	42
3.3 Polinomios	47
3.4 Representación de funciones	50
3.5 Aplicaciones	54
3.6 Aproximación numérica de ceros	56

4. Series, Taylor y límites indeterminados

4.1 Series de números reales	59
4.2 Sucesiones y series de funciones	66
4.3 Series de potencias	69
4.4 Polinomios y series de Taylor	73
4.5 Cálculo de límites indeterminados	79
4.6 Series complejas de potencias	87

5. Integración en \mathbb{R}

5.1 Definición y propiedades	91
5.2 Teoremas fundamentales	93
5.3 Cálculo de primitivas	97
5.4 Integrales impropias	103
5.5 Integración aproximada	107
5.6 Aplicaciones	112

Problemas

I

Problemas adicionales

XI

Bibliografía

- [Sp] M. Spivak. Calculus. Ed. Reverté
- [L] S. Lang. Cálculo. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana
- [St] S. Stein. Cálculo y geometría analítica. Ed. McGraw-Hill
- [R] J. Rogawski. Cálculo una variable. Ed. Reverté
- [LHE] Larson-Hostetler-Edwards. Cálculo y geometría analítica. Ed. McGraw-Hill
- [Sw] J. Stewart. Cálculo diferencial e integral. International Thomsom Ed.
- [A] T. Apostol. Calculus. Ed. Reverté
- [CJ] Courant-John. Introducción al cálculo y al análisis matemático. Ed. Limusa-Wiley
- [B] J. Burgos. Cálculo infinitesimal de una variable. Ed. McGraw-Hill
- [K] K. Kuratowski. Introducción al cálculo. Ed. Limusa-Wiley

Elaborar apuntes de una asignatura tiene la ventaja de precisar qué es lo que se va a explicar durante el curso. Además permite al estudiante no estar todo el rato pendiente de copiar a toda velocidad (con los errores que produce) lo que se escribe en la pizarra. Pero tiene también sus desventajas. La existencia de los apuntes incita a utilizar poco otros libros, que dan otras visiones de la asignatura y que tratan diferentes temas con más extensión, ejemplos, aplicaciones o rigor (según los casos) que en dichos apuntes.

Es importante, como se ha dicho, consultar libros. El problema básico de la bibliografía para un curso de Cálculo (o de Matemáticas) de primero es que no existe 'el libro adecuado' a todos los alumnos, pues éstos llegan a la universidad con muy diferente formación matemática. El ideal sería que toda persona de primero de Físicas pudiera seguir un libro tan bonito como el Spivak. Pero ese ideal es poco real.

En teoría, en las asignaturas de matemáticas del bachillerato se han tratado (eso dicen los programas oficiales) bastantes temas de los que se van a repasar o profundizar en la asignatura de Matemáticas. Por ejemplo: factoriales, números reales, operaciones elementales con complejos, inecuaciones, rectas, trigonometría, exponenciales y logaritmos, sucesiones, concepto intuitivo de límites, derivación, gráficas, primitivas sencillas o cálculo de áreas. Según esto, sólo parte de los temas de Matemáticas se verían por primera vez: la definición rigurosa de límites, todo lo relativo a series, las sucesiones de funciones, los desarrollos de Taylor, las primitivas complicadas, las integrales impropias y pocas cosas más (además del cambio que suele representar la insistencia de los profesores universitarios en 'las demostraciones').

La experiencia dice que, aunque hay un porcentaje digno de estudiantes que sí controlan buena parte de los citados temas del bachillerato, hay otra parte (por desgracia no muy minoritaria) con demasiados agujeros en su formación. Por eso existía en el antiguo plan un 'grupo cero' que repasaba conceptos del bachillerato y por eso en el plan del nuevo grado en Física los contenidos de ese grupo cero se han incluido en la nueva asignatura de Matemáticas.

Para estudiantes con buena base, los libros clásicos de Cálculo ([Sp], [A] o [CJ]) son el complemento natural de estos apuntes ([A] trata temas además de otras asignaturas: álgebra, cálculo en varias variables, ecuaciones diferenciales,...). Pero para estudiantes de menor nivel matemático es mejor manejar libros más elementales, como el [L], [St], [R], [LHE] o [Sw] (con bastantes ejemplares en la biblioteca de Físicas), que contienen muchos más ejemplos sencillos, aunque no incluyen los temas más complicados del curso (que en Matemáticas se cuentan a título informativo). Los ocho primeros libros estudian (al contrario que en estos apuntes) primero las funciones (integrales incluidas) y luego las sucesiones y series. Los dos siguientes ([B] y [K]) tratan las sucesiones y series al principio. El [K] es difícil de leer (y de encontrar), pero es citado porque de él se han extraído algunas demostraciones.

Los problemas básicos de estos apuntes son más que suficientes para el curso (los adicionales o son parecidos o más complicados o tratan temas que no están en el programa aunque siguen en los apuntes, como las ideas sobre métodos numéricos). Pero en todos los libros de la bibliografía hay más problemas propuestos y resueltos. Si algún amante de las matemáticas quiere problemas más teóricos y complicados, que se enfrente a los del [Sp]. Pero probablemente sea mayor el número de quienes echan en falta en los problemas más ejercicios sencillos. En [L], [St], [R], [LHE] o [Sw] se pueden encontrar cientos de ellos.

Sobre las versiones de los apuntes

versión 2017: Una vez más cambian los problemas, incluyendo exámenes del 16-17. Las páginas básicas de problemas siguen siendo 10 (2, 1, 2, 2 y 3 de temas 1, 2, 3, 4 y 5) y el número de esos problemas es 150 (30, 10, 35, 30 y 45). Y las páginas de los problemas adicionales son 18 (9 de cada parte del curso). Se ha cambiado el subtítulo ‘Cálculo y repaso’ por ‘cálculo en **R** y repaso’.

versión 2016: De nuevo sólo cambian los problemas, con exámenes del 15-16.

versión 2015: Sólo cambian los problemas, por la inclusión de exámenes del 14-15.

versión 2014: Abundantes pequeños cambios sin cambiar el contenido. La sección de aproximación de ceros se va al final de capítulo 3 y es marcada, como el resto de contenido que aparecen sólo a título informativo, con recuadros de color diferente al de los ejemplos y comentarios. En muchas secciones aparecen ejemplos nuevos y algunos cambios de orden, que detallo a continuación.

En 1.3 las raíces de polinomios sencillos se retrasan y hay un par de ejemplo nuevos. En 1.4 hay otros nuevos (rectas, logaritmos y trigonométricos) y también en 1.5. El capítulo tiene dos páginas más.

Se adelantan a 2.1 la admisión del límite de sucesiones que exigen L'Hôpital (y los ejemplos que antes estaban al final de 2.2, sección que se retoca). En 2.3 abundan los recuadros morados.

Se traen al final de 3.2 los límites importantes de funciones que antes estaban en 4.5 (pueden ser utilizados ya en el primer parcial). Se amplian los ejemplos polinomios (algunos en morado). Hay un nuevo dibujo de gráfica (ahora en 3.3) que sustituye a otra que se va al método de Newton (3.5, con otro ejemplo más). Este capítulo también crece en dos páginas (en parte para escribir cosas que no se dirán en clase).

Alguna serie nueva en 4.1, aunque la de potencias y otras que estaban en problemas se van a 4.3 (aumenta en una página). Ejemplo nuevo en 4.4 e insistencia en las funciones analíticas. Reordenada 4.5 y más ejemplos de límites, gráficas y sucesiones (otra página más). 4.6, todo en morado.

Retoques en 5.2. Nueva página con ejemplos variados de primitivas en 5.3. Pocos cambios en el resto.

Sustituyen a algunos de los 140 problemas los de exámenes del 11-12. Los adicionales incluyen además los de controles de ese curso (ahora son 215 y sus soluciones se han escrito en **LATEX**).

versión 2011: Misma teoría. Pocos ejemplos nuevos (en gráficas e integrales). Lo habitual en problemas.

versión 2010: Pocos cambios en teoría (ejemplos nuevos y reordenaciones de secciones) y alguno más en problemas, por la inclusión de los de exámenes del curso anterior y el traslado de otros a ‘adicionales’.

versión 2009: Primera versión de los ‘**APUNTES DE MATEMÁTICAS**’, incluyendo algunos nuevos temas de repaso (en el capítulo 1) y, sobre todo, bastantes problemas elementales nuevos.

La sección 1.1 sobre conjuntos y lenguaje matemático no existía. En 1.2 se incluyen las progresiones y se extiende el binomio de Newton. Se tratan ahora algo las raíces de polinomios en 1.3. El repaso de funciones elementales pasa de ser 2.1 a ser 1.4 y la aritmética compleja viaja desde 6.1 a 1.5.

El capítulo 2 (sin 2.1) sigue igual. El 3 presenta bastantes ejemplos nuevos, se reordena 3.2 y queda más reducida 3.3. Al 4 sólo se le añade la información sobre series complejas de 4.6 (que viene de 6.2; ya no hay capítulo 6). 5 cambia poco: las primitivas elementales viajan de 5.3 a 5.2 y se reordena 5.5.

De 100 problemas básicos se pasa a 140, recogiendo muchos problemas del grupo cero y los adicionales más elementales, para empezar la asignatura con repasos de bachillerato y a un ritmo más lento.

Se incluyen recuadros de color para separar los ejemplos o los comentarios del resto del texto. También marcan las cabeceras de secciones o subsecciones que aparecen sólo a título informativo.

versión 2006 → 2009: Muy parecida a la 2006, con correcciones de estilo para ajustarse a nuevos márgenes y tamaños. En esencia es la elaborada para <http://alqua.org/> en 2008 con el fin de servir de base a un ‘libro libre’. En esa página se pueden conseguir los ficheros **LATEX**y los dibujos de esa versión.

versión 2006: La letra pasa a ser Times (comando `\usepackage{mathptmx}` en L^AT_EX), lo que lleva a unos cuantos ajustes estéticos, de orden o de lenguaje para ajustar espacios.

Las sucesiones de Cauchy se van al final de 2.2 (para aclarar que son secundarias en el temario del curso). Por la misma razón, Trapecios y Simpson son adelantadas por la integración de series en 5.5.

Las sucesiones de límite no justificado (como $\sqrt[n]{n}$) se retrasan a 2.3 (más cerca del L'Hôpital, que pasa a ser demostrado (sin ser utilizado) en 3.2). Se reordena la sección 4.5 de los límites indeterminados.

Se retoca un poco la sección 3.3 (la parte de los polinomios de tercer y cuarto orden).

Lo de siempre en problemas: se incluyen de los exámenes del 2005-06 en los 100 comunes, se cambia de sitio alguno y otros pasan a ser problemas adicionales (que de año en año van creciendo).

versión 2005: Sólo se hace alguna corrección estética y de erratas a la teoría y, como todos los años, se cambian algo los problemas, tanto los comunes como los adicionales.

versión 2004: Con los mismos temas que las anteriores, pero algunos organizados de forma diferente.

Si en la 2003 y anteriores el capítulo 1 (además de repasar los números y sus propiedades) contenía las sucesiones y las series numéricas, en ésta se acercan estas series a las de funciones, potencias y Taylor.

Las sucesiones se trasladan a la sección 2.2, con el fin de repasar antes el concepto de función y las propiedades de senos, cosenos, exponenciales, ... [Creo que el límite de sucesiones (definición rigurosa de las difíciles de entender) se debe dar antes que el ligeramente más complicado límite de funciones].

El 4 pasa a comenzar con las series numéricas, luego trata las sucesiones y series de funciones en general, y a continuación las de potencias. Los polinomios de Taylor se juntan en 4.4 a las series de Taylor.

El capítulo 3 permanece tal como estaba. El 5 sigue casi, casi igual (simplemente las longitudes adelantan a los volúmenes en 5.6) y el 6 tampoco varía (salvo que la i pasa a ser i).

Como cada año, se corrigen erratas (y probablemente se crean otras), se añaden explicaciones a la teoría (en parte necesarias por el nuevo orden de temas) y se elaboran nuevos ejemplos (o se cambian de sitio).

Los problemas se organizan según el nuevo orden de la teoría. Los comunes pasan de 117 a 100, a pesar de incluir alguno de examen. Los adicionales recogen, como siempre, los retirados de los de comunes.

versión 2003: Primera versión escrita a L^AT_EX de los '**apuntes de Cálculo I**', con el mismo orden en los temas que las anteriores a ordenador (y los viejos apuntes a mano de los años 80), aunque añadiendo diversas explicaciones a la teoría y nuevos ejemplos y problemas.

1. Preliminares

1.1. Conjuntos. Lenguaje matemático

El significado de **conjunto** es intuitivo: una clase o colección de objetos (**elementos**) tal que se pueda distinguir perfectamente si un elemento pertenece o no al conjunto. Los conjuntos se precisan a veces enunciando una propiedad común a sus elementos y sólo a ellos y otras enumerando esos elementos (entre llaves). Por ejemplo, podemos describir de estas tres formas:

$$V \equiv \{x : x \text{ es una vocal del alfabeto latino}\} = \{a, e, i, o, u\} = \{i, a, o, e, e, u, o, e\}$$

[‘ \equiv ’ se usa a menudo en matemáticas para definir; ‘ $:$ ’ (y también ‘ $/$ ’) se lee ‘tal que’ o ‘tales que’; otro par de símbolos matemáticos que aparecerán constantemente son \forall (para todo) y \exists (existe)].

Que un elemento **pertenece** a un conjunto se representa con el símbolo \in y que no pertenece con el \notin . Así, por ejemplo, $u \in V$ y $\tilde{n} \notin V$.

Dados dos conjuntos A y B se dice que A **está contenido** en B o que A es **subconjunto** de B (y se representa por $A \subset B$ ó $B \supset A$), si todo elemento de A está también en B . Según esto,

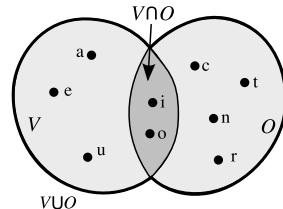
$$V \subset E \equiv \{\text{letras de la palabra ‘enunciado’}\} = \{a, e, i, o, u, c, d, n\}, \\ \text{pero no está contenido } (V \not\subset O) \text{ en } O \equiv \{\text{letras de ‘ornitorrinco’}\}.$$

[Que conste que todo conjunto está contenido en sí mismo: $A \subset A$].

Unión de A y B es el conjunto $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}$ (formado por todos los elementos de A y B , comunes o no) y su **intersección** $A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$ (elementos comunes a ambos). Análogamente se definen unión e intersección de más de dos conjuntos. La **diferencia** de conjuntos $B - A$ (o bien $B \setminus A$) la forman los elementos de B que no están en A . Por ejemplo:

$$V \cup E = E, V \cap E = V, V \cup O = \{n, e, u, r, o, t, i, c, a\}, \\ V \cap O = \{i, o\}, E - V = \{c, d, n\}.$$

Muchas veces se representan los conjuntos utilizando ‘diagramas de Venn’, recintos cerrados cuyos elementos son indicados por puntos. A la derecha están esquematizados V , O , $V \cup O$ y $V \cap O$.



Observemos que el significado de ‘o’ en matemáticas (que a veces se representa por ‘ \vee ’; en vez de ‘y’ se puede poner ‘ \wedge ’) siempre tiene un significado no excluyente como en la definición de \cup . Si se quiere utilizar un ‘o’ excluyente se debe escribir ‘o bien ... o bien ...’.

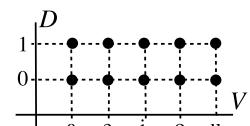
Se llama **conjunto vacío** \emptyset al que no tiene ningún elemento. Si $A \cap B = \emptyset$, es decir, si no hay elementos comunes a A y B se dice que A y B son **disjuntos**, como lo son V y $D \equiv \{0, 1\}$.

El **producto** $A \times B$ de dos conjuntos A y B está constituido por todos los posibles **pares ordenados** (a, b) que se pueden formar con un primer elemento de A y otro segundo de B :

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

[No es lo mismo el par ordenado (a, b) , en general distinto de (b, a) , que el conjunto $\{a, b\} = \{b, a\}$].

$$V \times D = \{(a, 0), (e, 0), (i, 0), (o, 0), (u, 0), (a, 1), (e, 1), (i, 1), (o, 1), (u, 1)\}.$$



Una **función** f entre A y B es una regla que asigna a cada elemento $a \in A$ un **único** elemento $b = f(a) \in B$ (**imagen** de a por f). Algunas veces (otras no) las funciones se pueden describir con palabras o fórmulas, pero es claro que f queda fijada si listamos todos los posibles (a, b) , con lo que una definición más teórica (y más precisa) es:

$$\begin{array}{l} f: A \rightarrow B \\ a \rightarrow b = f(a) \end{array}$$

Una **función** f es un conjunto de pares ordenados $\subset A \times B$
que no contiene dos distintos con el mismo primer elemento.

Por ejemplo, $g \equiv \{(a, 0), (a, 1), (e, 1), (i, 1), (o, 1), (u, 1)\}$ no es función de V en D ,
pero sí lo es $h \equiv \{(a, 1), (e, 1), (i, 0), (o, 1), (u, 0)\}$ $[g(v) = \begin{cases} 1 & \text{si la vocal } v \text{ es fuerte} \\ 0 & \text{si la vocal } v \text{ es débil} \end{cases}]$.
Sí es función de D en V : $k \equiv \{(0, o), (1, i)\}$.

f se dice **inyectiva** si no hay elementos distintos de A que tengan la misma imagen.

f es **sobreyectiva** (o suprayectiva) si cada elemento de B es imagen de algún elemento de A .

f es **biyectiva** (o es una biyección) si es a la vez inyectiva y sobreyectiva, o lo que es lo mismo,
si a cada elemento $a \in A$ le corresponde un único elemento $b \in B$ y viceversa.

Si f es biyectiva, existe su **función inversa** f^{-1} que hace corresponder a
cada $b \in B$ el único a del que proviene. [Si no es inyectiva, o sea, si hay
 $a \neq a^*$ con $f(a) = f(a^*) = b$, no podemos asignar un único a al b].

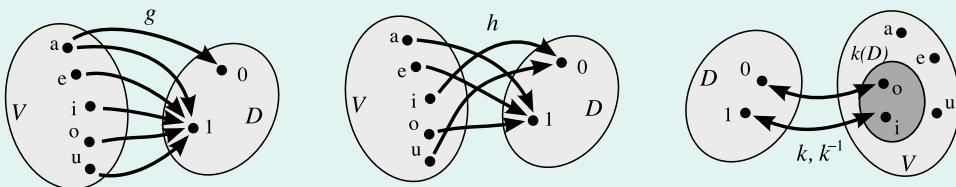
$$\begin{array}{l} f^{-1}: B \rightarrow A \\ b \rightarrow a \end{array}$$

Cuando f es simplemente inyectiva, también podemos definir su inversa f^{-1} , pero en este caso
la biyección se da entre A y $f(A) \equiv \{f(a) : a \in A\} \subset B$.

h no es inyectiva: por ejemplo, a, e, o tienen las tres la misma imagen 1. Sí es sobreyectiva.

k es inyectiva y no sobreyectiva. No es biyección entre D y V , pero sí lo es entre D y $k(D)$,
con lo que podemos hablar de su inversa $k^{-1} = \{(0, 0), (1, 1)\}$.

Representado mediante diagramas de Venn, f es función si no sale más de una flecha de cada punto de A , es inyectiva si a cada punto de B llega a lo más una flecha y es sobreyectiva si a cada punto de B llega alguna flecha.



Para dos conjuntos finitos está claro que si hay una biyección entre ellos tienen el mismo número de elementos. Esta es la idea para hablar en general del ‘número de elementos’ (aunque sean infinitos) de un conjunto. Dos conjuntos tienen el mismo ‘cardinal’ si se puede dar una biyección entre ellos. Según esto (aunque parezca sorprendente), los números naturales $\{1, 2, 3, \dots\}$ y los enteros $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ tienen el mismo cardinal, pues:

$$f = \{(1, 0), (2, 1), (3, -1), (4, 2), (5, -2), \dots\} \text{ es una biyección.}$$

Una **operación** (o ‘ley de composición interna’) en un conjunto A es una regla que asigna a cada par de elementos de A otro elemento del propio A (es, pues, una función de $A \times A$ en A). Son operaciones, por ejemplo, la suma y producto de números naturales. O la unión, intersección y diferencia de conjuntos en el conjunto de los conjuntos.

[Tras definir una operación en un conjunto suele interesar conocer sus propiedades. Por ejemplo, \cup y \cap cumplen la comutativa $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$, la asociativa $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ y $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, se da la distributiva de la unión respecto de la intersección y viceversa $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ y $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, el vacío viene a cumplir el papel del 0 en los números: $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, ...].

Demos ahora unas mínimas ideas sobre lógica y proposiciones (tal vez innecesarias, porque las matemáticas no hacen otra cosa que formalizar el sentido común).

Una **proposición** p (o enunciado, o afirmación,...) es una frase (gramatical o matemática) cuya verdad o falsedad puede ser comprobada: ‘Hypatia nació en Logroño’, ‘5 es menor que 7’, ...

La **implicación** ‘ $p \Rightarrow q$ ’ (‘ p implica q ’, ‘si p entonces q ’, ‘ p es condición suficiente para q ’), significa que si p es verdadera podemos estar seguros que q también es verdad.

Por ejemplo, es correcta la siguiente implicación para números naturales:

$$n \text{ termina en } 5 \Rightarrow n \text{ múltiplo de } 5 \text{ ('si } n \text{ termina en } 5 \text{ entonces } n \text{ es múltiplo de } 5\text').$$

Es evidente que **una afirmación equivalente a** ‘ $p \Rightarrow q$ ’ **es** ‘ $(\text{no } q) \Rightarrow (\text{no } p)$ ’ .

(una es cierta si y sólo si lo es la otra; demostrada una de ellas, la otra queda demostrada).

Así es equivalente a la implicación de arriba (tan cierta como ella):

$$n \text{ no múltiplo de } 5 \Rightarrow n \text{ no termina en } 5.$$

Pero es otra afirmación totalmente distinta la ‘ $q \Rightarrow p$ ’ , o su equivalente ‘ $(\text{no } p) \Rightarrow (\text{no } q)$ ’ :

$$n \text{ múltiplo de } 5 \Rightarrow n \text{ termina en } 5,$$

que es falsa (n podría acabar en 0), como lo es ‘ n no termina en 5 $\Rightarrow n$ no múltiplo de 5’ .

Que p y q son siempre ciertas a la vez o falsas a la vez se representa con la **doble implicación** ‘ $p \Leftrightarrow q$ ’ (‘ p si y sólo si q ’ , ‘ p es condición necesaria y suficiente para q ’).

Para probar una doble implicación debemos comprobar dos implicaciones: ‘ $p \Rightarrow q$ ’ y ‘ $q \Rightarrow p$ ’ (o también podríamos, si es más fácil, comprobar ‘ $p \Rightarrow q$ ’ y ‘ $(\text{no } p) \Rightarrow (\text{no } q)$ ’).

Una doble implicación verdadera, por ejemplo, es:

$$n \text{ impar} \Leftrightarrow n^2 \text{ impar} \text{ (equivalente a 'n par} \Leftrightarrow n^2 \text{ par').}$$

[Parece clara, pero la demostramos. Para ello, probamos ‘ n impar $\Rightarrow n^2$ impar’ y ‘ n par $\Rightarrow n^2$ par’ :

$$n \text{ impar} \Leftrightarrow n=2k+1 \text{ con } k \text{ natural} \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow n^2 \text{ impar.}$$

$$n \text{ par} \Leftrightarrow n=2k \text{ con } k \text{ natural} \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \Rightarrow n^2 \text{ par}].$$

Demostrar una implicación puede exigir bastante trabajo: basarse en definiciones y resultados ya probados, utilizar argumentos lógicos, efectuar diferentes operaciones matemáticas... pero **para demostrar la falsedad de una implicación** ‘ $p \Rightarrow q$ ’ **basta encontrar un contraejemplo** (algo que cumpla p pero que no cumpla q). Por ejemplo, basta observar que 10 es múltiplo de 5 para probar la falsedad de ‘ n múltiplo de 5 $\Rightarrow n$ termina en 5’ .

Acabamos la sección con una breve descripción de cómo se construyen las teorías matemáticas.

Se parte de unos **axiomas** (o postulados) que se consideran evidentes y no se demuestran. Han de ser completos (el resto de la teoría se debe poder deducir de ellos), no ser contradictorios entre sí y deben ser independientes (ninguno de ellos se debe poder deducir de los demás).

De esos axiomas, utilizando razonamientos lógicos y matemáticos se van deduciendo progresivamente el resto de resultados: los **teoremas** (en libros de matemáticas se encuentran otras palabras, no usadas en estos apuntes, como ‘proposición’ o ‘lema’, teoremas de distinta complejidad).

La historia de la geometría ilustra muy bien la dificultad de elegir los axiomas. El postulado 5 de Euclides ‘por todo punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela a una recta dada’ (que muchas veces se intentó deducir de sus otros 4 postulados) lleva a una geometría diferente de las ‘no euclídeas’ que sustituyen ese postulado (y que acabaron siendo tan útiles en física).

1.2. N, Z y Q. mcd y mcm. Progresiones. Binomio de Newton

Los números que básicamente vamos a tratar en estos apuntes son los reales **R**. Pero antes de precisar qué son los reales vamos a hacer un breve repaso de los números más sencillos.

Llamaremos: **N**= $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ al conjunto de los números **naturales** (sin incluir el 0),

Z= $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ al de los **enteros**, y

Q= $\{p/q, p, q \text{ enteros}, q \neq 0\}$ al conjunto de los **racionales**.

La suma y el producto de dos números naturales cualesquiera son también naturales, pero su diferencia puede no serlo. Sí es un entero la diferencia de dos enteros. El cociente de racionales es racional, pero no es entero, en general, el de dos enteros. Los tres conjuntos son conjuntos ordenados por la relación “>” (ser mayor que). Con palabras más matemáticas, y refiriéndonos al mayor de los tres conjuntos, se dice que **Q** es un **cuerpo ordenado**, es decir, que satisface las siguientes propiedades ($a, b, c \in Q$):

Propiedades de cuerpo: Existen dos operaciones “+” y “·” que cumplen:

1) + y · son asociativas y conmutativas:

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a + b = b + a, \\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

2) Se cumple la propiedad distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

3) Hay elementos neutros 0 respecto a + y 1 respecto a · :

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a \quad \forall a.$$

4) Existen elementos inversos respecto a + y · :

$$\forall a \exists -a \text{ tal que } a + (-a) = 0, \quad \forall a \neq 0 \exists a^{-1} \text{ tal que } a \cdot a^{-1} = 1.$$

Propiedades de orden: Existe una relación “>” que satisface:

5) Dado cualquier a , o bien $a > 0$, o bien $-a > 0$, o bien $a = 0$.

6) Si $a, b > 0$ también $a+b > 0$, $a \cdot b > 0$.

N y **Z** no son un cuerpo: **N** no posee inverso siquiera respecto de la suma y **Z** no lo tiene respecto del producto. El conjunto **R** de los reales que trataremos en la próxima sección poseerá todas estas propiedades de cuerpo ordenado y además otra (el llamado ‘axioma del extremo superior’). El conjunto de los complejos **C** que aparecerá en 1.5 será cuerpo, pero no estará ordenado.

A partir de las propiedades anteriores se pueden definir las otras conocidas operaciones básicas (diferencia, cociente y potencias) y desigualdades:

$$a - b = a + (-b); \quad \text{si } b \neq 0, \quad a/b = ab^{-1} \quad (\text{el } \cdot \text{ no suele escribirse}).$$

$$\text{Si } n \in \mathbf{N}, \quad a^n = a \cdot \dots \cdot a, \quad n \text{ veces.}$$

$$b > a \text{ si } b - a > 0; \quad b < a \text{ si } a > b; \quad b \geq a \text{ si } b > a \text{ ó } b = a; \quad b \leq a \text{ si } a \geq b.$$

Y utilizando exclusivamente las propiedades recuadradas se podrían probar las otras muchas que se utilizan resolviendo ecuaciones, trabajando con desigualdades,... (son entonces ‘teoremas’ que se deducen de esas propiedades básicas). Probemos, por ejemplo, que $a < b \Leftrightarrow a+c < b+c \quad \forall c$:

$$a < b \Leftrightarrow b - a = b - a + 0 = b - a + c + (-c) = (b+c) - (a+c) > 0 \Leftrightarrow a+c < b+c.$$

‘Demostremos’ otro resultado de desigualdades $a < b, c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$, que a veces se olvida:

$$(b-a) > 0, \quad (-c) > 0 \Rightarrow (b+(-a))(-c) = b(-c) + (-a)(-c) = \overset{\uparrow}{-bc} + ac > 0 \Leftrightarrow ac > bc. \\ [b(-c) = -bc \text{ pues } 0 = b(c+(-c)) = bc + b(-c)]$$

[No volveremos a operar tan despacio, se trataba sólo de mostrar que bastaba partir de 1), ..., 6)].

Repasemos otras definiciones y propiedades relacionadas con naturales, enteros y racionales:

Demostraciones por inducción

Supongamos que queremos demostrar una afirmación, que llamaremos $P(n)$, que depende de un número natural n . Demostrar $P(n)$ por inducción consiste en:

- i) comprobar $P(1)$ (es decir, que la afirmación es cierta si $n = 1$)
- ii) probar que $P(n) \Rightarrow P(n+1) \forall n$ (supuesta cierta para n se demuestra para $n+1$)

Hecho esto, como $P(1)$ es cierta, por ii) también lo es $P(2)$. Y por tanto $P(3)$. Y $P(4) \dots$

Ej. Probemos por inducción que $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ [recordemos que el primer símbolo se lee ‘sumatorio de k desde 1 hasta n ’]

$P(1)$ es cierta: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Probemos ahora $P(n+1)$ suponiendo cierta $P(n)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = [\text{estamos suponiendo cierta } P(n)] = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Dados dos naturales n y d se dice que n es **múltiplo** de d (o que d es **divisor** de n) si n/d es también un número natural. Desde luego, todo n tiene al menos dos divisores: el 1 y el propio n . Si estos son sus únicos divisores dice que n es **primo**. Un conjunto de enteros n_1, \dots, n_k admite siempre un divisor común a todos: el 1. Se llama **máximo común divisor** al mayor natural que divide a todos ellos (y lo denotaremos por $\text{mcd}[n_1, \dots, n_k]$). Por otra parte, dados los n_1, \dots, n_k existen naturales que son múltiplos de todos ellos (por ejemplo el producto de todos). Se llama **mínimo común múltiplo** ($\text{mcm}[n_1, \dots, n_k]$) al menor número con esta propiedad.

Hallar el mcd y el mcm de unos naturales es fácil una vez calculados todos los divisores primos de cada uno, lo que puede ser muy largo si los números son muy gordos.

[Para hallar estos divisores conviene conocer las reglas de divisibilidad por números sencillos: recordamos que un entero es divisible por 3 (y por 9) si y sólo si lo es la suma de sus cifras; divisible por 4 (por 8) si lo son sus dos (tres) últimas cifras; por 5 si acaba en 0 o en 5; por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan un lugar par y la suma de las que ocupan lugar impar es un múltiplo de 11 (incluido el 0)].

Otra forma de hallar el $\text{mcd}[m, n]$ es utilizar el **algoritmo de Euclides**:

Sea $m > n$. Dividamos m entre n y llamemos q_1 al cociente y r_1 al resto:
 $m = q_1n + r_1$. Dividamos ahora n entre r_1 : $n = q_2r_1 + r_2$. A continuación r_1 entre r_2 : $r_1 = q_3r_2 + r_3$. Luego r_2 entre $r_3 \dots$, y proseguimos dividiendo de esta forma hasta que el resto sea 0. El $\text{mcd}[m, n]$ es entonces **el último resto no nulo**.

Calculado el mcd, se puede hallar el mcm utilizando que: $\text{mcm}[m, n] = \frac{m \cdot n}{\text{mcd}[m, n]}$.

Ej. Sean 2340 y 6798.

Como $2340 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$ y $6798 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 103$, $\text{mcd} = 6$ y $\text{mcm} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 103 = 2651220$.

Euclides: $6798 = 2 \cdot 2340 + 2118$, $2340 = 1 \cdot 2118 + 222$, $2118 = 9 \cdot 222 + 120$, $222 = 1 \cdot 120 + 102$,

$$120 = 1 \cdot 102 + 18, 102 = 5 \cdot 18 + 12, 18 = 1 \cdot 12 + 6, 12 = 2 \cdot 6.$$

$$\Rightarrow \text{mcd} = 6, \text{mcm} = \frac{2340 \cdot 6798}{6} = 2651220.$$

[Para hallar el $\text{mcd}[n_1, \dots, n_k]$ se puede calcular $m_1 = \text{mcd}[n_1, n_2]$, luego $m_2 = \text{mcd}[m_1, n_3], \dots$].

Progresiones aritméticas

Son un conjunto de números tales que cada uno se obtiene del anterior sumándole una cantidad fija d ('razón' de la progresión). Es decir, si llamamos a_k al término que ocupa el lugar k y son n términos, la progresión es:

$$a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, \dots, a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Es fácil ver (ej. de inducción) que la suma de estos n términos es: $S = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{a_1 + a_n}{2}n$.

Progresiones geométricas

Cada número se obtiene aquí del anterior multiplicando por la razón fija r :

$$a_1, a_2 = a_1 r, a_3 = a_1 r^2, \dots, a_n = a_1 r^{n-1}.$$

Su suma es $S = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$, pues es $1+r+\dots+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$, como se ve por inducción:

cierto para 1 : $1 = \frac{1-r}{1-r}$; cierto si $n \Rightarrow 1+\dots+r^{n-1}+r^n = \frac{1-r^n}{1-r}+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, cierto si $n+1$.

$$\text{Ej. } 1+4+7+\dots+301 = \frac{1+301}{2} 101 = 15251. \quad 1+3+9+\dots+6561 = 1 \frac{1-3^9}{1-3} = \frac{1-6561 \cdot 3}{1-3} = 9841.$$

Factoriales, números combinatorios y binomio de Newton

Para $n \in \mathbb{N}$ se define **factorial de n** como: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, y además $0! = 1$.

Si k es otro natural con $0 \leq k \leq n$, el **coeficiente binomial o número combinatorio** es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$\left[\binom{n}{k}$ se lee ' n sobre k '; obsérvese que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, que $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, y que $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \right].$

[$n!$ representa el número de formas distintas en que se puede ordenar un conjunto de n elementos y el número combinatorio (que siempre es un número natural) es el número de formas distintas en que se pueden escoger grupos distintos de k elementos (sin importar su orden) entre los n de un conjunto].

La fórmula más famosa en que aparecen estos números es la de **binomio de Newton**:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Demostrémosla por inducción. Es claramente cierta si $n=1$: $(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1$.

Suponiendo que es cierta para n , probémosla ahora para $n+1$:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)[a^n + \dots + \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1} + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n] \\ &= a^{n+1} + [\binom{n}{1} + \binom{n}{0}] a^n b + \dots + [\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}] a^{n+1-k} b^k + \dots + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k, \end{aligned}$$

pues se cumple: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = n! \frac{(n-k+1)+k}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$.

Los coeficientes binomiales forman las filas del 'triángulo de Tartaglia' (o de Pascal) de la derecha, en el que cada número se obtiene sumando los dos superiores (eso asegura la propiedad recién probada). Para n pequeño mejor acudimos al triángulo, pero para n grande serán preferibles las fórmulas de arriba (sobre todo, la segunda).

1	1
1	2
1	3
1	4
1	5
1	10
1	10
1	5
1	1

$$\text{Ej. } (1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6, \text{ pues } \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 3 \cdot 5 = \binom{6}{4}, \quad \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4.$$

[Estábamos a sólo una fila de escribirlo con el triángulo de Tartaglia].

Existen infinitos números racionales e irracionales

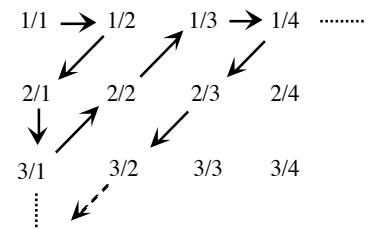
Entre dos racionales $p > q$, por cercanos que estén entre sí, existen infinitos racionales. En efecto, $r_1 = (q+p)/2$ es otro racional que se halla entre los dos. Otros infinitos, por ejemplo, son $r_2 = (q+r_1)/2$, $r_3 = (q+r_2)/2$, ... Recordamos que una forma de precisar de forma única un racional es dar su expresión decimal, que o bien tiene sólo un número finito de decimales o bien tiene además un número finito de decimales que se repiten periódicamente ($7/8 = 0.875$ es un ejemplo de la primera situación y $8/7 = 1.142857142857\ldots$ lo es de la segunda). Pensando en la expresión decimal vuelve a estar muy claro que entre dos racionales existen otros infinitos y que podemos encontrar racionales tan próximos como queramos a uno dado.

Sin embargo, a pesar de estar tan juntos los racionales, aparecen de forma natural (ya desde los griegos) otros números que no son racionales (es decir, **irracionales**; su expresión decimal tendrá infinitos decimales no repetidos periódicamente). Por ejemplo, el teorema de Pitágoras asegura que la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 mide $\sqrt{2}$ unidades de longitud. Es fácil probar que $\sqrt{2}$ no es racional (demostrar que otros números famosos como π ó e son irracionales es bastante más complicado). Para hacerlo, vamos a suponer que lo es y llegaremos a una contradicción (es lo que se llama demostración por reducción al absurdo).

Como se sabe, un racional puede ser expresado de infinitas maneras diferentes como fracción p/q . De ellas, se llama irreducible a la que tiene el denominador más pequeño posible, o sea, aquella con p y q sin divisores comunes. Supongamos que $\sqrt{2} = p/q$ fracción irreducible. Entonces $p^2 = 2q^2$. Así p^2 es par, con lo que también debe serlo p (los cuadrados de pares son pares e impares los de los impares) y por tanto es de la forma $p = 2m$. Así pues, $2m^2 = q^2$ y q también es par, en contradicción con la suposición de que p/q fuese irreducible.

Observemos que la suma $z = p+x$ con p racional y x irracional es necesariamente otro número irracional (si fuese z racional, sería $x = z - p$ también racional). Y lo mismo sucede, si el racional $p \neq 0$, con su producto (se prueba casi igual; que conste que suma y producto de irracionales puede ser racional, por ejemplo, $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ y $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$). Conocemos ya, pues, infinitos irracionales: todos los de la forma $p + q\sqrt{2}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$. Con esto podemos ya ver que también entre dos racionales cualesquiera, por muy próximos que estén entre sí, existen infinitos irracionales (por ejemplo, si $p > q$ son racionales, $q + (p-q)\sqrt{2}/n$, con $n = 2, 3, \dots$, son infinitos irracionales y es fácil ver que están entre uno y otro). También entre dos irracionales hay infinitos racionales e irracionales (parece bastante claro con la expresión decimal). O entre un racional y un irracional.

Aunque existan infinitos racionales e infinitos irracionales, el número de irracionales es un infinito ‘más gordo’ que el de los racionales. El número de racionales es el mismo que el de enteros (o el de naturales, que también es el mismo), ya que se puede hacer corresponder a cada entero un racional y viceversa (matemáticamente se dice que \mathbf{Q} es numerable) como sugiere el esquema de la derecha. Los irracionales (y por tanto los reales), sin embargo, no se pueden poner en biyección con \mathbf{N} (pero esto es algo más difícil probarlo).



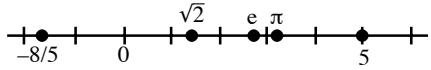
1.3. El conjunto \mathbf{R} . Desigualdades. Valor absoluto

¿Qué son exactamente los números reales? Sabemos que $5, -\frac{8}{5}, \sqrt{2}, \pi, e, \dots$ lo son, que los tres últimos no se pueden poner como una fracción, que tienen infinitos decimales no repetidos... Podríamos usar una idea intuitiva, pero en matemáticas a veces la intuición engaña. Conviene dar una definición rigurosa del **conjunto \mathbf{R} de los números reales**. Lo mas serio (pero muy largo) sería construir \mathbf{R} a partir de \mathbf{Q} . Para ahorrar tiempo, definiremos \mathbf{R} como un conjunto de objetos básicos que cumplen unas propiedades que tomaremos como axiomas (si se construyese \mathbf{R} las propiedades serían teoremas que habría que demostrar). Así pues, definimos a partir de las propiedades vistas para \mathbf{Q} :

Axiomas del conjunto \mathbf{R} \mathbf{R} es un conjunto que posee las propiedades 1), ..., 6) de **cuerpo ordenado** y además satisface el **axioma del extremo superior**.

El último axioma (que veremos algo más adelante, pues exige alguna definición) distingue \mathbf{R} de \mathbf{Q} .

Gracias al orden de \mathbf{R} tiene sentido la representación usual de \mathbf{R} como una línea recta, asociando a cada número real un punto de la recta. Es tan común que se utilizan indistintamente los términos ‘conjunto de números reales’ y ‘recta real’; ‘número real’ y ‘punto’.



Repasemos (sin probarlas a partir de los axiomas) algunas propiedades de las **desigualdades**:

Teorema:

$a < b \Rightarrow a+c < b+c, a-c < b-c$ $a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc, a/c < b/c$ $a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc, a/c > b/c$ $1 < a \Rightarrow a < a^2; 0 < a < 1 \Rightarrow a > a^2$	$a < b, c < d \Rightarrow a+c < b+d, a-d < b-c$ $a < b, c < d \Rightarrow ac < bd, \text{ si } a, b, c, d > 0$ $a/c < b/d \Leftrightarrow ad < bc, \text{ si } a, b, c, d > 0$ $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}, a^2 < b^2, \sqrt{a} < \sqrt{b}, \text{ si } a, b > 0$
--	---

Todas las desigualdades son válidas sustituyendo los $<$ por \leq (menos los > 0 ó < 0).

[En estos apuntes (y como siempre se hace) \sqrt{a} representará siempre sólo la **raíz positiva** del número $a \geq 0$; el otro número real cuyo cuadrado es ese número a se debe representar por $-\sqrt{a}$].

A cada $x \in \mathbf{R}$ podemos asociar un real positivo $|x|$, **valor absoluto** de x , definido por:

$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

$|x|$ representa la distancia de x al origen
 y $|x-y|$ la distancia de x a y
 (tanto si $y > x$ como si $x > y$).

El primer teorema es inmediato a partir de la definición. Probamos los otros dos:

Teorema: $\sqrt{x^2} = |x|, |x|^2 = x^2, |x| = |-x|, |xy| = |x||y|, -|x| \leq x \leq |x|$.

Teorema: Sea $a > 0 : |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a; |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$.

\Rightarrow si $|x| \leq a \Rightarrow -|x| \geq -a \Rightarrow -a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$.

\Leftarrow sea $-a \leq x \leq a$; si $x \geq 0, |x| = x \leq a$; si $x \leq 0, |x| = -x \leq a$; por tanto, $\forall x, |x| \leq a$.

[con el $<$ se demostraría igual; del teorema se deduce, desde luego, que

$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ó } a \leq x$], pues la afirmación ‘ $p \Leftrightarrow q$ ’ equivale a la ‘(no p) \Leftrightarrow (no q)’]

Teorema: $|x+y| \leq |x| + |y| ; |x| - |y| \leq |x-y| \leq |x| + |y| ; ||x| - |y|| \leq |x-y|$.
(desigualdad triangular)

$$(|x+y|)^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|.$$

$$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y| ; |x-y| = |x+(-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|.$$

$$|x| - |y| \leq |x-y|, |y| - |x| \leq |x-y| \Rightarrow |x| - |y| \geq -|x-y| \Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x-y|.$$

Ej. Probar que si $a, b, c, d > 0$ y $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entonces es $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Encontrar i) un racional y ii) un irracional que sean mayores que $\frac{11}{17}$ y menores que $\frac{9}{13}$.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} &\Leftrightarrow ab+ad < ab+bc \\ \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} &\Leftrightarrow ad+cd < bc+cd\end{aligned}$$

desigualdades ciertas pues sabemos que $ad < bc$ [$\Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$].

i) En particular: $\frac{11}{17} < \frac{11+9}{17+13} = \boxed{\frac{2}{3}} < \frac{9}{13}$. [Otro sería $\frac{1}{2}(\frac{11}{17} + \frac{9}{13})$].

ii) Sumamos al racional $\frac{11}{17}$ un irracional que sea menor que su distancia a $\frac{9}{13}$: $\frac{9}{13} - \frac{11}{17} = \frac{10}{251}$.

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{5\sqrt{2}}{251} < \frac{10}{251} \Rightarrow \frac{11}{17} < \boxed{\frac{11}{17} + \frac{5\sqrt{2}}{251}} < \frac{11}{17} + \frac{10}{251} < \frac{9}{13}.$$

Ej. Calculemos todos los números reales x que cumplen la desigualdad: $\boxed{\frac{3-x^2}{1-x} \leq 3}$.

Nuestra desigualdad equivale a: $\frac{3-x^2}{1-x} - 3 = \frac{3x-x^2}{1-x} = \frac{x(3-x)}{1-x} \leq 0$ [sumar o restar a ambos lados no cambia el signo].

Es $x(3-x) \geq 0$ si $0 \leq x \leq 3$ (ambos factores positivos) y es ≤ 0 si $x \leq 0$ ó $x \geq 3$ (distinto signo). El denominador es positivo si $x \leq 1$ y negativo si $x \geq 1$. Para $x=1$ el cociente no está definido. El cociente será negativo si y sólo si el numerador y el denominador tienen distinto signo.

Por tanto, los x buscados son los representados en el dibujo:



De otra forma: multiplicamos los dos miembros por $1-x$,

pero recordando que **al multiplicar por números negativos las desigualdades se invierten**.

Si $x < 1$, la desigualdad equivale a $3-x^2 \leq 3-3x$, $x(3-x) \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$, en esa región.

Si $x > 1$, cambia la desigualdad: $x(3-x) \leq 0 \Rightarrow 1 < x \leq 3$, en la región tratada ahora.

Ej. Determinemos los x que satisfacen: $\boxed{|\sqrt{x}-2|=x}$.

Si $x < 0$, la raíz no está definida. Desarrollando (para $x \geq 0$) el valor absoluto tenemos:

$$|\sqrt{x}-2| = \begin{cases} \sqrt{x}-2 & \text{si } \sqrt{x} \geq 2, \text{ es decir, si } x \geq 4 \\ 2-\sqrt{x} & \text{si } \sqrt{x} \leq 2, \text{ es decir, si } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

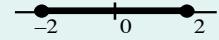
$$\text{Y, por tanto, } |\sqrt{x}-2|=x \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=x+2 & \text{si } x \geq 4 \Rightarrow x^2+3x+4=0 \\ \sqrt{x}=2-x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \end{cases}$$

El primer polinomio de segundo grado no se anula para ningún x real. El segundo para $x=1$ y $x=4$ (ambos en la región $0 \leq x \leq 4$ en que estamos). Pero sólo es válido $x=1$ ($|1-2|=1$). El otro real $x=4$ no cumple la igualdad: $|2-2| \neq 4$ (nos lo hemos inventado al elevar al cuadrado).

Ej. Hallemos los x que cumplen: $\boxed{|x^2-1| \leq 3} \Leftrightarrow -3 \leq x^2-1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x^2 \leq 4$.

Ambas desigualdades se cumplen si y sólo si $|x| \leq 2$ ($\Leftrightarrow x^2 \leq 4$; la otra es cierta $\forall x$). Llegamos a lo mismo discutiendo el valor absoluto (más largo):

$$3 \geq |x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x^2 \geq 1 \\ 1-x^2 & \text{si } x^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 & \text{si } |x| \geq 1 \rightarrow 1 \leq |x| \leq 2 \\ x^2 \geq -2 & \text{si } |x| \leq 1 \rightarrow \text{todo } |x| \leq 1 \end{cases}$$



Ej. Sea $f(x) = \boxed{\frac{2x+6}{x-2}}$. Determinemos los reales x que cumplan: i) $f(x)=1$, ii) $f(x) < 4$. Como $2x+6$ cambia de signo en $x=-3$ es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+6}{x-2}, & x \geq -3, x \neq 2 \\ -\frac{2x+6}{x-2}, & x \leq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x+6}{x-2} = 1 \rightarrow x = -8 (< -3) \\ \frac{2x+6}{2-x} = 1 \rightarrow x = -\frac{4}{3} (> -3) \end{cases} \Rightarrow \text{ningún } x \text{ cumple i).}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} \frac{2x+6}{x-2} < 4 \Leftrightarrow \frac{2(7-x)}{x-2} < 0 \Leftrightarrow x < 2 \text{ ó } x > 7, \text{ y además debe ser } x \geq -3 \\ \frac{2x+6}{2-x} < 4 \Leftrightarrow \frac{2(3x-1)}{2-x} < 0 \rightarrow x < \frac{1}{3} \text{ ó } x > 2, \text{ siendo además } x \leq -3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x < 2 \text{ ó } x > 7}.$$

Ej. Probemos ahora que para todo x se cumple $\boxed{-8 \leq |x-5| - |x+3| \leq 8}$.

Los teoremas aseguran: $|x|-5 \leq |x-5| \leq |x|+5$, $|x|-3 \leq |x+3| \leq |x|+3$. Por tanto:

$$|x-5| - |x+3| \leq |x|+5 - [|x|-3] = 8 \text{ (mayor-menor) y}$$

$$|x-5| - |x+3| \geq |x|-5 - [|x|+3] = -8 \text{ (menor-mayor)}$$

También lo podríamos haber hecho expresando los valores absolutos según los valores de x .

A partir exclusivamente de los axiomas de los números reales se podrían demostrar todas las propiedades que se habrán utilizado en cursos anteriores. Repasamos ahora algunas referentes las **raíces de polinomios** sencillos, empezando por los de segundo grado ($a \neq 0$):

Las raíces de $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ vienen dadas por $x_{\pm} = \frac{1}{2a}[-b \pm \sqrt{\Delta}]$, $\Delta = b^2 - 4ac$. discriminante

El tipo de raíces de P_2 depende del signo del discriminante Δ . Si $\Delta > 0$ tiene dos reales y distintas, si $\Delta = 0$ una raíz doble real y si $\Delta < 0$ dos raíces complejas conjugadas ($p \pm q i$). Conocidas sus raíces x_+ y x_- puede escribirse $P_2(x) = a(x - x_+)(x - x_-)$.

Aunque el **teorema fundamental del álgebra** asegura que **todo polinomio de grado n posee n raíces** (reales o complejas, repetidas o no), otra cosa es cómo hallarlas. Nos gustaría tener fórmulas para el cálculo de las raíces de los $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ de cualquier grado similares a las de P_2 . Hacia 1500 se descubrieron fórmulas para las raíces de los de grado 3 y 4 (no muy útiles en la práctica). Pero en el siglo XIX se probó que es imposible expresar mediante radicales las raíces de los de grado ≥ 5 .

Si encontramos una raíz x^* de un P_n , dividiendo por $(x - x^*)$ reducimos el problema de hallar sus raíces al de hallar las de un P_{n-1} . Por este camino se puede, en pocas ocasiones, calcularlas todas. Si casualmente un P_n con coeficientes enteros tiene raíces enteras, son fáciles de hallar:

Si existe raíz entera de P_n se encuentra entre los divisores del término independiente a_0 .

Si c es raíz entera, entonces $a_0 = -c[a_n c^{n-1} + \dots + a_1]$, con lo que a_0 es múltiplo de c .

Ej. Determinemos todos los reales x que satisfacen: $3x - x^3 < 2$.

Esto equivale a $x^3 - 3x + 2 > 0$. Para precisar el signo del polinomio necesitamos hallar sus raíces. Aunque es complicado en general, es claro aquí que $x=1$ es una. Dividiendo por $(x-1)$ tenemos:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)^2(x+2) > 0.$$

Los x buscados son: $\{x : x > -2 \text{ y } x \neq 1\}$.

1	0	-3	2
1	1	1	-2
1	1	-2	0

[Una forma habitual de tratar las desigualdades es hallar primero los x en que se da la igualdad y luego dar valores concretos en puntos intermedios viendo si se cumple o no. Pero esto, que funciona bien con funciones continuas, tiene el riesgo de olvidar ceros de denominadores y otras discontinuidades].

Dos tipos sencillos de **polinomios de orden 4 con raíces calculables** son:

Las raíces del polinomio bicuadrado $P_4(x) = ax^4 + bx^2 + c$ se hallan haciendo $z = x^2$.

Las raíces de $P_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ se calculan mediante el cambio $z = x + \frac{1}{x}$:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = a\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c - 2a = 0 \rightarrow az^2 + bz + c - 2a = 0.$$

Halladas sus raíces z_{\pm} , basta resolver los dos polinomios de segundo grado: $x^2 - z_{\pm}x + 1 = 0$.

Ej. Hallemos las raíces del polinomio $P_4(x) = x^4 - 2x^2 - 15$ $\xrightarrow{z=x^2} z^2 - 2z - 15 = 0 \rightarrow$

$$z = 1 \pm \sqrt{1+15} = 5, -3 \quad \left[\text{las raíces de } ax^2 + bx + c = 0 \text{ simplificadas son } x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \right].$$

Como $i^2 = -1$ (en 1.5 repasaremos los complejos), las 4 raíces son: $x = \pm\sqrt{5}, \pm i\sqrt{3}$.

Como ocurrió en este ejemplo, es fácil ver que en general **si un polinomio con coeficientes reales tiene raíces complejas, éstas aparecen como parejas $p \pm qi$** .

[Ninguna de las raíces es entera, pero esto lo podíamos saber desde un principio, pues las únicas posibles eran $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$ y ninguna de ellas anula el polinomio. No olvidemos que, en general, no sabremos hallar las raíces de un polinomio de grado ≥ 3 (por ejemplo, no sabemos resolver $x^4 - 2x - 15 = 0$). En la sección 3.3 veremos cómo actuar cuando sea esa la situación].

Para enunciar el **axioma del extremo superior** necesitamos unas definiciones previas:

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice **acotado superiormente (inferiormente)** si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq k$ ($a \geq k$) para todo $a \in A$.

A un real k con esa propiedad se le llama **cota superior (inferior)** de A .

A se dice **acotado** si lo está superior e inferiormente.

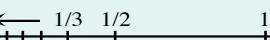
[Es decir, A está acotado si existen k_1 y k_2 tales que $k_1 \leq a \leq k_2$ para todo $a \in A$.

Esto es equivalente a que exista un k tal que $|a| \leq k$ (o sea $-k \leq a \leq k$), $\forall a \in A$].

Ej. $\mathbb{R}_+ \equiv \{x : x \geq 0\}$ no es acotado, pero sí lo está inferiormente (por $-\pi$, por el propio 0 ...).

$A = \{x : 0 \leq x < 7\}$  está acotado

[cotas superiores: $\sqrt{93}$, 7 (la menor), ...; cotas inferiores: -13, 0 (la mayor), ...].

$B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$  también lo está

[cotas superiores: π , 1 (la menor), ...; cotas inferiores: -3, 0 (la mayor), ...].

Extremo superior (o supremo) de A es la menor de sus cotas superiores. Es decir:

$s \in \mathbb{R}$ es el **extremo superior o supremo** de A [$\sup A$] si:

i) s es cota superior de A , ii) si k es cota superior de A entonces $s \leq k$.

[Se define análogo extremo inferior o ínfimo de A [$\inf A$], mayor de las cotas inferiores].

El $\sup A$ puede pertenecer o no a A ; si pertenece se le llama máximo, es decir:

$M \in \mathbb{R}$ es el **máximo** de A [$\max A$] si $M \in A$ y $a \leq M$, $\forall a \in A$ (análogamente, $\min A$).

Ej. \mathbb{Z} , sin cotas superiores ni inferiores, no puede tener ni supremo ni ínfimo.

El mínimo de \mathbb{R}_+ es 0 (y su ínfimo). No tiene supremo (ni máximo).

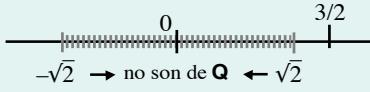
7 es el supremo del A de antes (es la cota superior más pequeña), pero no es máximo, pues $7 \notin A$; 0 es su mínimo (y, por tanto, su ínfimo).

Para B , 1 es el máximo (y supremo) y 0 el ínfimo (no mínimo).

Axioma del extremo superior: Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente posee extremo superior.

[No es difícil demostrar que la afirmación: ‘todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente posee extremo inferior’ es equivalente al axioma].

Este axioma precisa la idea intuitiva de que los números reales ‘llenan del todo’ la recta real. Como ocurría en \mathbb{Q} , entre cualquier par de reales distintos existen infinitos reales (infinitos racionales e infinitos irracionales). Pero a pesar de estar también los elementos de \mathbb{Q} ‘tan cerca unos de otro como queramos’, dejan sin embargo ‘huecos’ entre ellos (los puntos ocupados por los infinitos irracionales). Por eso hay conjuntos acotados en \mathbb{Q} sin supremo. Por ejemplo, $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ es un subconjunto de \mathbb{Q} con cotas superiores racionales ($3/2$, por ejemplo) pero no existe ninguna en \mathbb{Q} que sea la más pequeña. Dada cualquier cota racional siempre puedo dar otra menor (más cercana al irracional $\sqrt{2}$). El mismo conjunto, visto como subconjunto de \mathbb{R} , debe tener supremo (por el axioma del extremo superior): $\sqrt{2}$ lo es.



Los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} van a aparecer un montón de veces en estos apuntes:

Intervalos. Dados $a < b$ se define:

$$\text{intervalo abierto } (a, b) = \{x : a < x < b\} ; \text{ intervalo cerrado } [a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

a y b no pertenecen a y b sí pertenecen

$$\begin{aligned} [a, b) &= \{x : a \leq x < b\} ; \quad (a, \infty) = \{x : a < x\} ; \quad (-\infty, b) = \{x : x < b\} \\ (a, b] &= \{x : a < x \leq b\} ; \quad [a, \infty) = \{x : a \leq x\} ; \quad (-\infty, b] = \{x : x \leq b\} \end{aligned}$$

[∞ no es ningún número real, es sólo notación].

Se llama **entorno** de centro a y radio $r > 0$ a $B(a, r) = \{x : |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$

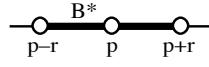
[es decir, al intervalo abierto de longitud $2r$ centrado en a :]

Los intervalos abiertos y cerrados son casos particulares tipos de conjuntos que son importantes en matemáticas más avanzadas: los **conjuntos abiertos y cerrados** que vamos a definir:

Def. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in A$. a es punto **interior** a A si existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$. A es **abierto** si todos sus puntos son interiores.

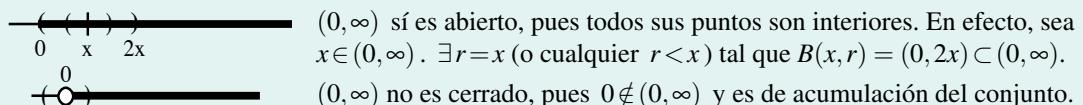
Def. Sea $A \subset \mathbb{R}$. p es **punto de acumulación** de A si en todo entorno de p existen puntos de A distintos de p . [p no tiene que estar en A].

Es decir, si llamamos $B^*(p, r) = B(p, r) - \{p\} = \{x : 0 < |x - p| < r\}$, p es de acumulación de A si para todo $r > 0$ es $A \cap B^*(p, r) \neq \emptyset$.

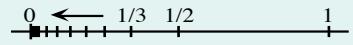


Def. A es **cerrado** si contiene a todos sus puntos de acumulación.

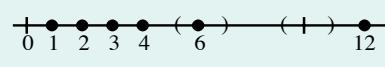
Ej. $[a, b]$ no es abierto porque no todos sus puntos son interiores; hay dos de ellos que no lo son: a y b (los demás sí lo son); por muy pequeño que sea r , $B(a, r) \not\subset [a, b]$ (hay puntos de $B(a, r)$, los de la izquierda de a , que no son de $[a, b]$). Para ver si es cerrado, localicemos sus puntos de acumulación: cualquier $p \notin [a, b]$ no lo es, ya que un entorno suyo suficientemente pequeño no contiene ningún punto del intervalo; todo $p \in [a, b]$ (incluidos a y b) es de acumulación pues cualquier entorno suyo contiene infinitos puntos de $[a, b]$. Como $[a, b]$ contiene a todos sus puntos de acumulación, es cerrado.



$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ tiene un único punto de acumulación (el 0) que no pertenece al conjunto: no es cerrado. Tampoco es abierto, pues tiene puntos no interiores (ninguno lo es).



$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ es divisor de } 12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ es claro que tampoco es abierto (puntos no interiores), pero este conjunto sí es cerrado, pues contiene a todos sus puntos de acumulación (al conjunto \emptyset (no hay ninguno)).



Teorema: A es cerrado si y solo si su complementario $\mathbb{R} - A$ es abierto.

Sea A cerrado: tomemos cualquier $a \in \mathbb{R} - A \Leftrightarrow a \notin A \Rightarrow a$ no es de acumulación de A

$\Rightarrow \exists r$ tal que $B(a, r) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(a, r) \subset \mathbb{R} - A \Rightarrow \mathbb{R} - A$ es abierto.

Sea $\mathbb{R} - A$ abierto. Probemos que A es cerrado probando: ' $a \notin A \Rightarrow a$ no es de ac. de A ': $a \notin A \Rightarrow a \in \mathbb{R} - A$ abierto $\Rightarrow \exists r / B(a, r) \subset \mathbb{R} - A \Rightarrow B(a, r) \cap A = \emptyset \Rightarrow a$ no es de ac.

1.4. Repaso de las funciones elementales

Funciones reales de variable real

Vimos en 1.1 las funciones en general. Casi todas las de este curso serán funciones de \mathbf{R} en \mathbf{R} :

Def. Una **función** real de variable real f es una regla que asigna a cada uno de los números x de un conjunto $D \subset \mathbf{R}$ un único número real $f(x)$. A $D = \text{dom } f$ se le llama **dominio** de f . $y = f(x)$ es el **valor** de f en x . **Imagen o recorrido** de f es $f(D) = \text{im } f \equiv \{f(x) : x \in D\}$.

$$f : D \rightarrow f(D) \\ x \rightarrow y \equiv f(x)$$

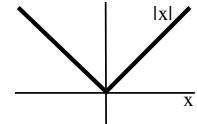
(Si no se precisa más, $\text{dom } f$ será el conjunto de x para los que f tiene sentido).

Muchas veces f admite una expresión algebraica como $f(x) = |x|$, $f(x) = \sin x$, ...), pero otras no será expresable ni con palabras. Por eso dimos en 1.1 una definición más teórica y más precisa:

f es un conjunto de pares ordenados que no contiene dos distintos con el mismo primer elemento.

[Según esta definición, la ‘función $|x|$ ’ sería $\{(x, |x|) : x \in \mathbf{R}\}$].

Geométricamente, f se puede representar en un sistema de coordenadas como un conjunto de puntos (**gráfica** de f) en el plano xy . Así, la gráfica de $f(x) = |x|$ es el conjunto de puntos que forman las semirrectas $y = x$ e $y = -x$ que coinciden en el origen.



Dadas dos funciones f y g se pueden definir otras funciones $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g y $f \circ g$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ para}$$

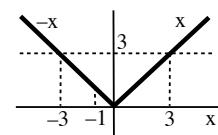
Def. $x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g$. $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ para $x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$.
 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ (**composición** de f y g) para x con $x \in \text{dom } g$ y $g(x) \in \text{dom } f$.

Es inmediato ver que suma y producto de funciones son conmutativas, asociativas y se da la distributiva. La composición es asociativa, pero no conmutativa:

Ej. Si $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$ se tiene que $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 4x + 1 \neq 2x^2 - 1 = (g \circ f)(x)$.

Def. f es **inyectiva** en $A \subset \mathbf{R}$ si $f(x) = f(x^*) \Rightarrow x = x^*$, $\forall x, x^* \in A$
[o lo que es lo mismo, si $x \neq x^* \Rightarrow f(x) \neq f(x^*)$].

Ej. $f(x) = |x|$ no es inyectiva en $A = \mathbf{R}$ (a -3 y 3 , por ejemplo, les corresponde el mismo valor). Sí lo es en $A = [0, \infty)$, o en $A = [-3, -1]$.



La gráfica de una función inyectiva no corta más de una vez cualquier recta horizontal.

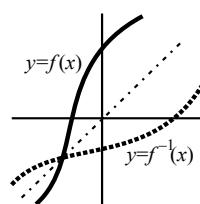
Def. Si $f : x \rightarrow y = f(x)$ es inyectiva en A existe la **función inversa** $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$
 $y = f(x) \rightarrow x = f^{-1}(y)$

En términos de pares ordenados, la función inversa es $f^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in f\}$.

Propiedades inmediatas son:

$$\text{dom } f^{-1} = \text{im } f, \quad \text{im } f^{-1} = \text{dom } f, \quad (f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$$

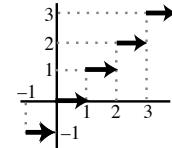
Las gráficas de $y = f(x)$ y de $y = f^{-1}(x)$ son **simétricas respecto a la recta** $y = x$ [pues (x, y) e (y, x) lo son]. Para escribir $y = f^{-1}(x)$ explícitamente (cuando se pueda; en general será imposible) se despeja x en función de y de la expresión $y = f(x)$ y se cambia el nombre a las variables.



Ej. La inversa de $y = x^3 - 5$ es $y = (x+5)^{1/3}$ [pues $x = (y+5)^{1/3}$ al despejar].

Def. f es **estrictamente creciente** en $A \subset \mathbb{R}$ si $\forall x, x^* \in A$ con $x < x^*$ se tiene $f(x) < f(x^*)$. Es **estrictamente decreciente** si $f(x) > f(x^*)$. Es **creciente** si $f(x) \leq f(x^*)$. Es **decreciente** si $f(x) \geq f(x^*)$. Cualquiera de ellas se dice **monótona (estrictamente monótonas)**, las dos primeras).

Ej. $f(x) = [x] = \text{máximo entero menor o igual que } x$ [llamada ‘parte entera de x ’] es creciente en todo \mathbb{R} [no estrictamente].



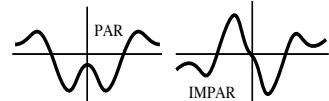
Ej. $f(x) = |x|$ es estrictamente decreciente en $\{x \leq 0\}$ y es estrictamente creciente en $\{x \geq 0\}$.

Teorema: f estrictamente monótona en $A \Rightarrow f$ inyectiva en A [y existe su f^{-1}].

[Si $x \neq x^*$ o bien es $f(x) < f(x^*)$ o bien $f(x) > f(x^*)$].

[Para ver si una f es monótona (y por tanto inyectiva) acudiremos en el futuro a las derivadas. También las necesitaremos para conocer la imagen de funciones que no sean muy sencillas].

Def. f es **par** si $f(-x) = f(x)$ e **ímpar** si $f(-x) = -f(x)$.
 f es de **periodo T** o **T -periódica** si $f(x+T) = f(x) \forall x$.



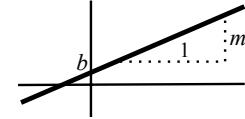
[Su gráfica, respectivamente, es simétrica respecto al eje $x=0$, es simétrica respecto del origen o se repite cada T unidades].

Es muy fácil comprobar que **el producto de dos funciones pares o de dos impares es una función par** y que **el producto de una función par por una impar es impar**.

[Por ejemplo, si f, g impares, $(f \cdot g)(-x) = f(-x)g(-x) = [-f(x)][-g(x)] = f(x)g(x) = (f \cdot g)(x)$].

Rectas

La gráfica de $y = mx + b$ es una recta de **pendiente** m que corta el eje $x=0$ en el punto $y=b$. Las rectas **paralelas** a ella son de la forma $y = mx + C$. La pendiente de las rectas **perpendiculares** es $-\frac{1}{m}$.



La recta que pasa por (x_0, y_0) y tiene pendiente m es $y = y_0 + m(x - x_0)$.

La recta que pasa por (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es $y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$.

- Ej.** i) Dibujar y hallar la ecuación de la recta R que pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 3)$.
ii) Hallar la función inversa $y = f^{-1}(x)$ de la función $y = f(x)$ definida por la recta R .
iii) Hallar la ecuación de la recta paralela a R que pasa por el punto $(1, -1)$.
iv) Hallar la ecuación de la perpendicular a R que pasa por ese mismo punto.

La pendiente de R es $\frac{3}{2}$ y pasa por $(-1, 0)$. Su ecuación:

$$y = \frac{3}{2}(x + 1) = f(x) \text{ (rojo)}$$

Despejando x en función de y , y cambiando nombres:

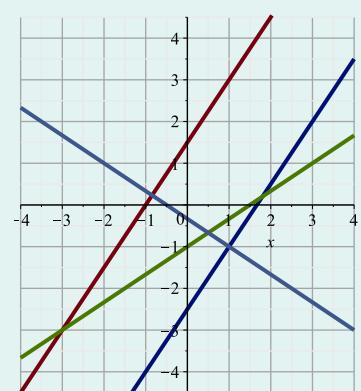
$$x = \frac{2}{3}y - 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2}{3}x - 1 \text{ (verde).}$$

La paralela, con la misma pendiente, pasa por $(1, -1)$:

$$y = -1 + \frac{3}{2}(x - 1) \rightarrow y = \frac{3}{2}(3x - 5) \text{ (azul oscuro).}$$

La perpendicular tiene por pendiente $-\frac{2}{3}$:

$$y = -1 - \frac{2}{3}(x - 1) \rightarrow y = -\frac{1}{3}(2x + 1) \text{ (azul claro).}$$

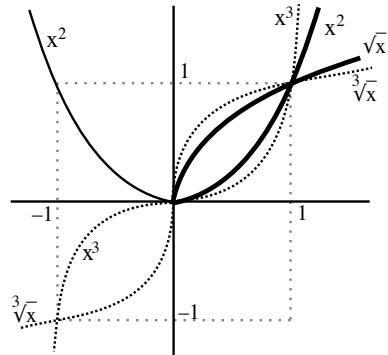
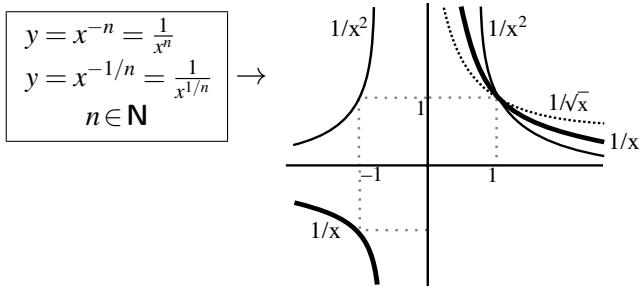


Potencias, raíces, exponenciales y logaritmos

$$y = x^n, \quad y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Si n impar, $y = x^n$ es inyectiva en todo \mathbb{R} y es $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Su inversa $y = x^{1/n}$ está definida en \mathbb{R} y su imagen es \mathbb{R} . Si n par, no es inyectiva en \mathbb{R} . Se llama entonces $y = x^{1/n}$ a la inversa de $y = x^n$ restringida al intervalo $[0, \infty)$, con lo que en ese caso tiene por dominio e imagen $[0, \infty)$.

(La función $y = -x^{1/n}$ para n par, es la inversa de $y = x^n$ restringida a $(-\infty, 0]$).



b^x es fácil de definir si $x \in \mathbb{Q}$ [$b^{m/n} = \sqrt[n]{b^m}$], pero no cuando x es irracional (¿qué es 2^π ?) y por tanto $\log_b x$ tampoco tiene sentido. Definimos primero el logaritmo neperiano así:

$$\log x \equiv \ln x \equiv \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad \text{para } x > 0 \quad [\log x \text{ será siempre neperiano, el decimal } \log_{10} x \text{ no se utilizará}].$$

que es la forma más corta de hacerlo, aunque no podemos aún deducir sus propiedades. Nos creemos que $\log x$ es estrictamente creciente en $\{x > 0\}$ y que su imagen es \mathbb{R} . Y también que:

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b, \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b, \quad \log(a^c) = c \log a, \quad \text{si } a, b > 0.$$

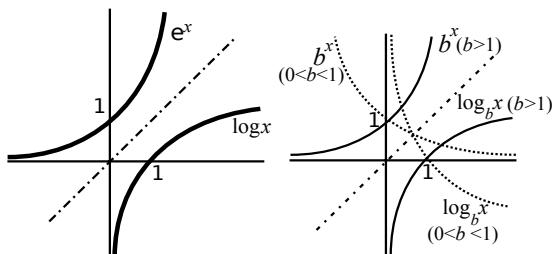
[Observemos que no es cierto $\forall x$, por ejemplo, que $\log x^2 = 2 \log x$, pues si $x < 0$ el segundo miembro carece de sentido; sí es cierto $\forall x \neq 0$ que $\log x^2 = 2 \log |x|$].

A partir de la función logaritmo, definimos:

e^x es la inversa de $\log x$, con lo que su dominio es \mathbb{R} y su imagen $\{x > 0\}$.

$x^b \equiv e^{b \log x}$, $x > 0$; $b^x \equiv e^{x \log b}$, $b > 0, \forall x$;

$\log_b x \equiv \frac{\log x}{\log b}$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$. [O también: inversa de b^x].



De estas definiciones se podrían deducir:

$$b^0 = 1, \quad b^{x+y} = b^x b^y, \quad b^{-x} = \frac{1}{b^x}, \quad (b^x)^y = b^{xy} \quad [b^{xy} \text{ representa siempre } b^{(x^y)}].$$

Las definiciones son naturales, si han de satisfacerse estas propiedades. Así, por ejemplo:

$$x^b = [\text{exponencial inversa del logaritmo}] = (e^{\log x})^b = [\text{pues } (b^x)^y = b^{xy}] = e^{b \log x}$$

[x^b sólo vale para $x > 0$ si b es un real cualquiera, pero si $b = 7$ ó $b = \frac{1}{3}$ está definida $\forall x$].

[Según la definición dada, el número e sería aquel que cumpliese $\log e = \int_1^e \frac{dt}{t} = 1$. Utilizando las propiedades de la integral se podría aproximar su valor, pero esto será mucho más corto hacerlo cuando estudiemos Taylor. Admitimos que aproximadamente es $e \approx 2.7182818\dots$].

Más en general, se define: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log[f(x)]}$, para los x tales que $f(x) > 0$.

Ej. Sea $f(x) = \log(4x - 3\sqrt{x})$. Hallar su dominio D y determinar los reales x que hacen $f(x) = 0$. ¿Tiene D supremo, máximo, ínfimo o mínimo? ¿Es f inyectiva en su dominio?

f está definida si $x \geq 0$ (por la raíz) y si (por el logaritmo) $4x - 3\sqrt{x} > 0 \iff 4\sqrt{x} > 3 \iff x > \frac{9}{16}$.

Por tanto, el dominio de f es $D = (\frac{9}{16}, \infty)$.

$$f(x) = 0 \iff 4x - 3\sqrt{x} = 1 \iff 4t^2 - 3t - 1 = 0, t = \frac{3 \pm \sqrt{16}}{8} = 1, -\frac{1}{4} = \sqrt{x} \Rightarrow x = 1. \quad [\text{que sea } \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \text{ es imposible}].$$

D no tiene supremo, ni máximo, ni mínimo. Su extremo inferior (que no pertenece a D) es $\frac{9}{16}$.

Como se dijo, el estudio de la inyectividad (de la monotonía) es complicado por ahora. El instrumento adecuado para abordarlo es la derivada, pero lo vemos sin ella. Parece ser estrictamente creciente, pues en el argumento del logaritmo x crece más que \sqrt{x} . Lo probamos:

$$\text{Si } \frac{9}{16} \leq x < y \implies \sqrt{x} < \sqrt{y}, 4\sqrt{x} - 3 < 4\sqrt{y} - 3 \implies 4x - 3\sqrt{x} < 4y - 3\sqrt{y} \implies f(x) < f(y). \quad [\log \text{ crece}]$$

Por ser estrictamente creciente en D , es f inyectiva (y posee función inversa).

$$[\text{Las cosas serán más mecánicas con su derivada } f'(x) = \frac{8\sqrt{x}-3}{2x(4\sqrt{x}-3)} > 0 \text{ si } x > \frac{9}{16} \Rightarrow \text{estrictamente creciente}].$$

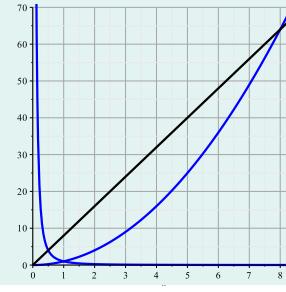
Ej. Hallar todos los números reales x tales que $e^{2|\log x|} < 8x$.

Es $|\log x| = \begin{cases} \log x & \text{si } x \geq 1 \text{ (cuando el logaritmo es positivo)} \\ -\log x & \text{si } 0 < x \leq 1 \text{ (si está definido y es negativo)} \end{cases}$

$$\text{Para } x \geq 1, e^{2|\log x|} = e^{\log x^2} = x^2 < 8x \quad [x > 0] \Rightarrow x < 8 \text{ (y } x \geq 1\text{).}$$

$$\text{Para } 0 < x \leq 1, e^{-2\log x} = e^{\log x^{-2}} = x^{-2} < 8x, x^3 > \frac{1}{8}, x > \frac{1}{2}.$$

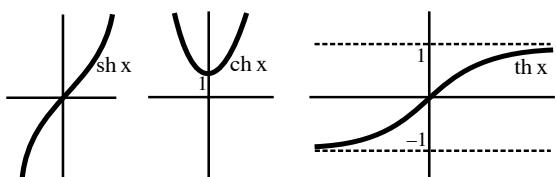
Los x buscados son: $x \in (\frac{1}{2}, 8)$. [Los que sugieren las gráficas].



Las **funciones hiperbólicas** son funciones que se definen a partir de exponentiales y aparecen muchas veces en matemáticas (porque ni e^x ni e^{-x} tienen simetrías y ellas sí la tienen).

Seno, coseno y tangente hiperbólicas son:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \forall x \end{aligned}$$



El dominio de todas es todo \mathbb{R} . La imagen del seno hiperbólico es también todo \mathbb{R} , la del coseno es $[1, \infty)$ y la de la tangente es $(-1, 1)$.

Tienen propiedades similares a las trigonométricas (muy fáciles de comprobar) como:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(-x) &= -\operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \\ \operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

Probemos, por ejemplo, la cuarta y la sexta:

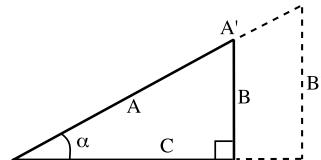
$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\operatorname{e}^x + \operatorname{e}^{-x})^2 - \frac{1}{4}(\operatorname{e}^x - \operatorname{e}^{-x})^2 &= \frac{1}{4}(\operatorname{e}^{2x} + 2 + \operatorname{e}^{-2x} - \operatorname{e}^{2x} + 2 - \operatorname{e}^{-2x}) = 1 \\ \frac{1}{4}(\operatorname{e}^x - \operatorname{e}^{-x})(\operatorname{e}^y + \operatorname{e}^{-y}) + \frac{1}{4}(\operatorname{e}^x + \operatorname{e}^{-x})(\operatorname{e}^y - \operatorname{e}^{-y}) &= \frac{1}{2}(\operatorname{e}^{x+y} - \operatorname{e}^{-x-y}) \end{aligned}$$

[El nombre del seno y coseno hiperbólicos vienen del hecho de que se podrían definir de forma análoga a como vamos a definir el seno: son la ordenada y abscisa de un punto situado a distancia x del punto $(1,0)$ sobre la parte con $x > 0$ de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.].

Funciones trigonométricas (siempre en radianes)

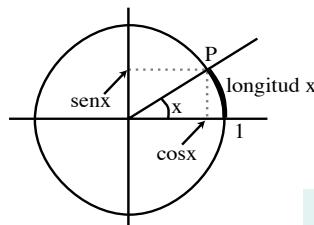
Seno, coseno y tangente aparecen primero como cocientes entre lados de un triángulo rectángulo. Para $0 < \alpha < 90^\circ$ es:

$$\sin \alpha = \frac{B}{A}, \quad \cos \alpha = \frac{C}{A} \quad \text{y} \quad \tan \alpha = \frac{B}{C}.$$



También $\sin \alpha = \frac{B'}{A'}$ [triángulos semejantes tienen lados proporcionales].

Interesa definirlas para cualquier ángulo, positivo o negativo, y además expresado en radianes:



Sea x la longitud (medida en sentido horario o antihorario) del arco que une $(1, 0)$ con un punto P de la circunferencia unidad. El ángulo orientado (positivo hacia arriba, negativo hacia abajo) formado por las semirrectas que unen $(0, 0)$ con ambos puntos es el ángulo de x **radianes** y $\sin x$ es la **ordenada** de P .

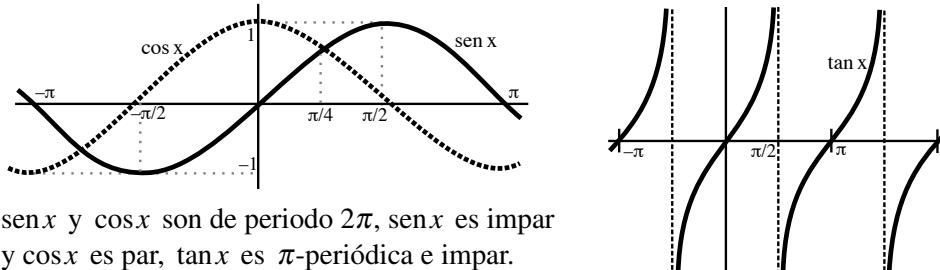
[Esta definición es poco rigurosa, por basarse en el concepto de longitud de una curva cuya definición no tenemos bien establecida; se le puede dar rigor utilizando integrales, lo mismo que a $\sin x$: ver Spivak].

A partir del $\sin x$ definimos:

$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}), \quad \forall x; \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

[Nos será más útil esta definición de $\cos x$ que la equivalente 'abscisa del punto P '. Las otras clásicas funciones trigonométricas $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ y $\cosec x = \frac{1}{\sin x}$ no serán utilizadas en estos apuntes, puesto que se pueden expresar fácilmente en términos de las dadas].

Admitimos que las gráficas de estas funciones son las de abajo:



$\sin x$ y $\cos x$ son de periodo 2π , $\sin x$ es impar y $\cos x$ es par, $\tan x$ es π -periódica e impar.

Repasemos algunas propiedades trigonométricas clásicas [algunas otras se verán en problemas].

Recordemos en primer lugar la equivalencia entre grados y radianes. Como un ángulo recto son $\frac{\pi}{2}$ radianes (la longitud de la circunferencia unidad es 2π) o bien 90° , es $\alpha^\circ = \frac{\alpha\pi}{180}$ radianes.

En particular, los famosos ángulos de 30° , 45° y 60° son, respectivamente, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$ radianes.

Las funciones trigonométricas tienen una infinidad de valores exactos conocidos como:

$$\begin{aligned} \sin(k\pi) &= \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \tan(k\pi) = 0, \\ \sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) &= \cos(2k\pi) = 1, \quad \sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \cos((2k-1)\pi) = -1, \end{aligned}$$

que son inmediatos, y los siguientes que se deducen fácilmente del teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{6} &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \tan \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \tan \frac{\pi}{4} = 1, \quad \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

De ellos salen los similares de otros cuadrantes, por ejemplo:

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}; \quad \sin \frac{7\pi}{6} = \sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2} \quad [\text{o si se prefiere: } \sin(-\frac{5\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}].$$

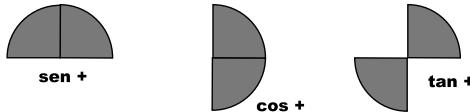
De Pitágoras también se deduce: $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}.$

Ej. A partir de aquí es fácil hallar, dada cualquiera de las razones trigonométricas de un ángulo y el cuadrante en el que se encuentra (sin este dato hay 2 posibilidades), los valores de las restantes:

Por ejemplo, si $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ y $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, los valores del seno y el coseno de este ángulo son:

$$\cos \alpha = +\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+(16/9)}} = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = \cos \alpha \tan \alpha = -\frac{4}{5}.$$

Seno, coseno y tangente son positivos en los cuadrantes dibujados a la derecha:



Más difíciles de probar son las siguientes importantes identidades (válidas $\forall a, b$):

$$\boxed{\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b, \quad \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b},$$

pero a partir de ellas ya es fácil comprobar todas las siguientes (de hecho, nos bastaban las fórmulas para $a+b$, pues las de $a-b=a+(-b)$ son consecuencia inmediata de ellas, por la imparidad y paridad de seno y coseno). Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \sin 2a &= 2 \sin a \cos a, \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 \\ \Rightarrow \quad \sin^2 a &= \frac{1}{2}[1 - \cos 2a], \quad \cos^2 a = \frac{1}{2}[1 + \cos 2a]. \end{aligned}$$

Casi inmediata es: $\boxed{\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \Rightarrow \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}}.$

$$\begin{aligned} \sin a \sin b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \end{aligned}$$

En la última, llamando $A=a+b$ y $B=b-a$, resulta ser $a = \frac{A-B}{2}$ y $b = \frac{A+B}{2}$ con lo que:

$$\boxed{\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}.$$

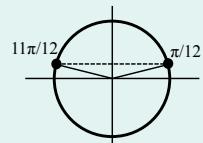
Ej. Calculemos usando las igualdades anteriores el $\boxed{\cos \frac{35\pi}{12}}.$

Primero observemos que $\cos \frac{35\pi}{12} = \cos(\frac{35\pi}{12} - 2\pi) = \cos \frac{11\pi}{12} = -\cos \frac{\pi}{12}$.

Como $\cos^2(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2}[1 + \cos \frac{\pi}{6}] = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos \frac{35\pi}{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Podemos dar una expresión más bonita: $-\cos \frac{\pi}{12} = -\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

[Ambas expresiones coinciden, claro: $\frac{1}{4}(2+\sqrt{3}) = \frac{1}{16}(2+6+2\sqrt{12})$].



Ej. Encontremos todos los reales x que satisfacen $\boxed{6 \tan x = \sin 2x}$.

$$\frac{6 \sin x}{\cos x} = 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow \frac{2 \sin x}{\cos x} [3 - \cos^2 x] = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ó } \cos^2 x = 3 \text{ (imposible).}$$

Los x buscados son, pues, $\boxed{x = k\pi}, k \in \mathbb{Z}$.

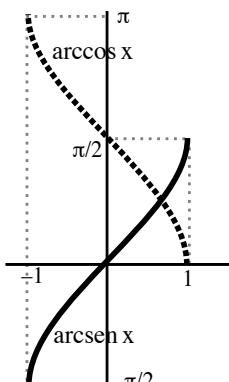
Ej. Hallémos todos los reales x tales que $\boxed{\cos 4x - 2 \cos 2x = 3}$.

$$2 \cos^2 2x - 2 \cos 2x - 1 = 3, \quad \cos^2 2x - \cos 2x - 2 = 0 \rightarrow \cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1.$$

$$\cos 2x = 2 \text{ es imposible y } \cos 2x = -1 \text{ se cumple si } 2x = (2k+1)\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}.$$

[Con algo de vista: las únicas soluciones posibles son los x que, a la vez, hacen $\cos 2x = -1$ y $\cos 4x = 1$. No es conveniente en este caso, desde luego, expresarlo todo en función de $\cos x$].

Dada una razón trigonométrica no queda precisado el ángulo del que proviene. Por ejemplo hay infinitos x con $\tan x = -1$, incluso hay dos ($x = \frac{3\pi}{4}$ y $x = \frac{7\pi}{4}$) si sólo nos preocupamos de los x de $[0, 2\pi]$. Por eso hay que tener cuidado con las **funciones trigonométricas inversas**:

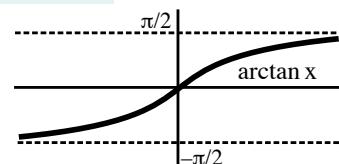


Para definirlas debemos restringir los intervalos de definición para que $\sin x$, $\cos x$ y $\tan x$ sean inyectivas:

$\arcsen x$ ($\text{dom} = [-1, 1]$, $\text{im} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)
es la inversa de $\sin x$ restringida a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
 $\arccos x$ ($\text{dom} = [-1, 1]$, $\text{im} [0, \pi]$)
es la inversa de $\cos x$ restringida a $[0, \pi]$.

(El arco seno de x no es simplemente ‘el ángulo cuyo seno vale x ’; infinitos x tienen el mismo seno).

$\arctan x$ [$\text{dom} = \mathbb{R}$, $\text{im} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$]
es la inversa de $\tan x$ definida en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.



Ej. $\arctan(\tan \frac{3\pi}{4}) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

[La función $\arctan x$ aparece muchas veces en el cálculo, por ejemplo hallando primitivas].

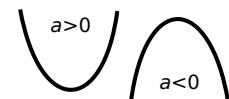
Cónicas

Son las curvas descritas por expresiones que contienen a lo más potencias de orden 2 en x ó y :

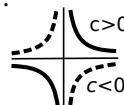
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$$

No nos ocupamos de todas las posibilidades que se pueden dar en general y de cómo distinguir entre ellas (es más típico de cursos de álgebra, digamos aquí simplemente que en su clasificación es muy importante el signo de $B^2 - 4AC$). Nos limitamos a identificar las más simples.

$y = ax^2 + bx + c$, son **paráboles** con el eje vertical. El signo de a indica si es de forma \curvearrowleft o \curvearrowright , y como $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$, está claro (sin usar derivadas) que su vértice es el punto $(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$.



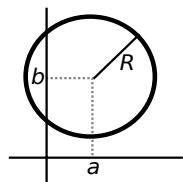
Son también sencillas las **hipérbolas** $xy = c$ (o sea, $y = \frac{c}{x}$):



Las siguientes cónicas no definirán una única función, sino dos:

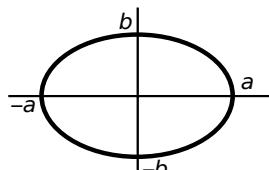
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

(circunferencia)



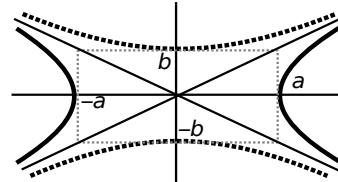
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(elipse)



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(hipérbolas)



La elipse, por ejemplo, define las funciones $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ e $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a, a]$.

[Aunque estas curvas son las que se obtienen al cortar un cono con diferentes planos (origen de la palabra ‘cónica’), en la expresión general se pueden esconder objetos más sencillos. Por ejemplo, $y^2 - 3xy + 2x^2 = 0$ representa dos rectas ($y = x$ e $y = 2x$), $x^2 + y^2 = -1$ es el conjunto vacío \emptyset ...].

1.5. El conjunto C . Operaciones con complejos

No hay ningún número real x tal que $x^2 + 1 = 0$. Para que esa ecuación tenga solución es necesario introducir el número imaginario i : $i^2 = -1$. Veamos algunas propiedades del conjunto de los números complejos $\mathbf{C} = \{z = a + ib : a, b \in \mathbf{R}\}$.

En \mathbf{C} están definidas las operaciones suma y producto:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d), \quad (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Con estas dos operaciones \mathbf{C} es un **cuerpo**: $+$ y \cdot son asociativas y conmutativas, existe la distributiva, existen elementos neutros ($z + 0 = z$ y $z \cdot 1 = z$) e inversos:

$$\forall z = a + ib \exists -z = -a - ib \text{ tal que } z + (-z) = 0,$$

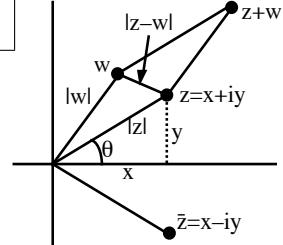
$$\forall z \neq 0 \exists z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2} \text{ tal que } z \cdot z^{-1} = 1.$$

Se define diferencia y cociente de complejos como: $z - w = z + (-w)$, $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$ si $w \neq 0$.

[No se puede, a diferencia de \mathbf{R} , definir un orden en \mathbf{C} compatible con las operaciones anteriores].

Si $z = x + iy$, su parte real $\operatorname{Re}(z) = x$, su parte imaginaria $\operatorname{Im}(z) = y$,
su **conjugado** es $\bar{z} \equiv z^* = x - iy$ y su **módulo** es $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Representando cada complejo $z = x + iy$ como el punto del plano de coordenadas (x, y) , es fácil ver que el complejo suma $z + w$ está en el vértice opuesto al origen de un paralelogramo dos de cuyos lados son los segmentos que unen z y w con $O = (0, 0)$. El conjugado \bar{z} es la reflexión de z respecto de $y = 0$. El módulo es la distancia desde z al origen. La distancia de z a w viene dada por $|z - w|$.



Algunas propiedades de demostración inmediata son:

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad z + \bar{w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \bar{-z} = -\bar{z}, \quad \bar{z} \cdot \bar{w} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \bar{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}, \quad |z|^2 = z \cdot \bar{z}, \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$$

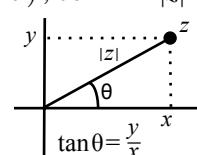
Más difícil es probar la desigualdad triangular (geométricamente es clara): $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Ej. Calcular $\left| \frac{i(3-4i)}{2+i} \right|$. Basta hacer uso de las propiedades del módulo: $|z| = \frac{|i||3-4i|}{|2+i|} = \frac{1 \cdot 5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Vamos ahora a hacerlo dando un rodeo, calculando el complejo que está dentro del módulo:

$$\frac{i(3+4i)}{2+i} = \frac{(3i-4)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{3-8+6i+4i}{5} = -1+2i, \text{ cuyo módulo es, desde luego, } \sqrt{5}. \\ \text{multiplicando por el conjugado del denominador}$$

Un z se puede escribir en coordenadas **polares**: $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, con $r = |z|$ y θ el ángulo que forma el segmento Oz con el eje x positivo. El θ no es único: todos los $\theta + 2k\pi$ nos dan el mismo z . Cualquiera de ellos se llama **argumento** de z . El **argumento principal** es el θ con $0 \leq \theta < 2\pi$. El θ se halla utilizando que $\tan \theta = \frac{y}{x}$ y mirando el cuadrante en que está el z .



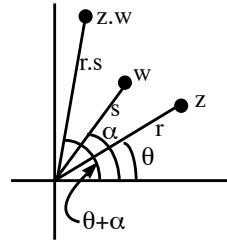
Más adelante veremos que si θ es cualquier real: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (complejo de módulo 1). Esto nos proporciona una forma más corta de expresar un complejo en polares:

$$z = r e^{i\theta}, \text{ donde } r = |z| \text{ y } \theta \text{ es un argumento de } z.$$

Ej. Para $z = -2 + 2i$ es $|z| = 2\sqrt{2}$. Como $\tan \theta = -1$ y z está en el segundo cuadrante, se puede escribir z (con el argumento principal) en la forma $z = 2\sqrt{2} [\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}] = 2\sqrt{2} e^{i3\pi/4}$ (ó con otro θ : $z = 2\sqrt{2} [\cos \frac{11\pi}{4} + i \sin \frac{11\pi}{4}] = 2\sqrt{2} e^{i11\pi/4}$).

Las formas polares son muy útiles para efectuar productos, potencias y raíces:

$Si z = r e^{i\theta}, w = s e^{i\alpha} \text{ entonces:}$ $z \cdot w = r s e^{i(\theta+\alpha)} = r s [\cos(\theta+\alpha) + i \sin(\theta+\alpha)],$ $\frac{z}{w} = \frac{r}{s} e^{i(\theta-\alpha)} = \frac{r}{s} [\cos(\theta-\alpha) + i \sin(\theta-\alpha)],$ $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$
--

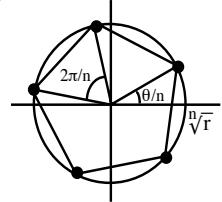


[Las dos primeras son inmediatas y la de z^n se prueba por inducción].

Todo $z = r e^{i\theta} \neq 0$ tiene exactamente n raíces n -simas distintas dadas por

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\phi} \text{ con } \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k = 0, \dots, n-1.$$

[basta elevar a n y observar que si $k=n, n+1, \dots$ se repiten los ángulos; vemos que las n raíces están en los vértices de un polígono regular].



Hagamos una serie de operaciones de repaso de la aritmética compleja:

Ej. Expresar el número complejo $z = \overline{1-i + \frac{1}{1+i}}$, como $x+iy$ y como $r e^{i\theta}$ y hallar $|z^2|$.

$$z = \overline{1-i + \frac{1}{1+i}} = \left[\frac{3}{2} + i \frac{3}{2} \right]. |z| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}}, \tan \theta = 1 \text{ y primer cuadrante} \rightarrow z = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}.$$

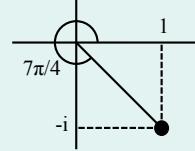
$$z^2 = \frac{9}{2} e^{i\pi/2} = \frac{9}{2} i \text{ (o bien } z^2 = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} i^2 + \frac{9}{2} i\text{)}. |z^2| = \left| \frac{9}{2} i \right| = \left| \frac{9}{2} \right| \text{ (debía ser } |z^2| = |z \cdot z| = |z||z| \text{).}$$

Ej. Calcular $w = (1-i)^6$, directamente y en polares.

Escribiendo una fila más del triángulo de Tartaglia de 1.2 o hallando $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2}$, $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2}$:

$$w = 1 + 6(-i) + 15(-i)^2 + 20(-i)^3 + 15(-i)^4 + 6(-i)^5 + (-i)^6 \\ = 1 - 6i - 15 + 20i + 15 - 6i - 1 = 8i.$$

$$r = \sqrt{2}, \tan \theta = -1 \rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4} \text{ (dado que } \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ es del cuarto cuadrante)} \\ \rightarrow (\sqrt{2} e^{i7\pi/4})^6 = 8 e^{i21\pi/2} = 8 e^{i\pi/2} = 8i.$$

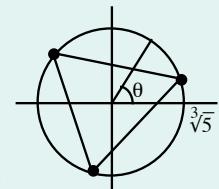


Ej. Hallar las **raíces cúbicas** de $z = \frac{7+i}{1-i}$.

Podemos hacer: $z = \frac{(7+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{6+8i}{2} = 3+4i = 5 e^{i \arctan(4/3)}$. O bien,

$$7+i = 5\sqrt{2} e^{i \arctan(1/7)}, 1-i = \sqrt{2} e^{-i7\pi/4} \rightarrow z = 5 e^{i[\arctan(1/7) + \pi/4]}$$

[las dos expresiones de z coinciden: $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$].



Por tanto, $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{5} e^{i\phi}$ donde $\phi = \frac{\arctan(4/3) + 2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$. Con calculadora:

$$\theta = \arctan \frac{4}{3} \approx 0.927; \phi \approx 0.309, 2.403, 4.498; z \approx 1.63 + 0.52i, -1.26 + 1.15i, -0.36 - 1.67i.$$

Ej. Escribir el polinomio real $x^4 + 1$ como producto de polinomios reales de segundo grado.

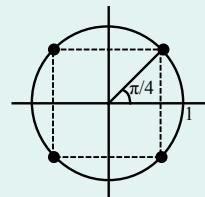
Las raíces del polinomio son las cuatro raíces de $-1 = 1 e^{i\pi}$,

$$\text{que son } \sqrt[4]{1} e^{i\phi} \text{ con } \phi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

Es decir, $z_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} [1 \pm i]$, $z_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2} [-1 \pm i]$, complejos conjugados dos a dos, como debían (a lo mismo llegaríamos buscando $z = a + bi$ con $z^2 = \pm i$, pero sería mucho más largo). Así pues:

$$x^4 + 1 = [(x-z_1)(x-z_2)][(x-z_3)(x-z_4)] = [x^2 - (z_1+z_2)x + z_1 z_2][x^2 - (z_3+z_4)x + z_3 z_4]$$

$$\rightarrow x^4 + 1 = [x^2 - \sqrt{2}x + 1][x^2 + \sqrt{2}x + 1]$$



Ej. Hallar las raíces de la ecuación $\boxed{z^2 - iz - 1 - i = 0} \rightarrow z = \frac{1}{2}[i \pm \sqrt{3+4i}]$.

[La fórmula $z = \frac{1}{2a}[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}]$ sigue siendo válida interpretando $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ como las dos raíces del complejo (no tiene sentido decir 'la raíz positiva' de un complejo)].

Trabajemos en cartesianas. Buscamos $w = x + iy$ tal que $w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = 3 + 4i$.

$$\text{Debe ser } \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{array} \rightarrow y = \frac{2}{x} \nearrow \quad x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$$

Hay dos soluciones reales de este sistema: $x = 2, y = 1$ y $x = -2, y = -1$.

[En polares se obtendría $w = \sqrt{5}e^{i\phi}$, $\phi = \frac{\arctan(4/3)}{2} + k\pi, k = 0, 1$, que con una calculadora se ve que coinciden con $\pm(2+i)$].

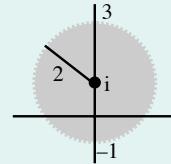
Las raíces buscadas son: $z = \frac{1}{2}[i + (2+i)] = \boxed{1+i}$ y $z = \frac{1}{2}[i - (2+i)] = \boxed{-1}$.

Ej. Representar en el plano complejo los z que cumplen $\boxed{|z - i| < 2}$.

Si $z = x + iy$, esto equivale a $|x + i(y-1)| < 2 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 < 4$.

Los z buscados son los del círculo sin borde de centro $(0, 1)$ y radio 2

(claro, los z que distan del complejo i menos que 2).



Ej. Expresar $\cos 3\theta$ y $\sin 3\theta$ en términos de $\cos \theta$ y $\sin \theta$ utilizando potencias de complejos.

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + i \sin 3\theta &= e^{i3\theta} = [e^{i\theta}]^3 = [\cos \theta + i \sin \theta]^3 = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i[3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta] \\ &\Rightarrow \boxed{\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta} \quad \text{y} \quad \boxed{\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta} \end{aligned}$$

[sale usando sólo propiedades reales de senos y cosenos de sumas, pero es bastante más largo].

En la sección 4.6 definiremos las funciones complejas $f(z) = e^z$, $f(z) = \sin z$ y $f(z) = \cos z$ a partir de series de potencias [y probaremos la igualdad $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$].

Pero ya podríamos definir así para cualquier complejo z : $\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)}$.

2. Sucesiones, límites y continuidad en \mathbb{R}

2.1 Sucesiones de números reales

$\{a_n\} = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ es una **sucesión**: a cada natural n corresponde un real a_n .

Matemáticamente, como una función asigna a cada elemento de un conjunto un único elemento de otro:

Def. Una sucesión de números reales es una función de \mathbb{N} en \mathbb{R}
$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow a(n) \equiv a_n$$

Una sucesión tiende hacia a si en todo entorno de a , por pequeño que sea, están casi todos los términos de la sucesión (todos salvo un número finito). Por ejemplo $\{\frac{1}{n}\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ tiende hacia 0 ya que fijado un entorno cualquiera del origen todos los términos de la sucesión a partir de uno dado acaban metiéndose dentro. Precisando:

Def. $\{a_n\}$ tiene por límite a (o tiende hacia a o converge hacia a) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todo natural $n \geq N$ es $|a_n - a| < \varepsilon$. Se representa por $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ó $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. Si una sucesión $\{a_n\}$ no es convergente se dice **divergente**.

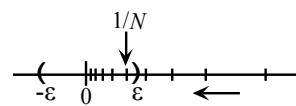
Esta definición es la primera de las definiciones rigurosas de límite de aspecto similar que veremos en los apuntes. Hagamos unas cuantas observaciones sobre ella:

Decir que $|a_n - a| < \varepsilon$ es equivalente a que $a_n \in B(a, \varepsilon)$. Para **todo** ε hemos de encontrar un N tal que $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$ estén dentro del entorno.

El N no es único: si los $a_n \in B(a, \varepsilon)$ para $n \geq N$, también están dentro para $n \geq N^*$ si $N^* \geq N$. No se trata de hallar el menor N , basta con dar uno para el que se cumpla.

En sucesiones escribiremos simplemente $a_n \rightarrow a$, pues sólo tiene sentido el límite para $n \rightarrow \infty$ (en funciones, la x podrá tender a 0, a ∞ , a $-\infty, \dots$ y sí habrá que precisarlo).

Ej. Formalicemos que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$: dado cualquier ε (por pequeño que sea) existe N tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Por tanto, si $n \geq N$, $|\frac{1}{n} - 0| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. Se ve que N depende del ε dado (si $\varepsilon = 0.1$, basta tomar $N = 11$, pero si $\varepsilon = 0.001$ debemos tomar $N = 1001$ o un número mayor).



Ej. La sucesión $\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, \dots$ diverge, pues está claro que no todos sus términos a partir de un N están en todo entorno de -1 , ni de 1 , ni de cualquier otro real. Aunque haya infinitos términos en cualquier entorno de 1 (por ejemplo) otros infinitos se escapan. Si $\varepsilon = 2$ todos los a_n pertenecen al entorno $B(1, 2)$, pero esto debe ocurrir $\forall \varepsilon$ y no sólo para ε grandes.

El cálculo de límites con ε y N es, en general, complicado. Pero, gracias a los teoremas que veremos (demostrados utilizando los ε), sólo en contadas ocasiones y para sucesiones muy extrañas deberemos en el futuro acudir a la definición. Para manejar ésta (en ejemplos y en teoremas) se suele partir de lo que uno quiere hacer pequeño ($|a_n - a|$) y, tras algunos $<$ ó \leq (la desigualdad triangular suele aparecer), se llega a una expresión de la que sea ya fácil decir para qué n es $< \varepsilon$:

Ej. Probemos sólo con la definición (pronto será innecesaria) que $\{a_n\} = \left\{ \frac{2\sqrt{n} + 5^{-n}}{\sqrt{n} + 1} \right\} \rightarrow 2$.

$$\left| \frac{2\sqrt{n} + 5^{-n}}{\sqrt{n} + 1} - 2 \right| = \left| \frac{5^{-n} - 2}{\sqrt{n} + 1} \right| \leq \frac{5^{-n} + 2}{\sqrt{n}} \leq \frac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{3}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{9}{\varepsilon^2}$$

Por tanto, dado cualquier ε , si N es un natural $> 9/\varepsilon^2$, para $n \geq N$ se cumple que $|a_n - 2| < \varepsilon$.

[No es la única forma de precisar el N , podríamos, por ejemplo, no haber quitado el 1 del denominador y habríamos llegado a otro N ; lo que, desde luego, no funcionaría sería empezar haciendo $|a_n - 2| \leq |a_n| + 2$, pues no habría forma de hacer esto menor que cualquier ε].

Teorema: $\{a_n\}$ convergente $\Rightarrow \{a_n\}$ acotada.

Sea $\varepsilon = 1$ (por fijar un número); sabemos que $\exists N$ tal que si $n \geq N \Rightarrow |a_n| - |a| \leq |a_n - a| < 1$ $\Rightarrow |a_n| \leq |a| + 1$. Por tanto, llamando $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$ se tiene $|a_n| \leq M \forall n$.

No es cierto que toda $\{a_n\}$ acotada sea convergente. Por ejemplo, $\{(-1)^n\}$ es acotada y diverge. Lo que sí se deduce del teorema (no $q \Rightarrow$ no p) es que **diverge seguro una sucesión no acotada**.

Definimos ahora un par de tipos importantes de sucesiones **divergentes** (y no acotadas):

Def. $\{a_n\}$ diverge hacia $+\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$) si $\forall K \exists N / \forall n \geq N$ se cumple $a_n \geq K$.
 $\{a_n\}$ diverge hacia $-\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$) si $\forall K \exists N / \forall n \geq N$ se cumple $a_n \leq K$.

[$+\infty$ y $-\infty$ son sólo símbolos, no números; estas sucesiones no convergen a ningún número real].

Ej. $\frac{n^2+1}{2n} \rightarrow \infty$, pues $\forall K, \frac{n^2+1}{2n} \geq \frac{n}{2} > K$ si $n \geq N$ con N cualquier natural $\geq 2K$.

$-1, 0, -2, 0, -3, 0, -4, \dots$ no diverge hacia $-\infty$. A pesar de contener términos tan pequeños como queramos, no es cierto que dado **cualquier** K queden a su izquierda todos los términos a partir de un N (para los $K < 0$ es evidente que es falso). Claramente, tampoco tiende a 0.

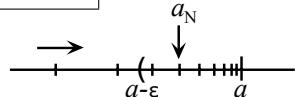
Def. $\{a_n\}$ es **creciente** si $a_n \leq a_{n+1} \forall n$. $\{a_n\}$ es **decreciente** si $a_n \geq a_{n+1} \forall n$. Cualquiera de las dos se dice **monótona**.

Ej. $13, 23, 33, 43, 53, \dots$ (no acotada, divergente hacia $+\infty$) es creciente.

$1, 1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, 1/4, 1/4, \dots$ es decreciente (y tiende hacia 0).

Teorema: $\{a_n\}$ creciente y acotada superiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ convergente.
 $\{a_n\}$ decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ convergente.

El axioma del extremo superior asegura que $\{a_n\}$ tiene supremo al que llamamos a . Veamos que a es el límite de $\{a_n\}$:



Sea $\varepsilon > 0$, $\exists N$ tal que $a_N > a - \varepsilon$ (si no, habría cotas menores

que a). Por tanto, si $n \geq N$, $a \geq a_n \geq a_N > a - \varepsilon \Rightarrow |a_n - a| = a - a_n < \varepsilon$. [Análoga la otra].

Dada una sucesión $\{a_n\}$, se llama **subsucesión** de $\{a_n\}$ a cualquier sucesión formada escogiendo ordenadamente infinitos términos de $\{a_n\}$, es decir:

Def. $\{a_{n_j}\} = a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ con los $n_j \in \mathbb{N}$ tales que $n_1 < n_2 < \dots$ es subsucesión de $\{a_n\}$.

Ej. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots, 1, \frac{1}{11}, \frac{1}{111}, \frac{1}{1111}, \frac{1}{11111}, \dots$ ó $\frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \dots$ son subsucesiones de $\{\frac{1}{n}\}$.

No lo es, en cambio, $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \dots$, formada con elementos desordenados de $\{\frac{1}{n}\}$.

Está claro que si $\{a_n\} \rightarrow a$ también cualquier subsucesión suya $\{a_{n_j}\} \rightarrow a$. Por tanto, **una forma de probar que una sucesión no tiene límite es encontrar dos subsucesiones suyas que converjan hacia límites distintos o alguna subsucesión que no converja**.

[A las subsucesiones de las sucesiones divergentes pueden pasarle, sin embargo, todo tipo de cosas. Por ejemplo, $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots$ tiene subsucesiones convergentes a infinitos límites distintos (a cada número natural), otras que divergen a $+\infty$ y otras que no tienen límite ni finito ni infinito; $-1, 0, -2, 0, -3, 0, -4, \dots$ tiene subsucesiones que tienden a 0 y otras a $-\infty$; $1, 2, 3, 4, \dots$ no tiene subsucesiones convergentes... Si $\{a_n\}$ es acotada veremos que sí podemos sacar alguna conclusión].

Con los siguientes teoremas podremos calcular un montón de límites de sucesiones sin usar ε y N (sólo los más sencillos, otros exigen técnicas de límites de funciones y habrá que esperar).

Teorema: Si $\{a_n\} \rightarrow a$ y $\{b_n\} \rightarrow b$ entonces:
 $\{a_n + b_n\} \rightarrow a+b$, $\{a_n - b_n\} \rightarrow a-b$, $\{a_n b_n\} \rightarrow ab$, y si $b \neq 0$, $\{\frac{a_n}{b_n}\} \rightarrow \frac{a}{b}$.

- +) [casi igual -)]. Dado ε , $\exists N_a / n \geq N_a \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\exists N_b / n \geq N_b \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
 Por tanto, $|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$, si $n \geq N = \max\{N_a, N_b\}$.
-) $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n - a||b_n| + |b_n - b||a|$. Hagamos pequeño esto:
 $\{b_n\} \rightarrow b \Rightarrow$ dado ε , $\exists N_b$ tal que $n \geq N_b \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$, suponiendo $a \neq 0$.
 $\{b_n\}$ convergente \Rightarrow acotada: $\exists B$ con $|b_n| < B$; como $\{a_n\} \rightarrow a$, $\exists N_a / n \geq N_a \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2B}$.
 Por tanto: $|a_n b_n - ab| < \frac{\varepsilon B}{2B} + \frac{\varepsilon |a|}{2|a|} = \varepsilon$. (Si $a = 0$, $|b_n - b||a| = 0 < \frac{\varepsilon}{2}$).
- /) $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| = \frac{|ba_n - ab + ab - ab_n|}{|bb_n|} < \frac{K\varepsilon}{2K} + \frac{|a||b|K\varepsilon}{2|a||b|K} = \varepsilon$, si $n \geq N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ donde:
 como $\{b_n\} \rightarrow b \neq 0$, $\exists N_1 / n \geq N_1 \Rightarrow |b_n| \geq K > 0$; como $\{b_n\} \rightarrow b$, $\exists N_2 / n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{|b|K\varepsilon}{2|a|}$; y como $\{a_n\} \rightarrow a$, $\exists N_3 / n \geq N_3 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{K\varepsilon}{2}$.

Las operaciones que involucran las sucesiones que tienden a $+\infty$ o $-\infty$ son sólo un poco más complicadas y vienen a formalizar la forma intuitiva en que se trabaja con los infinitos:

Teorema: Sean $\{c_n\} \rightarrow 0$, $\{p_n\} \rightarrow p > 0$, $\{q_n\} \rightarrow q < 0$, $\{a_n\}$ acotada, $\{i_n\} \rightarrow \infty$. Entonces: $\{a_n + i_n\} \rightarrow \infty$, $\{a_n - i_n\} \rightarrow -\infty$, $\{c_n a_n\} \rightarrow 0$, $\{a_n/i_n\} \rightarrow 0$, $\{p_n i_n\} \rightarrow \infty$, $\{q_n i_n\} \rightarrow -\infty$, $\{i_n/p_n\} \rightarrow \infty$, $\{i_n/q_n\} \rightarrow -\infty$, ...

[como $\{c_n\}$, $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ están acotadas, los resultados con $\{a_n\}$ son también ciertos con ellas].

Probemos para cansarnos poco sólo un par de ellas, por ejemplo la primera y la última:

Sea $|a_n| \leq A$, $\forall K$, $a_n + i_n \geq i_n - A \geq K$, pues $i_n \geq K + A$, si n es suficientemente grande.

Si n grande $i_n > 0$ y $\exists Q / Q < q_n < 0 \Rightarrow \forall K$, $i_n/q_n < i_n/Q < K$, pues $i_n > QK$ si n grande.

Podemos abreviar este teorema (pero recordando que es sólo una **notación!**) escribiendo:

“acot $\pm\infty = \pm\infty$ ”, “ $0 \cdot \text{acot} = 0$ ”, “ $\frac{\text{acot}}{\infty} = 0$ ”, “ $(\pm 1) \cdot \infty = \pm\infty$ ”, “ $\frac{\infty}{\pm 1} = \pm\infty$ ”, ...

También es cierto: “ $\infty + \infty = \infty$ ”, “ $\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ ”, “ $(-1) \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ ”, ...

Es tentador escribir “ $\frac{1}{0} = \infty$ ”, pero es **falso** en general [$\{(-1)^n/n\} \rightarrow 0$ y $\{(-1)^n n\}$ no tiene límite]. Sí es cierto que: $\{p_n\} \rightarrow p > 0$, $\{c_n\} \rightarrow 0$ y $c_n > 0 \Rightarrow \{p_n/c_n\} \rightarrow \infty$.

Los límites con **potencias** se deducirán de los límites de funciones, pues probaremos teoremas que realacionarán unos y otros. Por ahora, admitimos:

Teorema: Sean $\{b_n\} \rightarrow b$, $\{p_n\} \rightarrow p > 0$, $\{q_n\} \rightarrow q < 0$, $\{i_n\} \rightarrow \infty$. Entonces:
 $\{p_n^{b_n}\} \rightarrow p^b$, $\{i_n^{p_n}\} \rightarrow \infty$, $\{i_n^{q_n}\} \rightarrow 0$, $\{p_n^{i_n}\} \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{si } p > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < p < 1 \end{cases}$.

[Por ejemplo, el primero será consecuencia de la continuidad de $f(x)^{g(x)}$ si $f > 0$ y f, g continuas].

Podríamos resumir: “ $\infty^1 = \infty$ ”, “ $\infty^{-1} = 0$ ”, “ $2^\infty = \infty$ ” ó “ $(1/2)^\infty = 0$ ”].

Obsérvese que en ninguna la base es negativa [no está $(-\infty)^1$ ni $(-2)^\infty$]: las potencias reales o racionales pueden no existir [la sucesión $\{(-2)^{1/2^n}\}$, por ejemplo, no existe para ningún n].

A pesar de tanto teorema aún quedan las llamadas **indeterminaciones** que resumimos:

$$\infty - \infty , \quad 0 \cdot \infty , \quad \frac{0}{0} , \quad \frac{\infty}{\infty} , \quad 1^\infty , \quad 0^0 , \quad \infty^0$$

Hay que leerlas en términos de sucesiones. Según la primera, si dos sucesiones $\rightarrow \infty$ no se puede, en principio, decir hacia qué tiende su diferencia (por ejemplo: $n-n^2 \rightarrow -\infty$, $n-n \rightarrow 0$ y $n^2-n \rightarrow \infty$).

Para resolver algunas bastará un truco algebraico como los de los ejemplos siguientes, pero en otros casos se necesitará L'Hôpital o Taylor para hallar los límites. Observemos que las tres de potencias (por la definición general de p^b) son en esencia del tipo $0 \cdot \infty$: $e^{\log 1 \cdot \infty}$, $e^{\log 0 \cdot 0}$, $e^{\log \infty \cdot 0}$.

Ej. Gracias a todo el trabajo con los ϵ ahora ya casi nunca habrá que acudir a la definición.

$$\begin{aligned} \frac{n^2 + (-1)^n}{2n-3n^3} &= \frac{1/n + (-1)^n/n^3}{2/n^2 - 3} \xrightarrow[0+0]{3+0} = 0 , \quad \frac{n^3 + (-1)^n}{2n-3n^3} = \frac{1 + (-1)^n/n^3}{2/n^2 - 3} \xrightarrow[0-3]{1+0} = -\frac{1}{3} , \\ \frac{n^4 + (-1)^n}{2n-3n^3} &= \frac{n + (-1)^n/n^3}{2/n^2 - 3} \xrightarrow[\infty+0]{0-3} = -\infty . \end{aligned}$$

[Las tres son indeterminaciones y hemos reescrito la sucesión dividiendo por la potencia mayor del denominador. Y hemos utilizado varios teoremas: $n^3 = n \cdot (n \cdot n) \rightarrow \infty$ porque el producto de dos sucesiones que tienden a ∞ tiende a ∞ ; $(-1)^n/n^3 \rightarrow 0$ pues “acotado/ $\infty = 0$ ”; $1 + (-1)^n/n^3 \rightarrow 1$ porque suma de sucesiones tiende a la suma de los límites; límites de cocientes, ...].

[No se divide por la mayor potencia del numerador para evitar la posible aparición de expresiones del tipo “1/0” que son fuente de errores; otra forma válida de actuar es sacar factor común la potencia dominante del numerador y denominador].

$$\text{Ej. } a_n = \frac{\sqrt{n^3-1}-n}{5n^2-7\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^4}}-\frac{1}{n}}{5-\frac{7}{n\sqrt{n}}} \xrightarrow[0-0]{5-0} = 0 , \text{ o bien, } a_n = \frac{n^{3/2}}{n^2} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}{5-\frac{7}{n\sqrt{n}}} \xrightarrow[0 \cdot \frac{1}{5}]{0 \cdot \frac{1}{5}} = 0 .$$

[Aquí hemos utilizado además que $\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a}$ y “ $\sqrt{\infty} = \infty$ ”, casos particulares de los límites de potencias vistos (y que no son difíciles de probar directamente)].

Como se ve, **para calcular límites de cocientes de polinomios o raíces de ellos basta comparar los términos con la máxima potencia** de numerador y denominador (y se pueden hacer a ojo: si el numerador es más pequeño, el cociente $\rightarrow 0$, si ambos son del mismo orden aparecen los coeficientes de los términos más gordos y si el numerador es mayor el límite será $+\infty$ o $-\infty$).

$$\text{Ej. } (-1)^n \frac{3n+\cos n}{n^2+n e^{-n}} = (-1)^n \frac{3+n^{-1}\cos n}{n+e^{-n}} \xrightarrow[0-0]{\text{acot}\cdot 0} = 0 \quad [\text{“acot}\cdot 0\text{”, pues numerador} \rightarrow 3+0=3 \text{ y denominador} \rightarrow \infty+0=\infty] .$$

$$\text{Ej. } (-1)^{n+1} \frac{13n}{n+1} \text{ diverge, ya que tiene subsucesiones con distintos límites } [\text{pares} \rightarrow -13 , \text{impares} \rightarrow 13] .$$

$$\begin{aligned} \text{Ej. } \sqrt{n^3-1}-2n &= n[\sqrt{n-n^{-2}}-2] \xrightarrow[\infty]{\infty \cdot (\infty-2)=\infty} . \quad (\text{O sacando factor común } n^{3/2}) . \\ \sqrt{n+\arctan n}-n &= n[\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\arctan n}{n^2}}-1] \xrightarrow[-\infty]{\infty \cdot (\sqrt{0}-1)=-\infty} , \quad \arctan n \text{ está acotado} . \\ &[\text{Hemos sacado factor común (lo habitual para } \infty-\infty \text{) para dejar claro qué término mandaba}]. \end{aligned}$$

$$\text{Ej. } \sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \frac{[\sqrt{n}-\sqrt{n-1}][\sqrt{n}+\sqrt{n-1}]}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \xrightarrow[0]{0} = 0 .$$

[Los ∞ eran del mismo orden y hemos tenido que racionalizar; sacar factor común daba $\infty \cdot 0$].

$$\text{Ej. } \frac{n^4}{(n-7)!} = \frac{n^4}{(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)} \frac{1}{(n-11)!} \xrightarrow[0]{1 \cdot 0} = 0 . \quad [\text{El factorial crece muy muy deprisa}].$$

$$\text{Ej. } \frac{1+\dots+n}{n^2+1} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} \xrightarrow[\infty]{\frac{1}{2}} . \quad [\text{El número de sumandos crece con } n ; \text{ no es cierto que como } n/n^2 \rightarrow 0 \text{ nuestra sucesión también lo haga}].$$

Además de los límites de potencias, otros serán consecuencia de los de funciones [se verá que si f es continua $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$]. Por ejemplo, de la continuidad de las funciones se infiere:

$$\{a_n\} \rightarrow a \Rightarrow \{\cos a_n\} \rightarrow \cos a, \{\sin a_n\} \rightarrow \sin a, \{\log a_n\} \rightarrow \log a \quad (a_n > 0), \dots$$

Ej. $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \cos 0 = 1$, pues $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \rightarrow 0$; $\{\sin \frac{n\pi}{2n+1}\} \rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1$; $\{\log \frac{n+5}{n}\} \rightarrow \log 1 = 0$.

Otro teorema que probaremos será: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L \Rightarrow f(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$.

Ej. $\frac{n \arctan n}{e^{1/n} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} \arctan n}{\frac{e^{1/n}}{\sqrt{n}} - 1} \rightarrow -\infty$ [$\frac{\infty \times (\pi/2)}{\frac{1}{\infty} - 1}$, pues $\arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2}$, ya que $\arctan x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$].

[Si se divide por n se puede caer en el error de escribir “ $\frac{1}{0} = \infty$ ”].

Admitimos estos otros límites indeterminados de sucesiones (por ahora sabemos calcular pocos) porque los necesitaremos en las series del capítulo 4 (exigen resultados de derivadas):

$$\frac{\log n}{n^a} \rightarrow 0, \forall a > 0; \quad \sqrt[n]{n} \rightarrow 1; \quad \{(1+c_n)^{1/c_n}\} \rightarrow e, \text{ si } \{c_n\} \rightarrow 0.$$

El primero ($\frac{\infty}{\infty}$), será consecuencia de que: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{ax^{a-1}} = 0$.

De él se obtiene el segundo (∞^0): $x^{1/x} = e^{\log x/x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^0 = 1$.

El último (1^∞) se deducirá del límite $(1+x)^{1/x} = e^{\log(1+x)/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e$.

En vez de utilizar integrales, se puede definir el número e como el límite de la sucesión creciente y acotada $(1 + \frac{1}{n})^n$.

Hallaremos los límites de alguna sucesión más utilizando los anteriores y/o resultados ya vistos:

Ej. $\frac{\sqrt[3]{n} + \log n}{\sqrt[3]{n} + \log n} = \frac{1 + n^{-1/3} \log n}{\sqrt[3]{1 + n^{-1} \log n}} \rightarrow 1$ [hemos admitido que $\log n$ es mucho menor que n^a , $a > 0$].

Ej. $[(\sqrt{-1})^n + \sqrt{n}]^3 \rightarrow \infty$ [“(acot+∞)³ = ∞³ = ∞”] ; $n^{1/(n-1)} = (n^{1/n})^{\frac{n}{n-1}} \rightarrow 1^1 = 1$;

$$n^{1/n-1} \rightarrow "0^{-1} = 0"; \quad (7n^3 - 1)^{1/n} = (n^{1/n})^3 (7 - \frac{1}{n^3})^{1/n} \rightarrow 1^3 \cdot 7^0 = 1.$$

[primero y tercero son fáciles; en los otros usamos $(ab)^c = a^c b^c$ y el límite admitido $n^{1/n} \rightarrow 1$].

Ej. $\left[\frac{6n+1}{3n+2}\right]^{-n^2} \rightarrow "2^{-\infty} = \frac{1}{2^\infty} = 0"$; $\left[\frac{3n^2+1}{3n^2+2}\right]^{-n^2} = \left[\left(1 - \frac{1}{3n^2+2}\right)^{-(3n^2+2)}\right]^{\frac{n^2}{3n^2+2}} \rightarrow e^{1/3}$.

[El primero otra vez era sencillo, pero como $1^{-\infty}$ es indeterminado, en el segundo buscamos el número e identificando la $\{c_n\} \rightarrow 0$ y poniendo lo que sobra fuera del corchete].

Ej. $\frac{3^n + 2^{n+1}}{3^{n+1} + 2^n} = \frac{1 + 2(2/3)^n}{3 + (2/3)^n} \rightarrow \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}$ [dividiendo por la potencia que manda 3^n (o por 3^{n+1})].

Ej. Hallaremos el límite de a^n para todos los $a \in \mathbb{R}$ sin hacer uso de teoremas no demostrados:

si $a > 1$, $a = 1+h$, con $h > 0 \Rightarrow a^n = (1+h)^n = 1 + nh + \dots > nh > K$, $\forall K$ si n gordo $\Rightarrow a^n \rightarrow \infty$;

si $a = 1$, $\{1^n\} = 1, 1, 1, \dots \rightarrow 1$; si $a = 0$, $\{0^n\} = 0, 0, 0, \dots \rightarrow 0$ (no son indeterminaciones);

si $a \in (0, 1)$, $1/a > 1$, $a^n = \frac{1}{(1/a)^n} \rightarrow "0^{-\infty} = 0"$; si $a \in (-1, 0)$, $a^n = (-1)^n (-a)^n \rightarrow "acot \cdot 0 = 0"$;

si $a = -1$, $\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, \dots$ diverge;

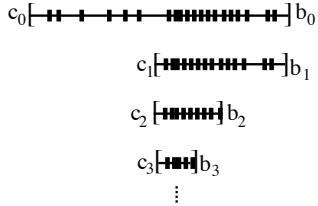
si $a < -1$, como $(-a)^n \rightarrow \infty$, $a^n = (-1)^n (-a)^n$ toma valores grandes positivos y negativos \Rightarrow diverge (ni siquiera tiende a $+\infty$ o $-\infty$).

Otros temas más teóricos de sucesiones

Damos para acabar definiciones y teoremas importantes en matemáticas avanzadas (las usaremos en las demostraciones de 2.3). El primer teorema es uno de esos típicos de matemáticas que aseguran que existe algo pero no dicen ni cómo es ese algo ni cómo buscarlo (y parecen no servir para nada):

Teorema: Toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente.

Como $\{a_n\}$ es acotada, existe un intervalo cerrado $[c_0, b_0] \supset \{a_n\}$. Dividimos $[c_0, b_0]$ en otros dos iguales. En uno de ellos, al menos, hay infinitos términos de $\{a_n\}$. Le llamamos $[c_1, b_1]$. Volvemos a dividir y a elegir $[c_2, b_2]$ con infinitos a_n ... Tenemos así una sucesión de intervalos $[c_k, b_k]$, cada uno con infinitos términos de la sucesión. La sucesión c_0, c_1, \dots es creciente y acotada superiormente por b_0 . La b_0, b_1, \dots es decreciente y acotada inferiormente por c_0 . Así ambas tienen límite y es intuitivamente claro que el límite de las dos es el mismo. Le llamamos a . Construimos una subsucesión de $\{a_n\}$ que tiende hacia a : elegimos $a_{n_0} \in [c_0, b_0]$, $a_{n_1} \in [c_1, b_1]$ con $n_1 > n_0$ (podemos, pues hay infinitos a_n en $[c_{n_1}, b_1]$).... No es difícil formalizar que $a_{n_j} \rightarrow a$.



Ej. $\{\operatorname{sen} n\} = 0.841\dots, 0.909\dots, 0.141\dots, -0.757\dots, -0.959\dots, -0.279\dots, 0.656\dots, 0.989\dots, 0.412\dots, \dots$

[funciones trigonométricas siempre en radianes]; parece no tener límite y se prueba (es difícil) que es así. Como es acotada, tendrá subsucesiones convergentes, pero no sabemos cuáles.

La siguiente definición tampoco tendrá mucha utilidad práctica para nosotros:

Def. $\{a_n\}$ es sucesión de **Cauchy** si $\forall \varepsilon \exists N \in \mathbf{N}$ tal que $\forall n, m \geq N$ se tiene que $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

[la diferencia entre dos términos suficientemente altos es tan pequeña como queramos]

Parece claro que si todos $\{a_n\}$ se acercan a un límite se acercarán también entre sí, es decir, que toda sucesión convergente será de Cauchy. Lo contrario también es cierto para las sucesiones en \mathbf{R} :

Teorema: $\{a_n\}$ converge $\Leftrightarrow \{a_n\}$ es de Cauchy

\Rightarrow $\forall \varepsilon \exists N / k \geq N \Rightarrow |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$; así pues, si $n, m \geq N$, $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

\Leftarrow Se puede probar que: $\{a_n\}$ de Cauchy $\Rightarrow \{a_n\}$ acotada (la demostración es parecida a la de las convergentes). Por lo tanto, existe subsucesión $\{a_{n_j}\}$ convergente hacia algún real a .

Veamos que toda la sucesión $\{a_n\}$ tiende hacia ese a :

$$\{a_n\} \text{ de Cauchy} \Rightarrow \exists N_1 \text{ tal que } n, n_j \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a_{n_j}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\{a_{n_j}\} \text{ convergente} \Rightarrow \exists N_2 \text{ tal que } n_j \geq N_2 \Rightarrow |a_{n_j} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Por tanto: } |a_n - a| \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ si } n \geq N = \max\{N_1, N_2\}.$$

Un conjunto se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy converge hacia un elemento del propio conjunto. Acabamos de ver que \mathbf{R} lo es. Pero, por ejemplo, \mathbf{Q} no lo es: hay sucesiones de Cauchy en \mathbf{Q} que no convergen a un racional (como la $3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \dots$ obtenida añadiendo decimales de π , que es de Cauchy pero su límite se escapa de \mathbf{Q}). Ello se debe a la inexistencia en \mathbf{Q} del axioma del extremo superior (por esta misma razón, en \mathbf{Q} hay sucesiones monótonas y acotadas sin límite en \mathbf{Q} o sucesiones acotadas sin subsucesiones convergentes en \mathbf{Q}). La definición de conjunto completo es importante en ‘análisis funcional’.

El último resultado relaciona conjuntos cerrados y sucesiones y lo utilizaremos en demostraciones:

Teorema: Si $\{a_n\} \rightarrow a$ y $\{a_n\} \subset A$ cerrado $\Rightarrow a \in A$.

Pues el límite de una sucesión, si tiene infinitos términos distintos, es un punto de acumulación de ella, y, por tanto, también de A que es cerrado. Y si $\{a_n\}$ toma sólo un número finito de valores, debe ser $a_n = a$ a partir de un N , con lo que, claramente, $a \in A$.

[Para abiertos es falso: hay $\{a_n\} \subset A$ abierto cuyo límite $\notin A$, como le ocurre a $\{\frac{1}{n}\} \subset (0, 1)$].

2.2 Límites de funciones y funciones continuas

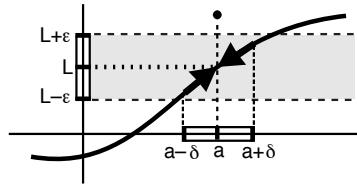
Def. f tiende a L (o tiene por límite L) cuando x tiende hacia a si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si x cumple $0 < |x-a| < \delta$ entonces $|f(x)-L| < \varepsilon$. Esto se representa: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ o bien $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

[Es decir, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $x \in B^*(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(L, \varepsilon)$].

[En la definición está implícito que a es punto interior de $\text{dom } f \cup \{a\}$ para que f tenga sentido en $B^*(a, \delta)$; también está claro que no importa nada el valor de f en a , ni siquiera si f está o no definida en el punto; esto si lo tendremos en cuenta para la definición de continuidad, pero el límite más importante del cálculo, la derivada, será de este tipo].

Gráficamente: Para todo  debe ser posible encontrar  tal que  esté dentro de la banda 

[evidentemente el δ no es único: si hemos encontrado un δ nos vale también cualquier δ^* más pequeño].

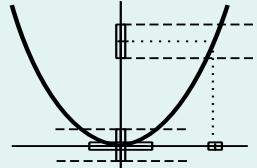


Ej. $f_1(x) = x^2$. Gráficamente parece claro que $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = a^2 \forall a$. Comprobémoslo para $a=0$:

Dado cualquier ε debe ser $|x^2 - 0^2| = |x|^2 < \varepsilon$ si $|x-0| = |x|$ es suficientemente pequeño. Tomando $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ se tiene que:

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |x|^2 < \varepsilon.$$

Para otros a no es fácil hallar el límite utilizando simplemente la definición, pero será un límite trivial cuando dispongamos de los teoremas que veremos. Lo mismo podemos decir del siguiente:



Ej. $f_2(x) = x + \sqrt{x}$. Comprobemos que $f_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 4} 6 = f_2(4)$ [esto significará f_2 continua en $x=4$].

$$|f_2(x) - 6| = |x-4 + \sqrt{x}-2| \leq |x-4| + |\sqrt{x}-2| = |x-4| + \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} \leq |x-4| + \frac{|x-4|}{2} = \frac{3}{2}|x-4|$$

Por tanto, escogiendo $\delta = \frac{2}{3}\varepsilon$ (o cualquier δ más pequeño) garantizamos que $|f_2(x) - 6| \leq \varepsilon$.

[No podemos hablar del límite de f_2 para $x \rightarrow 0$ por no ser el punto interior al dominio $\{x \geq 0\}$].

Ej. $f_3(x) = x^3 \arctan \frac{1}{x}$. Esta función no está definida en 0, pero veamos que $f_3(x) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow 0$.

$$\text{Como } |x^3 \arctan \frac{1}{x}| \leq \frac{\pi}{2} |x^3| = \frac{\pi}{2} |x|^3, \text{ bastará tomar } |x| < \delta = \sqrt[3]{\frac{2\varepsilon}{\pi}} \text{ para que } |x^3 \arctan \frac{1}{x}| < \varepsilon.$$

[Como siempre, trabajamos con estas definiciones partiendo de lo que se quiere hacer pequeño y utilizando desigualdades crecientes hasta que sea claro el δ que garantiza que lo inicial es $< \varepsilon$].

Ej. $f_4(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Es claro que $f_4(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \begin{cases} -1 & \text{si } a < 0 \\ 1 & \text{si } a > 0 \end{cases}$ (basta tomar $\delta < |a|$).

Pero no hay límite si $x \rightarrow 0$. Para $\varepsilon < 1$ hay x con $|x| < \delta$ para los que $|f_4(x) - L| \geq \varepsilon$, por pequeño que sea δ , sea $L=1$, $L=-1$ u otro real.



Sin embargo, f_4 se acerca a 1 ó -1 cuando $x \rightarrow 0$ si sólo miramos los x positivos o negativos.

[La negación de que $f \rightarrow L$ si $x \rightarrow a$ es esta afirmación: existe un ε tal que para todo δ existen x con $|x-a| < \delta$ pero cumpliendo $|f(x)-L| \geq \varepsilon$ (la negación de que ‘en toda clase hay algún estudiante que, si se examina, aprueba’, es que ‘hay una clase en la que todos los estudiantes que se examinan suspenden’)].

El último ejemplo y lo dicho sobre el dominio de f_2 nos lleva a definir los **límites laterales**:

Def. $f \rightarrow L$ por la derecha (izquierda) cuando $x \rightarrow a$ [$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ ($\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$)]
 si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si x cumple $0 < x - a < \delta$ ($0 < a - x < \delta$) $\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Como $0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow 0 < x - a < \delta$ y $0 < a - x < \delta$, es inmediato que:

Teorema: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow$ existen $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, y coinciden con L .

Por tanto, **si no existe un límite lateral, o si existiendo no coinciden, no existe el límite**.

Ej. $f_4(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} 1$, pues $\forall \varepsilon$, para cualquier δ que escogamos, si $0 < x < \delta$ es $|f_4(x) - 1| = 0 < \varepsilon$.

$f_4(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^-]{} -1$, pues $\forall \varepsilon$ para cualquier δ , $0 < -x < \delta \Leftrightarrow -\delta < x < 0 \Rightarrow |f_4(x) - (-1)| = 0 < \varepsilon$.

Esto prueba que no existe el $\lim_{x \rightarrow 0} f_4(x)$. [Sí existen $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_4(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f_4(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1} f_4(x)$].

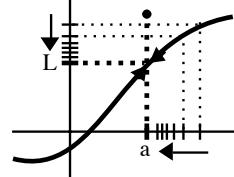
En general, **para ver si f tiene límite no será necesario calcular los laterales**. Sólo lo haremos cuando la f sea diferente a ambos lados de a (como en el ejemplo anterior en $x = 0$).

Este teorema será muy útil para demostrar fácilmente bastantes otros usando las propiedades de las sucesiones y, en el futuro, para calcular límites de sucesiones que aún no sabemos hacer:

Teorema: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow$ **toda** sucesión $\{a_n\} \subset \text{dom } f - \{a\}$ con $\{a_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ satisface $\{f(a_n)\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$.

\Rightarrow) Sabemos que $\forall \varepsilon \exists \delta$ / si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Como $a_n \rightarrow a$, $\exists N / n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \delta \Rightarrow |f(a_n) - L| < \varepsilon$,
 con lo que la sucesión $\{f(a_n)\} \rightarrow L$.



\Leftarrow) Si $f(x)$ no tiende a L existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe algún x con $0 < |x - a| < \delta$ pero con $|f(x) - L| > \varepsilon$.

En particular, para todo n existe algún a_n con $0 < |a_n - a| < \frac{1}{n}$ pero $|f(a_n) - L| > \varepsilon$: existe, pues, $\{a_n\}$ que converge hacia a pero con $\{f(a_n)\} \not\rightarrow L$.

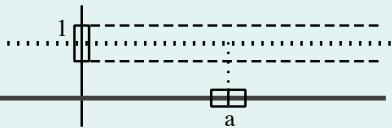
Gracias al teorema, **para ver que una f no tiene límite en a bastará encontrar una $\{a_n\}$ (formada por puntos de $\text{dom } f$) que tienda hacia a y tal que $\{f(a_n)\}$ diverja, o bien encontrar dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que $\{f(a_n)\}$ y $\{f(b_n)\}$ tiendan hacia distintos límites**. Esto puede permitir formalizar de forma sencilla la no existencia de límites sin tener que acudir a la negación de la definición:

Ej. Como $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$ pero $\{f_4(a_n)\} = -1, 1, -1, 1, \dots$ diverge $\Rightarrow f_4$ no tiene límite en $x=0$.

[Para otras $b_n \rightarrow 0$ sí tiene límite $\{f_4(b_n)\}$ (por ejemplo, para cualquier $\{b_n\}$ con $b_n > 0$ dicho límite es 1); pero el teorema pide que **todas** converjan y que el límite de **todas** sea el mismo].

Ej. $f_5(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ irracional} \end{cases}$. Intuitivamente parece claro que f_5 no tiene límite para ningún a (racional o irracional). Por ejemplo, no puede tender f_5 hacia 1 cuando $x \rightarrow a$ pues por pequeño que sea el δ hay x del entorno (los irracionales) con $|f_5(x) - 1| > \varepsilon$ (para los $\varepsilon < 1$). Lo mismo sucede con otros posibles límites. Esto es mucho más fácil de formalizar con sucesiones: f_5 no tiene límite en a pues si $\{a_n\}$ es una sucesión de racionales y

$\{b_n\}$ de irracionales tiendiendo hacia a , se tiene que $f_5(a_n) \rightarrow 1$ mientras que $f_5(b_n) \rightarrow 0$. (Estas sucesiones siempre existen, pues en todo entorno de a hay infinitos racionales e irracionales).



Las siguientes definiciones incluyen " ∞ " (**no son límites normales**; como siempre ∞ es sólo un símbolo; en sentido estricto no tiene límite una f que tiende a $+\infty$ o a $-\infty$):

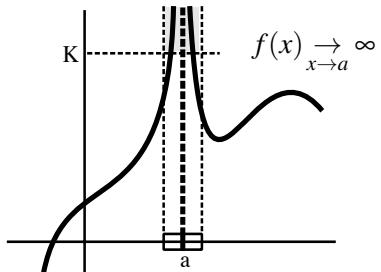
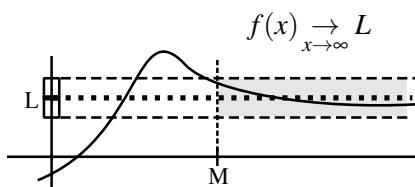
Def. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ [$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$] si $\forall \varepsilon > 0 \exists M$ tal que si $x > M$ [$x < M$] $\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Def. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ [$-\infty$] si $\forall K \exists \delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K$ [$f(x) < K$]

Def. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ si $\forall K \exists M$ tal que si $x > M \Rightarrow f(x) > K$

[Análogamente $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, ...]

Un par de interpretaciones geométricas:



Ej. La función $f_6(x) = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ si $x \rightarrow \infty$ pues $\forall \varepsilon > 0 \exists M = \frac{1}{\varepsilon}$ tal que si $x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$, y tiende a ∞ cuando $x \rightarrow 0^+$ pues $\forall K \exists \delta = \frac{1}{K}$ tal que si $0 < x - 0 < \frac{1}{K} \Rightarrow \frac{1}{x} > K$. [Análogamente se vería que $f_6 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ y que $f_6 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$. No existe el $\lim_{x \rightarrow 0} f_6(x)$].

Ej. $f_7(x) = \sqrt[3]{x} + \operatorname{th} x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$, porque $\forall K \exists M$ tal que $f_7(x) > \sqrt[3]{x} - 1 > K$ si $x > M = (K+1)^3$.

Se pueden probar relaciones entre estos nuevos 'límites' y los de sucesiones. Por ejemplo:

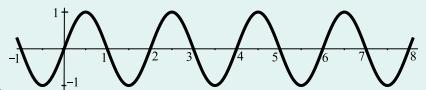
Teorema:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ toda sucesión $\{a_n\} \subset \operatorname{dom} f$ con $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ cumple $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$.

En particular, como la sucesión $\{n\} \rightarrow \infty$, deducimos que $\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L \Rightarrow f(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L}$.

La afirmación contraria a la anterior es claramente falsa.

Por ejemplo, para $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ es $\{f(n)\} = 0, 0, \dots \rightarrow 0$, pero ni 0 ni ningún otro L es el límite de f cuando $x \rightarrow \infty$.



Teorema:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow$ toda sucesión $\{a_n\} \subset \operatorname{dom} f - \{a\}$ con $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ cumple $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Como consecuencia de los límites de sucesiones se puede demostrar ahora fácilmente:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L, g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} M \Rightarrow f \pm g \xrightarrow{x \rightarrow a} L \pm M, f \cdot g \xrightarrow{x \rightarrow a} L \cdot M.$$

Teorema: Si además $M \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{L}{M}$.

Lo anterior es válido si se sustituye a por a^+ , a^- , $+\infty$ ó $-\infty$.

Todas se demuestran igual, relacionando sucesiones y funciones. Por ejemplo, la primera:

Sea cualquier $a_n \rightarrow a$, $a_n \neq a$. Por tender la suma de sucesiones a la suma de los límites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f \pm g)(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \pm \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = L \pm M \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f \pm g)(x) = L \pm M.$$

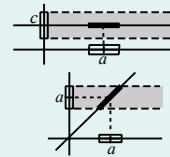
La **continuidad** se define usando el concepto de límite. Ahora sí importa el valor de $f(a)$:

Def. f es **continua** en un punto a interior al dominio de f si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, o sea,
si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si x cumple $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

[Luego f no es continua si no existe límite o no existe $f(a)$ o si existiendo no coinciden].

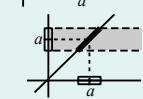
Ej. Tres sencillas funciones continuas en cualquier punto a son:

$$f(x) = c : \forall \varepsilon > 0 \text{ vale cualquier } \delta \text{ para que } |x - a| < \delta \Rightarrow |c - c| = 0 < \varepsilon.$$



$$f(x) = x : \forall \varepsilon > 0 \text{ basta tomar } \delta = \varepsilon \text{ para que } |x - a| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |x - a| < \varepsilon.$$

$$f(x) = |x| : \forall \varepsilon > 0 \text{ tomando } \delta = \varepsilon \text{ es } ||x| - |a|| \leq |x - a| < \varepsilon \text{ si } |x - a| < \delta.$$



Ej. $f_3(x) = x^3 \arctan \frac{1}{x}$ no es continua en 0, pues no está definida $f_3(0)$. Pero si definimos

$$f_3(0) = 0 \text{ sí lo es, pues vimos que } \lim_{x \rightarrow 0} f_3(x) = 0. \text{ Si fuese } f_3(0) = 7 \text{ sería discontinua.}$$

f_4 no puede hacerse continua en 0 definiendo adecuadamente $f_4(0)$, pues no existe $\lim_{x \rightarrow 0} f_4(x)$.

De los teoremas para límites se deducen:

Teorema:

f es continua en $a \Leftrightarrow$ **toda** sucesión $\{a_n\} \subset \text{dom } f$ con $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ cumple $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$.

[Por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$ **si f es continua** (no, si es discontinua)].

Teorema: Si f y g son continuas en a entonces $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ son continuas en a .
Si además $g(a) \neq 0$, también f/g es continua en a .

Por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) \cdot g(a)$. Las otras igual.

[Se podrían probar directamente a partir de la definición; la de la suma por ejemplo:

$\forall \varepsilon, |f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \varepsilon$ si $|x - a| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,
siendo δ_1 y δ_2 tales que: $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $|x - a| < \delta_1$, $|g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $|x - a| < \delta_2$,
y estos δ existen por ser f y g continuas en a].

Teorema: g continua en a y f continua en $g(a) \Rightarrow f \circ g$ continua en a .

$$a_n \xrightarrow{g \text{ cont. en } a} g(a_n) \xrightarrow{g \text{ cont. en } a} g(a) \xrightarrow{f \text{ cont. en } g(a)} (f \circ g)(a_n) = f(g(a_n)) \xrightarrow{f \text{ cont. en } g(a)} f(g(a)) = (f \circ g)(a).$$

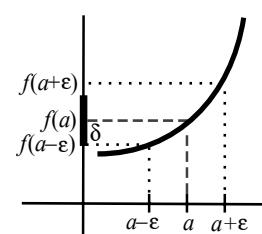
Teorema: f continua en a y estrictamente monótona en un entorno de $a \Rightarrow f^{-1}$ continua en $f(a)$.

Sea f estrictamente creciente (análogo si fuera decreciente).

$$\forall \varepsilon \text{ buscamos } \delta \text{ tal que } |y - f(a)| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - a| < \varepsilon$$

$$[\text{o sea, } f(a) - \delta < y < f(a) + \delta \Rightarrow a - \varepsilon < f^{-1}(y) < a + \varepsilon].$$

El dibujo sugiere $\delta = \min\{f(a+\varepsilon) - f(a), f(a) - f(a-\varepsilon)\} > 0$.



$$\text{Entonces: } f(a) - \delta < y < f(a) + \delta \Rightarrow f(a-\varepsilon) < y < f(a+\varepsilon) \Rightarrow a - \varepsilon < f^{-1}(y) < a + \varepsilon.$$

$$[\text{porque } f(a) + \delta \leq f(a+\varepsilon), f(a-\varepsilon) \leq f(a) - \delta] \quad [\text{porque } f^{-1} \text{ creciente}].$$

Hemos definido continuidad en un punto. En **intervalos** las definiciones son de este tipo:

Def. f es continua en (a, b) si es continua en todo x de (a, b) .
 f es continua en $[a, b]$ si es continua en (a, b) , $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

[No podemos decir simplemente ‘continua en todo $x \in [a, b]$ ’, pues a y b no son puntos interiores].

Probemos que **todas las funciones elementales** (de 1.4) **son continuas en su dominio**.

Los **polinomios** $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ son continuos en todo \mathbf{R}

(ya que son sumas y productos de funciones continuas en todo a de \mathbf{R}).

Las **funciones racionales** (cocientes de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$) son continuas $\forall a$ con $Q(a) \neq 0$.

Las **raíces** $\sqrt[n]{x}$ son continuas en su dominio: \mathbf{R} si n impar, \mathbf{R}_+ si n par (en $x=0$ hablamos de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x}$), por ser inversas de funciones estrictamente crecientes y continuas.

Las **funciones trigonométricas y sus inversas** también son continuas en su dominio:

Comencemos probando que $f(x) = \sin x$ es continua $\forall a \in \mathbf{R}$: $\forall \varepsilon > 0$, si $|x-a| < \delta = \varepsilon$

$$\text{se cumple: } |\sin x - \sin a| = |2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}| \leq 2 |\sin \frac{x-a}{2}| \leq 2 \frac{|x-a|}{2} < \varepsilon.$$

$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ es continua $\forall a$ por ser composición de funciones continuas $\forall a$.

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ es continua si $\cos x \neq 0$, es decir, si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$\arcsin x$, $\arccos x$ en $[-1, 1]$ y $\arctan x$ $\forall x$ son inversas de monótonas continuas.

Para probar la continuidad de **exponentiales** y **logaritmos** debemos esperar al estudio de las integrales. El teorema fundamental de cálculo integral que demostraremos en 5.2 asegurará que

$\log x \equiv \int_1^x \frac{dt}{t}$ es continua $\forall x > 0$. De ahí deducimos la continuidad de las demás:

e^x es continua en \mathbf{R} por ser inversa de continua. Y por ser composición de continuas:

$x^b \equiv e^{b \log x}$ continua en $(0, \infty)$ [si $b > 0$ en $[0, \infty)$, tomando 0 como su valor en 0],

$b^x \equiv e^{x \log b}$ ($b > 0$) continua $\forall x$, $\log_b x \equiv \frac{\log x}{\log b}$ ($b > 0, b \neq 1$) continua $\forall x > 0$.

Las **funciones hiperbólicas**, sumas, diferencias y cocientes con denominadores no nulos de funciones continuas, son también continuas en todo su dominio \mathbf{R} .

Con todo lo anterior podemos afirmar que muchísimas funciones son continuas en casi todos los puntos **sin usar la definición** (el trabajo con los ε lo hemos hecho en los teoremas, sobre todo en sucesiones, y sólo para funciones muy raras habrá que acudir a ella).

Ej. $f_8(x) = \frac{e^{x/(x-1)} + \arctan[\log(x^2+1)] - \cos^3 x + \sqrt[4]{x}}{[3 + \arcsen \frac{x}{3}] \operatorname{sh} x}$ es continua en $(0, 1) \cup (1, 3]$:

el numerador lo es en $[0, \infty) - \{1\}$, pues $\arctan[\log(x^2+1)] - \cos^3 x$ es continua en \mathbf{R} (suma de composiciones de continuas), la raíz en \mathbf{R}_+ y la exponencial si $x \neq 1$; el denominador es continuo en $[-3, 3]$ (por el $\arcsen \frac{x}{3}$) y sólo se anula en 0 (\arcsen como mucho vale $-\frac{\pi}{2}$ y sólo $\operatorname{sh} 0 = 0$).

Con tantas funciones continuas el **cálculo** de límites es casi siempre un cálculo tonto, pues basta sustituir x por a en la expresión de la función: $f_8(x) \rightarrow f_8(2)$ si $x \rightarrow 2$, por ejemplo, por ser f_8 continua en 2. También son sencillos algunos límites con **infinitos**, utilizando propiedades como las de sucesiones (demostables basándose en ellas y los teoremas que relacionan funciones y sucesiones o directamente):

“ $c \pm \infty = \pm \infty$ ”, “ $\operatorname{acot} \pm \infty = \pm \infty$ ”, “ $\infty + \infty = \infty$ ”, “ $\infty \cdot (\pm \infty) = \pm \infty$ ”, “ $0 \cdot \operatorname{acot} = 0$ ”,
 “ $\frac{c}{\pm \infty} = 0$ ”, “ $\frac{\operatorname{acot}}{\pm \infty} = 0$ ”, “ $p \cdot (\pm \infty) = \pm \infty$ ” ($p > 0$), “ $\frac{\pm \infty}{p} = \pm \infty$ ” ($p > 0$), “ $\frac{p}{\pm 0} = \pm \infty$ ” ($p > 0$),
 “ $\log(+0) = -\infty$ ”, “ $\log(\infty) = \infty$ ”, “ $e^\infty = \infty$ ”, “ $e^{-\infty} = 0$ ”, “ $\arctan(\pm \infty) = \pm \frac{\pi}{2}$ ”, ...

Como siempre, hay que leerlo en sentido de límites; por ejemplo, “ $c \pm \infty = \pm \infty$ ” significa que si f tiende a c y g hacia $+\infty$ ó $-\infty$ (cuando $x \rightarrow a$, a^+ , a^- , $+\infty$ ó $-\infty$), la suma $f+g$, respectivamente, tiende a $+\infty$ ó $-\infty$. La notación $+0$ (-0) significa aquí que $f \rightarrow 0$ siendo $f > 0$ ($f < 0$).

[Con esto, se tiene que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_8(x) = \infty$ ($\frac{c+\infty}{p}$) y $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_8(x) = \frac{\arctan[\log 2] - \cos^3 1 + 1}{\operatorname{sh} 1 [3 + \arcsen \frac{1}{3}]}$].

Como en sucesiones, a pesar de tanto teorema quedan límites difíciles: los **indeterminados**, la mayoría de los cuales (los que no admitan trucos algebraicos como los de sucesiones) sólo sabremos hallar una vez que estudiemos las derivadas (por ejemplo, el límite de f_8 cuando $x \rightarrow 0^+$, que es de la forma $\frac{0}{0}$).

El siguiente teorema permite calcular un límite indeterminado que pronto necesitaremos:

Teorema: Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y $\lim f = \lim h = L \Rightarrow \lim g = L$.
 $(x \rightarrow a, a^+, a^-, +\infty \text{ ó } -\infty, \text{ todos valen})$.

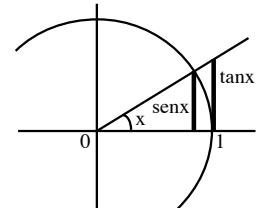
Como $f, h \rightarrow L$, es $L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$.

Deducimos el siguiente límite indeterminado (será inmediato con L'Hôpital o Taylor), usando sólo propiedades trigonométricas (basadas en la no muy rigurosa definición dada de $\sin x$):

$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 0$. Si $x > 0$, por el significado geométrico de $\sin x$ y $\tan x$:
 $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Como $\cos x \rightarrow 1$, el teorema anterior prueba el límite para $x > 0$.

Si $x < 0$, por ser $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, reducimos el límite al anterior.



Mucho más fáciles de calcular serían (no son indeterminados):

Ej. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$, por ser esta función continua en $x = \frac{\pi}{2}$.

[Hay una idea errónea que suele estar muy extendida: esta función (como otras) no es continua en el punto porque al sustituir x por $\frac{\pi}{2}$ salga $f(\frac{\pi}{2})$ (faltaría más). Lo es (y por eso es fácil el límite y basta con sustituir) porque se ha demostrado que $\sin x$ y x son continuas y que el cociente de continuas con denominador no nulo también lo es].

Ej. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, pues sabemos que " $\frac{\text{acot}}{\pm\infty} = 0$ ".

De cada límite de funciones se deducen infinitos **Límites de sucesiones**. Del indeterminado anterior:

Ej. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n^2)}{1/n^2} = 1$, puesto que $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ y $g(x) = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow 0$.

Ej. Calculemos el límite de la sucesión $a_n = \frac{n^k - n^2 \sin \frac{1}{n}}{\sqrt[3]{n} - n \arctan n}$, para i) $k=2$, ii) $k=1$.

Si $k=2$, $a_n = \frac{n(1 - \sin \frac{1}{n})}{n^{-2/3} - \arctan n} \rightarrow \frac{\infty(1-0)}{0-\pi/2} = -\infty$ [$\sin x$ es continua en $x=0$].

Si $k=1$, $a_n = \frac{1 - n \sin \frac{1}{n}}{n^{-2/3} - \arctan n} \rightarrow \frac{1-1}{0-\pi/2} = 0$, pues $\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$.

Hallando límites será, en ocasiones, conveniente realizar **cambios de variable** como:

Teorema: $[t=g(x)]$ g continua en a , $g(x) \neq g(a)$ si $x \neq a$ y $\lim_{t \rightarrow g(a)} f(t) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = L$

[Casi igual que la demostración de la continuidad de $f \circ g$].

Ej. Con este teorema podemos deducir del límite indeterminado hallado algún otro del tipo $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sin(x+5)}{x+5} = 1 \quad [t = g(x) = x+5 \text{ es continua, no se anula si } x \neq -5 \text{ y } \frac{\sin t}{t} \rightarrow 1].$$

Otro que exige algo de ingenio (pero que será muy fácil con los desarrollos de Taylor):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Complicándolo un poco: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x^2} = 1 \cdot \frac{0}{1} = 0.$$

Como ningún teorema nos dice nada sobre el siguiente, tendremos que acudir a la definición:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan x^2}{x}$$
 no existe porque la función se va a $\pm\infty$ infinitas veces (si $x = [\frac{\pi}{2} + k\pi]^{1/2}$)

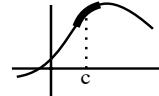
y por tanto su gráfica se sale de la banda limitada por $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ sea cuál sea el L .

2.3 Teoremas sobre funciones continuas en intervalos

Teorema:

$$f \text{ continua en } c \text{ y } f(c) > 0 [< 0] \Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ tal que } f(x) > 0 [< 0] \text{ si } x \in (c - \delta, c + \delta)$$

Dado $\varepsilon = f(c)$, $\exists \delta > 0$ si $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < f(c) \Rightarrow f(x) - f(c) > -f(c) \Rightarrow f(x) > 0$ [si $f(c) < 0$ tomamos $\varepsilon = -f(c)$]



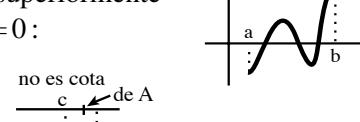
Teorema de Bolzano para funciones continuas:

$$f \text{ continua en } [a, b], f(a) < 0 < f(b) \Rightarrow \text{existe algún } c \in (a, b) \text{ tal que } f(c) = 0.$$

[La gráfica corta el eje x en algún punto (el teorema no dice dónde), quizás en más de uno].

Sea $A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\} \neq \emptyset$ ($a \in A$) y acotado superiormente (por b) \Rightarrow existe $c = \sup A$. Probemos que $f(c) = 0$:

Si $f(c) < 0 \Rightarrow \exists \delta / f(x) < 0$ en $(c - \delta, c + \delta)$
y c no sería cota de A .

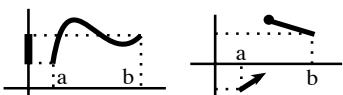


Si $f(c) > 0 \Rightarrow \exists \delta / f(x) > 0$ en $(c - \delta, c + \delta)$
y habría cotas menores.

En ninguno de los dos casos c podría ser el supremo de A .

Teorema:

$$f \text{ continua en } [a, b] \Rightarrow f \text{ toma todos los valores comprendidos entre } f(a) \text{ y } f(b).$$

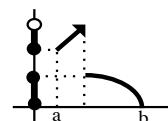


[Normalmente tomará más y si f no es continua, no tiene que tomarlos, como muestran los dibujos de la izquierda].

Si $f(a) < f(b)$, sea p con $f(a) < p < f(b)$. La función $g = f - p$ es continua en $[a, b]$ con $g(a) < 0 < g(b)$. El teorema de Bolzano asegura que existe $c \in (a, b)$ con $g(c) = 0$, es decir, con $f(c) = p$. Si $f(a) > p > f(b)$, como $-f$ es continua y $-f(a) < -p < -f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b)$ tal que $-f(c) = -p$.

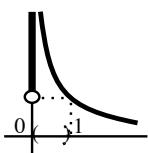
Hemos hablado de conjuntos acotados y del máximo de un conjunto, pero no de una función. De modo natural, f se dice **acotada** en $A \subset \mathbb{R}$ si lo está el conjunto $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ y se define **valor máximo** de f en A como el máximo del conjunto $f(A)$ (en caso de que exista). Análogamente se define **valor mínimo** de f en A .

Ej. La función del dibujo (que sí es acotada) no tiene valor máximo en $[a, b]$, aunque sí valor mínimo (se alcanza en b y su valor es 0); está claro que no es continua en $[a, b]$.



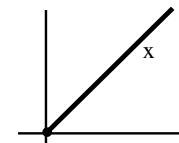
Teorema: $f \text{ continua en } [a, b] \Rightarrow f \text{ acotada en } [a, b].$

Si f no estuviese acotada superiormente podríamos escoger un $x_n \in I \equiv [a, b]$ con $f(x_n) > n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\{x_n\}$ acotada, existe $\{x_{n_j}\} \rightarrow x_o \in I$ (por ser cerrado). Como f es continua en x_o tendríamos $f(x_{n_j}) \rightarrow f(x_o)$, lo que es imposible pues $\{f(x_{n_j})\}$ no está acotada ($> n_j$) y no puede converger. [Análogamente se vería que está acotada inferiormente].

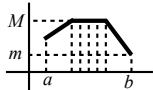


El teorema **no es cierto** para (a, b) ó $[a, \infty)$:

Ej. $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua pero no acotada en $(0, 1)$
y le pasa lo mismo a $f(x) = x$ en $[0, \infty)$.



Teorema: f continua en $[a,b] \Rightarrow$ existen los valores máximo y mínimo de f en $[a,b]$.



O sea, existen $y,z \in [a,b]$ tales que $f(z) \leq f(x) \leq f(y)$ para todo $x \in [a,b]$.
[Estos y, z pueden no ser únicos, desde luego].

Sea $M = \sup f(I)$. Existe $\{y_n\} \subset I$ tal que $M - \frac{1}{n} < f(y_n) \leq M \forall n \Rightarrow f(y_n) \rightarrow M$. Podría $\{y_n\}$ no converger pero, siendo acotada, hay seguro una $\{y_{n_j}\}$ subsucesión convergente hacia un $y \in I$. Como f continua en I , $f(y) = \lim f(y_{n_j}) = M$ y, por tanto, el supremo pertenece a $f(I)$. Análogamente, o considerando $-f$, se ve que el ínfimo también se alcanza.

[En la demostración se ve que el teorema es válido en conjuntos cerrados y acotados (se les llama **compactos** y son importantes en el cálculo más avanzado)].

Tampoco este teorema es cierto sustituyendo $[a,b]$ por (a,b) o por $[a,\infty)$:

Ej. $f(x) = 1/x$ es continua en $(0,1)$ pero no alcanza su máximo ni su mínimo en $(0,1)$.

Ej. $f(x) = x$ no tiene máximo en $[0,\infty)$ (su valor mínimo existe y vale 0).

Funciones uniformemente continuas en un intervalo I

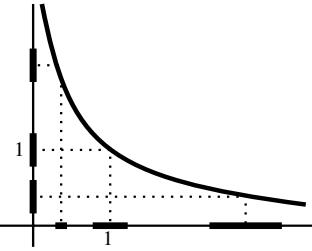
[Definimos este concepto porque aparecerá en la demostración de algún teorema].

f era continua en I si lo era en cada x de I (límites laterales en los posibles extremos de I), es decir, si $\forall x \in I$ y $\forall \varepsilon$ existe un $\delta(\varepsilon, x)$ tal que $\forall y \in I$ si $|y-x| < \delta$ entonces $|f(y)-f(x)| < \varepsilon$.

Ej. Consideremos $f(x) = \frac{1}{x}$. En $(0,1)$ sabemos que es continua:

$$\forall x \text{ y } \forall \varepsilon \text{ existe un } \delta \text{ tal que si } |y-x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| < \varepsilon.$$

Pero dado un ε se ve que el δ que debemos tomar es más pequeño según elijamos un x más pequeño. Intuitivamente está claro que no podemos encontrar un δ que valga para todos los x de $(0,1)$: por pequeño que sea δ , si x es muy pequeño, la función tomará valores muy diferentes en $(x-\delta, x+\delta)$. Pero para la misma f en $[1,\infty)$ se ve que dado un ε existe un δ válido para cualquier x del intervalo (el que valga para $x=1$ valdrá para también para los $x>1$).



Def.

f es **uniformemente continua** en I si

$$\forall \varepsilon \text{ existe un } \delta(\varepsilon) \text{ tal que } \forall x, y \in I \text{ si } |y-x| < \delta \text{ entonces } |f(y)-f(x)| < \varepsilon.$$

Ej. Acabemos de formalizar que $f(x) = \frac{1}{x}$ no es uniformemente continua en $(0,1)$:

Sea $\varepsilon = 1$. Por pequeño que sea δ encontramos $x, y \in (0,1)$ con $|y-x| < \delta$ pero $\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| > \varepsilon$.

Por ejemplo, $x = \frac{\delta}{4}$, $y = \delta$ satisfacen $|y-x| = \frac{3\delta}{4} < \delta$ pero $\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = \frac{3}{\delta} > 1$ (pues $\delta < 1$).

Formalizamos ahora que $f(x) = \frac{1}{x}$ sí es uniformemente continua en $[1,\infty)$:

$$\forall \varepsilon \exists \delta = \varepsilon \text{ tal que } \forall x, y \in [1, \infty) \text{ con } |y-x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = \frac{|y-x|}{xy} \leq |y-x| < \varepsilon.$$

Evidentemente: f uniformemente continua en $I \Rightarrow f$ continua en I .

La implicación \Leftarrow es falsa en general; aunque sí es válida cuando $I = [a,b]$:

Teorema: f continua en $[a,b] \Rightarrow f$ uniformemente continua en $[a,b]$.

Por reducción al absurdo. Supongamos a la vez f continua y no uniformemente continua en $[a,b]$. Existe, pues, $\varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ podemos encontrar x, y con $|y-x| < \delta$ pero $|f(y)-f(x)| \geq \varepsilon$. En particular, para cada $\delta = \frac{1}{n}$ tenemos $\{x_n\}, \{y_n\} \subset [a,b]$ con $|y_n-x_n| < \frac{1}{n}$ y $|f(y_n)-f(x_n)| \geq \varepsilon \forall n$. $\{x_n\}$ acotada $\Rightarrow \exists \{x_{n_j}\}$ convergente a un c ($\in [a,b]$ por ser cerrado) $\Rightarrow f(x_{n_j}) \rightarrow f(c)$ (f es continua). Como $|y_{n_j}-x_{n_j}| < 1/n_j \rightarrow 0$ también $f(y_{n_j}) \rightarrow f(c)$ y por tanto $|f(y_{n_j})-f(x_{n_j})| \rightarrow 0$, lo que está en clara contradicción con el hecho de que $|f(y_{n_j})-f(x_{n_j})| \geq \varepsilon \forall n_j$.

[En la demostración se ve que también este teorema será válido en cualquier conjunto compacto].

3. Derivadas en \mathbb{R}

3.1. Definición y cálculo

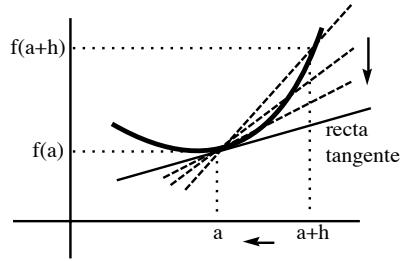
Def. La función f es **derivable** en a (interior al $\text{dom } f$) si existe $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. En ese caso el límite se representa por $f'(a)$ y se llama **derivada** de f en a .

Dos aplicaciones.

Pendiente de la tangente a una curva: $[f(a+h) - f(a)]/h$ es la pendiente de la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$. Cuando $h \rightarrow 0$, la secante tiende hacia la recta tangente y su pendiente tiende hacia $f'(a)$.

Así pues, la **ecuación de la recta tangente** a la gráfica de f en el punto a es (si $f'(a)$ existe, claro):

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$



Velocidad instantánea: si $d(t)$ es la distancia recorrida por un móvil en el tiempo t , $\frac{d(a+h) - d(a)}{h}$ es su velocidad media en el intervalo $[a, a+h]$; por tanto, $d'(a)$ es su velocidad en el instante $t=a$. Más en general, la derivada indica el ritmo de cambio de una magnitud respecto de otra.

Se llama f' , **función derivada** de f , a la que hace corresponder a cada $x \in \text{dom } f$ en que f es derivable el valor $f'(x)$; $f''(a)$ será la derivada de $f'(x)$ en el punto a (un número) y f''' la función derivada de f' ; ... En general, $f^{(n)}$ es la función derivada de $f^{(n-1)}$ [definida en los $x \in \text{dom } f^{(n-1)}$ tales que existe $f^{(n)}$].

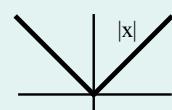
Otra notación famosa es la de Leibniz: $f' = \frac{df}{dx}$, $f'(a) = \frac{df}{dx}|_{x=a}$, $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$.

Ej. $f(x) = c$ es derivable para todo a y $f'(a) = 0$ ya que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$ [claro, tangente horizontal].

Ej. $g(x) = x^{7/3}$. Como existe $g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{7/3} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{4/3} = 0$, g es derivable en $x=0$.

Si $a \neq 0$ también existirá $g'(a)$; es difícil verlo con la definición, pero pronto será muy sencillo.

Ej. $h(x) = |x|$. Si $a > 0$, $h'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a+h-a}{h} = 1$. [Deducimos de paso que $(x)' = 1$.]
Si $a < 0$, $h'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-a-h+a}{h} = -1$.



No existe $h'(0)$ porque $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$ no existe (aunque sí existen los límites laterales).

Def. $f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$; $f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (derivadas por la derecha e izquierda, respectivamente)

Está claro que f es derivable en a si y sólo si existen y coinciden $f'(a^+)$ y $f'(a^-)$.

Ej. $h(x) = |x|$, posee derivadas laterales en 0 pero no coinciden: $h'(0^+) = 1$, $h'(0^-) = -1$.

Teorema: f derivable en $a \Rightarrow f$ continua en a .

Hay funciones continuas no derivables
($h(x) = |x|$, por ejemplo; tienen ‘picos’).

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h = f'(a) \cdot 0 = 0 \Rightarrow f \text{ continua en } a.$$

[Y como siempre (no $q \Rightarrow$ no p), si f no es continua no puede ser derivable].

Con el siguiente teorema podremos calcular casi todas las derivadas sin acudir a la definición:

Teorema:

f y g derivables en a y $c \in \mathbb{R} \Rightarrow c \cdot f, f \pm g, f \cdot g$ son derivables en a y se tiene:

$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a); (f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a); (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Si además $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ y $\frac{f}{g}$ son derivables en a y es

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}; \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

g derivable en a y f derivable en $g(a) \Rightarrow f \circ g$ derivable en a y

$$(f \circ g)' = f'[g(a)]g'(a) \quad [\text{regla de la cadena}].$$

f derivable en $f^{-1}(b)$ y $f'[f^{-1}(b)] \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ derivable en b y $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'[f^{-1}(b)]}$.

$c \cdot f$ es caso particular de $f \cdot g$; de $c \cdot f$ y de la suma se deduce la de $f - g = f + (-1) \cdot g$.

Las demás:

$$f + g \quad \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f'(a) + g'(a).$$

$$f \cdot g \quad \frac{(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a)}{h} = f(a+h) \frac{g(a+h) - g(a)}{h} + g(a) \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

(puesto que f es continua en a por ser derivable).

$$1/g \quad \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} = \frac{g(a) - g(a+h)}{hg(a)g(a+h)} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2} \quad (g \text{ continua en } a, g(a) \neq 0 \Rightarrow g(a+h) \neq 0 \text{ si } h \text{ pequeño})$$

$$f/g \quad \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \frac{1}{g(a)} - \frac{g'(a)}{[g(a)]^2} f(a)$$

$$f \circ g \quad \frac{f[g(a+h)] - f[g(a)]}{h} = \frac{f[g(a) + g(a+h) - g(a)] - f[g(a)]}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f'[g(a)] \cdot g'(a),$$

ya que $k = g(a+h) - g(a) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$ por ser g continua.

[Esta demostración necesita correcciones (ver Spivak), pues $g(a+h) - g(a)$ podría hacerse 0 infinitas veces para valores muy pequeños de h].

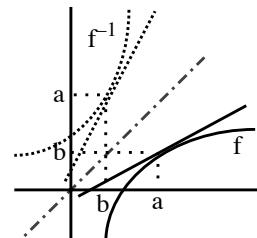
f^{-1} Sea $b = f(a)$; por ser $f'(a) \neq 0$, es f inyectiva $\Rightarrow \exists f^{-1}$ en un entorno de a ; entonces para cada h pequeño hay un único k tal que $f(a+k) = b+h$. Por tanto:

$$\frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} = \frac{f^{-1}(f(a+k)) - a}{b+h-b} = \frac{k}{f(a+k) - f(a)} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \frac{1}{f'(a)}$$

Las dos últimas reglas de derivación adoptan una forma sugerente, pero imprecisa, con la notación de Leibniz:

$$\text{Si } z = g(y), y = f(x) : \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}, \text{ si } \frac{dx}{dy} \neq 0.$$

(no dejan claro que las diferentes derivadas están evaluadas en puntos diferentes).



Derivadas de las funciones elementales:

$$[x^b]' = bx^{b-1} \quad \text{para todo } b \text{ real, } x > 0. \text{ Podemos ya demostrarlo si } b \in \mathbf{Q}. \text{ Varios pasos:}$$

Si $b=n \in \mathbf{N}$ [la fórmula es válida entonces $\forall x$], lo probamos por inducción:

Cierto para $n=1$: $[x^1]' = 1x^{1-1} = 1$.

Supuesto cierto si $n-1$: $[x^n]' = [x \cdot x^{n-1}]' = x^{n-1} + x(n-1)x^{n-2} = nx^{n-1}$, cierto para n .

Si $b=0$ está visto. Si $b=-n$, $n \in \mathbf{N}$, $[\frac{1}{x^n}]' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$ [válido $\forall x \neq 0$].

Si $b = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{Z}$, utilizamos la formula para el cálculo de derivadas de funciones inversas:

$f^{-1}(x) = x^{1/n}$ es la inversa de $f(x) = x^n$ cuya derivada $f'(x) = nx^{n-1}$ conocemos.

$$\text{Por tanto: } [x^{1/n}]' = \frac{1}{nx^{n-1}|_{x^{1/n}}} = \frac{1}{nx^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n}x^{1/n-1}.$$

$$\text{Si } b = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbf{Z}, [(x^{1/n})^m]' = m(x^{1/n})^{m-1} \frac{1}{n}x^{(1-n)/n} = \frac{m}{n}x^{(m-n)/n}.$$

↑
regla de la cadena

$$[\log|x|]' = \frac{1}{x}, x \neq 0: \text{ Si } x > 0, [\log x]' = \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{dt}{t} = \frac{1}{x}. \text{ Si } x < 0, [\log(-x)]' = \frac{-1}{-x}.$$

teoremas de integrales

$$[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x, \forall x; [b^x]' = b^x \log b, \forall x, b > 0; [\log_b x]' = \frac{1}{x \log b}, x > 0, b > 0, b \neq 1$$

$f^{-1}(x) = \mathrm{e}^x$ inversa de $f(x) = \log x$ con $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow [\mathrm{e}^x]' = \frac{1}{1/\mathrm{e}^x}.$

$[\mathrm{e}^{x \log b}]' = \mathrm{e}^{x \log b} \log b$ (regla de la cadena de nuevo). $[\frac{\log x}{\log b}]' = \frac{1}{x \log b}.$

Además se deduce: $[x^b]' = [\mathrm{e}^{b \log x}]' = \frac{b}{x} \mathrm{e}^{b \log x} = bx^{b-1}$ para cualquier b real y $x > 0$.

$$[\mathrm{sh}x]' = \mathrm{ch}x, [\mathrm{ch}x]' = \mathrm{sh}x, [\mathrm{th}x]' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x, \forall x$$

Las primeras triviales: $[\mathrm{sh}x]' = [\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}]' = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{ch}x$ (casi igual $[\mathrm{ch}x]'$).

Entonces: $[\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}]' = \frac{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x}$ y sabemos desde 1.4 que $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

$$[\mathrm{sen}x]' = \mathrm{cos}x, [\mathrm{cos}x]' = -\mathrm{sen}x, \forall x; [\mathrm{tan}x]' = \frac{1}{\mathrm{cos}^2 x} = 1 + \mathrm{tan}^2 x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$\frac{1}{h}[\mathrm{sen}(x+h) - \mathrm{sen}x] = \frac{2}{h} \mathrm{sen} \frac{h}{2} \cos(x + \frac{h}{2}) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \mathrm{cos}x \left[\frac{\mathrm{sen}(h/2)}{h/2} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 1 \text{ y } \mathrm{cos}x \text{ es continua} \right].$

$[\mathrm{sen}(x + \frac{\pi}{2})]' = \mathrm{cos}(x + \frac{\pi}{2}) = -\mathrm{sen}x; [\frac{\mathrm{sen}x}{\mathrm{cos}x}]' = \frac{\mathrm{cos}^2 x + \mathrm{sen}^2 x}{\mathrm{cos}^2 x}.$

$$[\arctan x]' = \frac{1}{1+x^2}, \forall x; [\mathrm{arc sen}x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, [\mathrm{arc cos}x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in (-1, 1)$$

$f^{-1}(x) = \arctan(x)$ inversa de $f(x) = \tan x \Rightarrow [\arctan x]' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}.$

Análogamente: $[\mathrm{arc sen}x]' = \frac{1}{\mathrm{cos}(\mathrm{arc sen}x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\mathrm{arc sen}x)}} \left[\begin{array}{l} \mathrm{arc sen}x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ \text{por eso raíz positiva} \end{array} \right].$

$$[\mathrm{arc cos}x]' = \frac{1}{-\mathrm{sen}(\mathrm{arc cos}x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\mathrm{cos}^2(\mathrm{arc cos}x)}}.$$

Con estas derivadas de las funciones elementales y sabiendo cómo se derivan sumas, productos, composiciones, ... ya es fácil derivar cualquier función, salvo en casos excepcionales.

Ej. Para $g(x) = x^{7/3}$ sólo sabíamos hallar $g'(0)$. Pero ya es fácil escribir todas sus derivadas.

$$g'(x) = \frac{7}{3}x^{4/3} \forall x \text{ (en particular, } g'(0)=0, g'(-1)=\frac{7}{3}, \dots). \quad g''(x) = \frac{28}{9}x^{1/3} \forall x.$$

La tercera es $g'''(x) = \frac{28}{27}x^{-2/3} \forall x \neq 0$, pero $g'''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g''(h)-g''(0)}{h}$ ya no existe.

Ej. $k(x) = \left(\frac{\log[7+\operatorname{ch}(3^x+x)]}{5+\arctan(x-2)} \right)^3$ derivable $\forall x$, al ser suma, cociente, composición,... de funciones derivables (el \log se evalúa en valores ≥ 7 y el denominador es mayor que 0 porque el arco tangente vale más que $-\frac{\pi}{2} > -2$).

Sabemos derivarla a pesar de su aspecto terrible (no con la definición, desde luego):

$$k'(x) = 3 \frac{\frac{\operatorname{sh}(3^x+x)(3^x \log 3+1)}{7+\operatorname{ch}(3^x+x)} [5+\arctan(x-2)] - \frac{\log[7+\operatorname{ch}(3^x+x)]}{1+(x-2)^2}}{[5+\arctan(x-2)]^2} \left(\frac{\log[7+\operatorname{ch}(3^x+x)]}{5+\arctan(x-2)} \right)^2.$$

Ej. $l(x) = \log |e^{\cos x} - 1|$. Su dominio $D = \mathbf{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ (esos son los valores que anulan $\cos x$).

Para hallar sus derivadas no necesitamos discutir el valor absoluto ($[\log|x|]' = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$):

$$l'(x) = \frac{-\operatorname{sen}x e^{\cos x}}{e^{\cos x} - 1}, \quad l''(x) = \frac{(\operatorname{sen}^2 x - \cos x) e^{\cos x} (e^{\cos x} - 1) - \operatorname{sen}^2 x e^{2\cos x}}{(e^{\cos x} - 1)^2} = \frac{(\cos x - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{cos} x e^{\cos x}) e^{\cos x}}{(e^{\cos x} - 1)^2}, \dots$$

Tiene infinitas derivadas en D , pues cada una es cociente de derivables con denominador $\neq 0$.

Ej. $m(x) = x|x-x^2|$ es continua $\forall x$ por ser producto, composición... de continuas $\forall x$ [$|x|$ lo es].

Aquí sí hay que discutir el valor absoluto (no tiene delante un logaritmo):

$$m(x) = \begin{cases} x^2 - x^3 & \text{si } x \in [0, 1] \\ x^3 - x^2 & \text{si } x \notin (0, 1) \end{cases}; \quad m'(x) = \begin{cases} 2x - 3x^2 & \text{si } x \in (0, 1) \\ 3x^2 - 2x & \text{si } x \notin [0, 1] \end{cases}; \quad m''(x) = \begin{cases} 2 - 6x & \text{si } x \in (0, 1) \\ 6x - 2 & \text{si } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

Utilizando las expresiones del intervalo adecuado deducimos que:

$$m'(0^-) = 0 = m'(0^+), \quad m \text{ derivable en } x=0; \quad m'(1^-) = -1 \neq 1 = m'(1^+), \quad \text{no derivable en } x=1.$$

$$m''(0^-) = -2 \neq 2 = m''(0^+), \quad m'' \text{ no existe si } x=0; \quad \text{tampoco existe } m''(1) \text{ por no existir } m'(1).$$

Ej. $p(x) = x^x = e^{x \log x}$ (recordamos que se define $f(x)^g(x) = e^{g(x) \log[f(x)]}$). Sus derivadas son:
 $p'(x) = e^{x \log x} [\log x + 1]; \quad p''(x) = e^{x \log x} ([\log x + 1]^2 + \frac{1}{x}); \dots \forall x > 0.$

Ej. $q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$. Hallemos q' y q'' , precisando su dominio, y veamos para qué x se anulan.
 q es continua en todo el $\operatorname{dom} q = (-2, \infty)$ [el de la raíz donde se anula].

Siempre que podamos (como en este ejemplo) **derivaremos potencias mejor que cocientes**:

$$q(x) = x(x+2)^{-1/2}, \quad q'(x) = (x+2)^{-1/2} - \frac{x}{2}(x+2)^{-3/2}, \quad q''(x) = -(x+2)^{-3/2} + \frac{3x}{4}(x+2)^{-5/2}$$

Están definidas también si $x > -2$. Para ver dónde se anulan recuperamos los cocientes:

$$q'(x) = \frac{x+4}{2(x+2)^{3/2}}, \quad q''(x) = \frac{-x-8}{4(x+2)^{5/2}} \rightarrow \text{no se anulan para ningún } x (-4, -8 \notin \operatorname{dom} q).$$

Ej. Hallemos la derivada de la función definida implícitamente por la curva $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ en un entorno del punto $(0, 2)$.

[Se trata de la circunferencia $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$].

Una posibilidad es escribir explícitamente la función que define:

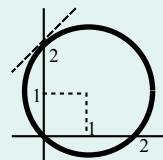
$$y = 1 + \sqrt{1+2x-x^2} \quad (y = 1 - \sqrt{\quad} \text{ no pasa por el punto})$$

$$\text{y derivarla: } y'(0) = (1-x)(1+2x-x^2)^{-1/2}|_{x=0} = 1.$$

Pero más corto, y válido en casos en que no podamos despejar, es **derivarnos implícitamente**:

$$2x + 2y(x)y'(x) - 2 - 2y'(x) = 0 \rightarrow y'(x) = \frac{1-x}{y-1}, \quad \text{que para } (x, y) = (0, 2) \text{ nos da } y'(0) = 1.$$

[Derivar implícitamente se puede si se obtiene una y' finita (aquí si $y \neq 1$). En cálculo de varias variables se prueba que entonces la curva define una función $y(x)$ derivable].



Def. Se dice que f es **derivable** en un intervalo abierto I [finito o infinito] si lo es en todos los puntos del intervalo; $f \in C^1(I)$ [es **de clase 1** en I] si además f' es continua en I . Diremos que $f \in C^n(I)$ [**de clase n**] si f tiene n derivadas en I y $f^{(n)}$ es continua en I , y que $f \in C^\infty(I)$ [**de clase infinito**] si hay derivadas de cualquier orden de f en I .

[Para intervalos cerrados, como siempre, hay que preocuparse de los extremos:

$$f \text{ es derivable en } [a, b] \text{ si lo es en } (a, b) \text{ y existen } f'(a^+) \text{ y } f'(b^-); \\ f \in C^1[a, b] \text{ si } f \in C^1(a, b), f'(x) \rightarrow f'(a^+) \text{ si } x \rightarrow a^+ \text{ y } f'(x) \rightarrow f'(b^-) \text{ si } x \rightarrow b^-].$$

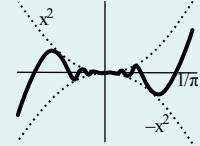
Todas las funciones elementales descritas en 1.4 son de C^∞ en su dominio, con excepción de $\arcsen x$ y $\arccos x$, que no tienen siquiera una derivada en $x = \pm 1$, y x^b con $b > 0$ y $b \notin \mathbb{N}$, para la que ya no existe $f^{(n)}$ en $x = 0$ cuando el exponente de $f^{(n-1)}$ pasa a estar entre 0 y 1, que es lo que le pasa a la función g de la página anterior.

Ej. $s(x) = x^2 \sen \frac{1}{x}$, $s(0) = 0$. Veamos que es **derivable en todo \mathbf{R} , pero no de $C^1(\mathbf{R})$** .

Si $x \neq 0$ es producto de composiciones de derivables y las técnicas de cálculo de derivadas nos dan la expresión: $s'(x) = 2x \sen \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.

Pero para $x = 0$, un denominador se anula y debemos usar la definición:

$$s'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sen \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sen \frac{1}{h} = 0 \quad (0 \times \text{acot}) \Rightarrow \exists s'(0) = 0.$$

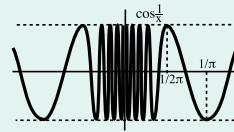


Era previsible, pues su gráfica es la dibujada (véase 3.5) y las secantes oscilan, pero acercándose a $y = 0$.

s' no es continua en 0 por no tener s' límite: $2x \sen \frac{1}{x} \rightarrow 0$, pero

$f(x) = \cos \frac{1}{x}$ no tiende a nada [por ejemplo, las sucesiones

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}, b_n = \frac{1}{(2n-1)\pi} \rightarrow 0, \text{ pero } f(a_n) = 1 \text{ y } f(b_n) = -1.$$



Por tanto, s no es $C^1(\mathbf{R})$ [aunque sí sea $C^1(-\infty, 0)$ y $C^1(0, \infty)$].

Como s' no es continua en 0, no puede existir $s''(0)$. Sí existen todas las derivadas $\forall x \neq 0$:

$$s''(x) = [2 - \frac{1}{x^2}] \sen \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x}, s'''(x), \dots \quad [\text{es decir, es de } C^\infty \text{ en } (-\infty, 0) \text{ y } (0, \infty)].$$

Ej. $n(x) = \arctan \frac{1}{x^2}$, $n(0) = \frac{\pi}{2}$. Es continua obviamente si $x \neq 0$ (composición de continuas) y también lo es cuando $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} = n(0)$.

Si $x \neq 0$ es fácil hallar sus derivadas: $n'(x) = \frac{-2x^{-3}}{1+x^4} = \frac{-2x}{1+x^4}$, $n''(x) = 2 \frac{3x^4 - 1}{(1+x^4)^2}, \dots$ pero

$$n'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\arctan \frac{1}{h^2} - \frac{\pi}{2} \right]$$

es un límite indeterminado que aún no sabemos hacer.

Es claro que $n'(x) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow 0$, pero de ahí no podemos deducir (todavía) que $n'(0) = 0$ (nada asegura que n' sea continua; en 3.2 veremos un teorema que permitirá dar ese paso). Admitiendo $n'(0) = 0$, es $n \in C^\infty(\mathbf{R})$, pues existen n', n'', n''', \dots (denominadores no nulos).

Conviene comparar con $n_*(x) = \arctan \frac{1}{x}$ (discontinua en $x = 0$ definamos como definimos $n_*(0)$, pues los límites laterales no coinciden), ya que para ella $n'_*(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ si $x \neq 0$, y parecería que $n'_*(0) = -1$, lo que es claramente falso pues n_* no es derivable en el punto por no ser continua.

3.2. Teoremas sobre funciones derivables

Los primeros resultados buscan determinar los x de un conjunto $A \subset \text{dom } f$ en los que una f alcanza sus **valores máximo y mínimo** (a ambos se les llama **valores extremos** de f). Sabemos que existen si $A = [a, b]$ y f es continua (es decir, existen $y, z \in A$ tales que $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$ para todo $x \in A$), aunque podría no haberlos si A es otro tipo de conjunto o si f no es continua. En ocasiones se llama **absolutos** a estos extremos, para distinguirlos de los **locales o relativos**:

Def. f posee un **máximo [mínimo] local** en x sobre un conjunto $A \subset \text{dom } f$ si existe un $\delta > 0$ tal que el valor máximo [mínimo] de f en $A \cap B(x, \delta)$ se alcanza en x .

[Es decir, si $f(x) \geq f(x+h)$ [$f(x) \leq f(x+h)$] $\forall h$ tal que $|h| < \delta$ y $x+h \in A$].

Está claro que si un valor extremo (absoluto) de f en A se toma en un punto x también tiene f en x un extremo local y que lo contrario es falso. Los máximos y mínimos (absolutos y locales) pueden ser infinitos o no existir, pueden darse en el borde o en el interior de A . En este caso:

Teorema:

Si f posee un extremo local en x interior a A y f es derivable en $x \Rightarrow f'(x) = 0$.

[A los puntos en que se anula f' se les suele llamar **puntos críticos** de f].

Si ML en $x \Rightarrow \exists \delta$ tal que si $0 < h < \delta$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$, y si $-\delta < h < 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0.$$

Si mL en $x \Rightarrow -f$, derivable, tiene ML en $x \Rightarrow -f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$.

Hay x con $f'(x)=0$ en los que f **no tiene extremo local** (como $f(x)=x^3$ en $x=0$).

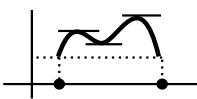
Tampoco es cierto que deba ser $f'(x)=0$ en todo x en el que f posea un extremo local (pues x podría no ser interior o f no ser derivable en x). De esto se sigue que:

Para buscar los valores máximo y mínimo de una f en un intervalo $[a, b]$

- los extremos del intervalo a y b
- hay que considerar: • los $x \in (a, b)$ en los que $f'(x)=0$
- los $x \in (a, b)$ en los que no existe $f'(x)$

Teorema de Rolle:

f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a)=f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b)$ con $f'(c)=0$.

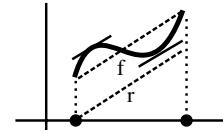


f tiene máximo y mínimo en $[a, b]$ por ser continua. Si alguno de los dos lo toma en (a, b) ya estaría. Si f toma su máximo y su mínimo en a y $b \Rightarrow f$ es constante $\Rightarrow f'(x)=0$ para cualquier x de (a, b) .

Teorema del valor medio:

f continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b) \Rightarrow \exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(Existe al menos un c para el que la tangente es paralela a la recta que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$; o bien, existe un instante c en el que la velocidad instantánea coincide con la media en el intervalo).



Sea $h(x) = f(x) - r(x)$, con $r(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, continua $[a, b]$,

derivable (a, b) y $h(a) = f(a) = h(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

Crecimiento y decrecimiento:

Teorema: Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces:

- $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $[a, b]$;
- $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $[a, b]$;
- $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f$ es constante en $[a, b]$.

Como $f \in C^1[a, b] \Rightarrow f$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , se podría pedir sólo en estos teoremas que f fuese C^1 . Pero pediríamos demasiado, dejando fuera funciones como $f(x) = x^{1/2}$, que no es $C^1[0, 1]$ pero sí es continua en $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$.

Sea $[x, y] \subset [a, b]$. Por el teorema del valor medio $\exists c \in (x, y)$ con $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

Por tanto, si $f'(c) >, <, = 0 \Rightarrow f(y) >, <, = f(x)$, respectivamente.

Se ve en la demostración que podemos sustituir en hipótesis y conclusiones ' a ', por ' $(-\infty,)$ ' y ' $, b]$ ' por ' $, \infty)$ '. Observemos también que a f' se le piden cosas sólo en el abierto, pero el resultado se tiene en todo el cerrado.

Teorema (condición suficiente de extremo):

Sea f de C^2 en un entorno de c y sea $f'(c) = 0$. Entonces: si $f''(c) > 0$, f posee un mínimo local en c , y si $f''(c) < 0$, f posee un máximo local en c .

[Si $f''(c) = 0$ podría haber en c un máximo, un mínimo o ninguna de las dos cosas. Como veremos en los ejemplos, es muchas veces más cómodo deducir si en c hay máximo o mínimo mirando el crecimiento y decrecimiento en vez de usar este teorema].

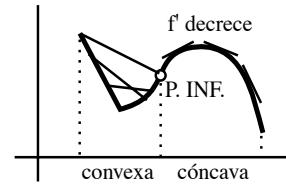
$f''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h)-0}{h} > 0 \Rightarrow$ para h pequeño $f'(c+h)$ y h tienen el mismo signo $\Rightarrow f$ decrece en un intervalo a la izquierda ($h < 0$) y crece en uno a la derecha ($h > 0$).

[Análogamente (o considerando $-f$) se prueba la condición de máximo].

[Los resultados anteriores dan mucha información sobre temas (ligados a las definiciones de 1.4 o a los teoremas de 2.3) que hasta ahora nos costaba o no podíamos precisar: hallar la imf (hallando sus máximos y mínimos), saber que f es estrictamente monótona (y, por tanto, que existe su inversa f^{-1}) en un intervalo, fijar el número de ceros de f (unido a Bolzano), ...].

Concavidad y convexidad:

Def. f es **convexa hacia abajo** en un intervalo I si $\forall x, y \in I$ el segmento que une $(x, f(x))$ con $(y, f(y))$ está por encima de la gráfica de f . f es **cóncava** si $-f$ es convexa. Se llama **punto de inflexión** a uno de la gráfica en la que ésta pasa de convexa a cóncava o viceversa.



[Hay libros que llaman cóncava a lo que nosotros llamamos convexa y viceversa; otros, dicen que se dobla hacia arriba (\cup), o hacia abajo (\cap)].

Teorema: Sea f continua en $[a, b]$ y derivable dos veces en (a, b) . Si $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$) en (a, b) , es f convexa (cóncava) en $[a, b]$. Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión, debe ser $f''(c) = 0$.

[No lo demostramos; geométricamente está claro: f es \cup si la pendiente de la tangente va creciendo (y si $f'' \geq 0$, la f' crece); es \cap si decrece; en un punto de inflexión hay un máximo o mínimo de la f' (pasa de crecer a decrecer o al revés); puede ocurrir que $f''(c) = 0$ y que en $(c, f(c))$ no haya punto de inflexión como le ocurre a la función $f(x) = x^4$ en $x=0$].

Tres ejemplos de cálculo de extremos en intervalos (o algo más):

Ej. Hallemos los valores máximo y mínimo de $f(x) = \log(1+x^2) - |x-2|$ en el intervalo $[-2, 3]$.

Tales valores han de existir por ser f continua en el intervalo (lo es en todo \mathbf{R}). Y sabemos que se toman, o en los extremos del intervalo, o en los puntos en que f no es derivable (en nuestro caso, sólo en $x=2$) o en los puntos en que se anula la derivada:

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x^2) - x + 2, & x \geq 2 \\ \log(1+x^2) + x - 2, & x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -(1-x)^2/(1+x^2), & x > 2 \\ (1+x)^2/(1+x^2), & x < 2 \end{cases}$$

Por tanto, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$. Basta comparar los valores en los cuatro puntos candidatos:

$$f(-2) = \log 5 - 4, \quad f(-1) = \log 2 - 3, \quad f(2) = \log 5, \quad f(3) = \log 10 - 1.$$

Con una calculadora: $f(-2) \approx -2.4$, $f(-1) \approx -2.3$, $f(2) \approx 1.6$, $f(3) \approx 1.3$

\Rightarrow el máximo se da en $x=2$ y el mínimo en $x=-2$.

Pero sin calculadora también podemos decirlo. Analizando crecimiento y decrecimiento queda gran parte del trabajo hecho. Mirando f' es inmediato que f crece desde $-\infty$ hasta 2 y que decrece a partir de 2, con lo que el valor máximo debe ser $f(2)$. Sólo queda comparar $f(-2)$ con $f(3)$, lo que, en este caso es muy sencillo, pues el primero es negativo y el otro positivo:

$$\log 5 < 4 \text{ pues } 5 < 2^4 < e^4 \text{ y } \log 10 > 1 \text{ pues } 10 > e.$$

En otro tipo de intervalos puede que los extremos no se alcancen. Por ejemplo, en $(-2, 0)$ no existen ni el valor máximo ni el mínimo: $f(-2)$ es el ínfimo de los valores, pero no mínimo, y $f(0)=-2$ es sólo el supremo.

Y en $[-2, \infty)$, aunque el máximo sigue siendo $f(2)$, para ver si hay mínimo debemos comparar $f(-2)$ y ‘el valor de f en el infinito’, es decir, el límite de $f(x)$ si $x \rightarrow \infty$. Con la regla de L'Hôpital del final de la sección:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{\log(1+x^2)}{x} - 1 + \frac{2}{x} \right] = " \infty [0 - 1 + 0] = -\infty ",$$

con lo que el valor mínimo no existe (tampoco existe el ínfimo) en el intervalo $[-2, \infty)$.

Ej. Hallar, si existen, los valores extremos de $e(x) = x^2 e^{-2x/3}$ en los intervalos: i) $[-1, 6]$. ii) $[6, \infty)$.

$$e'(x) = (2x - \frac{2}{3}x^2)e^{-2x/3} = \frac{2}{3}x(3-x)e^{-2x/3} \Rightarrow \begin{array}{l} e \text{ crece en } [0, 3]. \\ e \text{ decrece en } (-\infty, 0] \text{ y en } [3, \infty). \end{array}$$

i) Existen seguro los valores extremos porque e es continua en el intervalo cerrado.

$$\text{Candidatos: } e(-1) = e^{2/3}, \quad e(0) = 0, \quad e(3) = 9e^{-2}, \quad e(6) = 36e^{-4}.$$

El valor mínimo es obviamente $e(0)=0$ (los otros son estrictamente positivos). El máximo (a la vista del crecimiento) se da en $x=-1$ ó $x=3$. ¿Es $e^{2/3} \geq 9e^{-2} \Leftrightarrow e^{4/3} \geq 3 \Leftrightarrow e^4 \geq 27$? Como $e > \frac{5}{2}$, es $e^4 > \frac{625}{16} > 27$, pues $625 > 16 \cdot 27 = 432$. El valor máximo es $f(-1) = e^{2/3}$.

ii) En $[6, \infty)$ pueden no alcanzarse los valores extremos. En este caso la f es estrictamente decreciente en todo el intervalo, por lo que el valor máximo es $36e^{-4}$ y el mínimo no existe.

[Como $f \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ (L'Hôpital), 0 es el extremo inferior de los valores de f , pero no se alcanza].

Ej. Sea $g(x) = \frac{1+x}{\log(1+x)}$. Determinemos su dominio, su imagen y sus valores extremos en $[1, 3]$.

$\text{dom } g = (-1, 0) \cup (0, \infty)$ [donde $1+x > 0$ y el denominador $\neq 0$].

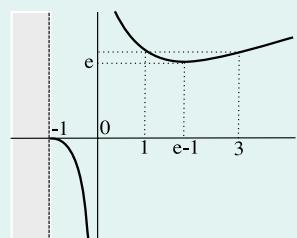
$$g'(x) = \frac{\log(1+x)-1}{[\log(1+x)]^2} \begin{array}{l} > 0, x \in (e-1, \infty) \rightarrow g \text{ crece en } [e-1, \infty) \\ = 0, x = e-1 \\ < 0, x \in (-1, 0) \cup (0, e-1) \rightarrow g \text{ decrece en } (-1, 0) \text{ y en } (0, e-1) \end{array}$$

$$\text{Además } g \xrightarrow[x \rightarrow -1^+]{0} = 0, \quad g \xrightarrow[x \rightarrow 0^\pm]{\pm\infty} = \pm\infty \Rightarrow \text{im } g = (-\infty, 0) \cup [e, \infty).$$

g es continua en $[1, 3]$ y los extremos han de existir. Candidatos:

$$g(1) = \frac{2}{\log 2}, \quad g(3) = \frac{4}{\log 4} = \frac{2}{\log 2}, \quad g(e-1) = \frac{e}{\log e} = e.$$

Esto, junto al estudio del crecimiento, asegura que el valor mínimo es e y el máximo es $\frac{2}{\log 2}$.



En los tres siguientes nos preocupamos por el número de ceros de las funciones:

Ej. Sea $n(x) = x^2 + 4 \arctan x$. Determinar su imagen y precisar cuántos ceros tiene en $[-1, 1]$.

$$n'(x) = 2 \frac{x^3 + x + 2}{1+x^2} = 2 \frac{(x+1)(x^2 - x + 2)}{1+x^2} \stackrel{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow n \text{ crece desde } -1 \text{ y antes decrece} \Rightarrow n(-1) = 1 - \pi \text{ valor mínimo.}$$

$$n \text{ continua en todo } \mathbf{R}, 1 - \pi \text{ valor mínimo absoluto y } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} n = \infty \Rightarrow \text{im } n = [1 - \pi, \infty).$$

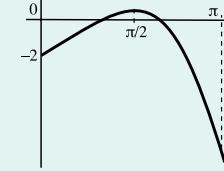
Como $n(-1) < 0$, $n(1) = \pi + 1 > 0$, y n es estrictamente creciente en $[-1, 1]$, el teorema de Bolzano y la monotonía aseguran que n se anula exactamente 1 vez en el intervalo.

Ej. Estudiemos cuántas veces se anula $h(x) = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Como $h(0) = -2 < 0$ y $h(\pi) = -2\pi - 2 < 0$ el teorema de Bolzano no nos dice (en principio) nada. Analicemos h' :

$$h'(x) = (x^2 + 2) \cos x \Rightarrow h \text{ creciente en } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ y decreciente en } [\frac{\pi}{2}, \pi].$$

$h(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2 - 8}{4} > 0$ Bolzano al menos hay un cero en cada intervalo, y por ser estrictamente monótona en cada uno, h tiene exactamente 2 ceros.



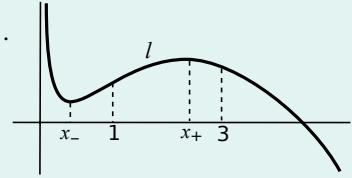
Ej. $l(x) = 3 \arctan x - \log x$. $\text{dom} = (0, \infty)$. $l \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty$, $l \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty$.

$$l'(x) = -\frac{x^2 - 3x + 1}{x(1+x^2)} = -\frac{(x-x_-)(x-x_+)}{x(1+x^2)}, \text{ con } x_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow x_- \in (0, \frac{1}{2}), x_+ \in (\frac{5}{2}, 3).$$

l decrece en $(0, x_-]$, $l(x_-) > 0$ [$\arctan x, -\log x > 0$ en $(0, 1)$],

$l(1) = \frac{\pi}{4}$ (único valor que podemos dar sin calculadora), l crece en $[x_-, x_+]$ y decrece en $[x_+, \infty)$
 ⇒ la función continua l corta una única vez el eje x en un $c > x_+$ de $(0, \infty)$.



Y un par de ejemplos más de utilización de los teoremas de esta sección:

Ej. Probar que $k(x) = e^{sh x} + x$ tiene función inversa k^{-1} en todo su dominio y calcular $(k^{-1})'(1)$.

$k'(x) = ch x e^{sh x} + 1 > 0 \forall x \Rightarrow k$ es estrictamente creciente en todo $\mathbf{R} \Rightarrow$ existe su inversa.

Por ser k derivable, k^{-1} también lo es y se tiene que: $(k^{-1})'(1) = \frac{1}{k'(k^{-1}(1))} = \frac{1}{k'(0)} = \frac{1}{2}$,
 pues claramente $k(0) = 1$ [esto es lo difícil; no sabríamos decir, por ejemplo, quién es $k^{-1}(0)$].

Ej. Sea $r(x) = \frac{x^3 - 6x^2 - 8}{x}$. Estudiemos crecimiento y decrecimiento, extremos, concavidad...

La función es continua (y de C^∞) si $x \neq 0$. Para derivarla ponemos mejor $r(x) = x^2 - 6x - \frac{8}{x}$

$$r'(x) = 2x - 6 + \frac{8}{x^2} = 2 \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = 2 \frac{[x+1][x-2]^2}{x^2} \quad [= 0, \text{ si } x = -1 \text{ o } x = 2]$$

$$\Rightarrow r' < 0 \text{ si } x \in (-\infty, -1) \text{ y } r' > 0 \text{ si } x \in (-1, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty).$$

De esto deducimos que r decrece en $(-\infty, -1]$ y que crece en $[-1, 0)$ y en $(0, \infty)$ [$x = 2$ incluido]; pero no crece en todo $[-1, \infty)$ (es discontinua en 0). Por tanto, tiene mínimo local en $x = -1$ y no tiene ni máximo ni mínimo en $x = 2$ (a pesar de ser $r' = 0$).

Concluir esto a partir de la condición suficiente de extremo cuesta más:

$$r''(x) = 2 - \frac{16}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} r''(-1) = 18 \text{ (mínimo, como ya sabíamos sin hallar } r''). \\ r''(2) = 0 \text{ (??, pero la } r' \text{ nos dijo que ni máximo ni mínimo).} \end{cases}$$

Como $r''(x) = \frac{2[x^3 - 8]}{x^3}$ es negativa en $(0, 2)$ y positiva en el resto, r es convexa en $(-\infty, 0)$ y en $[2, \infty)$, y es cóncava en $(0, 2]$. $x = 2$ es punto de inflexión.

[Con estos datos y pocos más: $r(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^\pm} \mp\infty$, $r(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \infty$, $r(-1) = 15$, $r(2) = -12$, sería fácil dibujar la gráfica de r . Observemos que no podemos dar el x exacto tal que $r(x) = 0$].

El siguiente teorema es el que prueba que una función como la $n(x) = \arctan \frac{1}{x^2}$, $n(0) = \frac{\pi}{2}$ de la sección anterior es derivable en $x=0$ y que $n'(0)=0$:

Teorema: Si f es continua en a y f' tiene límite cuando $x \rightarrow a \Rightarrow f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$.

Como f' tiene límite, debe existir en un entorno de a . El TVM en $[a, a+h]$ (o $[a+h, a]$) dice que $\exists x_h \in (a, a+h)$ con $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(x_h)$. Si $h \rightarrow 0$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \rightarrow f'(a)$, $x_h \rightarrow a$.

[Se ve en la demostración que si $f'(x) \rightarrow \infty$ ó $-\infty$ no existirá $f'(a)$ (la recta tangente será vertical), pero puede no tener límite f' y existir la $f'(a)$ (hay funciones derivables que no son C^1)].

Acabamos la sección con la regla de L'Hôpital. Aplazaremos su uso sistemático al capítulo 4 (para comparar con Taylor), pero vamos justificando algunos de los límites adelantados en 2.1.

Para probarla generalizamos el teorema del valor medio:

Teorema del valor medio de Cauchy:

Sean f y g continuas en $[a, b]$, derivables en $(a, b) \Rightarrow \exists c \in (a, b)$ tal que $[f(b)-f(a)]g'(c) = [g(b)-g(a)]f'(c)$ [para $f(x)=x$ se recupera el teorema del valor medio].

(Se demuestra aplicando Rolle a $h(x) = f(x)[g(b)-g(a)] - g(x)[f(b)-f(a)]$).

Regla de L'Hôpital:

Si $f(x), g(x) \rightarrow 0$ ($\text{o } \rightarrow \pm\infty$) y existe el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

La regla sigue siendo válida cambiando el a del enunciado por a^+ , a^- , $+\infty$ ó $-\infty$.

La probamos sólo para $f, g \rightarrow 0$ si $x \rightarrow a$, a^+ ó a^- . Como el límite de f'/g' existe, para $x-a$ pequeño, definiendo $f(a)=g(a)=0$, f y g son continuas en $[a, x]$ y derivables en (a, x) , y es $g' \neq 0$ en (a, x) . Por el TVM de Cauchy $\exists c \in (a, x)$ con $f(x)g'(c) = g(x)f'(c)$. Como $g(x) \neq 0$ [si fuese = 0, por Rolle sería $g'(z)=0$ para algún $z \in (a, x)$] se puede escribir

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ y por tanto } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ pues } x \rightarrow a^+ \Rightarrow c \rightarrow a^+.$$

Análogamente se demostraría para $x \rightarrow a^-$, de donde se deduciría para $x \rightarrow a$.

Ej. Hallemos dos límites indeterminados $\frac{\infty}{\infty}$ que nos han aparecido en ejemplos de esta sección:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+x^2)}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x/(1+x^2)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{x}+x} = 0 \text{ [el último paso no necesita L'H].}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{2x/3}} \stackrel{\text{L'H}}{=} 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x/3}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{2} \frac{1}{e^{2x/3}} = 0.$$

El segundo límite es un caso particular de uno de los dos famosos $(\frac{\infty}{\infty})$ que vamos ya a calcular:

$$\text{Si } a, b > 0: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0.$$

$$\frac{\log x}{x^b} \stackrel{\text{L'H}}{\rightarrow} \frac{1/x}{bx^{b-1}} = \frac{1}{bx^b} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{(\log x)^a}{x^b} = \left[\frac{\log x}{x^{b/a}} \right]^a \rightarrow 0, \quad \frac{x}{e^{bx}} \stackrel{\text{L'H}}{\rightarrow} \frac{1}{be^{bx}} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x^a}{e^{bx}} = \left[\frac{x}{e^{bx/a}} \right]^a \rightarrow 0.$$

De ellos se deducen los límites análogos para sucesiones (que amplían el número de límites que sabemos calcular): $\frac{(\log n)^a}{n^b}, \frac{n^a}{e^{bn}} \rightarrow 0, a, b > 0$

3.3. Polinomios

Un tipo de funciones que aparecen continuamente son los polinomios. Ahora que disponemos ya de teoremas sobre funciones continuas y de la derivada volvemos a estudiarlos.

Un polinomio de grado n es: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

Ya tratamos el de segundo grado: $P_2(x) = ax^2 + bx + c = a[x + \frac{b}{2a}]^2 - \frac{\Delta}{4a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$, $a \neq 0$.

Su gráfica es (ver 3.4) la de $y = x^2$ trasladada a izquierda o derecha, multiplicada por una constante (positiva o negativa) y trasladada hacia arriba o abajo. A partir de $P'_2(x) = 2ax + b$ volvemos a ver que su extremo se toma en $x = -\frac{b}{2a}$. Sus raíces (reales, dobles o complejas dependiendo del signo de Δ) eran: $x = \frac{1}{2a}[-b \pm \sqrt{\Delta}]$. Observemos que la raíz doble $-\frac{b}{2a}$ también es raíz de $P'_2(x)$.

P_2 puede tener o no raíces reales. Como cualquiera de grado par. Sin embargo:

Un polinomio de grado impar posee por lo menos una raíz real.

$P_n(x) = a_n x^n [1 + \dots + \frac{a_0}{a_n} x^{-n}]$ y sea, por ejemplo, $a_n > 0$. Si n es impar, $P_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty}$

Hay pues a con $P_n(a) < 0$ y b con $P_n(b) > 0$. Por Bolzano, $\exists c \in (a, b)$ con $P_n(c) = 0$.

El **teorema fundamental del álgebra** asegura que P_n tiene n raíces x_1, \dots, x_n (reales o complejas, repetidas o no). Si pudiésemos hallarlas podríamos escribir: $P_n(x) = a_n(x - x_1) \dots (x - x_n)$. Como las complejas aparecen por parejas $p \pm qi$, cada par de productos $(x - [p+qi])(x - [p-qi])$ en la descomposición de $P_n(x)$ da lugar a un polinomio de segundo orden con coeficientes reales $x^2 - 2px + (p^2 + q^2)$. Así pues, si conocemos las raíces el P_n se puede factorizar:

$P_n(x) = a_n(x - x_1) \dots (x - x_r)(x^2 + b_1x + c_1) \dots (x^2 + b_sx + c_s)$, con $r + 2s = n$, $x_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$

Algunas raíces podrían estar repetidas. No es difícil ver que si $x = x_k$ es raíz simple de P_n entonces no anula la derivada P'_n y que sí la anula si es raíz múltiple. Por tanto:

Una raíz de un polinomio es múltiple si y sólo si es raíz también de su derivada.

Ej. $P_4(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2$. P_4 es sencillo por tener raíces enteras y ser calculables todas.

Tanteando con los divisores de 2 observamos que $x = -1$ lo es.

Dividimos por $(x+1)$ y vemos que $x = -1$ vuelve a ser raíz.

Por tanto es $P_4(x) = (x+1)^2(x^2 + 2)$, ya factorizado.

Es $x = -1$ también raíz de $P'_4(x) = 2(2x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$.

$$\begin{array}{r|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & & -1 & -1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & & -1 & 0 & -2 & \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 & \end{array}$$

Una raíz múltiple debe ser raíz del máximo común divisor de P_n y P'_n . Una forma de hallar este mcd es mediante el **algoritmo de Euclides** (similar al visto para los números enteros): dados P, Q [con $gr(P) \geq gr(Q)$], se divide P entre Q y se llama R_1 al resto obtenido (si conviene, multiplicado por una constante); a continuación se divide Q entre R_1 y se llama R_2 al nuevo resto; luego R_1 entre R_2 ... hasta obtener un resto nulo. El $mcd(P, Q)$ es el último resto no nulo del proceso anterior.

Ej. Calculemos con este algoritmo el $mcd(P_4, P'_4)$ para el $P_4(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ de arriba.

Para empezar, multiplicamos P_4 por 4 y dividimos entre $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2$:

$$\begin{array}{r} 4 \quad 8 \quad 12 \quad 16 \quad 8 \\ -4 \quad -6 \quad -6 \quad -4 \\ \hline 2 \quad 6 \quad 12 \quad 8 \\ -2 \quad -3 \quad -3 \quad -2 \\ \hline 3 \quad 9 \quad 6 \\ \Rightarrow R_1 = x^2 + 3x + 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \\ -2 \quad -6 \quad -4 \\ \hline -3 \quad -1 \quad 2 \\ 3 \quad 9 \quad 6 \\ \hline 8 \quad 8 \\ \Rightarrow R_2 = x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 2 \\ -1 \quad -1 \\ \hline 2 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \\ \Rightarrow R_3 = 0 \end{array}$$

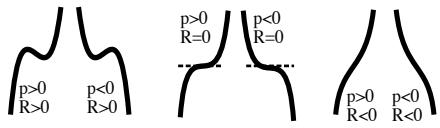
Por tanto, $mcd(P, P') = x + 1 \Rightarrow P$ tiene $x = -1$ como raíz doble, como vimos antes.

[En este ejemplo era innecesario, pero será útil cuando haya raíces múltiples no enteras].

Ya comentamos en 1.3 la imposibilidad de expresar mediante radicales las raíces de los P_n de grado mayor que 5. Tratemos ahora un caso en que sí hay fórmulas (complicadas) para las raíces, el cúbico:

$$P_3(x) = px^3 + qx^2 + rx + s, \quad p \neq 0.$$

Veamos cómo puede ser su gráfica. $P'_3(x) = 3px^2 + 2qx + r$ puede tener 2 raíces reales, 1 doble o ninguna real (según $R \equiv q^2 - 3pr$ sea $>, =$ ó < 0), y así P_3 puede tener un máximo y un mínimo, un punto de inflexión con tangente horizontal o tener su derivada signo constante.



Si P_3 tiene raíz múltiple debe ser $px^3 + qx^2 + rx + s = 3px^2 + 2qx + r = 0$. Eliminando la x entre ambas ecuaciones se obtiene la expresión de su discriminante $\Delta = q^2r^2 - 4pr^3 - 4q^3s + 18pqrs - 27p^2s^2$.

Llamando $S \equiv 27p^2s - 9pqr + 2q^3$, este Δ se puede escribir más compacto: $\Delta = \frac{1}{27p^2}[4R^3 - S^2]$.

Se puede probar además que las raíces de P_3 vienen dadas por las siguientes fórmulas:

Si $\Delta = 0$, hay una raíz doble dada por $x_d = \frac{1}{3p} \left[-q + \sqrt[3]{\frac{S}{2}} \right]$ y otra simple $x_s = \frac{1}{3p} \left[-q - 2\sqrt[3]{\frac{S}{2}} \right]$.

Si $\Delta < 0$, existe una única raíz real de P_3 : $x_r = -\frac{q}{3p} + \frac{1}{3p} \left[\frac{-S + \sqrt{S^2 - 4R^3}}{2} \right]^{1/3} + \frac{1}{3p} \left[\frac{-S - \sqrt{S^2 - 4R^3}}{2} \right]^{1/3}$.

Por último, si $\Delta > 0$ ($\Rightarrow R > 0$), hay tres raíces reales distintas de P_3 que se pueden expresar:

$$x_{1,2,3} = -\frac{q}{3p} + \frac{2\sqrt{R}}{3p} \cos \frac{\phi + 2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2, \text{ siendo } \phi = \arccos \left(\frac{-S}{2R^{3/2}} \right).$$

Si utilizar el Δ anterior, es fácil decir cuántas raíces reales tiene cualquier P_3 , por ser su gráfica sencilla (sus extremos se pueden hallar, lo que no pasa en los de mayor orden).

Ej. $P_3(x) = 2x^3 - x^2 - 12x + 6$ No tiene raíces enteras, pues no lo son $\pm 6, \pm 3, \pm 2$ ni ± 1 . No hay atajos para calcular sus raíces.

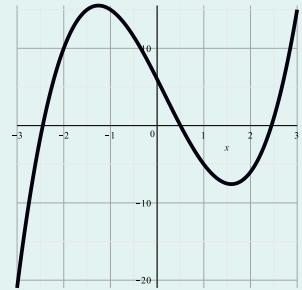
Precisemos cuántas de ellas son reales.

$$P'_3(x) = 2(3x^2 - x - 6) = 0 \rightarrow x_{\pm} = \frac{1}{6} [1 \pm \sqrt{73}] \approx 1.59, -1.26.$$

Como $P_3(x_-) \approx 15.53 > 0$ y $P_3(x_+) \approx -7.57 < 0$, su aspecto es el de la derecha y concluimos que tiene 3 raíces reales distintas.

Podemos localizar mejor esas raíces utilizando Bolzano:

$$\begin{aligned} P_3(-3) &= -21, \quad P_3(-2) = 10, \quad P_3(0) = 6, \quad P_3(1) = -5, \\ P_3(2) &= -6, \quad P_3(3) = 15. \end{aligned} \text{ Están en } [-3, -2], [0, 1] \text{ y } [2, 3].$$



Utilizando las fórmulas de arriba se tiene que: $R = 73$, $S = 430$, $\Delta = 12696 \rightarrow$ tres raíces reales.

$$\phi \approx 1.9227264 \rightarrow x_{1,2,3} \approx 2.44949, -2.44949, 0.50000$$

[Los errores de redondeo del cálculo aconsejan acudir a métodos numéricos incluso para P_3].

Existen fórmulas similares para las raíces de los polinomios de **cuarto grado**, pero son todavía más complicadas. En 1.3 vimos cómo hallarlas en dos casos sencillos:

$$P_4(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad \text{y} \quad P_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a.$$

Y observemos que ya para los de cuarto grado ya no es fácil, en general, saber cuántas raíces reales tienen, pues las raíces de su derivada (de tercer grado) ya no son calculables exactamente.

Como casi nunca se pueden dar las raíces exactas de un P_n , habrá que aproximarlas con métodos numéricos (a eso nos dedicaremos en 5.6). Para aplicarlos será útil saber cuántas hay y más o menos dónde están. Nuestro objetivo es **separar las raíces reales**, o sea, **conocer su número exacto y localizar intervalos** $[a, b]$ en los que sólo haya una de ellas. El teorema de Bolzano informa, pero no basta en general: si encontramos un $[a, b]$ con $P(a)P(b) < 0$, hay al menos una raíz en (a, b) pero podría haber más (si P' no lo impide).

El último resultado que damos para polinomios es fácil de aplicar pero suele dejar dudas:

Ley de Descartes de los signos.

Sea P un polinomio de grado n con término independiente no nulo. Si r es el número de raíces reales positivas de P y s el número de cambios de signo en la sucesión de sus coeficientes, es $r \leq s$ y $s - r$ es un número par (o cero).

[Cambiando x por $-x$ se obtiene el resultado análogo para las raíces negativas].

[Se tiene en cuenta la multiplicidad (una raíz doble cuenta por dos)].

Lo probamos (en el caso más simple: $a_k \neq 0 \forall k$). Podemos suponer $a_n > 0$. Inducción sobre n . Es cierto para $n = 1$: $a_1 x + a_0 = 0$ tiene una raíz positiva ($r = 1$) si a_1 y a_0 tienen signos opuestos ($s = 1$); y $r = 0$ si $s = 0$. Supongámoslo ahora cierto para los P de orden $n-1$ y demostrémoslo para los de n : Sean s' y r' los números de cambios y raíces para P' . Si $\text{sg}(a_1) = \text{sg}(a_0)$, es $s = s'$, y como (fácil de ver) $(-1)^r$ y $(-1)^{r'}$ son los signos de sus términos independientes, r y r' tienen la misma paridad; si $\text{sg}(a_1) \neq \text{sg}(a_0)$, $s = s' + 1$ y r es de paridad opuesta a r' ; en ambos casos, $s - r$ y $s' - r'$ tienen la misma paridad; como para P' (de orden $n-1$) estamos suponiendo cierto Descartes, deducimos que $s - r$ es par. No es difícil deducir de Rolle, además, que $r' \geq r$ ó $r' \geq r-1$, respectivamente, en los casos de antes; de ahí se obtiene que en ambos casos es $s - r \geq s' - r'$, número que estamos suponiendo positivo.

Ej. Para P_3 sus coeficientes $2, -1, -12, 6$ (+ - - +) presentan $s = 2$ cambios de signo.

Esto nos asegura, sin hacer ninguna cuenta más, que tiene 0 2 ó 0 raíces positivas.

Cambiando x por $-x$ obtenemos $-2x^3 - x^2 + 12x + 6$ (- - + +).

Como $s = 1$, seguro que hay una única raíz real negativa.

Calculando el Δ (o analizando su gráfica) vimos que hay 3 reales y con ello resolvemos la duda que nos dejaba Descartes: hay 2 positivas.

Ej. Para el P_4 de la raíz doble podíamos afirmar que no tiene raíces positivas (+ + + +, $s = 0$) y como tras hacer x por $-x$ aparece + - + - podían existir 4, 2 ó 0 raíces negativas.

Para este polinomio factorizable, realmente había 2 negativas (1 doble; y además 2 complejas).

Ej. Para $Q_4(x) = 9x^4 + 8x^3 + 28x^2 + 24x + 3$, Descartes nos dice lo mismo que en ejemplo anterior: 0 positivas y 4, 2 ó 0 negativas. (Pero no podemos salir de la duda por no tener raíces enteras).

Ej. Para $P_5(x) = x^5 + 2x^3 + x + 2$, Descartes nos precisa todo: + + + + → 0 positivas. - - - + → 1 negativa.

Pero esto lo podemos probar también de una forma sencilla directamente:

$P'_5(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \Rightarrow P_5$ es estrictamente creciente. Y además $P_5(0) = 2 > 0$.

Como es $P_5(-1) = -2 < 0$, ese cero negativo estará en el intervalo $(-1, 0)$.

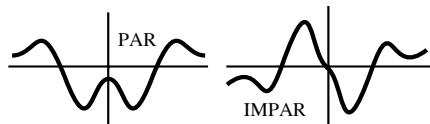
3.4. Representación de funciones

Cada función pide un tratamiento diferente. Las siguientes ideas no son una receta que haya que seguir desde el principio hasta el final. Por ejemplo, no tiene sentido buscar asíntotas verticales en una función continua en todo punto o empeñarse en calcular derivadas muy complicadas. La práctica en el dibujo de gráficas nos irá sugiriendo los tipos de cálculos a realizar en cada caso. Es importante conocer las gráficas de las funciones elementales.

- **Determinación del dominio**, y de los puntos en que f no es continua (posibles saltos de la función) o no derivable (picos de la gráfica, pendientes verticales).

- **Simetrías**: Si $f(-x) = f(x)$, función par, la gráfica de f es simétrica respecto al eje $x = 0$.

Si $f(-x) = -f(x)$, función impar, la gráfica de f es simétrica respecto al origen.



- **Periodicidad** (sólo para algunas funciones trigonométricas): si $f(x+T) = f(x)$ basta pintar la gráfica en un intervalo de longitud T pues luego se repite periódicamente.

- **Asíntotas**: Verticales (rectas $x=c$): f tiende a $+\infty$ ó $-\infty$ cuando $x \rightarrow c^-$ ó $x \rightarrow c^+$ (bastantes veces se puede calcular de una vez el límite cuando $x \rightarrow c$, pero otras son precisos los laterales). Horizontales (rectas $y=c$): f tiende a c si $x \rightarrow +\infty$ ó $-\infty$.

Si no existen asíntotas horizontales (y la forma de la función lo aconseja) intentaremos escribir $f(x) = g(x) + h(x)$, con g función conocida y $h(x) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow +\infty$ (ó $-\infty$). Entonces la gráfica de f se parecerá a la de g para x muy grandes (ó muy negativos). En particular, hallaremos así las posibles asíntotas oblicuas, sin recetas de memoria.

[En ocasiones todos estos límites se podrán hallar con los teoremas del capítulo 2 (los del tipo “ $7/\infty=0$ ”), pero si son indeterminados habrá que usar L'Hôpital o Taylor (4.5); el desarrollo de Taylor, además, dará idea de la forma de la función cerca de un punto].

- **Información a partir de las derivadas** (utilizando los teoremas de 3.2):

A partir de la f' : crecimiento y decrecimiento ($f' > 0$ y $f' < 0$); puntos x en los que f posee extremos locales (si $f'(c) = 0$, para ver si f tiene máximo, mínimo o punto de inflexión con tangente horizontal en c , es muchas veces más fácil precisar el signo de f' antes y después de c que calcular la $f''(c)$; incluso, en ocasiones, basta dar valores a f en la proximidad de c para verlo; puede haber extremos en puntos sin derivada).

A partir de la f'' : puntos de inflexión ($f''(c)=0$, aunque esto pueda no bastar); intervalos de concavidad y convexidad.

[Si no podemos hallar explícitamente los ceros de f' ó f'' intentaremos localizar cuántos hay y en qué intervalos están (Bolzano ayuda). Muchas ocasiones esos ceros serán raíces de polinomios (y será aplicable 3.3). El método de Newton de 3.6 nos permitirá aproximar los ceros con la precisión deseada si disponemos de ordenador].

- **Valores concretos de $f(x)$** : En $x=0$ (corte con el eje y); en los x tales que $f'(x)=0$ o en los que no existe f' , en puntos cercanos a estos x ; en los x tales que $f''(x)=0$; en x de zonas en las que sepamos poco de la gráfica.

Valores de x que hagan $f(x)=0$ (cortes con el eje x , quizás no calculables como ocurría con los ceros de f' y f''), deduciendo en qué intervalos $f(x)$ es positiva o negativa.

A veces conviene también dar valores de f' (pendiente de la gráfica) en algún punto.

Hay funciones complicadas para las que casi todo fallará y habrá que limitarse a dar valores (en ese momento serán especialmente útiles las calculadoras y ordenadores). Al final del capítulo 4 (cuando dominemos Taylor y los límites difíciles) dibujaremos más gráficas.

Se deducen de la gráfica de $f(x)$ las gráficas de:

$$f(x)+c, f(x+c), cf(x), f(cx), -f(x), f(-x), |f(x)| \text{ y } f(|x|)$$

La de $f(x)+c$ es la de $f(x)$ trasladada c unidades hacia arriba ($c > 0$) o abajo ($c < 0$).

La de $f(x+c)$ es la de $f(x)$ trasladada c unidades hacia la izquierda o derecha ($c >, < 0$).

La de $cf(x)$ con $c > 1$ ($0 < c < 1$) es la de $f(x)$ estirada (comprimida) verticalmente.

La de $f(cx)$ con $c > 1$ ($0 < c < 1$) es la de $f(x)$ comprimida (estirada) horizontalmente.

La de $-f(x)$ es la reflexión de la gráfica de $f(x)$ respecto a $y=0$.

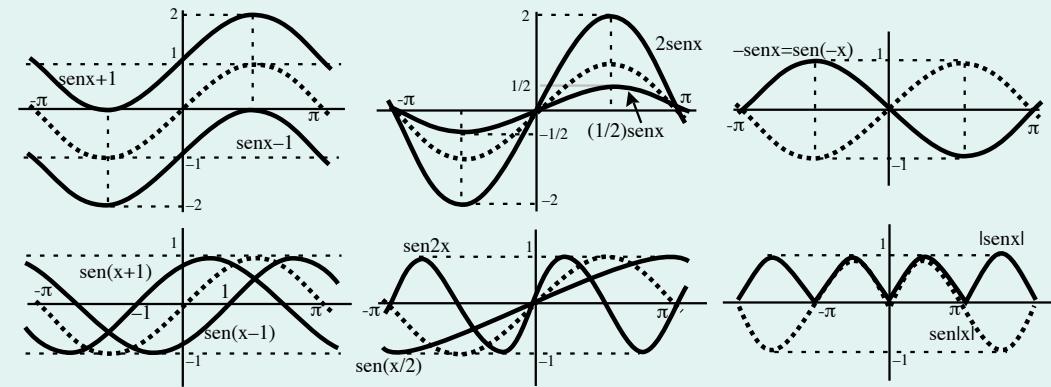
La de $f(-x)$ es la reflexión de la gráfica de $f(x)$ respecto a $x=0$.

La de $|f(x)|$ se obtiene reflejando hacia arriba las partes de la de $f(x)$ bajo $y=0$.

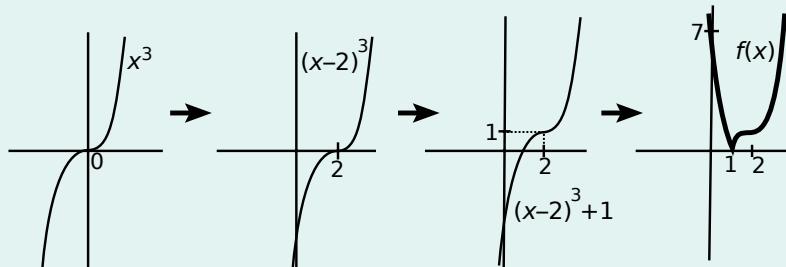
La de $f(|x|)$ es la parte de la gráfica de $f(x)$ para $x \geq 0$ más su reflejo respecto a $x=0$.

[Todo es fácil de deducir. Por ejemplo, la gráfica de $g(x) = f(x+2)$ vale en $x=a$ lo que la f valía en $x=a+2$ y por eso la gráfica de g es la trasladada de f hacia la izquierda; la altura en cada punto de $g(x) = 2f(x)$ es el doble de la f inicial y la de $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$ la mitad; $g(x) = f(2x)$ vale en $x=a$ lo que la f valía en $2a$, $g(x) = f(|x|)$ vale $f(x)$ si $x \geq 0$ y además es par...].

Ej. De la gráfica de $\sin x$ (dibujada a puntos) deducimos las gráficas de: $\sin x + 1$, $\sin x - 1$, $\sin(x+1)$, $\sin(x-1)$, $2\sin x$, $\frac{1}{2}\sin x$, $\sin(2x)$, $\sin\frac{x}{2}$, $-\sin x$, $\sin(-x)$, $|\sin x|$ y $\sin|x|$:



Ej. Un ejemplo que emplea varias de las ideas anteriores: $f(x) = |(x-2)^3 + 1|$.



[Más complicado es dibujar las dos funciones que define: $x^3 - 6x^2 + 12x - 7$, si $x \geq 1$
 $-x^3 + 6x^2 - 12x + 7$, si $x \leq 1$].

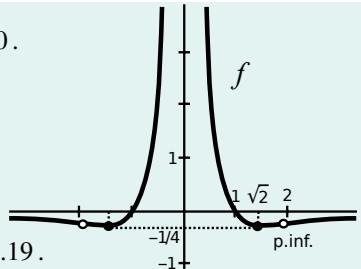
Dibujemos la gráfica de cuatro funciones racionales. Ya van surgiendo dificultades para hallar ceros:

Ej. $f(x) = \frac{1-x^2}{x^4}$. Par. dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$.
 $f'(x) = \frac{2x^2-4}{x^5}$; $f''(x) = \frac{20-6x^2}{x^6}$.

Extremos: $x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1.41$, $f(\pm\sqrt{2}) = -\frac{1}{4} = -0.25$.

Inflexión: $i_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{10}{3}} \approx \pm 1.8$, $f(i_{\pm}) = -\frac{21}{100} = -0.21$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1, f\left(\frac{1}{2}\right) = 12, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2, f(2) = -\frac{3}{16} \approx -0.19.$$



Ej. $g(x) = x^2 + \frac{8}{1-x}$. $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$ [$0 + \frac{1}{-\infty}$]. $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \infty$ [$0 + \frac{1}{+\infty}$].

La gráfica se acercará a la de $y = x^2$ para $|x|$ grande.

$$g'(x) = 2x + \frac{8}{(1-x)^2} = \frac{2(x^3 - 2x^2 + x + 4)}{(1-x)^2} = \frac{2(x+1)(x^2 - 3x + 4)}{(1-x)^2} \Rightarrow$$

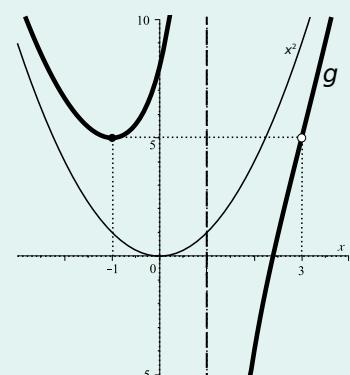
g decrece en $(-\infty, -1]$ y crece en $[-1, 1)$ y en $(1, \infty)$.

$$g''(x) = 2 + \frac{16}{(1-x)^3} = 0 \Leftrightarrow (1-x)^3 = -8 \Leftrightarrow x = 3 \quad [y \ x = \pm i\sqrt{3}]$$

$$g(-3) = 11, g(-1) = g(3) = 5, g(0) = 8, g(2) = -4.$$

No podemos hallar el x con $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 8 = 0$.

Como g es continua y $g(2)g(3) < 0$ cortará el eje en $(2, 3)$, una única vez por ser estrictamente creciente en el intervalo.



[Afinando más el cero: $g\left(\frac{7}{3}\right)g\left(\frac{5}{2}\right) < 0 \Rightarrow$ está en $\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{2}\right)$].

[Que g tenía exactamente 1 cero positivo lo decía ya el criterio de Descartes: $+_--$].

Ej. $h(x) = \frac{x-2}{x^3+x-2}$. $x^3+x-2 = (x-1)(x^2+x+2) \Rightarrow$
 $\text{dom } h = \mathbb{R} - \{1\}$.

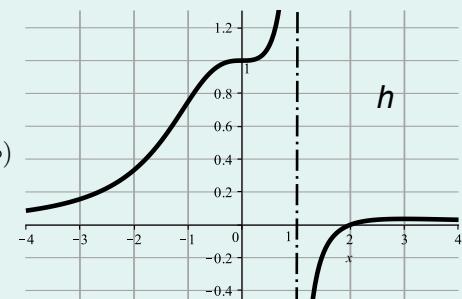
Asintotas fáciles de hallar: $h \xrightarrow[x \rightarrow \pm\infty]{} 0$. $h \xrightarrow[x \rightarrow 1^{\pm}]{} \pm\infty$.

$$h'(x) = \frac{2x^2(3-x)}{(x^3+x-2)^2} \geqslant 0 \text{ en } (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 3) \text{ y } (3, \infty)$$

$\Rightarrow h$ crece en $(-\infty, 1)$ y $(1, 3]$ y decrece en $[3, \infty)$.

$$h(3) = \frac{1}{28} \text{ máximo local. } h(0) = 1 \text{ punto de inflexión con tangente horizontal.}$$

$$h(-2) = \frac{1}{3}, h(-1) = \frac{3}{4}, h\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{4}{23}, h(4) = \frac{1}{33}.$$



[Sus otros dos puntos de inflexión no son calculables exactamente, pues resultan ser las dos raíces reales del polinomio $3x^4 - 12x^3 - x^2 + 6x - 12 = 0$].

Ej. $k(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$. $\text{dom} = \mathbb{R}$, no hay simetrías, $k \xrightarrow[x \rightarrow \pm\infty]{} 0$.

$$k'(x) = -\frac{(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2} \Rightarrow k \text{ crece en } [-3, 1] \text{ y decrece en el resto.}$$

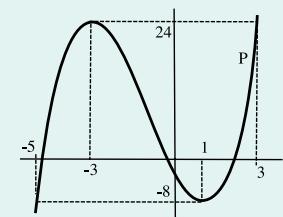
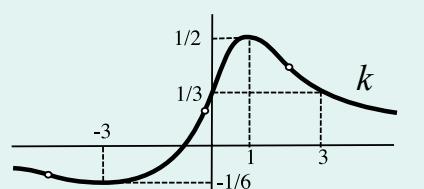
$$k''(x) = 2 \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 3}{(x^2+3)^3} = 0 \text{ sin soluciones enteras.}$$

Para aproximar los puntos de inflexión analizamos el polinomio $P(x) \equiv x^3 + 3x^2 - 9x - 3$ del numerador.

$$P'(x) = 3(x+3)(x-1). \text{ Máximo en } (-3, 24) \text{ y mínimo en } (1, -8).$$

$$\begin{aligned} P(-5) &< 0 \text{ y } P(-4) > 0 \\ P(-1) &> 0 \text{ y } P(0) < 0 \Rightarrow \text{Inflexión en un punto de} \\ P(2) &< 0 \text{ y } P(3) > 0 \end{aligned}$$

$$k(-3) = -\frac{1}{6}; k(1) = \frac{1}{2}; k(0) = k(3) = \frac{1}{3}.$$



Las tres siguientes no ofrecen excesivas complicaciones:

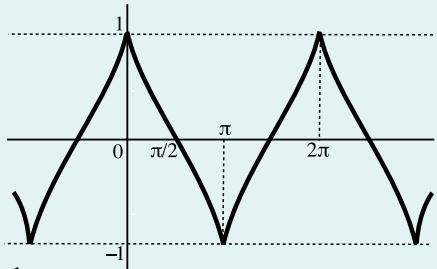
Ej. $p(x) = \frac{\cos x}{1+|\sin x|}$. 2π -periódica, par, continua $\forall x$.

Como $|x|$ no derivable en $x=0$ puede no serlo p si $\sin x=0$. Lo vemos sólo en 0 y π (periodicidad):

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{1+\sin x} & \text{en } [0, \pi] \\ \frac{\cos x}{1-\sin x} & \text{en } [-\pi, 0] \text{ y } [\pi, 2\pi] \end{cases} \Rightarrow$$

$$p' = \begin{cases} \frac{-1}{1+\sin x} & \text{en } (0, \pi) \rightarrow p'(0^+) = p'(\pi^-) = -1 \\ \frac{1}{1-\sin x} & \text{en } (-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi) \rightarrow p'(0^-) = p'(\pi^+) = 1 \end{cases}$$

$$\nexists p'(k\pi) \text{ [picos]. } p(0)=1, p(\pi)=-1, p\left(\frac{\pi}{2}\right)=0. p'' = \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} \text{ en } (0, \pi) \Rightarrow \begin{cases} \text{cresce en } (0, \pi/2) \\ \text{decrece en } (\pi/2, \pi) \end{cases}$$



Ej. $r(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x+1}} = \frac{|x|}{\sqrt{x+1}}$. $r(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{dom } r = (-1, \infty)$.

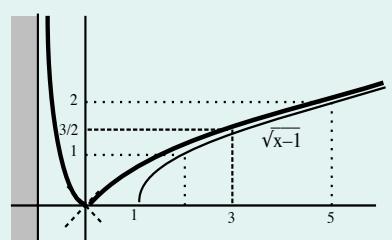
$$r'(x) = \frac{-[x+2]}{2[x+1]^{3/2}} \text{ si } -1 < x < 0; \quad r'(x) = \frac{x+2}{2[x+1]^{3/2}} \text{ si } x > 0$$

Decrece en $(-1, 0]$ y crece en $[0, \infty)$. $r'(0^\pm) = \pm 1$.

$$r''(x) = \frac{x+4}{4[x+1]^{5/2}}, \quad -1 < x < 0; \quad r''(x) = \frac{-[x+4]}{4[x+1]^{5/2}}, \quad x > 0.$$

$$r(x) = \sqrt{x-1 + \frac{1}{x+1}} \quad [\text{se parece a } \sqrt{x-1} \text{ para } x \text{ grande}].$$

$$r(0)=0 \text{ (mínimo en punto sin derivada)}, \quad r(-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = r(1), \quad r(3) = \frac{3}{2}. \quad r(x) \rightarrow \infty \text{ si } x \rightarrow -1^+.$$

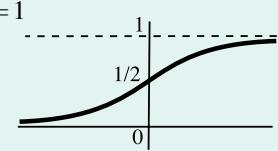


Ej. $e(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$. $e'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0, \quad e''(x) = \frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1$

$\Rightarrow e$ crece en todo \mathbf{R} y $x=0$ inflexión.

$$e(x) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} \frac{1}{1+\infty} = 0; \quad e(x) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} \frac{1}{1+0} = 1. \quad e(0) = \frac{1}{2}. \quad e(x) > 0 \quad \forall x.$$

$$[\text{Tiene un aire a la tangente hiperbólica; de hecho, } e(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{th} \frac{x}{2})].$$



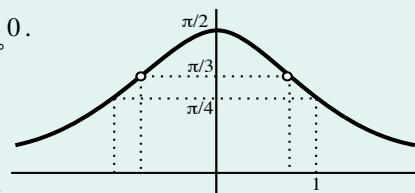
Dibujamos ahora dos de los ejemplos de 3.1 (el primero sencillo y el segundo complicado):

Ej. $n(x) = \arctan \frac{1}{x^2}$, $n(0) = \frac{\pi}{2}$. Par. $n(x) \geq 0 \quad \forall x$. $n(x) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} 0$.

$$n'(x) = \frac{-2x}{1+x^4} \Rightarrow n \text{ crece si } x < 0 \text{ y decrece si } x > 0.$$

$$n''(x) = 2 \frac{3x^4 - 1}{(1+x^4)^2} \Rightarrow \text{cónvava si } |x| \leq 3^{-1/4} \approx 0.76.$$

$$\text{Valores: } n(1) = \frac{\pi}{4}, \quad n(3^{-1/4}) = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}. \quad n'(0) = 0.$$



Ej. $s(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ con $s(0) = 0$ para que s sea continua.

$s(-x) = -s(x)$: impar. De las derivadas se saca poco:

$$s'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{1}{x} = \frac{1}{2x} \text{ (infinitos cortes).}$$

Pero podemos dar infinitos valores a la función:

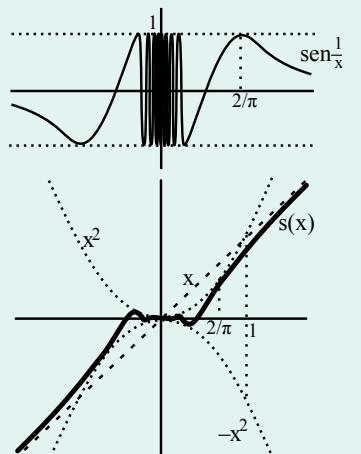
$$\text{Como } \sin \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{(4n+1)\pi}; \quad \sin \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{(4n-1)\pi},$$

la gráfica de s toca en esos x la de x^2 y la de $-x^2$, y para los demás x la gráfica oscila entre ambas.

$$\sin \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n\pi}, \text{ otros infinitos puntos de la gráfica.}$$

$$\sin \frac{1}{x} \approx \frac{1}{x} \text{ si } x \text{ gordo nos hace sospechar que } s(x) \approx x.$$

$$[\text{De hecho, con L'Hôpital o Taylor se ve que } \lim_{x \rightarrow \infty} [s(x) - x] = 0].$$



3.5. Aplicaciones

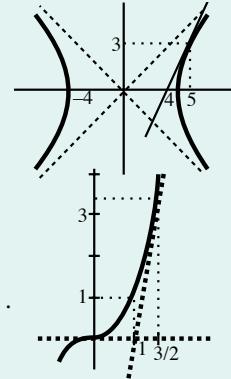
Tangentes a curvas.

Ej. Hallar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$ en el punto $(5, 3)$.

Más corto que despejar la y , y derivar la raíz resultante, derivamos implícitamente considerando la y como función de x :

$$2x - 2yy' = 0 \rightarrow y'(x) = \frac{x}{y}. \text{ Si } x = 5, y = 3 \text{ es } y' = \frac{5}{3}$$

$$\rightarrow y = 3 + \frac{5}{3}(x - 5), \quad [5x - 3y = 16].$$



Ej. ¿Para qué puntos de la curva $y = x^3$ la recta tangente pasa por $(1, 0)$?

Recta tangente en el punto (a, a^3) : $y = a^3 + 3a^2(x - a) = 3a^2x - 2a^3$.

$$\text{Pasa por } (1, 0) \text{ si } 3a^2 - 2a^3 = 0 \rightarrow a = 0, \frac{3}{2} \rightarrow \text{puntos } [(0, 0)] \text{ y } \left[\left(\frac{3}{2}, \frac{27}{8}\right)\right].$$

[Rectas tangentes respectivas: $y = 0$ e $y = \frac{27}{4}(x-1)$].

Ritmos de cambio.

Ej. Un cilindro se comprime lateralmente y se estira, de modo que el radio de la base decrece a un ritmo de 3 cm/s y la altura crece a 8 cm/s . Hallar el ritmo al que está cambiando el volumen cuando el radio es 5 cm y la altura 7 cm .

$$\text{El volumen del cilindro es } V = \pi r^2 h \rightarrow \frac{dV}{dt} = \pi [r^2 \frac{dh}{dt} + 2rh \frac{dr}{dt}] = 2\pi r[4r - 3h]$$

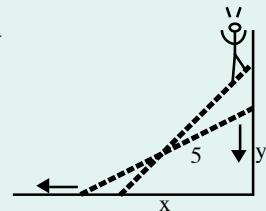
Cuando $r = 5$ y $h = 7$, $V' = -10\pi \text{ cm}^3/\text{s}$ (el volumen decrece en ese instante).

Ej. Una escalera de 5 m de largo permanece apoyada sobre una pared vertical y su extremo inferior se está alejando del pie de la pared a una velocidad constante de 2 m/s . Hallar la velocidad a la que desciende la parte superior cuando el extremo inferior está a 4 m de la pared.

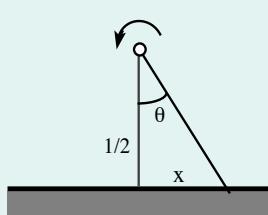
Sea y la distancia al suelo de la parte superior y x la distancia de la parte inferior a la pared. Por pitágoras es: $y = \sqrt{25 - x^2}$. Entonces

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{-2x}{\sqrt{25-x^2}}. \text{ Cuando } x = 4 \text{ es } \frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3}.$$

Por tanto el extremo de la escalera cae en ese instante a $\left[\frac{8}{3} \text{ m/s}\right]$.



Ej. La luz de un faro situado a $1/2 \text{ km}$ de una costa recta gira con un periodo de 12 segundos. Hallar la velocidad a la que la luz avanza por la costa: i) en el punto P más cercano al faro, ii) en un punto situado a 2 km de P , iii) un segundo después de pasar la luz por P .



Sean θ el ángulo y x la distancia descritos en el dibujo. Se tiene que $x = \frac{1}{2} \tan \theta$. La velocidad de crecimiento de θ es $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{6}$ radianes por segundo. La velocidad de la luz sobre la costa es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{12}(1 + 4x^2)$$

i) en P , $\theta = 0$, $x = 0 \rightarrow x' = \left[\frac{\pi}{12}\right] \text{ km/seg} \approx 942 \text{ km/h};$

ii) $x = 2 \rightarrow x' = \left[\frac{17\pi}{12}\right] \text{ km/seg} \approx 16022 \text{ km/h};$

iii) $\theta = \frac{\pi}{6} \rightarrow x' = \frac{\pi}{12}(1 + \frac{1}{3}) = \left[\frac{\pi}{9}\right] \text{ km/seg} \approx 1257 \text{ km/h}.$

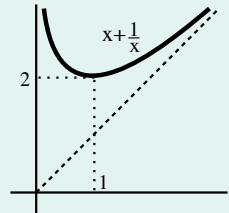
Máximos y mínimos.

- Ej.** Hallar (si existen) dos reales positivos cuyo producto sea 1 y tales que su suma sea i) máxima, ii) mínima.

Sean los números x y $\frac{1}{x}$. Hay que buscar los extremos de $S(x) = x + \frac{1}{x}$ en el intervalo $(0, \infty)$ [como no es un cerrado podrían no existir].

$$S'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1 \quad (-1 \text{ no sirve}); S''(x) = \frac{2}{x^3} \rightarrow S''(1) = 2$$

hay, pues, un mínimo local en $x = 1$. S derivable para todo x de $(0, \infty)$, $S(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$ y cuando $x \rightarrow \infty \Rightarrow$ no hay máximo. Por tanto, el mínimo (absoluto) se da si $x = \frac{1}{x} = 1$ (la suma es entonces 2).



- Ej.** Un nadador se halla en el mar a 4 km de una playa recta y a 5 km de una palmera situada en la playa junto al mar. Si nada a una velocidad de 4 km/h y camina por la playa a 5 km/h, ¿cuál es el tiempo mínimo que debe emplear para llegar hasta la palmera?

El tiempo empleado en nadar hacia un punto situado a una distancia x de la perpendicular y luego caminar hasta la palmera es

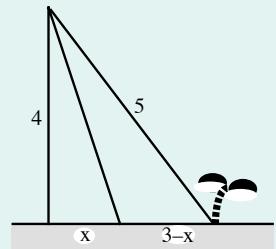
$$T(x) = \frac{\sqrt{16+x^2}}{4} + \frac{3-x}{5}, \text{ con } x \in [0, 3]$$

[si $x \leq 0$ tarda más seguro y si $x \geq 3$ no vale la expresión de $T(x)$].

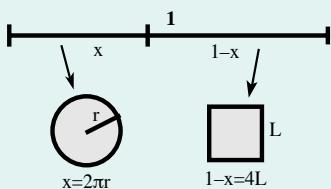
$$T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{16+x^2}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \frac{25}{16}x^2 = 16 + x^2 \Leftrightarrow x = \frac{16}{3}, -\frac{16}{3}$$

Pero $\frac{16}{3} > 3$ y $-\frac{16}{3}$ no cumple $T' = 0$, así que el mínimo se toma en un extremo: $T(3) = \frac{5}{4} < T(0) = \frac{8}{5}$ [$T(\frac{16}{3}) = \frac{6}{5}$ es mentira].

Por tanto, debe nadar hacia la palmera (si ésta estuviese lejos, sí convendría atajar).



- Ej.** Con un alambre de longitud 1 m se forman un cuadrado y una circunferencia. ¿Cuánto alambre debe emplearse en cada figura para que la suma de sus áreas sea i) máxima, ii) mínima?



$$\text{Área total} = L^2 + \pi r^2 = \frac{[1-x]^2}{16} + \frac{\pi x^2}{4\pi^2} = \frac{[4+\pi]x^2 - 2\pi x + \pi}{16\pi} = A(x)$$

con $x \in [0, 1]$. Los máximos y mínimos (que existen, por ser A continua en $[0, 1]$) se alcanzarán (A derivable en $(0, 1)$) o bien en los extremos del intervalo o bien cuando $A'(x)=0$:

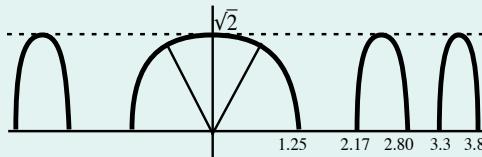
$$A'(x) = \frac{[4+\pi]x - \pi}{8\pi} = 0 \rightarrow x^* = \frac{\pi}{4+\pi} \approx 0.44 \text{ m}$$

Como $A' < 0$ si $x < x^*$, $A' > 0$ si $x > x^*$, el mínimo se da en x^* , y como $A(0) = \frac{1}{16} < A(1) = \frac{1}{4\pi}$, el máximo en 1 (empleando todo el alambre para el círculo [$A \approx 0.08 \text{ m}^2$]; para el área mínima se usa alrededor de 44 cm para el círculo y 56 cm para el cuadrado [$A = \frac{1}{4[4+\pi]} \approx 0.035 \text{ m}^2$]).

- Ej.** Hallar el punto de la gráfica de $f(x) = \sqrt{2 \cos x^2}$ más cercano al origen.

Hallamos su dominio y dibujamos su gráfica: $\cos x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \cup [\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}] \cup \dots$

$$\Rightarrow \text{dom } f = \dots \cup \left[-\sqrt{\frac{5\pi}{2}}, -\sqrt{\frac{3\pi}{2}} \right] \cup \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right] \cup \left[\sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \sqrt{\frac{5\pi}{2}} \right] \cup \dots$$



Mejor que minimizar distancias, minimizamos su cuadrado (es lo mismo y evita derivar raíces):

$$d(x) = d[(0,0), (x, f(x))]^2 = x^2 + 2 \cos x^2; d'(x) = 4x(\frac{1}{2} - \sin x^2) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ó } x^2 = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \dots$$

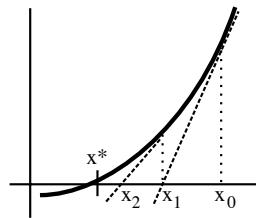
El valor mínimo claramente se da en $[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$. Candidatos son además estos extremos:

$$d(0) = 2, d(\pm\sqrt{\frac{\pi}{6}}) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 2.26, d(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{6} \approx 1.57 \rightarrow \text{puntos más cercanos } (\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0).$$

3.6. Aproximación numérica de ceros

Muchas veces es necesario hallar los **ceros** de una función f , es decir, los x^* tales que $f(x^*) = 0$. Pero, como vimos, ni siquiera si f es un polinomio se tienen siempre fórmulas para calcular sus raíces. Mucho menos si f es una función trascendente como $f(x) = e^x + x^3$ o $f(x) = 3 \arctan x - \log x$. Se tratará entonces de hallar los ceros de forma aproximada. El teorema de Bolzano puede ser un camino para aproximar x^* : encontrando un intervalo $[a, b]$ de pequeña longitud tal que $f(a)f(b) < 0$ estamos seguros de que al menos hay un $x^* \in (a, b)$ con $f(x^*) = 0$ (que será el único si f' es > 0 en ese intervalo). Pero mucho más rápidos serán, normalmente, otros caminos como el

Método de Newton. La idea de este método es simple. Supongamos que para una f como la de la figura sabemos que el cero x^* se parece más o menos a x_0 . Aproximando la gráfica con la tangente en $(x_0, f(x_0))$ obtenemos un x_1 (punto en que la recta corta el eje), probablemente más cercano a x^* que el x_0 inicial. Repitiendo el proceso con x_1 obtenemos un x_2 , luego un x_3 , ... siendo esperable que la sucesión $\{x_n\}$ converja rápidamente hacia x^* .



Hallaremos una fórmula que exprese cada término de esta sucesión en función del anterior. Como la tangente en $(x_n, f(x_n))$ es $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$ el corte de esta recta con $y = 0$ nos da la siguiente aproximación. Por tanto:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

[Se ve que las cosas irán mal si f/f' es grande cerca de x^* ; se puede demostrar que $\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$ en un entorno de x^* es una condición suficiente para que converja el método].

Ej. Aproximemos las raíces reales de $P(x) = x^4 - 2x^2 + 4x - 2$ (exactamente no sabemos).

La ley de Descartes nos asegura que hay 0 ó 1 positivas (+ - + -) y exactamente 1 negativa (+ - - -). Vamos a hacernos una idea de su gráfica para determinar cuántas raíces positivas tiene y localizar intervalos en los que buscarlas. Para ello empezamos estudiando sus derivadas:

$$P'(x) = 4[x^3 - x + 1] \text{ (sin raíces enteras; 2 ó 0 positivas (no lo sabemos, por ahora) y 1 negativa)}$$

$$P''(x) = 4[3x^2 - 1] = 0 \rightarrow x = \pm 1/\sqrt{3} \text{ (puntos de inflexión de } P \text{ y máximos o mínimos de } P')$$

$$P'(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 4[1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}] \approx 5.5; P'(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 4[1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}] \approx 2.5.$$

$$P'(-3) = -92, P'(-2) = -20, P'(-1) = P'(0) = P'(1) = 4.$$

Con esto ya podemos dibujar la gráfica de P' . Vemos que:

P' tiene un único cero en $(-2, -1)$ [$P'' > 0$ en $(-2, -1)$]

y no tiene más. Por tanto, P tiene un único mínimo entre -2 y -1 . A partir de él P crece \Rightarrow sólo hay 1 raíz positiva de P . Para localizar un poco mejor las dos raíces de P :

$$P(-3) = 49, P(-2) = P(0) = -2, P(-1) = -7, P(1) = 1$$

\Rightarrow Existe un cero de P en $[-3, -2]$ y otro en $[0, 1]$.

Aplicamos ahora el método de Newton para aproximar las raíces.

Primero la de P' : $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n + 1}{3x_n^2 - 1}$. Elegimos $x_0 = 1$ y obtenemos:

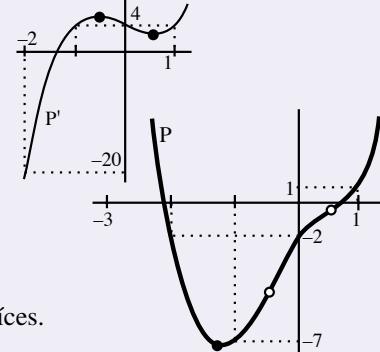
$$x_1 = -1.5; x_2 \approx -1.34782609; x_3 \approx -1.32520040; x_4 \approx -1.32471817; x_5 \approx -1.32471796;$$

y los posteriores x_n tienen esos mismos 8 decimales [es curioso ver que ocurre eligiendo $x_0 = 0$].

Los ceros de P los sacamos de $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 2x_n^2 + 4x_n - 2}{4[x_n^3 - x_n + 1]}$, obteniendo con los x_0 indicados:

$$x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 0.675, x_3 \approx 0.676444897, x_4 \approx 0.676444288; x_5, x_6, \dots \text{ iguales decimales.}$$

$$x_0 = -2, x_1 = -2.1, x_2 \approx -2.09074420, x_3 \approx -2.09065786, x_4 \approx -2.09065785 = x_5 = x_6 = \dots$$



En la sección 3.2 comprobamos que la siguiente función tenía un único cero. Vamos a calcularlo.

Ej. $l(x) = 3 \arctan x - \log x$. Primero observemos que el cero c buscado va ser un número gordo, pues si x grande, debe ser $\log x \approx \frac{3\pi}{2} \approx 4.7 \Leftrightarrow x \approx e^{4.7} \approx 110$.

Usando Bolzano (y una calculadora científica normal) y tanteando un poco hallamos un intervalo de longitud 1 en el que está c buscado:

$$l(108) \approx 0.0025, l(109) \approx -0.0065 \Rightarrow c \in (108, 109).$$

Pero con Bolzano nos costaría mucho ir encontrando decimales. Es mucho más rápido Newton.

$$\text{Que adopta en este caso la forma: } x_{n+1} = x_n + \frac{x_n(1+x_n^2)(3 \arctan x_n - \log x_n)}{x_n^2 - 3x_n + 1}.$$

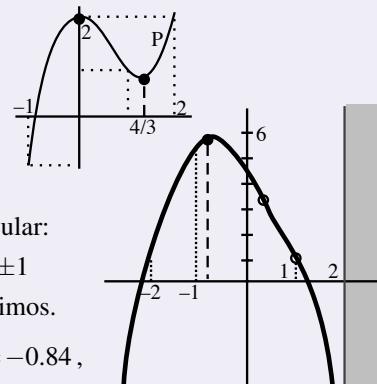
Empezando, por ejemplo, con $x_0 = 100$ vamos obteniendo:

$$x_1 \approx 107.960779, x_2 \approx 108.275473, x_3 \approx 108.275919 \quad [\text{y mismos decimales para } x_4, x_5, \dots].$$

[El dibujo hecho en 3.2 era cualitativo y el corte allí dibujado, como vemos, no tiene nada que ver con el real].

Dibujemos una gráfica. Como nos pasaba en la sección anterior aparecerán dificultades de cálculo de ceros, pero ahora los vamos a aproximar utilizando el método de Newton:

Ej. $f(x) = x^3 + 6 \log(2-x)$. $\text{dom } f = (-\infty, 2)$. $f \xrightarrow[x \rightarrow 2^-]{} -\infty$.
 $f(x) = x^3 \left[1 + 6 \frac{\log(2-x)}{x^3} \right] \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} " -\infty \cdot [1+0] = -\infty "$
[pues L'Hôpital implica: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(2-x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1/(x-2)}{3x^2} = 0$].
 $f'(x) = 3x^2 - 2x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow P(x) \equiv x^3 - 2x^2 + 2 = 0??$



Siempre, antes de usar el ordenador, vemos qué queremos calcular:

$$P'(x) = 3x^2 - 4x, P(\frac{4}{3}) = \frac{22}{27} > 0, P(0) = P(2) = 2, P(\pm 1) = \pm 1$$

\Rightarrow raíz de P [máximo de f] en $c \in (-1, 0)$. f no tiene mínimos.

Newton para P : $x_{n+1} = 2 \frac{x_n^3 - x_n^2 - 1}{3x_n^2 - 4x_n}$, $x_0 = -1$, $x_1 = -0.86$, $x_2 = -0.84$, x_3 ya igual, $c \approx -0.84$. Valor máximo aproximado: $f(c) \approx 5.67$.

La raíz de P la podríamos haber calculado también con las fórmulas de 3.3:

$$p=1, q=-2, R=4, S=38, \Delta=-44, x_r = \frac{1}{3} [2 - (19 - 3\sqrt{33})^{1/3} - (19 + 3\sqrt{33})^{1/3}] \approx 0.84.$$

Es calculable la concavidad (casualidad, o el inventor del problema tanteó para que lo fuese):

$$f''(x) = 6 \frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{[x-2]^2} = 6 \frac{[x-1][x^2 - 3x + 1]}{[x-2]^2} = 0 \text{ si } x=1 \text{ ó } \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.4 \quad [\frac{3+\sqrt{5}}{2} \notin \text{dom } f].$$

$\Rightarrow f$ es \cup entre los puntos de inflexión y \cap en el resto.

Dar valores sueltos sí es posible con una calculadora:

$$f(1) = 1, f(0) = 6 \log 2 \approx 4.1, f(-1) = 6 \log 3 - 1 \approx 5.6, f(-2) = 12 \log 2 - 8 \approx 0.3.$$

Pero para hallar los cortes con el eje x necesitamos Newton (o método similar) una vez más:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - 2)(x_n^3 - \log(2-x_n))}{3(x_n^3 - 2x_n^2 + 2)} \nearrow x_0 = -2, x_1 \approx -2.03 \approx x_2 \approx x_3 \\ \searrow x_0 = 1, x_1 \approx 1.33, x_2 \approx 1.31 \approx x_3 \approx x_4$$

Veamos que deducimos del método de Newton para el cálculo de raíces m -simas de reales positivos:

Ej. Buscando los ceros de $x^m - a$ obtenemos una sucesión $\{x_m\}$ que tienden hacia $\sqrt[m]{a}$.

$$\text{Tenemos que: } x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^m - a}{mx_n^{m-1}} = \frac{1}{m} \left[(m-1)x_n + \frac{a}{x_n^{m-1}} \right] \quad (\text{algoritmo de Herón para calcular raíces}).$$

Para hallar $\sqrt[3]{12345}$, y partiendo de algún número que no esté muy lejos, por ejemplo $x_0 = 20$:

$$x_1 = 23.62083333, x_2 = 23.12251744, x_3 = 23.11162389, x_4 = 23.11161875 = x_5 = x_6 = \dots$$

Veamos ahora otro método de aproximación de ceros de un tipo de funciones particulares que, aunque sea más lento que el de Newton, tiene el interés de que es aplicable en matemáticas más avanzadas a problemas mucho más generales.

$$f : [a, b] \rightarrow [a, b] \text{ es contractiva si } |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \text{ con } c < 1, \forall x, y \in [a, b]$$

Una f contractiva es continua en $[a, b]$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si $|x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{c}$.

Probemos que entonces $\boxed{\text{existe un único } x^* \in [a, b] \text{ tal que } x^* = f(x^*)}$

(A un x^* con esa propiedad se le llama **punto fijo** de f).

Aplicando Bolzano a $g(x) = x - f(x)$, como $g(a) < 0 < g(b) \Rightarrow$ existe el x^* .

Si hubiera otro $y^* = f(y^*)$ sería $|f(x^*) - f(y^*)| = |x^* - y^*| \leq c|x^* - y^*| \Rightarrow x^* = y^*$.

Además existe una forma muy fácil de aproximar el x^* pues:

$$\boxed{\text{Para cualquier } x_0 \in [a, b], \text{ la sucesión } x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots \rightarrow x^*}.$$

En efecto, llamemos x_n al resultado de aplicar n veces f a x_0 .

Vamos a ver que x_n es de Cauchy. Se tiene que

$$|x_n - x_{n+1}| = |f(x_{n-1}) - f(x_n)| \leq c|x_{n-1} - x_n| \leq \dots \leq c^n|x_0 - x_1|; \text{ por tanto, si } m \leq n,$$

$$|x_m - x_n| \leq |x_{m+1} - x_m| + \dots + |x_n - x_{n-1}| \leq [c^m + \dots + c^{n-1}]|x_1 - x_0| = \frac{c^m - c^n}{1-c} |x_1 - x_0|,$$

que se puede hacer tan pequeño como queremos con m y n suficientemente grandes ($c^m, c^n \rightarrow 0$).

Como x_n es de Cauchy tiene límite x^* y se cumple $f(x^*) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x^*$.

La forma más fácil de ver que una $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ es contractiva es ver que el máximo M de $|f'(x)|$ en $[a, b]$ es menor que 1, pues, por el teorema del valor medio,

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq M|x - y| \text{ con } M < 1.$$

Ej. Calculemos el único $x \in [0, 1]$ tal que $\boxed{\cos x = x}$. $\cos x$ es contractiva: su imagen está contenida en $[0, 1]$ y $|\cos x - x| \leq \sin 1 < 1$.

Así pues, podemos hallar el x^* sin más que apretar la tecla del coseno de una calculadora a partir de cualquier $x_0 \in [0, 1]$.

Por ejemplo, si $x_0 = 1$ vamos obteniendo:

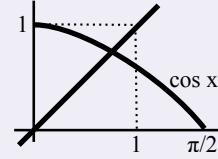
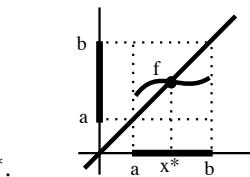
$$0.54030231, 0.85755322, 0.65428979, 0.79348036, 0.70136877, 0.76395968, 0.72210242\dots$$

Después de apretar 20 veces obtenemos 0.73918440; tras apretar 40 veces, 0.73908517 ...

El método de Newton nos da el cero buscado mucho más rápidamente.

Haciendo $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$ con $x_0 = 1$, se tiene en pocos pasos:

$$x_1 = 0.7503638678, x_2 = 0.7391128909, x_3 = 0.7390851334, x_4 = 0.7390851332 = x_5 = \dots$$



4. Series, Taylor y límites indeterminados

4.1 Series de números reales

Queremos hacer ‘sumas de infinitos números reales’, llamadas **series**:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Por ejemplo, ‘sumemos’ $1/5 + 1/5^2 + 1/5^3 + 1/5^4 + 1/5^5 + \cdots$. Sumar un número finito de términos siempre se puede: la suma de los 2 primeros es 0.24, la de los 5 primeros es 0.24992, la de los 10 es 0.2499999744, ... Pero carece de sentido ‘sumar infinitas veces’. La palabra ‘infinito’ en matemáticas siempre está unida al concepto de límite. Dada una serie, siempre podemos hallar la ‘ k -ésima suma parcial’ $S_k = a_1 + \cdots + a_k$. Parece natural decir que la suma S de los infinitos a_n será el límite de la sucesión $\{S_k\}$. En la serie anterior parece que este límite existe y que es $S = 0.25$, pero este límite pudiera no existir para otras. Así, para la serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$ las sumas parciales van siendo $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots$, sucesión divergente (y, por tanto, no se le puede asignar ningún valor a la suma de los infinitos términos). Lo primero que miraremos cuando aparezca una serie es si la ‘suma infinita’ tiene sentido:

Def. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **convergente** si lo es la sucesión $\{S_k\}$ con $S_k = \sum_{n=1}^k a_n$. La **suma de la serie** es entonces el $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$. Se llama **término general** de la serie al a_n y **sucesión de sus sumas parciales** a $\{S_k\}$. Si una serie no converge, se dice **divergente**.

[La serie converge si lo hace su sucesión de sumas parciales; otra cosa distinta es que converja su término general. Para $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\cdots$ es $\{S_k\} = \{k\}$, que claramente diverge a ∞ , y sin embargo converge la sucesión constante $\{a_n\} = \{1\}$; pronto veremos que para que la serie converja será necesario (pero no suficiente) que $\{a_n\}$ tienda hacia cero (para que pueda ser finita la suma de infinitos números es necesario que sean muy pequeños)].

De la definición y las conocidas propiedades de los límites de sucesiones se deduce inmediatamente que **si suprimimos, cambiamos o añadimos un número finito de términos al principio de una serie, no se altera su carácter de convergencia o divergencia** (aunque sí el valor de su suma, si converge), porque las nuevas sumas parciales diferirán de la inicial sólo en un constante. Por eso, cuando hablemos simplemente de convergencia podremos no escribir el n en que empezamos a sumar; incluso escribiremos sólo Σ (no olvidando que son infinitos términos).

También está claro (por las propiedades de sumas y productos de sucesiones) que si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen y si $c \in \mathbf{R}$, también convergerán las series $\sum [a_n + b_n]$ y $\sum c a_n$ y que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n + b_n] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

¿Cómo saber si una serie converge o no? ¿Cuánto vale su suma si es convergente? Veremos una serie de **criterios** que nos permitirán responder en la práctica a la primera pregunta para muchas series (desde luego la definición $\varepsilon-N$ del límite de sucesiones no es adecuada, ni vimos en 2.2 teoremas para trabajar con sucesiones en las que el número de sumandos va creciendo). Respecto de la segunda, casi siempre necesitaremos calculadora u ordenador para dar simplemente un valor aproximado de la suma de la serie.

Dos casos en que se puede sumar la serie (excepcionales, porque podemos encontrar una expresión manejable de las sumas parciales; cuando veamos series de Taylor en 4.4 conoceremos la suma de alguna otra serie) son los siguientes:

Series geométricas (progresiones geométricas de infinitos términos):

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots . \text{ Si } r \neq 1 \text{ es } S_k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r} \Rightarrow \boxed{\text{Si } |r| < 1, \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}}$$

Y si $|r| \geq 1$ diverge, al hacerlo S_k (también si $r = \pm 1$: $\frac{1+1+\dots}{1-1+1-1+\dots} \rightarrow \infty$ divergen).

Ej. Con esto vemos que $\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{5} \frac{1}{1-1/5} = \frac{1}{4} = 0.25$ como sospechábamos.

[De la misma forma que en este ejemplo, es fácil ver que, en general, $\sum_{n=k}^{\infty} r^n = \frac{r^k}{1-r}$, si $|r| < 1$].

Series telescopicas: $\sum_{n=1}^{\infty} [b_n - b_{n+1}] \Rightarrow S_k = [b_1 - b_2] + [b_2 - b_3] + \dots + [b_k - b_{k+1}] = b_1 - b_{k+1}$.

Por tanto, esta serie converge si y solo si $\{b_n\}$ converge y entonces su suma es: $b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Ej. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1$. **converge** y ese es su valor.

Ej. $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} [\log n - \log(n+1)]$ es **divergente**, porque $\log n$ diverge hacia $+\infty$.

Salvo en estos dos casos nos conformaremos con saber si la serie que tratamos converge o no y con la calculadora para aproximar su suma (a ser posible, dando una cota del error cometido). Lo que sigue son los criterios más importantes para distinguir las series convergentes de las divergentes (hay más, pero aplicables en muy pocos casos prácticos). El primer criterio permite identificar un montón de series **divergentes** (muchas veces a simple vista):

Teorema: $\boxed{\text{Si } \sum a_n \text{ es convergente} \Rightarrow a_n \rightarrow 0.}$ [La implicación opuesta (\Leftarrow) es **falsa**].

Es $a_n = S_n - S_{n-1}$. Entonces $a_n \rightarrow 0$, pues S_n y S_{n-1} tienen, desde luego, el mismo límite.

Ej. $\sum_{20000}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ es **divergente**, porque el término general a_n no tiende a 0 (tiende a $\frac{1}{20000}$).

Ej. $\sum (-1)^n e^{1/n}$ **diverge**, porque a_n tampoco tiende a 0 (ni a nada; pares $\rightarrow 1$, impares $\rightarrow -1$).

Veamos que \Leftarrow es falso, o sea, que no basta que los números que sumemos tiendan a 0 para que la serie converja. Para ello basta un contraejemplo:

La ‘serie armónica’ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **diverge**. ($a_n \rightarrow 0$, pero la suma es ‘infinito’).

[No se ve con una calculadora: $S_1 = 1$, $S_2 = 1.5$, ..., $S_{10} \approx 2.929$, ..., $S_{100} \approx 5.187$, ..., $S_{1000} \approx 7.485$, ... no parece estabilizarse, pero sumandos muy altos acabarían por no afectar al número de la pantalla].

Para probarlo consideramos la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$, de términos menores que los de la armónica. Tenemos entonces que:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad S_4 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \quad S_8 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \quad \dots, \quad S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}.$$

Por tanto la sucesión de sumas parciales de $\sum \frac{1}{n}$ diverge (ni siquiera está acotada).

Series de términos positivos $a_n \geq 0$ [o de términos negativos, pues $\sum a_n = -\sum (-a_n)$].

Observemos que entonces las sumas parciales forman una sucesión creciente.

Veamos varios criterios de convergencia. El primero exige saber algo de integrales y límites de funciones, pero lo necesitamos para tratar las importantes series $\sum \frac{1}{n^s}$.

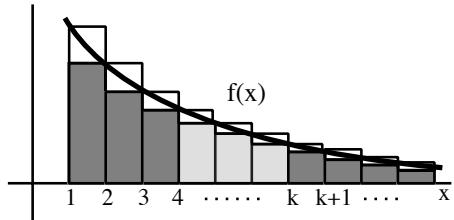
Se define: $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ (si el límite existe; la integral se dice convergente).

Criterio integral:

Sea $f(x)$ función positiva y decreciente para $x \geq 1$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx$ converge. El error está acotado por $\int_{k+1}^{\infty} f(x) dx \leq S - S_k \leq \int_k^{\infty} f(x) dx$.

Este criterio, es de los pocos que dan cota del error cometido al sustituir la suma S de la serie convergente por la k -ésima suma parcial. No lo demostramos. Recordando el significado geométrico de la integral, es intuitivamente claro a partir del dibujo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ converge si } s > 1 \text{ y diverge si } s \leq 1$$



Si $s \leq 0$, el término general no tiende a 0 y la serie diverge.

Si $s > 0$, la función $f(x) = x^{-s}$ es positiva y decreciente y aplicamos el criterio anterior:

$$\text{si } s \neq 1, \int_1^b x^{-s} dx = \frac{1-b^{1-s}}{1-s}; \quad \text{si } s=1, \int_1^b x^{-1} dx = \log b;$$

si $b \rightarrow \infty$, la primera integral converge para $s > 1$ y $\rightarrow \infty$ si $0 < s < 1$. La segunda $\rightarrow \infty$.

Ej. Para aproximar la suma S de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots$ sumamos 50 términos y obtenemos $S_{50} = 1.201860\dots$ Estimemos el error cometido E , utilizando el criterio integral:

$$\int_50^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{x^{-2}}{2} \right]_{50}^{\infty} = \frac{1}{2 \cdot 50^2} = 0.000192\dots \leq E = S - S_{50} \leq \int_{50}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{x^{-2}}{2} \right]_{50}^{\infty} = \frac{1}{2 \cdot 50^2} = 0.0002$$

El valor de S (no calculable exactamente) está comprendido entre 1.202052... y 1.202060...

En los dos siguientes criterios compararemos nuestra serie con otra de convergencia conocida (normalmente con las $\sum \frac{1}{n^s}$; por eso serán adecuados cuando hay como mucho potencias de n ; si aparecen términos mayores, como 3^n o $n!$, será mejor usar el cociente o la raíz que veremos).

Criterio de comparación por desigualdades:

Si $0 \leq a_n \leq b_n$, entonces $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

[Y por tanto $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge. Pero no se obtiene ninguna conclusión de que la mayor diverja o de que la menor converja].

Sean $S_k = a_1 + \dots + a_k$, $T_k = b_1 + \dots + b_k$. Son sucesiones crecientes con $0 \leq S_k \leq T_k$. Entonces: T_k convergente $\Rightarrow T_k$ acotada $\Rightarrow S_k$ acotada $\Rightarrow S_k$ convergente y $\lim S_k \leq \lim T_k$.

Ej. $\sum \frac{\operatorname{sen} n + 1}{n^3 + n}$ converge, ya que $0 \leq \frac{\operatorname{sen} n + 1}{n^3 + n} \leq \frac{2}{n^3}$ y sabemos que $\sum \frac{2}{n^3} = 2 \sum \frac{1}{n^3}$ converge.

Ej. $\sum \frac{n+1}{n^2}$ diverge, pues $\frac{n+1}{n^2} \geq \frac{1}{n}$ y la armónica diverge (de $\frac{n+1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ no sacaríamos nada).

Lo podemos afirmar sin el criterio: la suma de una $\sum a_n$ convergente y otra $\sum b_n$ divergente es divergente (si convergiese, $\sum [a_n + b_n] - \sum a_n = \sum b_n$ convergería) y esto le pasa a nuestra serie $\sum [\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}]$. [Que conste que la suma o diferencia de dos divergentes sí puede ser convergente].

Trabajar con desigualdades puede ser complicado, por eso suele ser bastante más útil:

Criterio de comparación por paso al límite:

Sean $a_n, b_n \geq 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ (finito). Entonces:

Si $c > 0$, $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum b_n$ converge. Si $c = 0$, $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

Si $c > 0$, para $n \geq N$, $\frac{c}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3c}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{c}{2}b_n \leq a_n \leq \frac{3c}{2}b_n$ y aplicamos el criterio anterior.

Si $c = 0$, para $n \geq N$, $0 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a_n \leq b_n$ y otra vez el criterio.

A partir de ahora, para abreviar, representaremos con el símbolo ‘~’ el hecho de que a dos series les podemos aplicar la primera parte de este criterio, es decir:

$$a_n \sim b_n \text{ si } \frac{a_n}{b_n} \rightarrow c > 0$$

[A pesar del símbolo elegido, no quiere decir esto que, aunque las dos series converjan a la vez, la suma de una se parezca a la de la otra (intentemos no escribir $\sum a_n \sim \sum b_n$)].

Esta parte del criterio con $c > 0$ permite determinar la convergencia de muchas series a simple vista, mirando sólo en los términos n^s que ‘mandan’ en numerador y denominador:

Ej. $\sum \frac{n-1}{n^2}$ **diverge**, porque $a_n \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ (es decir, $\frac{a_n}{1/n} = \frac{n}{n-1} \rightarrow 1 > 0$) y $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

[La comparación por \leq no es adecuada aquí (de la acotación sencilla $a_n \leq \frac{1}{n}$ no sale nada, pues aunque la gorda diverja la menor podría converger); en cambio, para el primer ejemplo del criterio anterior, como $\frac{\operatorname{sen} n + 1}{n^3 + n}$ no se parece a $\frac{1}{n^3}$ ($\frac{a_n}{1/n^3}$ no tiene límite), el paso al límite no parece adecuado (se puede usar la parte con $c = 0$, pero es más fácil usar desigualdades)].

Ej. $\sum \frac{5\sqrt{n}-173}{n^2+\cos n}$ **converge**, pues $a_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ ($\frac{a_n}{1/n^{3/2}} \rightarrow 5 > 0$) y $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente.

[Aunque sean unos cuantos $a_n < 0$, esto no impide aplicar criterios para series de términos positivos, pues la convergencia se mantiene si los quitamos].

Ej. $\sum \frac{\operatorname{arctan} n}{4n^2+3}$ **converge**, ya que $a_n \sim \frac{1}{n^2}$ ($\frac{a_n}{1/n^2} \rightarrow \frac{\pi}{8} > 0$, pues $\operatorname{arctan} n \rightarrow \frac{\pi}{2}$) y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Ej. $\sum \frac{1}{7^n+(-1)^n}$ **converge**: $a_n \sim \frac{1}{7^n}$ ($\frac{a_n}{1/7^n} \rightarrow 1 > 0$) y $\sum (\frac{1}{7})^n$ es geométrica convergente.

[Alguna vez compararemos con otras series conocidas y no sólo con las $\sum \frac{1}{n^s}$].

Ej. $\sum \operatorname{sen} \frac{1}{n^3}$. La sucesión $\frac{1}{n^3} \rightarrow 0$ y sabemos ya que $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. Por los teoremas que relacionan límites de sucesiones y funciones se tiene: $\frac{a_n}{1/n^3} \rightarrow 1$. $\sum \frac{1}{n^3}$ converge \Rightarrow la dada **converge**.

Cuando los términos que dominen contengan logaritmos habrá que aplicar la segunda parte (la de $c = 0$) de este criterio (porque $\log n$ no se parece a ninguna potencia de n):

Ej. $\sum \frac{\log n}{n^4}$ **converge**, pues $\frac{\log n/n^4}{1/n^3} = \frac{\log n}{n} \rightarrow 0$ (límite admitido) y $\sum \frac{1}{n^3}$ (más gorda) converge.

$\sum \frac{\log n}{n}$ **diverge**, pues $\frac{1/n}{\log n/n} \rightarrow 0$ y $\sum \frac{1}{n}$ (más pequeña) diverge.

[o por desigualdades $\frac{\log n}{n} > \frac{1}{n}$ si $n \geq 3$] [o por el integral $\int_1^\infty \frac{\log x}{x} dx = [\frac{1}{2}(\log x)^2]_1^\infty \rightarrow \infty$].

$\sum \frac{\log n}{n^2}$ **converge**, pues $\frac{\log n/n^2}{1/n^{3/2}} = \frac{\log n}{n^{1/2}} \rightarrow 0$ y $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

[hemos debido afinar pues $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente pero menor y $\sum \frac{1}{n}$ es mayor pero diverge].

Series de términos cualesquiera.

Consideremos primero la serie, de términos positivos, de los valores absolutos $\sum |a_n|$.

Teorema: $\sum |a_n|$ es convergente $\Rightarrow \sum a_n$ es convergente. [La implicación \Leftarrow es falsa].

$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$, $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum [a_n + |a_n|]$ converge (criterio de comparación por desigualdades) $\Rightarrow \sum [a_n + |a_n|] - \sum |a_n| = \sum a_n$ converge.

\Leftarrow es falsa: pronto veremos series $\sum a_n$ convergentes pero tales que $\sum |a_n|$ diverge. Diremos que $\sum a_n$ es **absolutamente convergente** si $\sum |a_n|$ es convergente (el teorema anterior afirma que **absolutamente convergente \Rightarrow convergente**). Diremos que $\sum a_n$ es **condicionalmente convergente** si converge, pero no absolutamente.

Ej. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ converge absolutamente (y por tanto converge) pues $\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge ($\sim \frac{1}{n^2}$).

Ej. $\sum \frac{\cos n}{3^n} \cdot \sum \frac{|\cos n|}{3^n} \leq \sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ geométrica convergente $\Rightarrow \sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

Ej. $\sum \frac{\cos n}{n}$. De $\sum \frac{|\cos n|}{n}$ no sacamos nada ($\leq \sum \frac{1}{n}$ divergente). No sabremos decir si converge.

[De hecho, aunque es largo de probar y se utilizan criterios que nosotros no estudiamos, es convergente. Aunque eso no sea ninguna prueba, se puede ir al ordenador y sumar, por ejemplo, 1.000, 10.000 y 100.000 términos. Se obtiene: $S_{1000} \approx 0.0431$, $S_{10000} \approx 0.0419$, $S_{100000} \approx 0.0420$. Parece converger].

Ej. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ **no converge absolutamente** (pues $\sum \frac{1}{n}$ diverge), pero sí **converge condicionalmente** (hacia $\log 2$ como se verá en 4.4) gracias a este **criterio para series alternadas** (+ - + - + - ...):

Criterio de Leibniz:

Si $a_n \geq 0$ es decreciente y $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ converge. Además, el error absoluto $|S - S_N| \leq a_{N+1}$ (primer término que se omite).

Es fácil ver que por ser $\{a_n\}$ decreciente:

$$S_2 \leq S_4 \leq \dots \leq S_{2n} \leq \dots \leq S_{2n+1} \leq \dots \leq S_3 \leq S_1$$

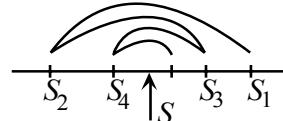
Como S_{2n} y S_{2n+1} son monótonas y acotadas convergen

(al mismo límite, pues $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \rightarrow 0$), con lo que la serie converge.

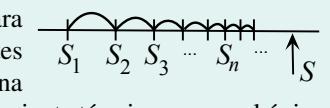
Sea S su suma. Se ve que para todo n es $S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$. Además:

$$\begin{aligned} 0 &\leq S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}; |S - S_{2n}| \leq a_{2n+1} \\ 0 &\leq S_{2n-1} - S \leq S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n}; |S - S_{2n-1}| \leq a_{2n} \end{aligned} \Rightarrow \forall N, \text{ par o impar}, |S - S_N| \leq a_{N+1}.$$

[Si la serie fuese $\sum (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - \dots$, el criterio y la cota del error absoluto serían iguales y una suma parcial está a la derecha (izquierda) de S si lo último que hemos hecho es sumar (restar)].



No olvidemos que esta cota tan sencilla del error sólo se tiene para estas series de Leibniz. Para las de términos positivos convergentes las sumas parciales S_n se van acercando a la suma S formando una sucesión creciente y el error $S - S_N$ es, por tanto, **mayor** que el siguiente término a_{N+1} ; el único criterio que nos ha dado cota del error es el integral (pero es aplicable a muy pocas series)].



Ej. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ converge absolutamente. También podemos ver que converge usando Leibniz:

Es alternada, $\frac{1}{n^2+1} \rightarrow 0$ y $\forall n$ es $\frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{(n+1)^2+1}$. Estimemos el valor de su suma S .

Por ejemplo, es: $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{17} = 0.341\dots < S < \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 0.4$, acotación nada precisa.

Si queremos el valor con $|\text{error}| < 10^{-3}$ debe ser $a_{N+1} = \frac{1}{(N+1)^2+1} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow (N+1)^2 > 999$.

Esto sucede si $N \geq 31$ (pues $31^2 = 961$, $32^2 = 1024$). Hay que sumar 31 términos.

[Con ordenador (o mucha paciencia), $S \approx S_{31} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{962} \approx 0.364$].

Ej. $\frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \dots$ es alternada y $a_n \rightarrow 0$, pero **no decrece** (y Leibniz no es aplicable).

De hecho diverge: $S_2 = 1$, $S_4 = 1 + \frac{1}{2}$, ..., $S_{2n} = 1 + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow \infty$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Ej. Veamos para qué valores de a converge $\sum (-1)^n \sin \frac{1}{n^a}$ y para cuáles lo hace absolutamente.

Si $a \leq 0$, el término general no tiende a 0 (difícil probarlo con rigor) y, por tanto, **diverge**.

Si $a > 0$, es **convergente** por Leibniz, pues $a_n = \sin \frac{1}{n^a} > 0$ (es alternada), $a_n \rightarrow 0$ claramente ($\sin x$ continua en $x=0$, $\frac{1}{n^a} \rightarrow 0$ y $\sin 0 = 0$) y a_n es decreciente (por crecer $\sin x$ en $[0, 1]$).

¿Para cuáles de estos valores $a > 0$ converge $\sum \sin \frac{1}{n^a}$? Por tender $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow 0$ y ser $\{\frac{1}{n^a}\}$ una sucesión que (para $a > 0$) tiende a 0, se tiene que $\sin \frac{1}{n^a} \sim \frac{1}{n^a}$ y, por tanto:

la serie **converge absolutamente** si $a > 1$ (lo hace condicionalmente si $a \in (0, 1]$).

Para las series (de términos positivos o signo no definido) con n en exponentes o factoriales son muy útiles los dos siguientes criterios (para las parecidas a $\sum \frac{1}{n^s}$ no sirven y en ese caso se utilizan los criterios vistos hasta ahora):

Criterio del cociente: Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r$. Entonces: $\begin{cases} \text{si } r < 1, \sum a_n \text{ converge (absolutamente)} \\ \text{si } r > 1 \text{ (ó } r = \infty\text{)}, \sum a_n \text{ diverge} \end{cases}$

(y si $r = 1$, el criterio no decide: la serie puede converger o divergir)

$r < 1$: sea s con $r < s < 1$. $\exists N$ tal que si $n \geq N \Rightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq s$, es decir, $|a_{n+1}| \leq s|a_n|$.

Por tanto $|a_{n+k}| \leq \dots \leq s^k |a_n|$ si $n \geq N$. Así: $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| = |a_N| + |a_{N+1}| + \dots \leq |a_N| \sum_{k=0}^{\infty} s^k$,

geométrica convergente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ también converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$r > 1$: $\exists N$ tal que si $n \geq N$ es $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, o sea, $|a_{n+1}| > |a_n|$ y $\not\rightarrow 0$ el término general.

Cuando se vean muchas potencias n-simas (y no factoriales) en la serie conviene utilizar:

Criterio de la raíz: Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$. Entonces: $\begin{cases} \text{si } r < 1, \sum a_n \text{ converge (absolutamente)} \\ \text{si } r > 1 \text{ (ó } r = \infty\text{)}, \sum a_n \text{ diverge} \end{cases}$

(si $r = 1$, de nuevo no sabemos; casi siempre es $r = 1$ a la vez utilizando cociente y raíz)

$r < s < 1$: $\exists N / n \geq N$, $\sqrt[n]{|a_n|} \leq s$, $|a_n| \leq s^n \Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$r > 1$: $\exists N / n \geq N$, $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, $|a_n| > 1$ y no tiende a cero el término general.

Ej. $\sum \frac{1}{n^s}$. Cociente: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n^s}{(n+1)^s} \rightarrow 1$. Raíz: $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{(n^{1/n})^s} \rightarrow 1$ (pues $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$).

Como dijimos arriba, estos criterios no son adecuados para estas series.

Ej. $\sum \frac{(-3)^n}{3+n!} \cdot \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1}}{3+(n+1)!} \cdot \frac{3+n!}{3^n} = 3 \frac{3/n!+1}{3/n!+n+1} \rightarrow 0$. Es **convergente** (absolutamente).

[Por Leibniz es complicado y con la raíz no sabemos pues desconocemos cómo va $\sqrt[n]{n!}$].

Ej. $\sum \frac{1}{(\log n)^n}$. Pide a gritos el criterio de la raíz: $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\log n} \rightarrow 0 < 1$. **Converge**.

Ej. $\sum (-1)^n 2^n 7^{-\sqrt{n}} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = |a_n|^{1/n} = 2[7^{-\sqrt{n}}]^{1/n} = 2 \cdot 7^{-1/\sqrt{n}} \rightarrow 2$.

O bien, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2 \frac{7^{\sqrt{n}}}{7^{\sqrt{n+1}}} = 2 \cdot 7^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} \rightarrow 2$ (pues $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \rightarrow 0$). **Diverge**.

Ej. $\sum \left[\frac{n}{n+2} \right]^{n^2} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = \left[1 - \frac{2}{n+2} \right]^n = \left(\left[1 - \frac{2}{n+2} \right]^{-(n+2)/2} \right)^{-2n/(n+2)} \rightarrow e^{-2} < 1$. **Converge**.

Ej. $\sum \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \cdot \sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n^{1/n}} \rightarrow 1$. La raíz no decide (y parecía ser el criterio adecuado).

Como $r=1$ probablemente haya que aplicar desigualdades o paso al límite:

Por \leq : $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \geq \frac{n^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}$ y $\sum \frac{1}{n}$ divergente \Rightarrow la nuestra es **divergente**.

Por \rightarrow : $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \sim \frac{1}{n}$ (pues $\frac{a_n}{1/n} = \left[\frac{n+1}{n} \right]^n \rightarrow e$) \Rightarrow la nuestra **divergente**.

Ej. $\sum \frac{5-\cos n}{n+3^n}$. Lo más corto: $\sum \frac{5-\cos n}{n+3^n} \leq 6 \sum \left(\frac{1}{3} \right)^n$ geométrica convergente \Rightarrow **converge**.

Más largo acotando y usando cociente: $\sum \frac{5-\cos n}{n+3^n} \leq \sum \frac{6}{n+3^n}$; $\frac{n+3^n}{n+1+3^{n+1}} = \frac{n3^{-n}+1}{(n+1)3^{-n}+3} \rightarrow \frac{1}{3} < 1$.

También se podría ver que es menor que la convergente $\sum \left(\frac{1}{2} \right)^n$: $\frac{a_n}{1/2^n} = \frac{5-\cos n}{n2^{-n}+(3/2)^n} \rightarrow 0$ [$\frac{ac}{\infty}$].

En los dos siguientes discutimos la convergencia según los valores de los a y b que aparecen:

Ej. $\sum \frac{n^a}{b^n}$, con $a > 0$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^a |b|^n}{n^a |b|^{n+1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^a}{|b|} \rightarrow \frac{1}{|b|}$ (o bien, $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(n^{1/n})^a}{|b|} \rightarrow \frac{1}{|b|}$).

Cociente y raíz dicen que **converge para** $|b| > 1$ (de esto deducimos que $n^a/b^n \rightarrow 0$ si $|b| > 1$) y que **diverge para** $|b| < 1$. Para $b = \pm 1$ los criterios no deciden, pero está claro que **diverge** porque el término general no tiende a 0 (bastaba esto para decir que **divergía** para $|b| \leq 1$).

Ej. $\sum \frac{b^n}{n!} \cdot \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|b|^{n+1}/(n+1)!}{|b|^n/n!} = \frac{|b|}{n+1} \rightarrow 0$. **Convergente** $\forall b$, por gordo que sea.

Por tanto, $b^n/n! \rightarrow 0$ para cualquier b , límite que tampoco es fácil de calcular directamente.

Ej. $\sum \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+1/n)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$. **Converge**.

[Y de aquí se deduce que $n!/n^n \rightarrow 0$, otro límite que no era trivial calcular].

Los tres últimos ejemplos (y un límite admitido en sucesiones) nos permiten comparar la rapidez con que varias sucesiones se van al ∞ . El símbolo “ \ll ” representará que lo de la izquierda dividido entre lo de la derecha tiende a 0 cuando n tiende a ∞ :

$$\log n \ll n^a, a > 0 \ll b^n, b > 1 \ll n! \ll n^n$$

Ej. Acabemos con una serie en que los sumandos dependen de x (una ‘serie de funciones’):

$\sum \frac{\operatorname{sen}^n x}{\sqrt{n}}$. Como $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\sqrt{n} |\operatorname{sen} x|}{\sqrt{n+1}} \rightarrow |\operatorname{sen} x|$, la serie converge si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ el cociente no decide. Si k es par, la serie que resulta $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente.

Si k es impar, queda $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ convergente (Leibniz). Así pues, **converge si** $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

4.2. Sucesiones y series de funciones

Consideramos **sucesiones** cuyos términos son **funciones** con un dominio común A :

$$\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \text{ para } x \in A$$

Para cada x fijo de A tenemos una sucesión $\{f_n(x)\}$ de números reales y en muchos casos sabemos (desde 2.1) calcular su límite (si lo tiene), que, en general, será una función de x . Damos un nombre nuevo a esta vieja convergencia (para cada punto x) para distinguirla de la que definiremos un poco más adelante:

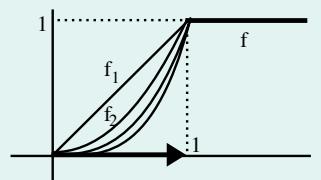
Def. $\{f_n\}$ converge puntualmente hacia f en A si para cada $x \in A$ es $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Sería bueno que f conservase las propiedades de las f_n , pero esto, en general, no ocurre:

Ej. $f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$. Todas las f_n son continuas en $[0, \infty)$.

Para cada $x \in [0, \infty)$ existe $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$.

Y, sin embargo, la función límite puntual $f(x)$ es discontinua.

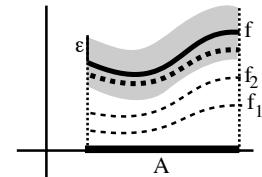


Para que se conserve la continuidad se necesita una definición más fuerte de convergencia:

Def. $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia la función f en A si $\forall \varepsilon > 0$ existe algún N tal que $\forall x \in A$, si $n \geq N$ entonces $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

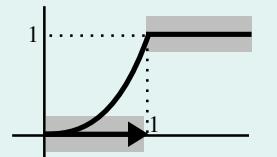
[El N vale $\forall x$, sólo depende de ε ; en cambio, la convergencia puntual significa: $\forall x \in A$ y $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon, x)$ tal que si $n \geq N$ entonces $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$].

Gráficamente, que $\{f_n\} \rightarrow f$ uniformemente significa que a partir de un N todas las gráficas de las f_n quedan totalmente dentro de una banda de altura 2ε alrededor de la de f . Si la convergencia de las f_n es sólo puntual, para cada x el N será distinto y no se podrá dar uno que sea válido para todos los puntos de A .



Claramente, **convergencia uniforme \Rightarrow convergencia puntual**. Pero \Leftarrow es falsa:

Esto lo prueba la $\{f_n\}$ de arriba: por alto que sea el N siempre hay funciones de la sucesión que se salen de la banda de radio ε . Formalizando algo más: toda f_n toma el valor $\frac{1}{2}$ que queda fuera de la banda si $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Para cada x existe N tal que si $n \geq N$ el punto $(x, f_n(x))$ está dentro de la banda, pero hace falta elegir N mayores a medida que nos acercamos a 1. En un intervalo $[0, a]$, con $a < 1$, la convergencia sí sería uniforme, pues el N que valiese para $x = a$ claramente valdría también para el resto de los x .

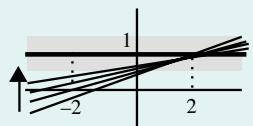


Ej. Estudiemos la convergencia de $g_n(x) = \frac{n+x}{n+2}$ en i) $A = [-2, 2]$, ii) $A = \mathbb{R}$

Hay límite puntual en todo \mathbb{R} pues $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 1 \forall x$.

Y en $[-2, 2]$ es también uniforme:

$$|g_n(x) - 1| = \left| \frac{x-2}{n+2} \right| \leq \frac{|x|+2}{n+2} \leq \frac{4}{n+2} \leq \frac{4}{n} < \varepsilon \text{ si } n \geq N > \frac{4}{\varepsilon} \quad \forall x \in [-2, 2].$$



Pero no converge uniformemente en \mathbb{R} porque cada g_n (no acotada) se escapa de la banda.

Para estudiar la convergencia uniforme, como siempre en las definiciones con ε , hemos partido de lo que se quería hacer pequeño y avanzado mediante desigualdades hacia una expresión más sencilla. Ha sido esencial hacer desaparecer la x , pues el N buscado debía depender solo de ε . Podemos ahorrarnos las últimas cuentas con el sencillo teorema:

Teorema:

Si $|f_n(x) - f(x)| < a_n \quad \forall x \in A$ y $a_n \rightarrow 0$ entonces $f_n(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente en A

(pues dado ε , el N que asegura $a_n < \varepsilon$ nos vale, desde luego, para todos los $x \in A$).

Para encontrar el a_n en ocasiones bastará hacer acotaciones, como en el ejemplo anterior, pero otras veces será más complicado y, como en el siguiente, habrá que utilizar derivadas:

Ej. Estudiemos la convergencia de $h_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^2}$.

Está claro que $\{h_n\}$ converge puntualmente en todo \mathbf{R} : $\frac{x}{1+n^4x^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x$.

Si queremos ver la convergencia uniforme en todo \mathbf{R} de $\{h_n\}$ nos encontramos con problemas:

$|h_n(x) - 0| = \frac{|x|}{1+n^4x^2}$ no parece acotable en \mathbf{R} (la cota sencilla $\leq |x|$ no lleva a nada).

[a partir de lo anterior sí sería fácil ver que sí hay convergencia uniforme en $[1, 2]$, por ejemplo]

Un modo natural de acotar $|f_n(x) - f(x)|$ (sin usar los \leq) es buscar el máximo de esa diferencia.

En nuestro caso, para acotar $|h_n(x)|$ vamos a hallar los extremos de cada $h_n(x)$:

$$h'_n(x) = \frac{1-n^4x^2}{[1+n^4x^2]^2} = 0 \Rightarrow h_n(x) \text{ crece en } [-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}] \text{ y decrece en el resto de } \mathbf{R}.$$

$$h_n(\pm\frac{1}{n^2}) = \pm\frac{1}{2n^2} \text{ y además } h_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0. \text{ Así que } |h_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2} = a_n \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Como $a_n \rightarrow 0$, $\{h_n\} \rightarrow 0$ uniformemente en \mathbf{R} (en contra de lo que se podía pensar en principio).

Probemos que la convergencia uniforme tiene la buena propiedad que la puntual no tenía:

Teorema:

f_n continuas en un intervalo I y $\{f_n\} \rightarrow f$ uniformemente en $I \Rightarrow f$ continua en I .

Veamos que f es continua en un $x \in I$ cualquiera.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la convergencia uniforme, existe algún n tal que $|f(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in I$.

En particular, para todo h tal que $x + h \in I$, $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ y $|f(x+h) - f_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

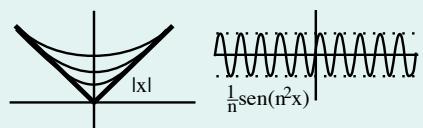
Como f_n es continua en x existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces $|f_n(x+h) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Por tanto, si $|h| < \delta$ entonces

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |f(x+h) - f_n(x+h)| + |f_n(x+h) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

[Este teorema basta para probar que las f_n del primer ejemplo no convergen uniformemente en $[0, \infty)$, pues si la convergencia fuese uniforme, la $f(x)$ debería ser continua].

[Si las f_n son derivables, que $f_n \rightarrow f$ uniformemente no basta para que f sea derivable, o puede ser f derivable y no coincidir f' con el límite de las f'_n (situaciones sugeridas por los ejemplos de la derecha); para que se cumplan ambas cosas además deben las f'_n converger uniformemente].



Todo lo anterior se aplica de modo natural a las **series de funciones**:

Def. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente o uniformemente en A hacia f
si lo hace la sucesión de sumas parciales $S_n = f_1 + \dots + f_n$.

Por lo visto para sucesiones de funciones, y como S_n es continua si las f_n lo son, tenemos:

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightarrow f$ uniformemente y f_n continuas en un intervalo $I \Rightarrow f$ es continua en I .

Aunque la definición de convergencia uniforme de series de arriba aparenta ser tan simple, está claro que será casi imposible de aplicar en la práctica (la puntual sí es fácil, aplicando para x fijos los criterios vistos para series numéricas). Es claro que casi nunca se podrá hallar directamente el N que haga $|f_1(x) + \dots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (ni siquiera sabemos quién es $f(x)$, pues casi ninguna serie se puede sumar). Pero hay un criterio muy útil que permite ver para bastantes series de funciones que convergen uniformemente:

Criterio de Weierstrass:

Sean $\{f_n\}$ definidas en A y $\{M_n\}$ una sucesión de números reales tal que $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A$ y tal que $\sum M_n$ converge. Entonces $\sum f_n$ converge uniformemente en A .

$\forall x \in A$, $\sum |f_n(x)|$ converge y por tanto $\sum f_n$ converge puntualmente. Sea f su suma.

$$|f(x) - S_N(x)| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n$$

que se puede hacer tan pequeño como queramos haciendo N suficientemente grande ($\sum M_n$ converge). Tenemos un N independiente del x , S_n converge uniformemente.

[Si no podemos aplicar este criterio no sabremos decir nada sobre la convergencia uniforme de una serie (pero está claro que aunque no consigamos encontrar la $\sum M_n$ convergente, esto no significa que la $\sum f_n$ no converja uniformemente)].

Ej. $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ es **uniformemente convergente** en todo \mathbf{R} pues $|\frac{\sin nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

[Deduzcamos, por ejemplo, que la suma $f(x)$ de esta serie es función continua en todo \mathbf{R}].

La serie obtenida derivando término a término: $\sum \frac{\cos nx}{n}$ diverge, por ejemplo, cuando $x=0$.

[Para otros x , como $x=\pi$, converge (Leibniz); y para casi todos no sabemos decirlo].

[Como vemos, no se pueden derivar las sumas infinitas, en general, como las sumas finitas; las series de potencias que veremos a continuación sí se podrán derivar término a término].

Ej. Estudiemos ahora la convergencia de $\sum h_n$ con $h_n = \frac{x}{1+n^4x^2}$ (vista hace poco).

Lo que sabíamos de series numéricas nos basta para ver que converge puntualmente $\forall x \in \mathbf{R}$:

si $x=0$ queda $\sum 0$; si $x \neq 0$, $x \sum \frac{1}{1+n^4x^2}$ converge pues $\frac{1}{1+n^4x^2} \sim \frac{1}{n^4}$ y $\sum \frac{1}{n^4}$ converge.

Para ver si la serie es uniformemente convergente sólo disponemos de Weierstrass.

No saltaba a la vista la serie numérica con la que comparar, pero según hemos probado:

$$|h_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2} \quad \forall x \in \mathbf{R} \text{ y } \sum \frac{1}{2n^2} \text{ convergente} \Rightarrow \sum h_n(x) \text{ converge uniformemente en } \mathbf{R}.$$

[Otras propiedades importantes de la convergencia uniforme (que veremos en 5.5) serán las relacionadas con la integración: el límite de las integrales de una sucesión de funciones integrables será la integral del límite cuando haya convergencia uniforme, pero podría no serlo si sólo hay la puntual (y lo mismo sucederá con las series)].

4.3. Series de potencias

A una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ se le llama serie de potencias en $(x-a)$.

Para cada x que converja la suma de la serie será un número real. Por tanto, define una función $f(x)$ cuyo dominio serán los x para los que converge. Supondremos a partir de ahora, por sencillez, que $a=0$ (en caso contrario haríamos $x-a=s$ y estaríamos en el caso $a=0$):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (\text{viene a ser, pues, un 'polinomio infinito'}). \quad \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots}$$

Una serie de ese tipo siempre converge en $x=0$ ($y f(0)=a_0$), pero no tiene que hacerlo $\forall x$: vimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge si y sólo si $|x|<1$ (y que su suma era $f(x) = \frac{1}{1-x}$).

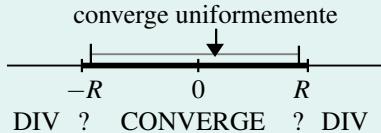
En general, **toda serie de potencias converge en un intervalo centrado en el origen** (que puede degenerar en $x=0$ o ampliarse a todo \mathbf{R}):

Teorema:

A cada serie de potencias está asociado un número positivo R , llamado **radio de convergencia** de la serie, que, según los casos, tiene las siguientes propiedades:

- i) si $R=0$, la serie sólo converge en $x=0$,
- ii) si R es un número real positivo, la serie converge si $|x|<R$ y diverge si $|x|>R$,
- iii) si $R=\infty$, la serie converge para todo x .

Además, si $0 < x_0 < R$, la serie converge uniformemente en $[-x_0, x_0]$.



En el caso ii), para $x=R$ y $x=-R$ la serie puede converger o divergir. El teorema no dice que la serie converja uniformemente en $(-R, R)$, sino que lo hace en $[-x_0, x_0]$ con x_0 tan cercano a R como queramos).

Comencemos demostrando que:

Si $\sum a_n c^n$ converge para un c entonces $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[-x_0, x_0]$,
si $0 < x_0 < |c|$, y converge puntualmente (y absolutamente) en $(-|c|, |c|)$:

Como $\sum a_n c^n$ converge $\Rightarrow a_n c^n \rightarrow 0$ y por tanto está acotada: $\exists K$ tal que $|a_n c^n| \leq K$

$$\Rightarrow \text{si } x \in [-x_0, x_0], |a_n x^n| \leq |a_n c^n| \left| \frac{x_0}{c} \right|^n \leq K \left| \frac{x_0}{c} \right|^n.$$

Como $\sum \left| \frac{x_0}{c} \right|^n$ es geométrica convergente ($\left| \frac{x_0}{c} \right| < 1$), Weierstrass asegura que $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[-x_0, x_0]$. Además para todo $x \in (-|c|, |c|)$ existe x_0 con $|x| < x_0 < |c|$, con lo que $\sum |a_n x^n|$ converge puntualmente.

Sea $S = \{x : \sum a_n x^n \text{ converge}\}$. Es no vacío ($0 \in S$).

Si hay algún $x \notin S$, $|x|$ es cota superior de S (no converge para ningún real mayor por el resultado anterior) y por tanto tiene extremo superior. Veamos que el radio de convergencia $R = \sup S$:

si $|x| > R$ la serie diverge (si no, existirían puntos de S mayores que R); si $|x| < R$ existe c con $|x| < c < R$ para el que $\sum a_n c^n$ converge (R es cota superior) y por tanto $\sum a_n x^n$ también converge. Si $0 < x_0 < R$, existe c con $x_0 < c < R$ para el que $\sum a_n x^n$ converge y la serie converge uniformemente en $[-x_0, x_0]$.

Si no existe $x \notin S$, la serie converge $\forall x: R = \infty$. Se ve de la misma forma que hay convergencia uniforme en todo $[-x_0, x_0]$.

El R se podrá calcular casi siempre mediante el criterio del cociente o la raíz.

Por ejemplo, si en la serie aparecen todos los x^n (no si es del tipo $\sum a_n x^{2n}$ ó $\sum a_n x^{2n+1}$)

se tiene que: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, si dichos límites existen o son infinito, pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |x|^{n+1}}{|a_n| |x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 [> 1] \Leftrightarrow |x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad [|x| > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}].$$

[Cálculos parecidos con la raíz].

Para ver lo que pasa en los extremos del intervalo (si es finito) habrá que utilizar los otros criterios conocidos (comparaciones, convergencia absoluta, Leibniz...) pues ya habremos sacado todo su jugo al cociente o la raíz.

Ej. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{5n+1}}{(n-2)!}$. Cociente: $\frac{|x|^{5n+6}}{(n-1)!} \frac{(n-2)!}{|x|^{5n+1}} = \frac{|x|^5}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \Rightarrow \text{converge } \forall x$, es decir, $R=\infty$.

[No podíamos aplicar las fórmulas para R y por eso usamos directamente el cociente.

La raíz no era adecuada por la presencia del factorial].

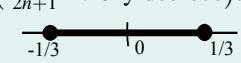
Ej. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = R$: la serie sólo converge si $x=0$ (y podemos tirarla a la basura).

[El cociente es aquí bastante más complicado].

Ej. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-9]^n}{2n+1} x^{2n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^{n+1} |x|^{2n+2}}{2n+3} \frac{2n+1}{9^n |x|^{2n}} = 9|x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3} = R$. ¿Qué pasa en los extremos?

Si $x = \pm \frac{1}{3}$ queda $\sum \frac{[-1]^n}{2n+1}$ en ambos casos, convergente por Leibniz ($\frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$ y decrece).

Esta serie de potencias converge exactamente en el cerrado $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.



Ej. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n} \cdot \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{|x|^2 n}{4(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{4}$, $\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{|x|^2}{4n^{1/n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{4} \Rightarrow \text{converge si } |x|^2 < 4$.

Por tanto, la serie converge si $|x| < 2$ y diverge si $|x| > 2$. Si $|x|=2$ ($x=\pm 2$) estos criterios no deciden, pero entonces es $\sum \frac{1}{n}$ divergente como sabemos. En resumen, converge si $x \in (-2, 2)$.

Ej. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\log n}$. Necesitamos L'Hôpital (o admitir límites ya citados basados en ella):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1, \text{ porque } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x+1)}{\log x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/(x+1)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Si $x=-1$, $\sum \frac{(-1)^n}{\log n}$ converge por Leibniz ($\frac{1}{\log n} \rightarrow 0$ y decrece porque $\log n$ crece).

Si $x=1$, $\sum \frac{1}{\log n}$ diverge, pues $\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$ y $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Converge si $x \in [-1, 1)$.

[Sin L'Hôpital: converge si $|x| < 1$, pues $\frac{|x|^n}{\log n} < |x|^n$ y $\sum |x|^n$ geométrica convergente, y si $|x| > 1$, el término general no tiende a 0 (pues si $|x| > 1$ es $\log n \ll |x|^n$) y diverge].

Ej. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{6} x^n$. No valen cociente ni raíz. Buscamos directamente el intervalo de convergencia.

$|\cos \frac{n\pi}{6}| |x|^n \leq |x|^n \Rightarrow$ si $x \in (-1, 1)$ converge. Si $|x| \geq 1$ el término general no tiende a 0.

Ej. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[n^3+1]} (x+1)^n$. Podríamos hacer $x+1=s$, pero estudiamos la convergencia directamente.

Cociente: $\frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{|x+1|^{n+1}}{|x+1|^n} \frac{\sqrt[n^3+1]}{\sqrt[n]{(n+1)^3+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2|x+1| \Rightarrow \text{converge si } |x+1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$.

[Y diverge si $|x+1| > \frac{1}{2}$]. En los extremos:

Si $x = -\frac{1}{2}$, nos queda $\sum \frac{1}{\sqrt[n^3+1]}$ que converge (se comporta como $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$).



Si $x = -\frac{3}{2}$, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n^3+1]}$ absolutamente convergente (o converge por Leibniz).

Propiedad esencial de las series de potencias es que (como si fuesen polinomios) **se pueden derivar término a término dentro de su intervalo de convergencia** $|x| < R$:

Teorema:

Sea $R > 0$ (finito o infinito) y sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $|x| < R$. Entonces para $|x| < R$:
 f es derivable, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ converge y $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$

[La prueba exige propiedades no vistas de derivación de series (ver Spivak); en el capítulo 5 veremos que también las series de potencias se podrán integrar término a término en $|x| < R$].

Aplicando el teorema sucesivamente a f' , f'' , ... obtenemos que para $|x| < R$:

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 x + \dots, \dots,$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n x^{n-k} = k! a_k + \dots \Rightarrow$$

Una f definida por una serie de potencias es C^∞ en $|x| < R$ y $f^{(k)}(0) = k! a_k$.

Las series de potencias también se suman, multiplican,... como si fuesen polinomios:

Teorema:

Sean $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x| < R_f$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $|x| < R_g$. Entonces si $|x| < \min(R_f, R_g)$:
 $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n + b_n] x^n$, $f(x)g(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots$

[Lo de la suma es consecuencia de las propiedades de series numéricas; lo del producto es más complicado y lo admitimos sin demostración; también se pueden realizar la división f/g (si f/g tiene límite en $x=0$) y la ‘composición’ de series (veremos ambas cosas en ejemplos)].

Ej. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$. $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$ (cociente, desde luego).

Converge $\forall x$ (veremos en la próxima sección que a e^x).

Su serie derivada coincide con ella: $f'(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots = f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$ (natural, si es e^x).

Ej. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \dots$. Su radio de convergencia es $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 \Rightarrow$
 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots$, $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n} x^{n-2} = \frac{1}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x^2}{4} + \dots$, si $|x| < 1$.

Como $\sum \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ convergen, la serie de la f converge en los dos extremos $x = \pm 1$ del intervalo de convergencia. Pero las series de las derivadas se comportan peor en esos puntos. Es fácil ver que la de f' converge en $[-1, 1]$ y la de f'' lo hace sólo en $(-1, 1)$.

Siempre las funciones definidas por series son ‘muy buenas’ en $(-R, R)$ (hemos visto que tienen infinitas derivadas ahí, o incluso en todo \mathbf{R} , si $R = \infty$). El problema fundamental de estas funciones tan buenas es que para hallar sus valores debemos sumar series (y por eso casi siempre nos tendremos que conformar con valores aproximados).

Ej. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^{3n}}{n!}$, precisar para qué x converge la serie y probar que $f'(1) > 150$.

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{4^{n+1}}{4^n} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{|x|^{3n+3}}{|x|^{3n}} = \frac{4|x|^3}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{la serie converge para todo } x.$$

Como $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^n x^{3n-1}}{(n-1)!}$, será $f'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^n}{(n-1)!} = \frac{12}{1} + \frac{48}{1} + \frac{3 \cdot 64}{2} + \dots > 156$.

[O mirando la serie de arriba, observamos que $f(x) = e^{4x^3} \Rightarrow f'(1) = 12e^4 > 12 \cdot 2^4 = 192$].

Ej. Hallemos de varias formas el desarrollo en serie de $f(x) = \frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{[x+3][x-1]}$.

Sabemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1} &= -[1+x+x^2+x^3+\cdots] = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ si } |x| < 1, \\ \frac{1}{x+3} &= \frac{1}{3} \frac{1}{1-\left[-\frac{x}{3}\right]} = \frac{1}{3} [1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + \cdots] = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^n} \text{ si } |x| < 3. \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{1}{x-1} \frac{1}{x+3} = -\frac{1}{3} [1 + (1 - \frac{1}{3})x + (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9})x^2 + (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27})x^3 + \cdots] \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{2}{9}x - \frac{7}{27}x^2 - \frac{20}{81}x^3 + \cdots, \text{ si } |x| < 1 = \min\{1, 3\}\end{aligned}$$

No podemos escribir más términos del desarrollo del producto si no escribimos algún término más de cada serie. Los puntos representan sólo las potencias de orden superior.

Si pusiésemos el coeficiente de x^4 con lo escrito, sería erróneo (faltarían sumandos).

Lo más rápido (descomponiendo en fracciones simples; usaremos esta idea en las integrales):

$$\frac{1}{[x+3][x-1]} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right] = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^n} = -\frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left[3 + \frac{(-1)^n}{3^n} \right] x^n$$

[Este es el único camino que nos da una expresión general para la serie].

Ahora ‘dividimos’: buscando una serie $\sum c_n$ tal que

$$[c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots][x^2 + 2x - 3] = 1.$$

Igualando sucesivamente las potencias de x^0, x^1, x^2, \dots vamos obteniendo:

$$\begin{aligned}x^0 : -3c_0 &= 1 \Rightarrow c_0 = -\frac{1}{3}; \quad x^1 : 2c_0 - 3c_1 &= 0 \Rightarrow c_1 = \frac{2}{3}c_0 = -\frac{2}{9}; \\ x^2 : c_0 + 2c_1 - 3c_2 &= 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{3}c_0 + \frac{2}{3}c_1 = -\frac{1}{9} - \frac{4}{27} = -\frac{7}{27}; \quad \dots\end{aligned}$$

[Si numerador y denominador fuesen series en vez de polinomios, el proceso sería el mismo].

De otra forma tampoco nada práctica (pero que sugiere cómo componer series):

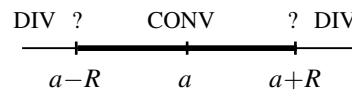
$$f(x) = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}(2x+x^2)} = -\frac{1}{3} [1 + \frac{1}{3}(2x+x^2) + \frac{1}{9}(2x+x^2)^2 + \frac{1}{27}(2x+x^2)^3 + \cdots]$$

Y eligiendo (sin olvidar ningún término) todos los coeficientes de las sucesivas potencias:

$$f(x) = -\frac{1}{3} \left[1 + \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{9} \right)x^2 + \left(\frac{4}{9} + \frac{8}{27} \right)x^3 + \cdots \right]$$

[De nuevo, para dar el coeficiente de x^4 necesitamos más términos que los escritos].

[La teoría para la serie más general $\sum a_n(x-a)^n$, como dijimos, es la misma; el intervalo $|x-a| < R$ de convergencia está ahora centrado en a].



4.4. Polinomios y series de Taylor

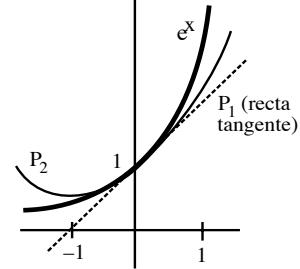
¿Cómo hallar, sin calculadora, \sqrt{e} , $\log 2$ ó $\sin 1$? Las funciones más fáciles de evaluar son los polinomios. Si encontramos un polinomio P que se parezca mucho a una función f dada cerca de un punto a (y podemos estimar el error cometido al sustituir f por P), podremos hallar valores aproximados de $f(x)$ para los x próximos a a .

Ej. Sea $f(x) = e^x$. El polinomio de grado 1 más parecido a f cerca de $x=0$ es la recta tangente: $P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x$.

Observemos que satisface: $P_1(0) = f(0)$; $P'_1(0) = f'(0)$.

Probablemente se parecerá más a e^x el polinomio P_2 de grado 2 que cumpla $P_2(0) = f(0)$; $P'_2(0) = f'(0)$; $P''_2(0) = f''(0)$, o sea,

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

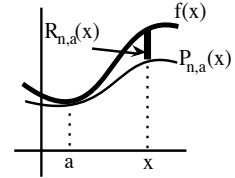


En general, el P_n que mejor aproximará a una función f cerca de $x=a$ será el que coincida con f y con sus n primeras derivadas en a . Se comprueba fácilmente que:

Def. Si f tiene n derivadas en a , el polinomio, de grado $\leq n$,

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)[x-a] + \frac{f''(a)}{2!}[x-a]^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}[x-a]^n$$

cumple $P_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, para $k = 0, \dots, n$. Al $P_{n,a}$ se le llama **polinomio de Taylor** de f de grado n en a . Se llama $R_{n,a}(x)$, **resto** del polinomio de Taylor, al **error** cometido para cada x al sustituir $f(x)$ por $P_{n,a}(x)$, es decir, $f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$.



Es esperable que el $R_{n,a}(x)$ sea pequeño si x es cercano a a y que disminuya al aumentar n . La siguiente expresión del resto, a pesar de venir en función de un c desconocido, nos va a permitir acotar este error en muchas ocasiones:

Teorema (forma de Lagrange del resto):

Si $f, f', \dots, f^{(n+1)}$ están definidas en $[a,x]$ (ó en $[x,a]$) entonces

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}[x-a]^{n+1} \text{ para algún } c \in (a,x) \text{ si } x > a \text{ [ó } c \in (x,a) \text{ si } x < a].$$

[Otras expresiones del resto son útiles, pero se necesitan las integrales. Observemos que si f es un polinomio de grado n se deduce $R_{n,a} = 0$, es decir, que, como debía suceder, el polinomio coincide con su polinomio de Taylor de grado n].

Para cada $t \in (a,x)$ tenemos que $f(x) = f(t) + f'(t)[x-t] + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}[x-t]^n + R_{n,t}(x)$.

Miremos el resto como función de t para x fijo: $S(t) = R_{n,t}(x)$. Derivando respecto a t :

$$\begin{aligned} 0 &= f'(t) + (-f'(t) + f''(t)[x-t]) + (-f''(t)[x-t] + \frac{f'''(t)}{2!}[x-t]^2) \\ &\quad + \cdots + \left(-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}[x-t]^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}[x-t]^n\right) + S'(t) \Rightarrow S'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}[x-t]^n \end{aligned}$$

El TVM de Cauchy en $[a,x]$ para $S(t)$ y $g(t) = [x-t]^{n+1}$ implica que $\exists c \in (a,x)$ tal que

$$\frac{S(x)-S(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{S'(c)}{g'(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \frac{[x-c]^n}{[x-c]^n} \frac{1}{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Como $S(x) = R_{n,x}(x) = 0$, $S(a) = R_{n,a}(x)$, $g(x) = 0$, $g(a) = [x-a]^{n+1}$ se tiene el resultado.

[Igual si $x < a$].

Normalmente hallaremos los polinomios para $a = 0$. En ese caso no escribiremos las a de los subíndices y las expresiones anteriores adoptan la forma (fórmula de **McLaurin**):

Si $f, f', \dots, f^{(n+1)}$ existen en $[0, x]$ [ó $[x, 0]$] entonces para algún $c \in (0, x)$ [ó $c \in (x, 0)$] $f(x) = P_n(x) + R_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$
--

Hallando las derivadas se obtienen fácilmente los siguientes polinomios y restos:

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$ con $R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x)$ con $R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cos c}{(2n+3)!}x^{2n+3}$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x)$ con $R_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cos c}{(2n+2)!}x^{2n+2}$
--

[Para $\sin x$, como la derivada $\sin^{(2n+2)}(0) = (-1)^{n+1} \sin 0 = 0$, es $P_{2n+1} \equiv P_{2n+2}$; por eso en su resto aparecen $2n+3$ y no $2n+2$; y algo muy parecido sucede con el $\cos x$].

Dado un x , hay en los tres casos cotas fáciles para el resto en términos de cosas conocidas:

$$\begin{aligned} \text{para } e^x: & \text{ si } x > 0, \text{ es } |R_n(x)| \leq \frac{e^x|x|^{n+1}}{(n+1)!}; \text{ si } x < 0, \text{ es } |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}; \\ \text{para } \sin x, & |R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \quad \forall x; \text{ para } \cos x, |R_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \forall x. \end{aligned}$$

Como probamos en 4.1, una sucesión de la forma $|x|^k/k! \rightarrow 0 \quad \forall x$ cuando $k \rightarrow \infty$. Por tanto, **podemos aproximar para cualquier x el valor de e^x , $\sin x$ y $\cos x$ con la precisión que queramos utilizando un polinomio de Taylor con n suficientemente grande** (aunque habrá que tomar un n mayor cuanto más lejano de 0 esté el x).

El $\log x$ no está ni definido en $x = 0$. Por eso lo que se desarrolla es el $\log(1+x)$. Es fácil ver que la derivada n -sima de esta función es $[-1]^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ y por tanto

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + [-1]^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x)$ con $R_n(x) = \frac{[-1]^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}}$

Se puede probar además (no con esta expresión del resto) que **los polinomios del $\log(1+x)$ sólo aproximan a la función si $-1 < x \leq 1$** .

Ej. Calculemos con error menor que 10^{-5} el $\sin 1$.

$$\begin{aligned} |R_{2n+1}(x)| &\leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \Rightarrow |R_{2n+1}(1)| \leq \frac{1}{(2n+3)!} < \frac{1}{10000} \text{ si } 2n+3 \geq 9 \Rightarrow \\ \sin 1 &\approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} \approx 0.84147 \text{ con error } |R_7(1)| \leq \frac{1}{9!} < 10^{-5}. \end{aligned}$$

Ej. Si aproximamos $\sin 2$ con este mismo $P_7(x)$ el error será mayor:

$$\sin 2 \approx 2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{120} - \frac{128}{5040} \approx 0.9079; |R_7(2)| \leq \frac{2^9}{9!} = \frac{4}{2835} \approx 0.0014.$$

(Estas cotas pronto serán más fáciles con las series de Taylor).

n	n!	2^n
2	2	4
3	6	8
4	24	16
5	120	32
6	720	64
7	5040	128
8	40320	256
9	362880	512
10	3628800	1024

Ej. Hallemos ahora $\log \frac{4}{5} = \log(1 - \frac{1}{5})$ con error $< 10^{-3}$.

$$\text{Como } |R_n(-\frac{1}{5})| = \frac{1}{(n+1)5^{n+1}(1+c)^{n+1}} \underset{-1/5 < c < 0}{<} \frac{1}{(n+1)5^{n+1}(4/5)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)4^{n+1}} < \frac{1}{1000} \text{ si } n \geq 3,$$

debemos usar el polinomio de grado 3: $\log \frac{4}{5} \approx -\frac{1}{5} - \frac{1}{50} - \frac{1}{375} \approx -0.223$ con error $< 10^{-3}$.

De otra forma (que evitará la acotación del resto en cuanto tengamos las series de Taylor):

$$\log \frac{4}{5} = -\log(1 + \frac{1}{4}) \approx -\frac{1}{4} + \frac{1}{32} - \frac{1}{192} \approx -0.224, \text{ con } |R_3(\frac{1}{4})| = \frac{1}{4 \cdot 4^4(1+c)^4} \underset{0 < c < 1/4}{<} \frac{1}{4^5} < \frac{1}{1000}.$$

Dada f con infinitas derivadas en 0 su **serie de Taylor** en $x = 0$ es: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Esta serie de potencias es un ‘**polinomio de Taylor de infinitos términos**’; su N -sima suma parcial es $P_N(x)$. Es previsible que una f coincida con su serie de Taylor (al menos cerca de 0).

Como $f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_N(x)$, está claro que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \Leftrightarrow R_N(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$,

es decir, $f(x)$ coincide su serie de Taylor en los x para los que el resto tienda a 0 .

Vimos hace poco que el resto $R_N(x) \rightarrow 0 \forall x$ para e^x , $\sin x$ y $\cos x$. Así pues:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

[La serie derivada de la de e^x es ella misma, derivando la de $\sin x$ obtenemos la de $\cos x$ y derivando la de ésta obtenemos la del seno cambiada de signo; observemos también que sólo contiene potencias impares la serie del seno (debe cambiar de signo al cambiar x por $-x$) y pares la del coseno].

Operando con la serie de e^x y la de $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots$ obtenemos que:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Sabemos que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si $|x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ y $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ si $|x| < 1$.

$$\text{Por tanto: } \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad \text{para } |x| < 1$$

pues las derivadas de las series son las de arriba y en $x = 0$ se anulan funciones y series.

[La serie de $\log(1+x)$ converge también en $x = 1$ y la de $\arctan x$ en $x = \pm 1$ (en ambas $R = 1$) lo que no hacen las series derivadas; se puede ver que convergen (lentamente) hacia $\log 2$ y $\pm \arctan 1$:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots, \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Parece normal que la serie del $\log(1+x)$ o la de $1/(1+x)$ sólo converjan para $|x| < 1$ pues en $x = -1$ las funciones se van a infinito, pero es sorprendente que lo hagan sólo en ese intervalo las series de $1/(1+x^2)$ o de $\arctan x$ ya que son funciones derivables en todo \mathbf{R} . La explicación se tendrá cuando se miren esas series en el plano complejo].

Otra serie muy útil es la de $f(x) = (1+x)^r$, $r \in \mathbf{R}$ (x^r no es desarrollable en 0):

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n, \quad \text{con } \binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}, \quad \text{si } |x| < 1 \quad (\text{generaliza el binomio de Newton})$$

$$[\text{en particular se tiene: } \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \dots, \dots]$$

$$\text{Como: } f'(x) = r(1+x)^{r-1}, \quad f''(x) = r(r-1)(1+x)^{r-2}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = r(r-1)\cdots(r-n+1)(1+x)^{r-n}, \dots$$

la serie de Taylor es la de arriba, y se puede ver que $R_N \rightarrow 0$ si $0 < x < 1$ con la expresión de Lagrange (y con otras expresiones del resto que no hemos visto se ve que también lo hace si $-1 < x < 0$).

De las series de Taylor anteriores podemos deducir muchísimas otras, sin más que sustituir a veces y utilizando otras las operaciones conocidas con series de potencias (muchas veces no podremos dar la expresión del término general de la serie):

Ej. Para escribir el desarrollo de $\boxed{\sin(3x^2)}$ basta cambiar x por $(3x^2)$ en el de $\sin x$:

$$\sin 3x^2 = 3x^2 - \frac{9}{2}x^6 + \dots + (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{4n+2} + \dots, \forall x$$

Ej. Para el $\boxed{\sin(1+x)}$ no podemos hacer lo mismo. Aunque es cierto para todo x que:

$$\sin(1+x) = (1+x) - \frac{1}{6}(1+x)^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(1+x)^{2n+1} + \dots$$

esto no nos permite escribir la serie como potencias crecientes de x . Mejor que derivando:

$$\sin(1+x) = \sin 1 \cos x + \cos 1 \sin x = \sin 1 + \cos 1 x - \frac{\sin 1}{2}x^2 - \frac{\cos 1}{6}x^3 + \dots$$

Ej. $\boxed{\cos\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{24}x^2 - \dots$, si $x \geq 0$. [Esta serie representa la función $\operatorname{ch}\sqrt{-x}$ para $x \leq 0$].

Ej. $\boxed{\arctan 2x\sqrt{1+x^2}} = [2x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{32}{5}x^5 + \dots] [1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \dots] = 2x - \frac{5}{3}x^3 + \frac{289}{60}x^5 + \dots, |x| < \frac{1}{2}$

pues si $|2x| < 1$ coinciden el arco tangente y su serie, y la raíz lo hace si $|x^2| < 1$.

[Con potencias impares sólo; para escribir el x^7 necesitaríamos otro término de cada serie].

Ej. Para el desarrollo de $\boxed{\tan x}$ no conviene utilizar la definición pues las derivadas se complican:

$$f(x) = \tan x, f'(x) = 1 + \tan^2 x, f''(x) = 2 \tan x + \tan^3 x, \dots$$

Es mejor hacer el cociente de las dos series conocidas (tendrá sólo potencias impares):

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\cos x} &= c_1 x + c_3 x^3 + \dots; [c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \dots] [1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots] = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots \\ &\Rightarrow x^1: c_1 = 1; x^3: c_3 - \frac{c_1}{2} = -\frac{1}{6} \rightarrow c_3 = \frac{1}{3}; x^5: c_5 - \frac{c_3}{2} + \frac{c_1}{24} = \frac{1}{120} \rightarrow c_5 = \frac{2}{15}; \dots \\ &\Rightarrow \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \end{aligned}$$

Ej. En este ejemplo vamos a hacer nuestra primera ‘composición’ de series:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sin x} &= 1 - \sin x + \sin^2 x - \sin^3 x + \sin^4 x + \dots \\ &= 1 - [x - \frac{1}{6}x^3 + \dots] + [x - \frac{1}{6}x^3 + \dots]^2 - [x - \dots]^3 + [x - \dots]^4 + \dots \\ &= 1 - [x - \frac{1}{6}x^3 + \dots] + [x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \dots] - [x^3 - \dots] + [x^4 - \dots] + \dots \\ &= 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \dots \end{aligned}$$

[Hallar el cuadrado, cubo,... de una serie es más corto que multiplicarla varias veces por sí misma:

$$(a+b+c+\dots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc + \dots$$

$$(a+b+c+\dots)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abcd + \dots, \dots]$$

Ej. Hallemos de varias formas 4 términos no nulos del desarrollo de $\boxed{e^{2x-x^2}}$:

$$e^{2x} e^{-2x^2} = [1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \dots] [1 - 2x^2 + 2x^4 + \dots] = 1 + 2x - \frac{8}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \dots$$

$$e^{2x} e^{-2x^2} = 1 + [2x - 2x^2] + \frac{1}{2}[2x - 2x^2]^2 + \frac{1}{6}[2x - 2x^2]^3 + \frac{1}{24}[2x - 2x^2]^4 + \dots = 1 + 2x - \frac{8}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \dots$$

$$\frac{1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+\dots}{1+2x^2+2x^4+\dots} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \Rightarrow x^0: a_0 = 1; x^1: a_1 = 2;$$

$$x^2: a_2 + 2a_0 = 2, a_2 = 0; x^3: a_3 + 2a_1 = \frac{4}{3}, a_3 = \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3}; x^4: a_4 + 2a_2 + 2a_0 = \frac{2}{3}, a_4 = -\frac{4}{3}.$$

Lo que menos conviene es derivar muchas veces la función dada:

$$f'(x) = 2(1-2x)e^{2x-2x^2}, f''(x) = 16(-x+x^2)e^{2x-2x^2}, f'''(x) = 16(-1+6x^2-4x^3)e^{2x-2x^2},$$

$$f^{IV}(x) = 32(-1+8x-16x^3+8x^4)e^{2x-2x^2} \Rightarrow f(x) = 1 + 2x - \frac{16}{6}x^3 - \frac{32}{24}x^4 + \dots$$

De cualquier serie de Taylor se deduce, truncando la serie, la expresión del polinomio de Taylor (pero sin expresión manejable del resto, por lo que nos es poco útil) por el siguiente

Teorema:

$$f(x) = P(x) + x^n g(x) \text{ con } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \Rightarrow P(x) \text{ es el } P_n \text{ de Taylor de grado } n \text{ de } f.$$

[es fácil comprobar que coinciden tanto f y P como sus n primeras derivadas en $x=0$]

Ej. El polinomio de Taylor de grado $2n+1$ de $\arctan x$ es: $P_{2n+1}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, pues el resto de la serie es de la forma $x^{2n+1}g(x)$, con $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Las series de Taylor permiten muchas veces hallar valores aproximados con cotas fáciles del error (si aparece una serie de Leibniz; si no, deberemos acudir al resto de Lagrange).

Ej. Calculemos $\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$ con error menor que 10^{-2} . Para $|x| < 1$ sabemos que es:

$$(1+x)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}x + \frac{(1/5)(-4/5)}{2}x^2 + \frac{(1/5)(-4/5)(-9/5)}{6}x^3 + \dots = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25} + \frac{6x^3}{125} - \dots$$

Por tanto: $(1 + \frac{1}{2})^{1/5} = 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{50} + \frac{3}{500} - \dots$, serie alternada y decreciente.

$$\text{Así pues, es } \sqrt[5]{\frac{3}{2}} \approx \frac{27}{25} = 1.08, \text{ con error } < \frac{3}{500} < 10^{-2}.$$

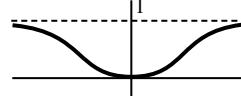
No olvidemos que las series de Leibniz también nos dan cotas superiores e inferiores de la suma.

En concreto aquí tenemos, por ejemplo, estas cotas racionales de la raíz: $\frac{27}{25} < \sqrt[5]{3/2} < \frac{543}{500}$.

[Calcular $\sqrt[5]{\frac{1}{2}} = (1 - \frac{1}{2})^{1/5}$ nos costaría bastante más esfuerzo, por salir serie no alternada].

Aunque $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ y su serie de Taylor converja $\forall x$, la f puede no coincidir con la serie:

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \quad f(0) = 0.$$



Veremos en 4.5 que para esta f es $f^{(n)}(0) = 0 \forall n$. Así su serie de Taylor es $\sum 0 \cdot x^n = 0$, convergente $\forall x$, pero que, claramente, no coincide con f salvo en $x=0$.

[Se entiende lo que le pasa a esta suave función cuando se la mira en el campo complejo].

Def. f es **analítica** en $x=0$ si se puede escribir como una serie de potencias en todo un entorno $|x| < r$, $r > 0$.

[Por ser igual a una serie de potencias debe, al menos, tener infinitas derivadas en $x=0$].

Sabemos que $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\log(1+x)$, $\arctan x$, $(1+x)^r$ son analíticas en $x=0$ (coinciden las tres primeras con una serie en todo \mathbf{R} y las otras en $|x| < 1$). También lo son sumas, productos o cocientes con denominador no nulo de cualquiera de ellas. E incluso funciones como:

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(0) = 0, \quad \text{pues } g(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \dots \quad \forall x.$$

Son obviamente no analíticas las funciones discontinuas ($\log x$ en $x=0$, por ejemplo), o con sólo un número finito de derivadas (como $x^{8/3}$, que sólo tiene 2). La f de arriba es un ejemplo de función que no es analítica en 0 a pesar de ser de C^∞ en ese punto.

[Más en general, la **serie de Taylor** de una f en un punto a es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$; haciendo $x-a=s$, se traslada el problema a una serie de Taylor en torno a $s=0$.

Una f es **analítica** en $x=a$ si es igual a una serie de potencias en $|x-a| < r$; e^x lo es, por ejemplo, en cualquier a ; \sqrt{x} lo es en $x=1$ (pero no en $x=0$)...].

Polinomios de interpolación.

El polinomio de Taylor P_n es sólo una forma de aproximar una f con polinomios. El P_n es el que más se parece a f cerca de un punto. Pero muchas veces interesa encontrar un polinomio Q_n que aproxime f en todo un intervalo. Una de las posibilidades de hacerlo es hallar un Q_n que tome los mismos valores que f en unos cuantos puntos del intervalo. A éste polinomio se llama **polinomio de interpolación**. Otra situación en que es útil el polinomio de interpolación es cuando sólo disponemos de algunos valores de la f (por ejemplo, esto sucederá si la f es resultado de unas cuantas medidas experimentales). Es decir:

Def. Dada una función $f(x)$ se llama polinomio de interpolación de grado n para los $n+1$ puntos distintos x_0, \dots, x_n al polinomio Q_n que satisface

$$Q_n(x_0) = f(x_0), \dots, Q_n(x_n) = f(x_n)$$

Un Q_n arbitrario tiene $n+1$ coeficientes a_0, \dots, a_n . Se podrían hallar con las $n+1$ ecuaciones lineales $Q_n(x_k) = f(x_k)$, $k=0 \dots n$, pero hay varias formas mucho más cortas de calcularlo. Veamos primero la **fórmula de Newton**. Ponemos Q_n en la forma:

$$Q_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + A_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}).$$

Sustituyendo ahora sucesivamente $x=x_0, x=x_1, \dots, x=x_n$, obtenemos un sencillo sistema que permite ir calculando los A_k de forma sucesiva y, por tanto, el polinomio de interpolación:

$$A_0 = f(x_0), \quad A_0 + A_1(x_1 - x_0) = f(x_1), \quad \dots, \quad A_0 + A_1(x_n - x_0) + \dots + A_n(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1}) = f(x_n)$$

En el caso particular (y muy común) de que los x_k son **equidistantes** (es decir, $x_{k+1} = x_k + h$), el sistema adopta la forma más simple:

$$A_0 = f(x_0), \quad A_0 + hA_1 = f(x_1), \quad A_0 + 2hA_1 + 2!h^2A_2 = f(x_2), \quad \dots,$$

$$A_0 + nhA_1 + \dots + \frac{n!}{(n-k)!}h^kA_k + \dots + n!h^nA_n = f(x_n) \rightarrow$$

$$\begin{aligned} A_0 &= f(x_0), \quad A_1 = \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)], \quad A_2 = \frac{1}{2h^2}[f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)], \\ A_3 &= \frac{1}{3!h^3}[f(x_3) - 3f(x_2) + 3f(x_1) - f(x_0)], \quad \dots \end{aligned}$$

Otra expresión del Q_n la da la **fórmula de Lagrange**:

$$Q_n(x) = f(x_0) \frac{\pi_0(x)}{\pi_0(x_0)} + \dots + f(x_k) \frac{\pi_k(x)}{\pi_k(x_k)} + \dots + f(x_n) \frac{\pi_n(x)}{\pi_n(x_n)},$$

donde $\pi_k(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$.

Pues el polinomio [de grado n] $\frac{\pi_k(x)}{\pi_k(x_k)}$ vale 1 si $x = x_k$ y vale 0 si $x = x_j$, con $j \neq k$.

[Parece más cómodo usar directamente esta fórmula y no resolver un sistema, pero si queremos añadir un nuevo punto hay que volver a calcular todos los π_k , lo que no sucedía con Newton].

Como en Taylor, aquí también se puede dar una estimación del **error** cometido al sustituir la f por su polinomio de interpolación Q_n . Admitimos sin demostración que si $f \in C^{n+1}[x_0, x_n]$ se tiene:

$$f(x) - Q_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f^{(n+1)}(c) \text{ con } c \in (x_0, x_n).$$

Ej. Hallemos el Q_2 que toma los mismos valores que $f(x) = \sin x$ en $0, \frac{\pi}{2}$ y π .

Sabemos que $f(x_0) = 0, f(x_1) = 1, f(x_2) = 0$. Calculando los A_k [$h = \frac{\pi}{2}$] tenemos:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{2}{\pi}[1-0], \quad A_2 = \frac{2}{\pi^2}[0-2+0] \rightarrow Q_2(x) = 0 + \frac{2}{\pi}(x-0) - \frac{4}{\pi^2}(x-0)(x-\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi^2}x(\pi-x).$$

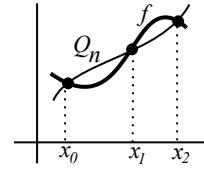
$$\text{A lo mismo llegamos con: } Q_2(x) = 0 \frac{(x-\pi/2)(x-\pi)}{(0-\pi/2)(0-\pi)} + 1 \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\pi/2-0)(\pi/2-\pi)} + 0 \frac{(x-0)(x-\pi/2)}{(\pi-0)(\pi-\pi/2)}.$$

Utilicemos este Q_2 para aproximar $\sin 1$ y $\sin 2$: $Q_2(1) \approx 0.86795, Q_2(2) \approx 0.92534$.

Los errores cometidos están acotados por

$$|E(1)| \leq \frac{1}{24}|1-0||1-\pi/2||1-\pi| \approx 0.05, \quad |E(2)| \leq \frac{1}{24}|2-0||2-\pi/2||2-\pi| \approx 0.04.$$

[Aproximaciones peores que las del P_7 de Taylor. Mejores en 2 que las que da el de orden 5 pero siguen siendo peores en 1, más cercano a 0: $P_5(2) \approx 0.9333, \sin 2 \approx 0.9093; P_5(1) \approx 0.8417, \sin 1 \approx 0.8415$].



4.5. Cálculo de límites indeterminados

O sea, del tipo $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty, 0^0, \infty^0$ (los otros ya sabemos hace tiempo).

Utilizando **desarrollos de Taylor** (en principio, para x tendiendo hacia a finito):

Introducimos una notación para abreviar: sea $g(x) \neq 0$ para $x \neq a$ en un entorno de a .

Def. Diremos que $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \rightarrow a$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Se lee simplemente: f es ‘o pequeña’ de g .

Con esta notación podemos expresar los desarrollos de Taylor escribiendo sólo aquello que se va a utilizar para calcular límites (la función es el polinomio más ‘algo despreciable’):

Si f es de C^{n+1} en un entorno de a entonces $f(x) = P_{n,a}(x) + o([x-a]^n)$.

(Pues entonces $|f^{(n+1)}(c)| \leq K$ para $c \in [a, x] \Rightarrow |R_{n,a}(x)| \leq \frac{K|x-a|}{(n+1)!} \rightarrow 0$, si $x \rightarrow a$).

Ej. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{x} = 1$,
pues $o(x)$ es precisamente algo que dividido por x tiende a 0 si $x \rightarrow 0$.

Ej. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - [x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)]}{x^3} = \frac{1}{6}$. No basta $P_1(x)$ [no se sabe hacia qué tiende $\frac{o(x)}{x^3}$].

[Es habitual (pero un poco impreciso) escribir puntos suspensivos en lugar de la “ o ”; si lo hacemos, no olvidemos que los puntos representan las potencias de x estrictamente mayores que las escritas; no escribir ni siquiera los puntos lleva a errores, como sustituir simplemente en este límite $\sin x$ por x (infinitésimo equivalente que dicen algunos) lo que nos daría:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^3} = 0 !!!]$$

Ej. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - [x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)]}{x - [x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}} = -2$.

Sin conocer el desarrollo de $\tan x$ (nosotros lo hallamos como cociente) podríamos utilizar otros:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x - \sin x} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = -2$$

Ej. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \sqrt{1+x^2}}{\operatorname{sh} x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) - [1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)]}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{1 + \frac{o(x^4)}{x^4}} = \frac{1}{6}$.

Hemos desarrollado hasta que ha quedado un término que no se anulaba en el numerador. También hemos agrupado en $o(x^4)$ todos los términos que no influyen en el valor del límite.

Las indeterminaciones anteriores eran $0/0$. Muchas de otro tipo se pueden llevar a ella:

Ej. (1^∞) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\log(1+x)/x} = e$, ya que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{x} = 1$.

Ej. $(\infty - \infty)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 + \operatorname{arctan} x}{\log(1+2x)} - \frac{\cos 2x}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 + x + o(x)}{2x - 2x^2 + o(x^2)} - \frac{1 - 2x^2 + o(x^2)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \frac{3}{2}$.

Hemos agrupado en $o(x^2)$ los términos que no influyen y utilizado propiedades de la “ o ” de prueba trivial (y muy intuitivas, si pensamos que $o(x^n)$ son potencias de x mayores que n):

$$x^m = o(x^n) \text{ si } m > n, \quad f(x) = o(x^m) \Rightarrow f(x) = o(x^n) \text{ si } m > n,$$

$$x^m o(x^n) = o(x^{m+n}), \quad o(x^m) o(x^n) = o(x^{m+n})$$

Discutamos el uso de la **regla de L'Hôpital** (presentada en 3.2) y comparemos con Taylor:

Si $f(x), g(x) \rightarrow 0$ ($\text{ó } x \rightarrow \pm\infty$) y existe el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
La regla sigue siendo válida cambiando el a del enunciado por a^+ , a^- , $+\infty$ ó $-\infty$.

[Taylor muestra porqué aparecen cocientes de derivadas en L'Hôpital, en el caso de que f y g admitan desarrollo y tiendan a 0 cuando $x \rightarrow a$ (en ese caso debe ser $f(a)=g(a)=0$):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots}{g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{1}{2}g''(a)(x-a)^2 + \dots} = \frac{f'(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a) + \dots}{g'(a) + \frac{1}{2}g''(a)(x-a) + \dots} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{f'(a)}{g'(a)}, \text{ si } g'(a)=0]$$

No dice L'Hôpital que si $\frac{f'}{g'}$ no tiene límite (finito o infinito), tampoco lo tenga $\frac{f}{g}$:

Ej. ($\frac{\infty}{\infty}$) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x + \cos x}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \sin x}$ no tiene límite, pero es claro que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{\cos x}{x}} = \frac{1}{2}$.

Muchas veces hay que iterar L'Hôpital. Es **importante simplificar** lo más posible en cada paso:

Ej. ($\frac{0}{0}$) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{(1 - \cos x) \cos^2 x} \stackrel{0/0}{=} -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = -2$ (ya calculado por Taylor).

[Sin simplificar hubiéramos tenido que seguir con L'Hôpital pues la indeterminación seguía; pero no nos lancemos a derivar sin comprobar que continúa el $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, pues podríamos hacer burradas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = !!! = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{-2 \cos x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2}].$$

Para calcular un límite indeterminado, **si conocemos los desarrollos** de las funciones que aparecen en la expresión, **suele ser preferible acudir a Taylor**.

Ej. Los límites de la página anterior se complican por L'Hôpital. Así para el $\infty - \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x \arctan x - \cos 2x \log(1+2x)}{x \log(1+2x)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \arctan x + \frac{x}{1+x^2} + 2 \sin 2x \log(1+2x) - \frac{2 \cos 2x}{1+2x}}{\log(1+2x) + \frac{2x}{1+2x}} = \frac{0}{0}$$

y hay que volver a usar l'Hôpital para deshacer la indeterminación y llegar al resultado. Más pasos habría que dar todavía en el ejemplo del ch y sh: Taylor muestra que deberíamos derivar 4 veces (salvo que exista alguna simplificación intermedia) para llegar a un límite no indeterminado.

L'Hôpital **se puede aplicar en situaciones en que Taylor no es posible** (si $x \rightarrow \pm\infty$, si no conocemos los polinomios o no existen,...). Por ejemplo, calculando unos **límites importantes**:

Ej. Si $a > 0, b > 0$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x^a \log x] = 0$.

En los dos primeros (ya probados al final de 3.2), para x gordo ni $\log x$, ni e^{ax} se parecen a ningún polinomio con lo que sólo se puede usar L'Hôpital (como hicimos).

Para el tercero ($0 \cdot [-\infty]$) $\log x$ no admite desarrollo de Taylor en 0. Así que también L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x^{-a}} = \left(\frac{-\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-ax^{-a-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^a}{-a} = 0.$$

Ej. ($0 \cdot \infty$) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \log(e^x - 1)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(e^x - 1)}{1/x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x/(e^x - 1)}{-1/x^2} = -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{e^x - 1} \stackrel{0/0}{=} -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{e^x} = 0.$
[Insistimos en la necesidad de simplificar después de cada paso].

El primer paso exigía L'Hôpital, pero en el segundo sí hubiera valido Taylor: $\frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{x^2}{x + o(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Ej. (∞^0) $\lim_{x \rightarrow \infty} [\log x]^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\log(\log x)}{x}} = 1$, pues $\frac{\log(\log x)}{x} \xrightarrow{\text{L'H}} \frac{1/x}{\log x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ [este era ($\frac{\infty}{\infty}$)].

Como dijimos en 2.2, para calcular límites, a veces es conveniente **cambios de variable**.

Ya citamos los cambios de este tipo:

Teorema: $[t = g(x)] \quad g$ continua en a , $g(x) \neq g(a)$ si $x \neq a$ y $\lim_{t \rightarrow g(a)} f(t) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = L$

Ej. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 - \log x}{\sin^2(x-1)} \stackrel{t=x-1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \log(1+t)}{\sin^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2/2 + \dots}{t^2 + \dots} = \frac{1}{2}$.

Por L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 \sin(x-1) \cos(x-1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sin(x-1)} = \frac{1}{2}$ (ahormando una derivación).

Ej. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - \sqrt{1+2x^3}}{x^6} \left(\begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right)$. Taylor: $\frac{1+x^3+\frac{1}{2}x^6+\dots-[1+x^3-\frac{1}{2}x^6+\dots]}{x^6} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

Por L'Hôpital no es demasiado largo si simplificamos:

$$\frac{3x^2 e^{x^3} - 3x^2 [1+2x^3]^{-1/2}}{6x^5} = \frac{e^{x^3} - [1+2x^3]^{-1/2}}{2x^3} \rightarrow \frac{3x^2 e^{x^3} + 3x^2 [1+2x^3]^{-3/2}}{6x^2} = \frac{e^{x^3} + [1+2x^3]^{-3/2}}{2} \rightarrow 1.$$

[Como siempre, Taylor muestra el ‘esqueleto’ del límite, sabemos que, sin hacer simplificaciones intermedias, es necesario derivar 6 veces para que el denominador deje de tender a 0].

Aunque todo es más corto (L'Hôpital, desde luego) si hacemos el cambio $t = x^3$:

$$\frac{e^t - \sqrt{1+2t}}{t^2} \xrightarrow{\text{L'H}} \frac{e^t - [1+2t]^{-1/2}}{2t} \xrightarrow{\text{L'H}} \frac{e^t + [1+2t]^{-3/2}}{2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1.$$

Otros que se utilizan muchas veces (si aparecen expresiones que dependen de $\frac{1}{x}$) son:

Teorema: $[t = \frac{1}{x}] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(\frac{1}{x}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(\frac{1}{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$. [Análogos con 0^- y $-\infty$].

[Basta escribir las definiciones de los límites para comprobarlo].

Ej. Con este teorema: $(\infty \cdot 0) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t^2} = 1 \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = \infty$.

Ahora que conocemos los desarrollos de Taylor, la forma rápida (luego hay que formalizar) de hallar un límite de este tipo es la siguiente: como cuando $x \rightarrow \infty$ es $\frac{1}{x}$ una cosa pequeña y sabemos que $\sin \bullet = \bullet - \frac{1}{6}\bullet^3 + \dots$ si \bullet es pequeño, está claro que será $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ y que nuestra función se parecerá en el infinito a x con lo que tenderá a ∞ .

[De hecho, no sería incorrecto escribir: $\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + \dots$ cuando $x \rightarrow \infty$].

Ej. Más complicado: $(\infty \cdot 0) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (1 - e^{-3/x^2}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-3t^2}}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3t^2 + o(t^2)}{t^2} = 3$.

[Como antes, $e^\bullet \sim 1 + \bullet$, con lo que se tendría: $x^2 (1 - 1 + \frac{3}{x^2} + \dots) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 3$].

Ej. $\lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 \arctan \frac{1}{x} - \sqrt{1+x}]$ es una indeterminación $\infty \cdot 0 - \infty$. Antes de formalizarlo vamos a conjutar cuál va a ser el límite. Como $\arctan \bullet \sim \bullet$, será del tipo $x - \sqrt{x}$ y valdrá infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x[x \arctan \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x+1}}{x}] = \infty \quad (\infty[1-0]), \quad \text{pues } \lim_{x \rightarrow \infty} x \arctan \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\arctant}{t} \xrightarrow{\text{Taylor o L'H}} 1.$$

[Sale más largo haciendo $t = 1/x$ inicialmente].

Ej. $(0^0) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \log x} = 1; \quad (\infty^0) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\log x / x} = 1$.

(Vimos ya con L'H que el exponente tiende a 0 en ambos casos).

O jugando con el segundo cambio:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t}\right)^t = 1, \quad \text{pues } \lim_{t \rightarrow 0^+} t^t = 1 \quad (\text{el segundo se reduce al primero}).$$

Más ejercicios de límites en los que se mezclan algunos triviales, otros que utilizan resultados de 2.2 del tipo “ $\frac{7}{\infty} = 0$ ” y otros cuantos indeterminados en los que utilizar Taylor o L'Hôpital:

Ej. Hallemos, cuando existan, diferentes límites para la función $f(x) = \frac{\log(1+x)-x}{\operatorname{sen}x-x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \pm\infty \text{ si } x \rightarrow 0^\pm.$$

$$\left[\text{o L'Hôpital: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{\cos x - 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1/[1+x]^2}{-\operatorname{sen}x} = \pm\infty \text{ si } x \rightarrow 0^\pm \right].$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \left(\frac{-\infty}{-\infty}, x \text{ manda}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\log(1+x)}{x} - 1}{\frac{\operatorname{sen}x}{x} - 1} = \frac{0+1}{0+1} = 1, \text{ pues } \frac{\log(1+x)}{x} \rightarrow 0 \text{ (casi conocido; o L'Hôpital).}$$

[No se podía aplicar Taylor (lejos de $x = 0$), ni directamente L'H: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/[1+x]-1}{\cos x-1}$ no existe].

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \text{ (“} \frac{-\infty+1}{-\operatorname{sen}1+1} \text{ ” y } 1-\operatorname{sen}1 > 0 \text{), límite fácil que sabíamos calcular hace tiempo.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{\log 2 - 1}{\operatorname{sen}1 - 1} \text{ (porque la función es ahí continua), el más fácil de todos.}$$

Ej. Hallemos el límite cuando x tiende a 0, 1 e ∞ de $f(x) = \frac{e^x \operatorname{arctan}x - x(1+3x)^{1/3}}{x^3}$.

Para 0, primero escribimos los desarrollos de Taylor de las funciones del numerador:

$$e^x \operatorname{arctan}x = [1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots] [x - \frac{1}{3}x^3 + \dots] = x + x^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})x^3 + \dots \text{ (si } |x| < 1 \text{).}$$

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{(1/3)(-2/3)}{2}x^2 + \dots \Rightarrow (1+3x)^{1/3} = 1 + x - x^2 + \dots \text{ (si } |x| < \frac{1}{2} \text{).}$$

$$\text{Por tanto: } f(x) = \frac{x+x^2+\frac{1}{6}x^3+\dots-x-x^2+x^3+\dots}{x^3} = \frac{\frac{7}{6}x^3+o(x^3)}{x^3} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{\text{L'H}} \frac{7}{6}. \text{ (Una vez más, por L'H es mucho más largo).}$$

$$\text{El límite de 1 es trivial: } f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1]{} \frac{1}{4}e\pi - \sqrt[3]{4}.$$

$$\text{Cuando } x \rightarrow \infty, \frac{(1+3x)^{1/3}}{x^2} \rightarrow 0, \operatorname{arctan}x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ y } \frac{e^x}{x^3} \rightarrow \infty. \text{ Por tanto, } f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Ej. Hallemos el límite cuando x tiende a 0 e ∞ y $-\infty$ de $f(x) = \frac{e^x - \cos x}{\log(1+x^4)}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ (acotado/infinito).}$$

$$\text{En 0, indeterminación } \frac{0}{0}. \text{ Con Taylor: } f(x) = \frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+\dots-1+\frac{1}{2}x^2+\dots}{x^4+\dots} = \frac{x+\dots}{x^4+\dots} \xrightarrow[x \rightarrow 0^\pm]{\text{L'H}} \pm\infty.$$

$$\text{Por L'Hôpital: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\log(1+x^4)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \operatorname{sen}x}{4x^3/(1+x^4)} \stackrel{1/\pm 0}{=} \pm\infty \text{ según } x \rightarrow 0^+ \text{ o } x \rightarrow 0^-.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \cos x}{\log(1+x^4)} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\log(1+x^4)} - 0 \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{4x^3/(1+x^4)} = \infty \text{ (“} \frac{\infty}{0} \text{ ”).}$$

L'Hôpital pues ni $e^x \sim 1+x$, ni $\log(1+x^4) \sim x^4$ si x gordo. Sin apartar primero el $\cos x$ se tardaría casi lo mismo. Era esperable que la e^x ‘pudiese’ con el logaritmo, pero lo hemos calculado porque exactamente no estaba escrito eso entre los límites importantes.

Ej. También los límites cuando x tiende a 0 e ∞ y $-\infty$ de la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1-e^{-x^3}}$.

$$\text{Para 0, Taylor o L'Hôpital: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{1 - (1 - x^3 + o(x^3))} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{sen}x \operatorname{sen}^2 x}{3e^{-x^3} / x^2} = 1.$$

Como el numerador está acotado y el denominador tiende a ∞ , está claro que $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} 0$.

Intuitivamente, parece que no va a tener límite cuando $x \rightarrow \infty$, pues para x grande se parece a $\operatorname{sen}^3 x$ que no lo tiene. Para formalizarlo utilizamos sucesiones:

$$a_n = n\pi \text{ y } b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ tienden a } \infty, \text{ pero } f(a_n) \rightarrow 0, \text{ mientras que } f(b_n) \rightarrow 1.$$

En los siguientes calculamos el valor del límite según los valores de la constante real a :

Ej. Discutamos el límite cuando x tiende a 0 e infinito de la función $f(x) = \frac{e^{-x^2} - \cos ax}{x^4}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{a^2}{2} - 1\right]x^2 + \left[\frac{1}{2} - \frac{a^4}{24}\right]x^4 + o(x^4)}{x^4} = \begin{cases} -\infty & \text{si } |a| < \sqrt{2} \\ 1/3 & \text{si } |a| = \sqrt{2} \\ \infty & \text{si } |a| > \sqrt{2} \end{cases}$$

[Por L'Hôpital sería más largo, habría que discutir varias veces si el límite es o no de la forma 0/0 y sería mucho más fácil equivocarnos en algún paso].

El límite en ∞ es 0 $\forall a$, pues el numerador está acotado y el denominador tiende a ∞ .

Ej. Aquí discutimos los límites cuando $x \rightarrow 0^+$ y cuando $x \rightarrow \infty$ de $f(x) = x^{-a} [\sqrt{1+9x^4} - 1]$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+9x^4} - 1}{x^a} = \frac{\frac{9}{2}x^4 + \dots}{x^a} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \begin{cases} 0, & \text{si } a < 4 \\ 9/2, & \text{si } a = 4 \\ \infty, & \text{si } a > 4 \end{cases}$$

$$\text{El de infinito lo sabíamos hacer desde el capítulo 2: } f(x) = \frac{x^2\sqrt{9+x^{-4}} - 1}{x^a} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \text{si } a > 2 \\ 3, & \text{si } a = 2 \\ \infty, & \text{si } a < 2 \end{cases}$$

Ej. Hallemos para todo $a > 0$ los límites cuando x tiende a ∞ y 0^+ de $f(x) = x^a [1 - \cos \frac{1}{x}]$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{t^a} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2/2 + o(t^2)}{t^a} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < a < 2 \\ 1/2 & \text{si } a = 2 \\ \infty & \text{si } a > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \forall a \quad (\text{no acotado}). \quad [\text{Cuando } x < 0, x^a \text{ no está definido}].$$

Con todo lo aprendido sobre Taylor y los límites indeterminados podemos abordar diferentes problemas de secciones anteriores para los que nos faltaban argumentos. Por ejemplo, aparecieron límites indeterminados en la definición de **derivada**. Aunque los teoremas de derivación permiten calcular casi todas, quedaban aún algunas que no sabíamos hacer. Pero ahora ya se puede con Taylor y L'Hôpital:

Ej. Estudiemos si son derivables en $x = 0$ las siguientes funciones:

$$n(x) = \arctan \frac{1}{x^2}, \quad n(0) = \frac{\pi}{2}. \quad \text{Usando un teorema de 3.2 vimos que } n'(0) = 0. \quad \text{Directamente:}$$

$$n'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{\arctan(\frac{1}{h^2}) - \frac{\pi}{2}}{h} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\arctan(t^2) - \frac{\pi}{2}}{1/t} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{2t/[1+t^4]}{-1/t^2} = 0.$$

$$l(x) = \frac{\log(1+x)}{x}, \quad l(0) = 1. \quad \text{Como } l(x) = \frac{x+o(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1, \quad \text{la función } l \text{ es al menos continua en } x=0.$$

Aunque no va a ser lo más rápido, acudamos a la definición para ver si existe $l'(0)$:

$$l'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)/h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h) - h}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2/2 + o(h^2)}{h^2} = -\frac{1}{2}.$$

¿Existirá también $l''(0)$? Siguiendo con la definición, necesitamos antes tener $l'(x)$ para $x \neq 0$:

$$l'(x) = \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{(1+x)x^2} \rightarrow l'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + (1+h)h^2 - 2(1+h)\log(1+h)}{2(1+h)h^3} = \dots = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}h^3 + o(h^3)}{2h^3 + 2h^4} = \frac{2}{3}.$$

Pero las cosas son mucho más fáciles gracias a Taylor. Nuestra l es exactamente:

$$l(x) = \frac{x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots \quad \text{para todo } |x| < 1.$$

Como está definida por una serie de potencias (o sea, es analítica) es C^∞ y sabemos que:

$$l(0) = 1, \quad l'(0) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{l''(0)}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow l''(0) = \frac{2}{3}, \dots$$

También serán muy útiles los temas de este capítulo en el dibujo de **gráficas**:

Ej. $f(x) = e^{-1/x^2}$, $f(0) = 0$. Comprobemos primero, como dijimos en 4.4, que $f^{(n)}(0) = 0 \forall n$.

Para $x \neq 0$ es: $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$, $f''(x) = [\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}] e^{-1/x^2}$, $f'''(x) = [\frac{8}{x^9} - \frac{36}{x^7} + \frac{24}{x^5}] e^{-1/x^2}, \dots$

Entonces: $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = \lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-t^2} = 0$, $f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^{-1/h^2}}{h^4} = \lim_{t \rightarrow \infty} 2t^4 e^{-t^2} = 0, \dots$

[pues e^{t^2} es mucho mayor que e^t ($e^t/e^{t^2} = e^{t-t^2} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} e^{-\infty} = 0$) y sabemos que $t^n e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$].

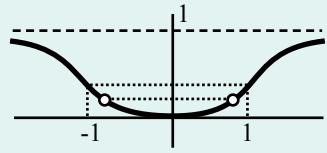
Para cualquier n , tras hacer $h = \frac{1}{t}$, acabaremos en: $f^{(n)}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\text{polinomio}) \cdot e^{-t^2} = 0$.

Para hacer el dibujo observamos que:

f es par y es $f(x) \geq 0$. $f(x) \rightarrow e^0 = 1$ si $x \rightarrow \pm\infty$.

f crece para $x > 0$ y decrece si $x < 0$. $f(1) = e^{-1} \approx 0.37$.

Inflexión en $i_{\pm} = \pm(\frac{2}{3})^{1/2} \approx 0.82$. $f(i_{\pm}) = e^{-3/2} \approx 0.22$.



[Sin calculadora podríamos hallar aproximadamente los valores de arriba con los desarrollos de Taylor:

$(1 - \frac{1}{3})^{1/2} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{72} - \dots$. La serie es no alternada, pero con sólo esos 3 términos sale ya ≈ 0.82 .

Nos costaría más hallar $e^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{8} - \frac{9}{16} + \frac{27}{128} - \dots$ (más lejos de 0) que $e^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \dots$, pero en ambos casos podríamos dar cotas de los errores, por tratarse de series alternadas].

Ej. $e(x) = e^{-1/x}$ $\rightarrow \infty$ si $x \rightarrow 0^-$. A diferencia de la anterior esta no es ni siquiera continua en 0 . $\rightarrow 0$ si $x \rightarrow 0^+$.

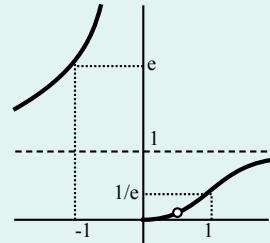
Para $x \neq 0$ es ahora: $e'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$, $e''(x) = \frac{1}{x^4} [1 - 2x] e^{-1/x}$.

$e'(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^-]{} \infty$ (" $\infty \cdot \infty$ ") y $e'(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} 0$ (como en el ejemplo anterior).

e no es simétrica. También es $e(x) \geq 0$ y $e(x) \rightarrow 1$ si $x \rightarrow \pm\infty$.

La e crece en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ y la inflexión se da en $x = \frac{1}{2}$.

$e(-1) = e \approx 2.72$. $e(1) = e^{-1} \approx 0.37$. $e(\frac{1}{2}) = e^{-2} \approx 0.14$.



Ej. $g(x) = x^2 e^{1/x} e^{-x}$. $g(x) \geq 0 \forall x$. Asíntotas:

si $x \rightarrow 0^-$, $g \rightarrow 0 \cdot 0 \cdot 1 = 0$; si $x \rightarrow -\infty$, $g \rightarrow \infty \cdot 1 \cdot \infty = \infty$;

si $x \rightarrow 0^+$, $g \rightarrow 0 \cdot \infty \cdot 1$ indeterminado:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g = 1 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-2} e^t = \infty;$$

si $x \rightarrow \infty$, $g \rightarrow \infty \cdot 1 \cdot 0$ indeterminado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0.$$

$g'(x) = -[x-1]^2 e^{1/x} e^{-x}$ siempre decreciente

($x = 1$ punto de inflexión con tangente horizontal);

$g'(x) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow 0^-$; $g'(x) \rightarrow -\infty$ si $x \rightarrow 0^+$.

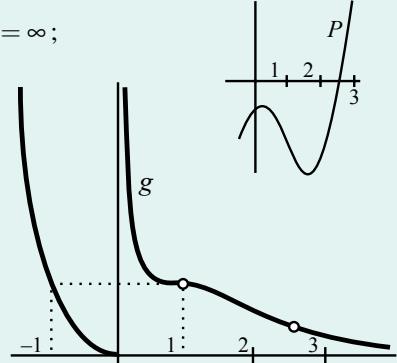
$$g''(x) = \frac{1}{x^2} [x-1][x^3 - 3x^2 + x - 1] e^{1/x} e^{-x}.$$

Analizamos el número de raíces de $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$: $\begin{array}{c} + - + - \text{ (3 ó 1 positivas)} \\ - - - \text{ (sin raíces negativas)} \end{array}$

$$P'(x) = 3x^2 - 6x + 1 = 0 \text{ si } x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, P\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = -2 + \frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < 0$$

\Rightarrow sólo 1 cero real de P [en $(2, 3)$] \Rightarrow 2 puntos de inflexión de g .

Los únicos valores sencillos: $g(-1) = g(1) = 1$, $g'(-1) = -4$.



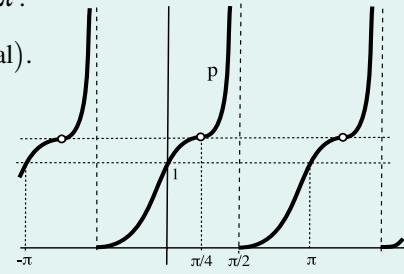
Ej. $p(x) = \cos^2 x e^{\tan x}$, π -periódica. Continua si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$$p'(x) = [1 - \sin 2x] e^{\tan x} \geq 0 (\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ inflexión horizontal}).$$

$$p \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2^+} 0 \cdot 0 = 0, p' \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2^+} 1 \cdot 0 = 0, p \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2^-} 0 \cdot \infty;$$

$$\text{L'Hôpital: } \frac{e^{\tan x}}{1+\tan^2 x} \xrightarrow[\infty/\infty]{\text{ }} \frac{e^{\tan x}}{2\tan x} \xrightarrow[\infty/\infty]{\text{ }} \frac{e^{\tan x}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2^-} \infty.$$

$$[\text{o bien, } \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{e^{\tan x}}{1+\tan^2 x} \stackrel{t=\tan x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{1+t^2} = \infty].$$



Ej. $l(x) = 6 \log|x| + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}$. Dominio = $\mathbf{R} - \{0\}$.

Cuando $x \rightarrow \pm\infty$, $l(x) \rightarrow \infty$ y se parece a $6 \log|x|$.

$$l(x) = \frac{6x^3 \log|x| + x + 3}{x^3} \xrightarrow[x \rightarrow 0^\pm]{} \pm\infty \text{ (pues } x^3 \log|x| \rightarrow 0\text{).}$$

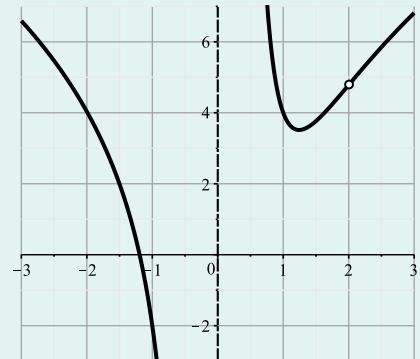
$$l'(x) = \frac{1}{x^4} [6x^3 - 2x - 9] \equiv \frac{1}{x^4} P(x). P \text{ sin raíces enteras.}$$

$$P' = 0 \rightarrow x = \pm \frac{1}{3}. P(-\frac{1}{3}) < 0, P(1) = -5, P(2) = 35$$

\Rightarrow único 0 de l' en $(1, 2)$ [antes < 0 y después > 0].

$$l''(x) = \frac{6[6+x-x^3]}{x^5} = -\frac{6}{x^5}[x-2][x^2+2x+3] = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$l(-1) = -2, l(1) = 4, l(-2) \approx 4.03, l(2) \approx 4.78.$$



Ej. $h(x) = x \log(1 + \frac{4}{x^2})$. Impar. $\lim_{x \rightarrow 0} h = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log[1+4/x^2]}{1/x} = (\text{L'H}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{x^2+4} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h = (\text{L'H}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{x^2+4} = 0 \text{ [o bien } (x = 1/t) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log[1+4t^2]}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} [4t + \frac{o(t^2)}{t}] = 0\text{];}$$

$$[\text{o (informal) } h \underset{x \text{ gordo}}{\sim} x \frac{4}{x^2} = \frac{4}{x^2}, \text{ pues } \log(1+\bullet) \sim \bullet \text{ si } \bullet \text{ chico}].$$

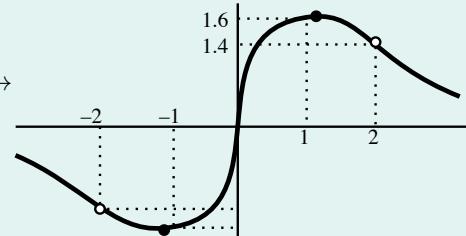
$$h'(x) = \log(1 + \frac{4}{x^2}) - \frac{8}{x^2+4}; h'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty.$$

$$h'(1) = \log 5 - \frac{8}{5} \approx 0.01, h'(2) = \log 5 - 1 \approx -0.3 \rightarrow$$

hay un único máximo (en un x algo mayor que 1)

$$h''(x) = \frac{8[x^2-4]}{x[x^2+4]^2} \quad h \text{ es } \cup \text{ en } (-2, 0) \cup (2, \infty) \\ h \text{ es } \cap \text{ en } (-\infty, 2) \cup (0, 2)$$

$$h(1) = \log 5 \approx 1.61, h(2) = 2 \log 2 \approx 1.4.$$



Ej. $k(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x^{1/3}}$. Par. $k \rightarrow \infty$ si $x \rightarrow \infty$.

$$k(x) = x^{2/3} + o(x^{2/3}) \Rightarrow \text{continua en } x = 0 \text{ si } k(0) = 0.$$

$$(\text{y no derivable; o directamente } k'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sh} h}{h^{4/3}} = \infty).$$

$$k(\pm 1) = \frac{1}{2}[\operatorname{e} - \operatorname{e}^{-1}] \approx 1.2, k(\pm 2) = 2^{-4/3}[\operatorname{e}^2 - \operatorname{e}^{-2}] \approx 2.9.$$

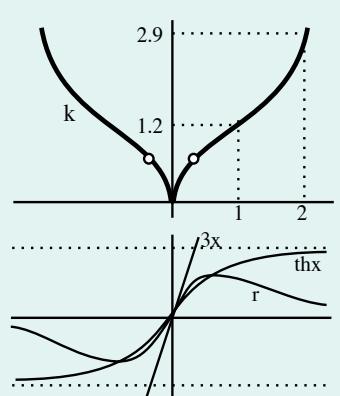
$$k'(x) = x^{-1/3} \operatorname{ch} x - \frac{1}{2}x^{-4/3} \operatorname{sh} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{th} x = 3x \text{ (nunca).}$$

$$k''(x) = \frac{[9x^2+4]\operatorname{sh} x}{9x^{7/3}} - \frac{2\operatorname{ch} x}{3x^{4/3}} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{th} x = \frac{6x}{9x^2+4} \equiv r(x)$$

Vemos si se cortan las gráficas de r y th [impares]:

$$r'(0) = \frac{3}{2}, r(\frac{1}{3}) = 0.4, r(\frac{2}{3}) = 0.5 \text{ (máximo de } r\text{), } r \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

$$\operatorname{th}'(0) = 1, \operatorname{th}(\frac{1}{3}) \approx 0.32, \operatorname{th}(\frac{2}{3}) \approx 0.58, \operatorname{th} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 \Rightarrow \text{hay un punto de inflexión para un } x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}).$$



Por último, con las técnicas para resolver indeterminaciones de esta sección ya sabemos calcular muchos más límites de **sucesiones** (y deducir convergencias de **sistemas**). Recordamos que:

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L &\Leftrightarrow \text{toda sucesión } \{a_n\} \subset \text{dom } f - \{a\} \text{ con } \{a_n\} \rightarrow a \text{ satisface que } f(a_n) \rightarrow L. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L &\Leftrightarrow \text{toda sucesión } \{a_n\} \subset \text{dom } f \text{ con } \{a_n\} \rightarrow \infty \text{ satisface que } f(a_n) \rightarrow L.\end{aligned}}$$

[Los teoremas también valían si L era $+$ ó $-\infty$; en particular, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L \Rightarrow f(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$].

Ej. Si $a > 0$, $\frac{\log n}{n^a} \rightarrow 0$ porque $\frac{\log x}{x^a} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, como vimos usando L'Hôpital (adelantado al final de 2.1).

[No es nada elegante aplicar L'Hôpital o Taylor directamente a una sucesión, pues estrictamente hablando una sucesión es una función que sólo toma valores sobre los enteros y claramente no tiene sentido hablar de su derivada; se debe, pues, cambiar la variable n por x para indicar que lo que se deriva es la $f(x)$ que da lugar a la sucesión para los $n \in \mathbb{N}$; el problema es que si uno lo hace ‘mal’ puede llegar bien al resultado (pero que no olvide que deriva la $f(x)$)].

Ej. $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, pues $\{n\} \rightarrow \infty$ y $x^{1/x} \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$ (por la misma razón $\sqrt[7n+3]{7n+3} \rightarrow 1$).

Ej. $(1+a_n)^{1/a_n} \rightarrow e$ si $\{a_n\} \rightarrow 0$, pues vimos que $(1+x)^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e$ (límite también admitido en 2.1).

Ej. En los ejemplos del capítulo 2 no sabíamos que b^n ($b > 1$), e^{an} ($a > 0$) crecen más que n^c .
[Lo probamos a partir de una serie y también es consecuencia de otro límite de funciones calculado].

$$\begin{aligned}3e^n - e^{2n} + 7n^5 &= e^{2n} \left[e^{-n} - 1 + 7 \frac{n^5}{e^{2n}} \right] \rightarrow -\infty \text{ (“}-1 \cdot \infty\text{”)} \\ \frac{(n+3)^2 \arctan n}{\sqrt{n^4 + n \operatorname{sen} n - n^9 e^{-n}}} &= \frac{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2 \arctan n}{\sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen} n}{n^3} - \frac{n^7}{e^n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot (\pi/2)}{\sqrt{1+0-0}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{pues sabemos que } \frac{n^c}{e^{an}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

Ej. $a_n = \frac{\log(e^{2n}+n)}{n} \cdot \frac{\log(e^{2x}+x)}{x} \xrightarrow{\infty/\infty} \frac{(2e^{2x}+1)/(e^{2x}+x)}{1} = \frac{2+e^{-2x}}{1+xe^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 2 \Rightarrow a_n \rightarrow 2$.

O con más ingenio: $a_n = \frac{\log(e^{2n}[1+n e^{-2n}])}{n} = 2 + \frac{\log(1+n e^{-2n})}{n} \rightarrow 2$, pues $n e^{-2n} \rightarrow 0$.

[No es siempre cierto que $\log(\text{algo})$ sea menor que una potencia de n].

Ej. $n^2 \operatorname{sh} \frac{1}{n^2} \rightarrow 1$ $\left[\begin{array}{l} \text{pues } \{n^2\} \rightarrow \infty \text{ y es } \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sh} \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sh} t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t + o(t)}{t} = 1 \\ \text{o más corto, porque } \left\{ \frac{1}{n^2} \right\} \rightarrow 0 \text{ y, cuando } x \rightarrow 0, \frac{\operatorname{sh} x}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right]$.

Ej. $n^4 - n^6 \arctan \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$, pues se puede poner como $f(\frac{1}{n^2})$ con $f(x) = \frac{x - \arctan x}{x^3} = \frac{x^3/3 + \dots}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}$.

[Más informalmente: $\arctan \bullet \sim \bullet - \frac{1}{3} \bullet^3 \Rightarrow n^4 - n^6 \arctan \frac{1}{n^2} \sim n^4 - n^4 + \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$].

Ej. $\sum \arctan \frac{1}{n}$ diverge, pues $\arctan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ (es decir, $\frac{\arctan(1/n)}{1/n} \rightarrow 1$, pues $\frac{\arctan x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ y $\frac{1}{n} \rightarrow 0$).

Ej. $\sum \log \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ converge, pues $\log \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ (ya que $\frac{\log(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ y $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$).
[$\log(1+\bullet) = \bullet - \dots$]

Ej. $\sum (-1)^n n^2 e^{-\sqrt{n}}$ converge por Leibniz, porque es **alternada**, $f(n) = n^2 e^{-\sqrt{n}}$ **tiende a 0**

[pues $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [x=t^2] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4}{e^t} = 0$, o por L'Hôpital (más largo sin el cambio):
 $x^2/e^{\sqrt{x}} \rightarrow 4x^{3/2}/e^{\sqrt{x}} \rightarrow 12x/e^{\sqrt{x}} \rightarrow 24x^{1/2}/e^{\sqrt{x}} \rightarrow 24/e^{\sqrt{x}} \rightarrow 0$].

y es **decreciente** a partir de un n [ya que $f'(x) = \frac{x}{2}(4-\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}} < 0$ si $x > 16$].

4.6. Series complejas de potencias

Comenzamos hablando brevemente de las **funciones de variable compleja**. Una f de variable compleja será una regla que asigna a cada complejo z de un dominio un único complejo $f(z)$.

Como los reales son un tipo particular de números complejos podríamos hablar también de funciones reales de variable compleja, si $f(z)$ es real para cada z , o de funciones complejas de variable real (incluso las funciones reales de variable real se pueden mirar como un tipo particular de funciones complejas).

Ej. $f(z) = z^2$, $f(z) = \bar{z}$, $f(z) = f(x+iy) = xy + ix$ son funciones complejas de variable compleja.

Una función compleja de variable real es, por ejemplo, $f(x) = \operatorname{sen}x + i\operatorname{th}x$, si $x \in \mathbb{R}$.

Funciones (importantes) reales de variable compleja son:

$f(z) = |z|$ (función ‘módulo’),

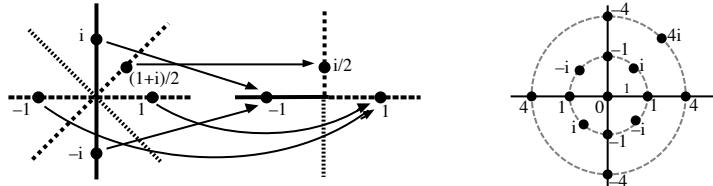
$\operatorname{Arg}(z) = \theta$, con θ argumento principal de z (función ‘argumento’),

$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x+iy) = x$, $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(x+iy) = y$ (funciones ‘parte real’ y ‘parte imaginaria’).

Cualquier función de valores complejos puede escribirse en la forma $f = u + iv$, donde u y v (parte real y parte imaginaria de f) son funciones con valores reales. Por ejemplo, así podemos expresar:

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy), \quad f(z) = \bar{z} = x - iy$$

Para pintar estas funciones podríamos dibujar flechas entre dos planos complejos, o bien escribir el valor de $f(z)$ sobre cada z de un plano complejo. Las dos cosas están hechas abajo para $f(z) = z^2$:



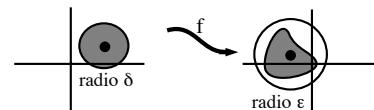
Límite y continuidad se definen como en \mathbb{R} sustituyendo valores absolutos por módulos:

Def. $(\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}; z, a, L \in \mathbb{C})$

$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si z cumple $0 < |z-a| < \delta \Rightarrow |f(z)-L| < \varepsilon$.

f es continua en a si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si z cumple $|z-a| < \delta \Rightarrow |f(z)-f(a)| < \varepsilon$.

[Si un entorno es $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$, que f es continua en a significa que podemos dar un entorno de a de radio δ lo suficientemente pequeño de forma que su imagen este contenida en un entorno de $f(a)$ de radio ε , por pequeño que sea ε].



Teorema: f y g continuas en $a \in \mathbb{C} \Rightarrow f \pm g$, $f \cdot g$ y f/g (si $g(a) \neq 0$) son continuas en a .
Si $f = u + iv$ (u, v reales), entonces f continua en $a \Leftrightarrow u$ y v continuas en a .

Las demostraciones del \pm , \cdot y $/$ son iguales que las reales, ya que seguimos teniendo la desigualdad triangular; para la otra: $|f(z) - f(a)| = |[u(z) - u(a)] + i[v(z) - v(a)]|$ es pequeño si y sólo si lo son $|u(z) - u(a)|$ y $|v(z) - v(a)|$.

Def. $f(z)$ es derivable en $a \in \mathbb{C}$ si existe el $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(a+z) - f(a)}{z} = f'(a)$.

[Igual que la de \mathbb{R} ; también como allí se demuestra que ‘derivable \Rightarrow continua’ y que:

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (f \cdot g)' = f'g + fg', \quad (1/g)' = -g'/g^2, \quad (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

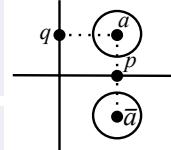
Con esto es fácil derivar polinomios y funciones racionales (más adelante también derivaremos $\operatorname{sen}z$, $\cos z$ y e^z , pero por ahora ni siquiera sabemos lo que son estas funciones complejas)].

Ej. Es fácil ver que $f(z) = \text{cte}$ y $f(z) = z$ son continuas y derivables en cualquier a con lo que también lo serán cualquier polinomio o cociente de polinomios donde el denominador no se anula.

Ej. $\operatorname{Re}(z) = x$ e $\operatorname{Im}(z) = y$ son continuas $\forall a$ por el teorema y porque $f(z) = z$ lo es.

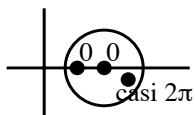
[O directamente: si $a = p + iq$

$$|x - p|, |y - q| < \sqrt{|x - p|^2 + |y - q|^2} = |z - a| < \varepsilon \text{ si } |z - a| < \delta = \varepsilon]$$



Ej. $f(z) = \bar{z}$ es continua $\forall a \in \mathbf{C}$: $|\bar{z} - \bar{a}| = |\overline{z-a}| = |z-a| < \varepsilon$ si $|z-a| < \delta = \varepsilon$ [o por el teorema y el ejemplo anterior: $u(z) = x, v(z) = -y$ lo son].

[Como se verá en los libros de cálculo en varias variables, una función de dos variables que sea composición de funciones continuas será continua; así será fácil asegurar que lo es, por ejemplo, $f(x+iy) = y \arctan(xy) + ix \cos(x+y)$]



Hay funciones discontinuas muy sencillas como $\operatorname{Arg}(z)$ en cualquier a real positivo. En cualquier entorno de a hay puntos z en que $\operatorname{Arg}(z)$ es casi 2π y por tanto $|\operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(a)| = |\operatorname{Arg}(z) - 0|$ no se puede hacer tan pequeño como queramos [en los demás a la función sí es continua; si el argumento principal lo hubiésemos escogido en $(-\pi, \pi]$ conseguiríamos que la función $\operatorname{Arg}(z)$ fuese continua en el semieje real positivo, pero la discontinuidad se trasladaría al negativo].

Ej. Funciones de pinta inofensiva son no derivables como $f(z) = \bar{z}$, pues $\nexists \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim_{x+iy \rightarrow 0} \frac{x-iy}{x+iy}$: $\frac{x-iy}{x+iy}$ cuando $y=0$ vale 1 y cuando $x=0$ vale -1; el límite no puede existir pues el cociente toma valores 1 y -1 para z tan cercanos como queramos a 0.

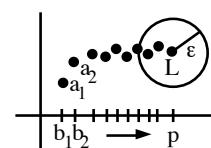
[Sabiendo algo de derivadas parciales: se prueba en análisis complejo que para que una $f = u + iv$ sea derivable es necesario que se cumpla: $u_x = v_y, u_y = -v_x$ (ecuaciones de Cauchy-Riemann). Para $f(z) = x - iy$ no se satisfacen, pues $u_x = 1 \neq v_y = -1$. De hecho, la mayoría de las funciones definidas en la forma $f = u + iv$ serán no derivables, pues es mucha casualidad que u y v cualesquiera satisfagan dichas ecuaciones. Comprobemos que sí se cumplen para una función derivable como $f(z) = z^2$ (de derivada $f'(z) = 2z$): $u_x = 2x = v_y, u_y = -2y = -v_x$].

Consideremos ahora las **sucesiones** $\{a_n\} \subset \mathbf{C}$ de complejos, o sea, funciones de \mathbf{N} en \mathbf{C} :

Def. $\{a_n\} \rightarrow L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe N natural tal que si $n \geq N$ entonces $|a_n - L| < \varepsilon$ [$|\cdot|$ módulo]

Para cualquier entorno de L casi todos los puntos de $\{a_n\}$ están dentro:

Teorema: Sea $a_n = b_n + ic_n$, con b_n y c_n reales y $L = p + iq$. Entonces $\{a_n\} \rightarrow L \Leftrightarrow \{b_n\} \rightarrow p$ y $\{c_n\} \rightarrow q$.



$$\Rightarrow \forall \varepsilon \exists N \text{ tal que si } n \geq N \Rightarrow |a_n - L| = |(b_n - p) + i(c_n - q)| < \varepsilon \Leftrightarrow (b_n - p)^2 + (c_n - q)^2 < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b_n - p)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |b_n - p| < \varepsilon \\ (c_n - q)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |c_n - q| < \varepsilon \end{cases}$$

$$\Leftarrow \forall \varepsilon \left\{ \begin{array}{l} \exists N_1, n \geq N_1 \Rightarrow |b_n - p| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists N_2, n \geq N_2 \Rightarrow |c_n - q| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right. \Rightarrow |a_n - L| \leq |b_n - p| + |c_n - q| < \varepsilon \text{ si } n \geq \max\{N_1, N_2\}$$

Como en \mathbf{R} , una **serie** de complejos $\sum a_n$ se dice convergente si lo es su sucesión S_n de sumas parciales. Una consecuencia inmediata del teorema anterior es:

Teorema: $a_n = b_n + ic_n: \sum a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum b_n$ y $\sum c_n$ convergen y es $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + i \sum_{n=1}^{\infty} c_n$

$\sum a_n$ es **absolutamente convergente** si lo hace la serie real $\sum |a_n|$, a la que se le pueden aplicar los criterios de convergencia de series reales conocidos. Se tiene también que:

Teorema: $\sum a_n$ absolutamente convergente $\Rightarrow \sum a_n$ convergente

Si $a_n = b_n + i c_n$, $|a_n|^2 = |b_n|^2 + |c_n|^2 \Rightarrow |b_n|, |c_n| \leq |a_n|$. Por tanto:

$\sum |a_n|$ convergente $\Rightarrow \sum |b_n|$ y $\sum |c_n|$ convergentes $\Rightarrow \sum b_n$ y $\sum c_n$ convergentes

También se tienen aquí los criterios de cociente y de la raíz (iguales que los de **R**) y son reales las sucesiones $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ y $\sqrt[n]{|a_n|}$ cuyo límite hay que calcular para aplicarlos.

Ej. $a_n = \operatorname{sen} \frac{1}{n} + i(2 + \frac{1}{n})^n$ diverge, pues $b_n = \operatorname{sen} \frac{1}{n} \rightarrow 0$, pero $c_n = (2 + \frac{1}{n})^n \rightarrow \infty$.

Ej. $a_n = (\frac{1}{2} + \frac{i}{2})^n$; $|a_n| = 2^{-n/2} \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$ [esto es intuitivamente claro y fácil de formalizar].

Ej. $\sum (\frac{1}{2} + \frac{i}{2})^n$ converge pues $\sum |a_n| = \sum (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$ es serie geométrica convergente

[como en **R** se ve que: $\sum a_n$ convergente $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$; otra prueba de que la última $\{a_n\}$ converge].

Ej. $\sum \frac{i^n}{n}$ no converge absolutamente (pues $\sum \frac{1}{n}$ es divergente), pero sí converge:

$$\sum \frac{i^n}{n} = i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \frac{1}{6} + \dots = -\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots) + i(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots)$$

puesto que son convergentes las dos últimas series por Leibniz.

Ej. $\sum \frac{(7+i)^n}{n^3}$ diverge, porque $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|7+i|^{n+1}}{|7+i|^n} \cdot \frac{n^3}{(n+1)^3} = 5\sqrt{2} \frac{n^3}{(n+1)^3} \rightarrow 5\sqrt{2} > 1$, o bien, porque

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{5\sqrt{2}}{n^3/n}} \rightarrow 5\sqrt{2} > 1 \quad (\text{que } \sum |a_n| \text{ diverja, en principio no prueba nada}).$$

Veamos ya las **series de potencias** complejas $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, $a_n, z \in \mathbb{C}$.

Se tienen resultados como los de **R** con demostraciones (que no hacemos) iguales que allí:

Teorema:

A cada serie de potencias está asociado un número positivo R , llamado **radio de convergencia** de la serie, que tiene las siguientes propiedades: si $R = 0$, la serie sólo converge si $z = 0$; si $R = \infty$, la serie converge para todo z ; si R es un número real positivo, la serie converge para $|z| < R$ y diverge para $|z| > R$.

Aquí el intervalo de convergencia se ha convertido en el círculo de convergencia $|z| < R$. Sobre la circunferencia $|z| = R$ no se puede asegurar nada. Como en **R** habrá series que convergen en toda ella, otras en puntos aislados, otras en ninguno... El R se podrá calcular casi siempre mediante el cociente o la raíz.

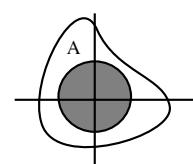
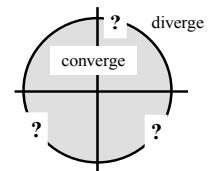
Estas series se pueden sumar, multiplicar, dividir,... igual que las reales y se tiene el mismo resultado sobre derivación:

Teorema:

$$\text{Sea } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ para } |z| < R \Rightarrow f \text{ es derivable para } |z| < R \text{ y } f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Y, por tanto, las funciones definidas por series de potencias vuelven a ser infinitamente derivables (y también continuas, desde luego) dentro del círculo de convergencia. Un resultado importante y sorprendente, que desde luego no es cierto en los reales, y que se prueba con técnicas más avanzadas de cálculo complejo es:

Teorema: Una función $f(z)$ derivable en una región A del plano es infinitamente derivable en A . Además, en todo círculo contenido en A la función $f(z)$ coincide con su serie de Taylor.



Definimos tres nuevas funciones complejas, que hasta ahora no tenían sentido:

$$\boxed{\text{Def. } e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z \in \mathbf{C}}$$

El R de las tres series es ∞ . Tienen propiedades (fáciles de probar) que son como las de los reales:

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen} z)' &= \cos z, \quad (\cos z)' = -\operatorname{sen} z, \quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z, \quad \cos(-z) = \cos z, \\ (e^z)' &= e^z, \quad e^{-z} = 1/e^z, \quad e^{z+w} = e^z e^w, \dots \end{aligned}$$

Y otras nuevas:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \dots = (1 - \frac{z^2}{2!} + \dots) + i(z - \frac{z^3}{3!} + \dots) = \cos z + i \operatorname{sen} z \\ e^{-iz} &= \cos z - i \operatorname{sen} z, \quad \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}[e^{iz} - e^{-iz}], \quad \cos z = \frac{1}{2}[e^{iz} + e^{-iz}] \end{aligned}$$

[Si $z = y$ real deducimos la prometida relación que abreviaba la forma polar: $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$].

No es necesario sumar series para calcular exponentiales: $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$.

$$[\text{Ni senos: } \operatorname{sen}(\pi + i) = \frac{1}{2i}[e^{i(\pi+i)} - e^{-i(\pi+i)}] = -\frac{i}{2}[e^{-1}e^{i\pi} - e^1e^{-i\pi}] = \frac{i}{2}[e^{-1} - e^1] (= \operatorname{sen} i)].$$

Las funciones complejas $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ no son acotadas. En el eje imaginario, por ejemplo:

$$\operatorname{sen}(iy) = \frac{1}{2i}[e^{-y} - e^y] = i \operatorname{sh} y, \quad \cos(iy) = \frac{1}{2}[e^{-y} + e^y] = \operatorname{ch} y$$

[resultado clásico es que las únicas funciones acotadas y analíticas en todo \mathbf{C} son las constantes].

Lo visto de series complejas explica situaciones sorprendentes de las funciones reales. ¿Por qué si tanto e^x como $1/(1+x^2)$ son $C^\infty(\mathbf{R})$, la serie de la primera converge $\forall x$ y la de la otra sólo lo hace si $|x| < 1$? Pues porque la serie $1-z^2+z^4-\dots$ de $1/(1+x^2)$ ha de definir una función continua y en $z = \pm i$ esta no lo es [esto sucede para todo cociente de polinomios complejos (reales, en particular): el radio R de su serie es la distancia al cero más próximo del denominador (en $|z| < R$ es derivable y, por tanto, analítica)]. También entendemos el extraño comportamiento de $f(x) = e^{-1/x^2}$ que tiene infinitas derivadas pero sólo coincide con su serie de Taylor en $x = 0$: como $f(iy) = e^{1/y^2} \xrightarrow[y \rightarrow 0]{} \infty$, no es siquiera continua en $z = 0$.

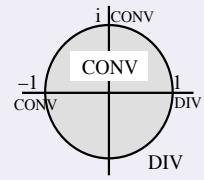
Ej. Estudiemos donde converge: $\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \rightarrow 1 = R$.

Converge en el círculo $|z| < 1$ y diverge en $|z| > 1$. ¿Qué pasa en $|z| = 1$?

No converge absolutamente en esa circunferencia, pero podría converger en algunos z de ella. Por ejemplo:

si $z = -1$, la serie $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge por Leibniz; si $z = 1$, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge;

si $z = i$, converge, pues $\sum \frac{i^n}{\sqrt{n}} = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}} + i \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ y convergen ambas (Leibniz).



Ej. Desarrollemos en serie $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$.

Que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge $\Leftrightarrow |z| < 1$ y que su suma es $\frac{1}{1-z}$ se prueba como en \mathbf{R} . Así pues:

$$f(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - [-z^2/4]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{4^{n+1}}, \quad \left| \frac{-z^2}{4} \right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2 \text{ (distancia de los ceros al origen).}$$

[la serie no converge en ningún punto de la circunferencia $|z| = 2$ pues para cualquier z con ese módulo queda una serie cuyo término general no tiende a 0 pues tiene módulo constante $\frac{1}{4}$].

Podemos desarrollarla también (dando rodeos) de otras formas.

Descomponiendo en fracciones simples complejas:

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{4i} \left[\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{z+2i} \right] = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{1-z/2i} + \frac{1}{1+z/2i} \right] = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z^n}{(2i)^n} + \frac{(-z)^n}{(2i)^n} \right] = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n}}{2^{2n}i^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{4^{n+1}}$$

Dividiendo (las manipulaciones con series complejas, como dijimos, como las de las reales):

$$[4+z^2][a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots] = 1 \rightarrow 4a_0 = 1, a_0 = 14; 4a_1 = 0, a_1 = 0; 4a_2 + a_0 = 0, a_2 = -\frac{1}{16}; \dots$$

5. Integración en R

5.1. Definición y propiedades

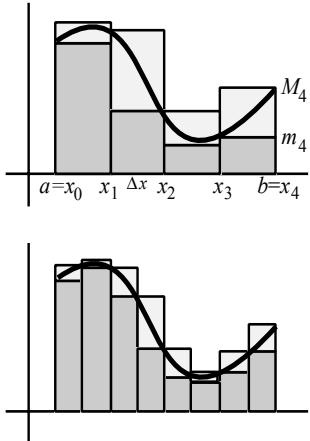
Sea f acotada en $[a, b]$. Dividimos $[a, b]$ en n subintervalos de la misma longitud Δx por medio de los $n+1$ puntos:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \text{con} \quad x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \equiv \Delta x.$$

Para cada n llamamos **suma inferior** L_n y **superior** U_n a:

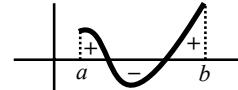
$$L_n = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x, \quad U_n = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x, \quad \text{con} \quad m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Def. Si ambas sucesiones $\{L_n\}$ y $\{U_n\}$ convergen hacia un mismo límite, decimos que f es **integrable** en $[a, b]$, representamos ese límite común por $\int_a^b f$ ó $\int_a^b f(x) dx$ y le llamamos **integral** de f en $[a, b]$.



[Esta no es la definición de ‘integral de Riemann’ habitual (ver Spivak), pero es mucho más corta].

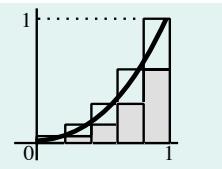
El significado geométrico es claro: si $f \geq 0$, la integral (≥ 0) representa el área A de la región limitada por la gráfica de f , el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$: A es para todo n mayor que la suma L_n de las áreas de los rectángulos pequeños y menor que la suma U_n de los grandes; al crecer n , ambas sumas tienden hacia A. Si $f \leq 0$, L_n y U_n son negativas. La integral (≤ 0) en valor absoluto es el área de la región (situada bajo el eje x) limitada por el eje x, la gráfica de f y las rectas $x=a$ y $x=b$. Si f es positiva y negativa, la integral $\int_a^b f$ será la diferencia entre las áreas de las regiones que quedan por encima y las áreas de las que quedan por debajo del eje x:



Con los teoremas que probaremos, para saber si f es integrable y calcular la integral no se necesitará usar la definición casi nunca. Por ahora, sólo con lo visto, unos ejemplos:

Ej. $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$.

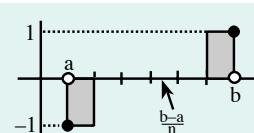
$$L_n = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^2}{n^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} [0^2 + \dots + (n-1)^2] \\ U_n = \sum_{k=1}^n k^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} [1^2 + \dots + n^2]$$



Usando el resultado que vimos en un problema de sucesiones:

$$1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad L_n = \frac{[n-1]n[2n-1]}{6n^3}, \quad U_n = \frac{n(n+1)[2n+1]}{6n^3}; \quad L_n, U_n \rightarrow \frac{1}{3} = \int_0^1 f.$$

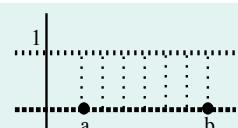
Ej. $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x=a \\ 0 & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x=b \end{cases}$



g es discontinua, pero integrable. Seguiría siendo $\int_a^b g = 0$ si cambiamos el valor 0 por cualquier otro en un número finito de puntos de (a, b) .

Veremos pronto que funciones acotadas con un número finito de discontinuidades son siempre integrables, así que las funciones no integrables tienen que ser tan patológicas como la siguiente.

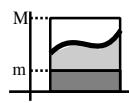
Ej. $h(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$, $x \in [a, b]$. En cada $[x_{k-1}, x_k]$ hay puntos de \mathbb{Q} y de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $\Rightarrow L_n = \sum_{k=1}^n 0 \frac{b-a}{n} = 0$, $U_n = \sum_{k=1}^n 1 \frac{b-a}{n} = b - a \forall n \Rightarrow h$ no integrable.



Las siguientes propiedades son intuitivamente claras a la vista del significado geométrico de la integral y se demuestran mecánicamente usando las definiciones (las dos primeras se resumen diciendo que ‘la integral es lineal’, como la derivada):

Teorema:

Sean f y g integrables en $[a, b]$. Entonces:



$$\int_a^b cf = c \int_a^b f, \quad c \in \mathbb{R}; \quad \int_a^b [f+g] = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Si $m \leq f \leq M$ en $[a, b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

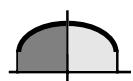


$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|.$$

Si $f \leq g$ en $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$.



Si f es impar $\int_{-a}^a f = 0$.



Si f es par $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$.



La siguiente sigue siendo intuitiva, pero es pesada de demostrar con nuestra definición. [Para f continua será trivial usando los teoremas de 5.2, pero la propiedad es cierta también para f integrable y discontinua].



Teorema:

Si $a < c < b$; f integrable en $[a, b] \Rightarrow f$ integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$, e $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Definiendo $\int_a^a f = 0$ e $\int_a^b f = -\int_b^a f$, la igualdad es válida para a, b, c cualesquiera.

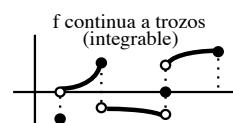
Los dos siguientes teoremas dicen que las f (acotadas) no integrables son extrañas:

Teorema: f continua en $[a, b] \Rightarrow f$ integrable en $[a, b]$.

Idea de la demostración. Se prueba que $\{L_n\}$ y $\{U_n\}$ siempre convergen (sus límites se llaman integral inferior y superior de f) y así f es integrable si $U_n - L_n \rightarrow 0$. Como f es uniformemente continua, la diferencia entre dos valores cualesquiera de f en dos $x, y \in [a, b]$ es tan pequeña como queramos para x e y suficientemente próximos; en particular, lo es la diferencia entre los valores máximo y mínimo de f en $[x_{k-1}, x_k]$, si el intervalo es muy pequeño. Así, si n es suficientemente grande tenemos que para cada k :

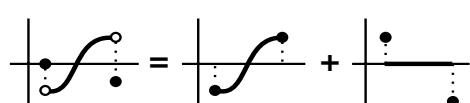
$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \forall \varepsilon \Rightarrow U_n - L_n = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x < \varepsilon \text{ para } n \text{ grande} \Rightarrow U_n - L_n \rightarrow 0.$$

Ya vimos que funciones discontinuas podían ser integrables. Una f se dice **continua a trozos** en $[a, b]$ si es continua salvo en un número finito de puntos y en ellos posee límites laterales.



[No lo son las funciones $\frac{1}{x}$ o $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ en $[0, 1]$, definímoslas como las definimos en $x=0$].

Teorema: f continua a trozos en $[a, b] \Rightarrow f$ integrable en $[a, b]$.



[dividimos en subintervalos de modo que f sólo tenga discontinuidades en los extremos; en cada intervalo es fácil ver que es integrable por ser suma de una función continua y de otra integrable como la g del ejemplo].

Como es 0 el valor de la integral de una función como g se ve que **cambiando el valor de una f integrable en un número finito de puntos, la nueva función h continúa siendo integrable y el valor de la integral es el mismo**, pues $h = f + g$ con una g de esas y la integral es lineal.

[Hay funciones integrables con infinitas discontinuidades; por ejemplo, una f creciente y acotada es integrable (pues $M_{k-1} = m_k$, $k=1, \dots, n \Rightarrow U_n - L_n = \frac{f(b) - f(a)}{n}$), aunque tenga infinitos saltos].

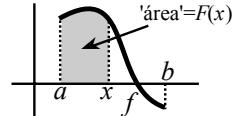
5.2. Teoremas fundamentales

Estos **teoremas fundamentales del cálculo infinitesimal** relacionan las derivadas y las integrales y nos permitirán hallar muchísimas integrales prescindiendo de la definición.

Sea f acotada e integrable en $[a, b]$; para cada $x \in [a, b]$ la $\int_a^x f$ existe (y es un número).

Podemos, pues, definir una nueva función:

$$F(x) = \int_a^x f, x \in [a, b]$$



Primer teorema fundamental del cálculo infinitesimal:

$$f \text{ integrable en } [a, b] \Rightarrow F \text{ continua en } [a, b].$$

$$\text{Si además } f \text{ es continua en un } c \in (a, b) \text{ entonces } F \text{ es derivable en } c \text{ y } F'(c) = f(c).$$

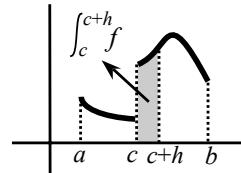
$$(\text{Y por tanto, si } f \text{ es continua en todo } [a, b] \text{ entonces } F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]).$$

Como f es acotada en $[a, b]$, existen supremo e ínfimo de f en cada intervalo $\subset [a, b]$.

Sea $c \in (a, b)$ y sea $h > 0$. Llamemos:

$$M_h = \sup\{f(x) : x \in [c, c+h]\}, \quad m_h = \inf\{f(x) : x \in [c, c+h]\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces: } m_h h &\leq \int_c^{c+h} f = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f = F(c+h) - F(c) \leq M_h h \\ &\Rightarrow [F(c+h) - F(c)] \rightarrow 0, \text{ si } h \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

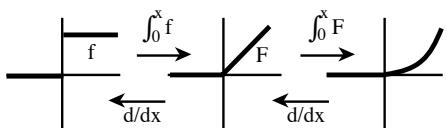


Así pues, F es continua en c (cambiando detalles se vería para $h \rightarrow 0^-$).

$$\text{Sea ahora } f \text{ continua en } c. \text{ Si } h > 0 \text{ se deduce que: } m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h$$

(y a la misma igualdad se llegaría, de forma análoga, para $h < 0$).

$$\text{Como } f \text{ continua en } c, \quad M_h, m_h \rightarrow f(c) \text{ si } h \rightarrow 0, \text{ y por tanto } \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f(c).$$



[El teorema nos dice que, al contrario que al derivarla, la F obtenida integrando f es ‘más suave’ que ella. Si f es discontinua en c , F es continua en c (aunque F tenga un ‘pico’ en c); y si f tiene picos, desaparecen al integrarla. En general, $f \in C^n \Rightarrow F \in C^{n+1}$].

Ej. $f(x) = e^{\sin(chx)}$ continua $\forall x \Rightarrow F(x) = \int_0^x f, G(x) = \int_7^x f, \dots$ tienen por derivada $f(x) \forall x$.

$[F'(x) = f(x)$ también para $x < a$ (si f continua en x), pues si $c < x$ con f integrable en $[c, a]$:

$$F(x) = \int_a^x f = \int_c^x f - \int_c^a f].$$

Segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal:

$$f \text{ es continua en } [a, b] \text{ y } f = g' \text{ para alguna función } g \Rightarrow \int_a^b f = g(b) - g(a) \equiv g \Big|_a^b$$

Como $F' = f = g' \Rightarrow F(x) = g(x) + k$ para algún número k . Como $0 = F(a) = g(a) + k$
 $\Rightarrow k = -g(a) \Rightarrow F(x) = g(x) - g(a)$. En particular: $F(b) = \int_a^b f = g(b) - g(a)$.

Def. Dada una función f , una g cuya derivada sea f se llama **primitiva** de f .

El segundo teorema dice que **para calcular la integral de una f continua basta hallar una primitiva de f** (y no es necesario utilizar las sumas superiores e inferiores). Si g es primitiva de f , es claro que **cualquier otra primitiva de f es de la forma $g + K$** .

Def. El conjunto de todas las primitivas se designa por $\int f(x) dx$.

(Son **funciones** y no un número como $\int_a^b f$; a veces se llama **integral definida** de f entre a y b a esta última, e **integral indefinida** al conjunto de primitivas).

En algunos casos, hallar la primitiva de una f es **inmediato** y, por tanto, lo es calcular algunas integrales. Por ejemplo, es ahora ya trivial calcular la primera integral vista en 5.1:

Ej. $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ pues $\frac{x^3}{3}$ es una primitiva de x^2 ya que $\frac{d}{dx} \frac{x^3}{3} = x^2$;
(todas las primitivas de x^2 son $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + K$; si para el cálculo de esta integral tomásemos otro valor de la $K \neq 0$, llegaríamos, desde luego, al mismo resultado).

De hecho, **cada derivada conocida nos proporciona una fórmula de integración**:

Ej. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$, $\int \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$, $\int \frac{dx}{[4-x]^2} = \frac{1}{4-x}$, $\int \frac{2x dx}{x^2-1} = \log|x^2-1|$, ...

(más exacto sería escribir $\tan x + K$, $\operatorname{ch} x + K$, ...; nosotros no lo haremos pero tengámoslo en cuenta).

A menudo al integrando le faltarán constantes que se calculan derivando de cabeza o tanteando (como con la x^2 de arriba: derivando x^3 se tiene $3x^2$, luego falta $\frac{1}{3}$ en la primitiva):

Ej. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{3} \arcsen(3x)$, $\int x^{-5/3} dx = -\frac{3}{2}x^{-2/3}$, $\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{4[1+(x/2)^2]} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}$, ...

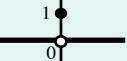
Pero en muchísimas ocasiones calcular primitivas puede ser largo o muy complicado (a ello nos dedicaremos en la próxima sección). Más aún, **hay funciones** de apariencia sencilla para las que se demuestra **que no tienen primitivas que puedan escribirse como suma, producto, composición,... de funciones elementales**, como:

$\int \operatorname{sen} x^2 dx$, $\int e^{x^2} dx$, $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$, $\int \frac{e^x}{x} dx$, $\int \frac{dx}{\log x}$, $\int \sqrt{1+x^3} dx$, $\int \sqrt[3]{1+x^2} dx$, ...

Si f es continua una primitiva suya es la $F(x)$ de los teoremas fundamentales (pero esto no sirve para calcular una integral concreta). Así $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt$, $F^*(x) = \int_{-1}^x \operatorname{sen} t^2 dt$, ... son todas primitivas de $f(x) = \operatorname{sen} x^2$; es decir, $\int \operatorname{sen} x^2 dx = \int_a^x \operatorname{sen} t^2 dt + K$.

[Las variables x, t, \dots son mudas, pero **no se repite la letra del límite de integración en el integrando** porque podría dar lugar a errores: $F(1)$ es $\int_0^1 \operatorname{sen} t^2 dt$, pero no es $\int_0^1 \operatorname{sen} 1 dx$ y a esto nos podría llevar una incorrecta notación como $\int_0^x \operatorname{sen} x^2 dx$].

También hay **funciones integrables sin primitivas** (claramente no pueden ser continuas):

Ej. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$  no tiene primitiva ($F(x) = \int_a^x f = 0 \forall x$ no lo es).

De los TFCI se deducen **las propiedades del** $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ que habíamos adelantado:

$f(x) = \frac{1}{x}$ continua si $x > 0 \Rightarrow F(x) = \log x$ derivable (y continua) si $x > 0$ y $F'(x) = \frac{1}{x}$.

De la definición también saldrían el resto de sus propiedades. Probemos una de ellas (aunque utilizando un cambio de variable de los que veremos en la próxima sección):

para $a, b > 0$, $\log(ab) = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t}$ \uparrow
haciendo $t = as$ en la segunda integral

El segundo TFCI permite también probar con facilidad algunas de las propiedades generales de las integrales vistas en 5.1, en el caso particular de que el integrando sea **continuo**; por ejemplo, si F y G son primitivas de f y g se tiene:

$$\begin{aligned}\int_a^b [f+g] &= [F+G](b) - [F+G](a) = F(b)-F(a)+G(b)-G(a) = \int_a^b f + \int_a^b g, \\ \int_a^b f &= F(b)-F(a) = F(b)-F(c)+F(c)-F(a) = \int_a^c f + \int_c^b f, \dots\end{aligned}$$

Pero recordemos que también son ciertas estas propiedades para las funciones que sólo son **continuas a trozos**. De hecho, sabemos hallar ya fácilmente integrales de muchas f de ese tipo, dividiendo el intervalo y aplicando los TFCI en cada subintervalo:

Ej. Hallemos $\int_0^\pi f$, si $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$.

$$\int_0^\pi f = \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^\pi [-1] dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} + [-x]_{\pi/2}^\pi = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

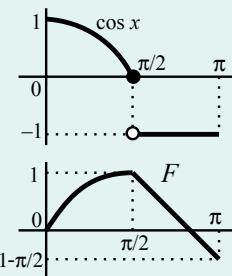
$$[\text{pues } \int_{\pi/2}^\pi f = \int_{\pi/2}^\pi [-1] dx, \text{ ya que coinciden salvo en } x = \frac{\pi}{2}].$$

También sabemos hallar para todo $x \in [0, \pi]$ la primitiva $F(x) = \int_0^x f$.

Para $x > \frac{\pi}{2}$ hay dos expresiones de la función:

$$\int_0^x f = \begin{cases} \int_0^x \cos t dt, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\pi/2} \cos t dt + \int_{\pi/2}^x [-1] dt, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases} = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 + \frac{\pi}{2} - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

[función que, como nos aseguraba el primer TFCI, es continua también en $x = \pi/2$, aunque no es derivable en ese punto: $F'(\pi/2^-) = 0 \neq -1 = F'(\pi/2^+)$].



Como sabemos hallar derivadas de funciones definidas por integrales, sabemos hacer con ellas todo lo que hemos visto en cálculo diferencial: rectas tangentes, crecimiento y decrecimiento, extremos, límites indeterminados,...

Ej. Hallemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $F(x) = \int_{-1}^x \frac{t^3}{t^4-4} dt$ en $x = 1$:

$$F'(x) = \frac{x^3}{x^4-4}, \quad F'(1) = \frac{1}{3}; \quad F(1) = \int_{-1}^1 \frac{t^3}{t^4-4} dt = 0 \text{ (integrando impar)} \Rightarrow \text{tangente: } y = -\frac{x-1}{3}.$$

Aunque no se necesita, podríamos (primitiva inmediata) hallar la $F(x) = \frac{1}{4} [\log|x^4-4| - \log 3]$.

Ej. Sea $F(x) = \int_1^x \arctan(e^t) dt$. Estudiar dónde F es inyectiva. Precisar si $F(0) > 0$ ó $F(0) < 0$.

Integrando continuo $\forall x \stackrel{\text{TFC}}{\Rightarrow} F'(x) = \arctan(e^x) > 0 \forall x$, pues $e^x > 0 \forall x$
 $\Rightarrow F$ es estrictamente creciente en $\mathbf{R} \Rightarrow F$ es inyectiva en todo \mathbf{R} .

Será $F(0) < 0$ porque F es estrictamente creciente y $F(1) = \int_1^1 = 0$,
o porque $F(0) = \int_1^0 = -\int_0^1$ y es $\int_0^1 > 0$ (integrando positivo en todo \mathbf{R}).

Ej. Determinemos, si existe, el límite de $G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{|\cos t^3|}{t^2+1} dt$ cuando $x \rightarrow 0$ y cuando $x \rightarrow \infty$.

El numerador $F = \int_0^x$ es continuo y derivable $\forall x$ (integrando continuo) y es $F(0) = \int_0^0 = 0$.

Cuando $x \rightarrow 0$ tenemos indeterminación $0/0$. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\cos x^3|}{x^2+1} = 1.$$

Si $x \rightarrow \infty$, tal vez no valga L'Hôpital (¿tenderá F a ∞ ?). De hecho, no hay indeterminación, pues vamos a ver (aunque la primitiva sea no calculable) que F está acotada. En efecto:

$$0 \leq \frac{|\cos x^3|}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1} \quad \forall x \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq \int_0^x \frac{dt}{t^2+1} = \arctan x \quad \forall x \Rightarrow$$

$$0 \leq G(x) \leq \frac{\arctan x}{x} \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} G \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = 0 \Rightarrow G \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

En ocasiones se trabaja con funciones similares a la $F(x)$, definidas por integrales de funciones f continuas, pero con **límites de integración que también son funciones (derivables) de x** . Los TFCI también nos permiten derivarlas:

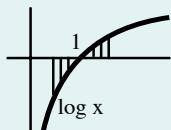
$$\boxed{\text{Si } H(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f \text{ entonces } H'(x) = f[b(x)] b'(x) - f[a(x)] a'(x).}$$

(Para los x tales que f sea continua en $[a(x), b(x)]$, o en $[b(x), a(x)]$ si $a(x) > b(x)$).
 $[H(x) = \int_0^{b(x)} f - \int_0^{a(x)} f = F[b(x)] - F[a(x)], \text{ con } F(x) = \int_0^x f, \text{ y regla de la cadena}].$

Ej. Utilicemos la fórmula anterior para hallar dos derivadas de la función: $H(x) = x \int_{2x}^{3x} e^{-t^2} dt$.
 $H'(x) = \int_{2x}^{3x} e^{-t^2} dt + x[e^{-9x^2} \cdot 3 - e^{-4x^2} \cdot 2] \rightarrow H''(x) = 2[3e^{-9x^2} - 2e^{-4x^2}] + 2x^2[8e^{-4x^2} - 27e^{-9x^2}]$
[expresiones válidas $\forall x$, tanto si es positivo como negativo].

Ej. Estudiemos el crecimiento y decrecimiento de $L(x) = \int_{1-x}^{1+x} \log t dt$ en el intervalo $I = [0, \frac{1}{2}]$.

Como $\log x$ es continua en $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ (valores donde integramos si $x \in [0, \frac{1}{2}]$) podemos derivar L :



$$L'(x) = \log(1+x) - \log(1-x) \cdot [-1] = \log(1-x^2) < 0 \text{ si } x \in I \Rightarrow \text{decrece.}$$

Era esperable: las áreas negativas que aparecen son mayores que las positivas.
En este caso la primitiva sí sería calculable (por partes, como veremos), pero es un rodeo tonto hallar primitivas para derivarlas a continuación.

Ej. Sea $E(x) = \int_{5-2x}^1 e^{-t^4} dt$. Determinemos el $x \in [1, 3]$ que hace máximo el valor de E y probemos que este valor máximo es mayor que $\frac{2}{3}$.

$E'(x) = 0 + 2e^{-(5-2x)^4} > 0 \Rightarrow E$ es estrictamente creciente en todo \mathbf{R} , con lo que el valor máximo se toma en $x=3$ y será $E(3) = \int_{-1}^1 e^{-t^4} dt$ (la primitiva no es calculable).

$$t \in [-1, 1] \Rightarrow t^4 \leq 1 \Rightarrow e^{-t^4} \geq e^{-1} \Rightarrow \int_{-1}^1 e^{-t^4} dt \geq \int_{-1}^1 e^{-1} dt = \frac{2}{e} > \frac{2}{3}.$$

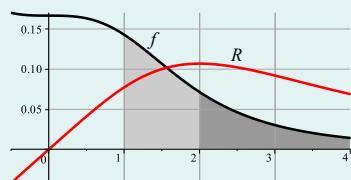
Ej. Hallemos los x que hacen máximo y mínimo el valor de $R(x) = \int_{x/2}^x \frac{dt}{6+t^3}$ en el intervalo $[0, 4]$:

Integrando continuo y $\frac{x}{2}, x$ derivables $\Rightarrow R$ derivable si $t \geq 0$.

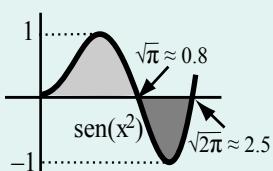
$$R'(x) = \frac{1}{6+x^3} - \frac{1/2}{6+(x/2)^3} = \frac{3(8-x^3)}{(6+x^3)(48+x^3)} = 0 \text{ si } x=2.$$

Crece en $[0, 2]$ y decrece en $[2, 4] \Rightarrow$ máximo $R(2) = \int_1^2 f$.

El mínimo, que estará en uno de los extremos, será $R(0)=0$, pues $R(4) = \int_2^4 > 0$, ya que el integrando es positivo.



Ej. Estudiemos en qué $x \in [0, 2\pi]$ alcanza sus valores extremos la función: $S(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt$.



$$\text{Su derivada es } S'(x) = \sin[(\sqrt{x})^2] \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}, \forall x > 0.$$

Máximo y mínimo de S existen por ser continua. Los candidatos son los extremos y los puntos en que $S' = 0$, es decir, $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$. Con el signo de S' se ve que S crece antes de π y decrece después, luego en ese punto se alcanza el máximo.

[No era necesario hallar S' para decirlo: estaba claro viendo la gráfica de $f(x) = \sin x^2$, pues hasta $x^2 = \pi$ añadimos áreas positivas y a partir de entonces quitamos áreas bajo del eje x].

Precisar cuál de los mínimos locales es el absoluto exige saber cuál de estos números es menor:

$$S(0) = 0 \text{ ó } S(2\pi) = \int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(t^2) dt$$

La gráfica de f sugiere que $S(2\pi) > 0$, pero no podemos dar el valor exacto, por no tener f primitiva elemental (veremos cómo aproximar numéricamente las integrales en la sección 5.5).

5.3. Cálculo de primitivas

Ya vimos en la anterior sección cómo calcular **primitivas inmediatas**, consecuencias directas de las fórmulas de derivación (o casi inmediatas, teniendo cuidado con las constantes que pudieran faltar). Nos dedicamos ahora a ver cómo hallar primitivas algo más complicadas. No existen muchas más técnicas que las que veremos en esta sección. Que nos quede claro que la mayoría de las primitivas no son calculables.

De la **linealidad** de la derivada se deduce inmediatamente para las primitivas que:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \quad \int c f(x) dx = c \int f(x) dx.$$

Ej. $\int [4\sqrt{x+6} + 5 \operatorname{sen} x - 7^x] dx = 4 \int \sqrt{x+6} dx + 5 \int \operatorname{sen} x dx - \int 7^x dx = \frac{8}{3}[x+6]^{3/2} - 5 \cos x - \frac{7^x}{\log 7}$
 (insistimos en que no lo escribiremos nosotros, pero que no olvidaremos que podemos añadir $+K$).

Es falso que la integral de un producto sea el producto de las integrales por no serlo la derivada, pero de la fórmula del producto $(fg)' = fg' + f'g$ obtenemos:

Integración por partes. Sean f' y g' continuas (para que existan las primitivas). Entonces:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx; \quad \int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Esto reduce el problema a calcular otra primitiva, que será más sencilla si f' y g lo son (o si una de ellas lo es y la otra no es más complicada que la anterior).

Con la notación $[df \equiv f'(x) dx]$, la integración por partes se escribe $\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$.

Ej. $\int x \operatorname{sen} x dx = \left[\begin{array}{l} u = x, dv = \operatorname{sen} x dx \\ \rightarrow du = dx, v = -\cos x \end{array} \right] = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x.$

Ej. $\int x e^{-x} dx = [u = x, dv = e^{-x} dx \rightarrow du = dx, v = -e^{-x}] = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -(x+1) e^{-x}.$
 [las primitivas de $\operatorname{sen} x$ y e^{-x} no son peores que ellas, pero la derivada del x sí es más sencilla].

Otras funciones que mejoran al derivarlas son los logaritmos (las potencias de x no se complican):

Ej. $\int \sqrt{x} \log |x| dx = [u = \log |x|, dv = \sqrt{x} dx] = \frac{2}{3} x^{3/2} \log |x| - \frac{2}{3} \int x^{3/2} \frac{dx}{x} = x^{3/2} \left[\frac{2}{3} \log |x| - \frac{4}{9} \right].$

Algunas veces conviene tomar $g' = 1$ (es decir, $dv = dx$):

Ej. $\int \log x dx = [u = \log x, dv = dx \rightarrow du = \frac{dx}{x}, v = x] = x \log x - \int dx = x \log x - x.$

Ej. $\int \arctan x dx = [u = \arctan x, dv = dx] = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2).$

Otras veces hay que repetir la integración por partes:

Ej. $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = [x^2 - 2x + 2] e^x.$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

Ej. Otro truco: $\int \frac{\log x dx}{x} = \log x \log x - \int \frac{\log x dx}{x} \rightarrow \int \frac{\log x dx}{x} = \frac{1}{2} [\log x]^2$ [se podía haber hecho a ojo].

Combinando las dos últimas ideas:

Ej. $I = \int \operatorname{sen} x e^x dx = \operatorname{sen} x e^x - \int \cos x e^x dx = e^x [\operatorname{sen} x - \cos x] - I \Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x [\operatorname{sen} x - \cos x].$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

Ej. Curiosidad: $\int \frac{dx}{x} = [u = x, dv = \frac{dx}{x^2} \rightarrow du = dx, v = -\frac{1}{x}] = -1 + \int \frac{dx}{x} \Rightarrow ? 0 = -1 !!$
 [no olvidemos que hay una K arbitraria aunque no la escribamos].

Primitivas de funciones racionales: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, con P y Q polinomios.

Si el $\text{gr } P \geq \text{gr } Q$, dividimos: $\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$ con el resto R de grado menor que Q .

Vemos que Q se puede escribir como producto de polinomios del tipo $(x-a)^m$ [raíces reales] y $(x^2+cx+d)^n$ [complejas], siendo m y n la multiplicidad de las raíces [$m=1$ si son simples].

[El problema es que (como vimos en 3.3), salvo para Q especialmente sencillos, realizar esta descomposición es, en la práctica, imposible por ser imposible hallar sus raíces].

Se prueba que $\frac{R}{Q}$ se puede escribir como suma de constantes por funciones del tipo:

$\frac{1}{(x-a)^j}$, $\frac{1}{(x^2+cx+d)^k}$ y $\frac{x}{(x^2+cx+d)^k}$, con $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq n$ (llamadas **fracciones simples**).

Para ‘descomponer en fracciones simples’ $\frac{R}{Q}$ (hallar la constante que acompaña a cada fracción) basta resolver un sistema lineal de ecuaciones. Y así, el problema de integrar P/Q se reduce, una vez factorizado Q , al de integrar el polinomio C y funciones como las últimas.

Ej. $I = \int \frac{4x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 11x + 4}{x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x} dx = \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ (ya es $4 < 5$). Empezamos factorizando:

$Q(x) = x(x-1)^2(x^2+x+2)$ [suerte hemos tenido] y descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+2} = \frac{A(x^4-x^3+x^2-3x+2)+B(x^4+x^2-2x)+C(x^3+x^2+2x)+(Dx+E)(x^3-2x^2+x)}{x(x-1)^2(x^2+x+2)}$$

$$[\text{Si hubiera } (x-1)^m \text{ escribiríamos } \frac{B_1}{x-1} + \dots + \frac{B_m}{(x-1)^m}; \text{ si } (x^2+x+2)^n, \frac{D_1x+E_1}{x^2+x+2} + \dots + \frac{D_nx+E_n}{(x^2+x+2)^n}].$$

Igualando coeficientes de x^4 , x^3 , x^2 , x y la constante de ambos términos se obtiene el sistema:

$$A+B+D=4, -A+C-2D+E=-6, A+B+C+D-2E=5, -3A-2B+2C+E=-11, 2A=4$$

Resolviéndolo: $A=2$, $B=1$, $C=-1$, $D=1$, $E=-1$

$$\Rightarrow I = \int \frac{2dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{(x-1)dx}{x^2+x+2}$$

Las $\int \frac{dx}{(x-a)^m}$ son casi inmediatas. Más trabajo dan las otras. Primero se busca un logaritmo:

$$\frac{1}{2} \int \frac{(2x-2)dx}{x^2+x+2} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+2} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+2}$$

Y luego un arco tangente completando el cuadrado: $x^2+x+2 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1 \right]$.

$$\text{Por tanto: } \int \frac{(x-1)dx}{x^2+x+2} = \frac{1}{2} \log(x^2+x+2) - \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{7}} \int \frac{2/\sqrt{7} dx}{([2x+1]/\sqrt{7})^2 + 1} \rightarrow$$

$$I = 2 \log|x| + \log|x-1| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \log(x^2+x+2) - \frac{3}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right).$$

Ej. $I = \int \frac{x^4 - 5x^3 + x + 8}{x^3 + x^2 - 4x - 4} dx = \int (x-1) dx + \int \frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x-2)} dx$ [de nuevo las raíces eran sencillas].

$$\frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+2)(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$$

Cuando haya tantas raíces reales, mejor que igualar coeficientes se hace $x=a$ para cada raíz a :

$$x = -1 \rightarrow -3A = 3, A = -1; x = -2 \rightarrow 4B = 2, B = \frac{1}{2}; x = 2 \rightarrow 12C = 6, C = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2}x^2 - x - \log|x+1| + \frac{1}{2}\log|x+2| + \frac{1}{2}\log|x-2| = \frac{1}{2} \left[x^2 - 2x + \log \frac{|x^2-4|}{|x+1|^2} \right]$$

[Para hallar las primitivas de las fracciones simples más complicadas como $\int \frac{dx}{(x^2+x+2)^n}$ se utilizarían fórmulas de reducción como la propuesta en problemas].

Cambios de variable:

Supongamos que buscamos una primitiva de $\int f(g(x))g'(x)dx$ (con f y g' continuas). Si F es una primitiva de f , por la regla de la cadena: $(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$. Así pues, $F \circ g$ es la primitiva buscada. Basta pues integrar la f y evaluar el resultado en $g(x)$. Si lo que queremos es la integral definida entre a y b su valor es $F(g(b)) - F(g(a))$. Por tanto:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \Big|_{u=g(x)} ; \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

En la práctica se suele usar la notación de diferenciales: se escribe $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ y si hay límites de integración es fácil recordar que: $x = a \rightarrow u = g(a)$, $x = b \rightarrow u = g(b)$.

En algunos casos la $g'(x)$ aparece explícitamente y es claro el cambio que hay que hacer:

Ej. $\int \sin^3 2x \cos 2x dx = [u = \sin 2x, du = 2 \cos 2x dx] = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{8} u^4 = \frac{1}{8} \sin^4 2x$.

[en casos tan sencillos no será necesario escribir la sustitución, es fácil ver a ojo que $\sin^4 2x$ es casi la primitiva; derivándola mentalmente se ve que falta el $1/8$].

Ej. $\int_e^5 \frac{dx}{x \log x} = \left[\begin{array}{l} u = \log x, du = \frac{dx}{x} \\ x = e \rightarrow u = 1, x = 5 \rightarrow u = \log 5 \end{array} \right] = \int_1^{\log 5} \frac{du}{u} = \log |\log 5| - 0 = \log(\log 5)$.

[podíamos haber calculado la primitiva olvidando límites de integración y sustituir al final, una vez deshecho el cambio].

Ej. $\int e^x \sqrt{e^x - 1} dx = [u = e^x, du = e^x dx] = \int \sqrt{u - 1} du = \frac{2}{3} [u - 1]^{3/2} = \frac{2}{3} [e^x - 1]^{3/2}$.

Ej. $\int \operatorname{sh}^3 x e^{-\operatorname{ch} x} dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{ch} x, du = \operatorname{sh} x dx \\ \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1 \end{array} \right] = \int [u^2 - 1] e^{-u} du = [\text{partes}]$
 $= -u^2 e^{-u} + 2 \int u e^{-u} du + e^{-u} = [\text{partes}] = [1 - 2u - u^2] e^{-u} + 2 \int e^{-u} du = -[1 + 2u + u^2] e^{-u}$
 $= -[1 + 2 \operatorname{ch} x + \operatorname{ch}^2 x] e^{-\operatorname{ch} x}$.

(o partes directamente: $\int \operatorname{sh}^3 x e^{-\operatorname{ch} x} dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{sh}^2 x \\ dv = \operatorname{sh} x e^{-\operatorname{ch} x} dx \end{array} \right] = -\operatorname{sh}^2 x + 2 \int \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x e^{-\operatorname{ch} x} dx$
 $= [\text{partes}] = -\operatorname{sh}^2 x e^{-\operatorname{ch} x} - 2 \operatorname{ch} x e^{-\operatorname{ch} x} + 2 \int \operatorname{sh} x e^{-\operatorname{ch} x} dx = -[2 + 2 \operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x] e^{-\operatorname{ch} x}$).

Pero en la mayoría de los casos no es tan evidente el cambio ni hay una clara du . La forma del integrando puede sugerir hacer algún cambio $u = g(x)$. Para obtener entonces la $f(u)$ se **despeja la x en función de u , se calcula el dx y se sustituyen x y dx en la integral** (sin olvidar el cambio de límites de integración, si los hay):

Ej. $\int_4^9 \cos \sqrt{x} dx = [u = \sqrt{x}, x = u^2, dx = 2udu, x = 4 \rightarrow u = 2, x = 9 \rightarrow u = 3] = 2 \int_2^3 u \cos u du =$
 $= [\text{partes}] = 2[u \operatorname{sen} u]_2^3 - 2 \int_2^3 \operatorname{sen} u du = 2[u \operatorname{sen} u]_2^3 + 2[\operatorname{cos} u]_2^3 = 2[3 \operatorname{sen} 3 - 2 \operatorname{sen} 2 + \operatorname{cos} 3 - \operatorname{cos} 2]$.

Ej. $\int \sqrt{e^x - 1} dx = [u = e^x, x = \log u, dx = \frac{du}{u}] = \int \frac{\sqrt{u-1}}{u} du = [\sqrt{u-1} = z, u = z^2 + 1, du = 2z dz]$
 $= 2 \int \frac{z^2}{z^2 + 1} dz = 2 \int [1 - \frac{1}{z^2 + 1}] dz = 2z - 2 \operatorname{arctan} z = 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \operatorname{arctan} \sqrt{e^x - 1}$
[con un poco más de vista podríamos haber hecho directamente $z = \sqrt{e^x - 1}$ acabando antes].

[En los cambios de variable las funciones f y g' deben ser continuas. Si g' aparece explícitamente es fácil ver que es así. Pero si no aparece se nos podría olvidar y cometer errores].

La práctica sugiere qué y cuándo sustituir. Para tipos concretos de funciones (trigonométricas, con radicales...) hay cambios típicos que se sabe que dan buen resultado (los veremos a continuación) y que suelen llevar a la integración de funciones racionales de las que hemos visto.

Primitivas de funciones trigonométricas

[Aparecen muy a menudo, ya que están muy ligadas a la integración en polares].

Para integrar $\int R(\sin x, \cos x) dx$, con R función racional en $\sin x$ y $\cos x$, existe siempre un cambio $[u = \tan \frac{x}{2}]$ que la lleva a una racional, pero veamos antes una serie de casos más fáciles.

$$\boxed{\int \sin^m x \cos^n x dx} :$$

Si m ó n son impares: $\sin^{2k+1} x = \sin x (1 - \cos^2 x)^k$ y se hace $u = \cos x$.
 $\cos^{2k+1} x = \cos x (1 - \sin^2 x)^k$ y se hace $u = \sin x$.

Si m y n pares, se escriben en función del ángulo doble: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Ej. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x dx = [u = \sin x] = \int (u^2 - u^4) du = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x$.

Ej. $\int \cos 2x \sin x dx = \int [\cos^2 x \sin x - \sin^3 x] dx = \int [2\cos^2 x \sin x - \sin x] dx = \cos x - \frac{2}{3} \cos^3 x$.

O bien ($\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$): $\int \frac{1}{2}[\sin 3x - \sin x] dx = \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{6} \cos 3x$.

[Este tipo de igualdades se usan para integrar productos de senos y cosenos de distinto ángulo].

Ej. $\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$.

La integral general $\boxed{\int R(\sin x, \cos x) dx}$ se convierte en cociente de polinomios haciendo:

$u = \cos x$, si R es impar en $\sin x$ [es decir, si $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$].

$u = \sin x$, si R es impar en $\cos x$ [es decir, si $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$].

$u = \tan x$ [$\cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}$, $dx = \frac{du}{1+u^2}$], si $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

$u = \tan \frac{x}{2}$ [$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2du}{1+u^2}$], para cualquier R [último recurso].

Ej. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} = [u = \cos x] = \int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u+1} = \frac{1}{2} \log |\frac{u-1}{u+1}| = \frac{1}{2} \log |\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}|$.

O de otra forma: $\int \frac{dx}{\sin x} = [u = \tan \frac{x}{2}] = \int \frac{2du/[1+u^2]}{2u[1+u^2]} = \int \frac{du}{u} = \log |\tan \frac{x}{2}|$.

[Ha salido tan fácil por casualidad; las dos expresiones de la primitiva deben coincidir salvo K arbitraria (con pocas cuentas se ve que son iguales)].

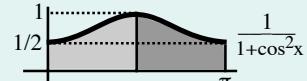
Ej. $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin x} = \int \frac{dx}{\cos^4 x \tan x} = [u = \tan x] = \int \frac{[1+u^2]^2 du}{u[1+u^2]} = \int \frac{du}{u} + \int u du = \log |\tan x| + \frac{1}{2} \tan^2 x$.

Más largo: $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x [1 - \cos^2 x]} \stackrel{u = \cos x}{=} \int \frac{du}{u^3 [u+1][u-1]} = \dots = \int \left[\frac{1/2}{u+1} + \frac{1/2}{u-1} - \frac{1}{u} - \frac{1}{u^3} \right] du = \frac{1}{2} \log |1-u^2| - \log u + \frac{1}{2u^2} = \log |\sin x| - \log |\cos x| + \frac{1}{2 \cos^2 x}$.

[Peor todavía sería hacer $u = \sin x$ (también es impar en coseno) ó $u = \tan \frac{x}{2}$;
por ejemplo, con el último cambio queda la complicada primitiva $\int \frac{(1+u^2)^3}{u(1-u^2)^3} du$].

Ej. $\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = [u = \tan x, dx = \frac{du}{1+u^2}] = \int_0^0 \frac{du}{2+u^2} = 0$

[resultado evidentemente **falso**: el integrando es siempre positivo y la integral debía ser un número positivo. No olvidemos que en los cambios de variable las funciones f y g' deben ser continuas. El cambio hecho (clásico, como hemos dicho, para este tipo de integrales) es válido sólo hasta $\frac{\pi}{2}$; sí es cierto que



$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \int_0^\infty \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{1/\sqrt{2} du}{1+[u/\sqrt{2}]^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} \Big|_0^\infty = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \rightarrow \int_0^\pi = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

pues el integrando es simétrico respecto a $x = \frac{\pi}{2}$. Al ∞ que nos ha aparecido (que como siempre representará un límite) le daremos más seriedad cuando estudiemos las integrales impropias].

Primitivas de irracionales

(las más simples; R función racional de x y de la raíz que se indica).

$$\boxed{\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx} \text{ se convierte en racional haciendo } u = \sqrt[n]{ax+b}.$$

Ej. $\int x[1+x]^{1/4} dx = \left[\begin{array}{l} u = [1+x]^{1/4}, x = u^4 - 1 \\ dx = 4u^3 du \end{array} \right] = \int 4(u^8 - u^4) du = \frac{4u^9}{9} - \frac{4u^5}{5} = \frac{4}{9}[1+x]^{9/4} - \frac{4}{5}[1+x]^{5/4}.$

También se puede hacer por partes:

$$\int x[1+x]^{1/4} dx = \frac{4}{5}x[1+x]^{5/4} - \frac{4}{5} \int [1+x]^{5/4} dx = \frac{4}{5}x[1+x]^{5/4} - \frac{16}{45}[1+x]^{9/4}.$$

Ej. $\int_4^5 \frac{dx}{x-4\sqrt{x-4}} = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{x-4}, x = u^2 + 4 \\ dx = 2u du \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{2u du}{u^2 - 4u + 4} = \int_0^1 \frac{2(u-2+2) du}{(u-2)^2} = \int_0^1 \frac{2du}{u-2} + \int_0^1 \frac{4du}{(u-2)^2}$
 $= 2 \log|u-2||_0^1 - \frac{4}{u-2}|_0^1 = 2(1 - \log 2).$

$$\boxed{\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx} \text{ se convierte en trigonométrica haciendo } x = a \operatorname{sen} u.$$

Ej. $\int \sqrt{4-x^2} dx = [x = 2 \operatorname{sen} u, dx = 2 \cos u du] = \int 4 \cos^2 u du = 2u + \operatorname{sen} 2u$
 $= 2u + 2 \operatorname{sen} u \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u} = 2 \operatorname{arc sen} \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2}.$

$$\boxed{\int R(x, \sqrt{x^2+a}) dx} \text{ se convierte en racional haciendo } u = x + \sqrt{x^2+a},$$

puesto que $(u-x)^2 = u^2 - 2xu + x^2 = x^2 + a \rightarrow x = \frac{u}{2} - \frac{a}{2u} \rightarrow dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2u^2}\right) du.$

(El cambio $u = \sqrt{x^2+a}$ no sirve de nada pues vuelven a aparecer raíces al despejar la x).

Ej. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \left[\begin{array}{l} u = x + \sqrt{x^2+1}, x = \frac{u^2-1}{2u}, dx = \frac{1+u^2}{2u^2} du \end{array} \right] = \int \frac{2du}{u^2-1} = \log|\frac{u-1}{u+1}| = \log\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|.$

Ej. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}$ [¡a ojo!, antes de ponerse a calcular a lo loco, miremos si es inmediata].

[Las primitivas con raíces $\sqrt{ax^2+bx+c}$ se reducen a las últimas completando cuadrados].

Recordamos que si las raíces son más complicadas (como $\sqrt{x^3+a}$ ó $\sqrt[3]{x^2+a}$), las integrales, son, en general, no calculables. Esto no quiere decir que alguna, en particular, lo sea:

Ej. $\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{x^4+1}} = [t = x^4] = \frac{1}{4} \int \frac{tdt}{\sqrt{t+1}} = [u = \sqrt{t+1}] = \frac{1}{2} \int (u^2 - 1) du = \frac{u^3}{6} - \frac{u}{2} = \frac{1}{6}[x^4 - 2]\sqrt{x^4 + 1}.$
 [Pero no se podría hallar la primitiva de $\int \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$].

Otro tipo de primitivas que se convierten en racionales mediante cambios de variable son:

$$\boxed{\int R(e^x) dx}, \text{ siendo } R \text{ función racional de } e^x.$$

Haciendo $u = e^x$ se convierte en la racional $\int \frac{R(u)}{u} du$, pues $dx = \frac{du}{u}$.

Ej. $\int \frac{dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^{2x})} = \int \frac{du}{u(1+u^2)} = \int \left[\frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{1+u^2} \right] du = \left[\begin{array}{l} A(1+u^2) + Bu^2 + Cu = 1 \\ C = 0, A = 1, B = -A \end{array} \right]$
 $= \int \frac{du}{u} - \int \frac{udu}{1+u^2} = \log u - \frac{1}{2} \log(1+u^2) = x - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x}).$

[Aunque (parecido) también se podía hacer con $u = e^{2x} \rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{du}{u(1+u)} = \frac{1}{2} \log u - \frac{1}{2} \log(1+u)$ ↑

Más ejemplos variados de cálculo de integrales:

Ej. $\int_0^1 \log(3+x^2) dx = \left[\begin{array}{l} \text{Partes: } dv = dx \\ u = \log(3+x^2) \end{array} \right] = x \log(3+x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2+6-6}{3+x^2} dx = 2 \log 2 - 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$,
 pues $\int_0^1 \frac{6dx}{3+x^2} = 2\sqrt{3} \int_0^1 \frac{dx/\sqrt{3}}{1+(x/\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \Big|_0^1$.

Ej. $\int_0^4 \log(1+\sqrt{x}) dx$. El aspecto del integrando sugiere hacer el cambio: $t = \sqrt{x}$, $dx = 2t dt$. Los nuevos límites de integración son $x=0 \rightarrow t=0$, $x=4 \rightarrow t=2$ y la integral queda:

$$2 \int_0^2 t \log(1+t) dt = \left[\begin{array}{l} \uparrow \\ \text{partes} \end{array} \right] t^2 \log(1+t) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{t^2 dt}{t+1} \downarrow = \left[\begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right] (t^2-1) \log(1+t) - \frac{1}{2}(t-1)^2 \Big|_0^2 = 3 \log 3.$$

Ej. $\int \cos(\log x) dx$. Apetece, para simplificar el integrando, hacer $\log x = t$, $dx = e^t dt$, que lleva a

$$\begin{aligned} \int e^t \cos t dt &= e^t \cos t + \int e^t \sin t dt = e^t [\cos t + \sin t] - \int e^t \cos t dt \\ \Rightarrow \int e^t \cos t dt &= \frac{1}{2} e^t [\cos t + \sin t] = \frac{1}{2} x [\cos(\log x) + \sin(\log x)]. \end{aligned}$$

Ej. $\int \frac{1+x}{\sqrt{9-x^2}} dx$. En la página anterior tenemos el cambio que la lleva a racional: $x = 3 \sen u$.

$$\rightarrow \int \frac{1+3 \sen u}{3 \cos u} 3 \cos u du = u - 3 \cos u = \arcsen \frac{x}{3} - \sqrt{9-x^2}.$$

Pero hubiéramos acabado antes observando que era ‘casi inmediata’: $\int \frac{dx/3}{\sqrt{1-(x/3)^2}} - \int \frac{-xdx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Ej. $\int e^{2x} \cos(e^x) dx \stackrel{e^x=u}{=} \int u \cos u du \stackrel{\text{partes}}{=} u \sen u - \int \sen u du = u \sen u + \cos u = e^x \sen e^x + \cos e^x$.

Ej. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{2e^x}{1+e^{2x}} dx = 2 \arctan e^x$. [A ojo, no hay que hacer ningún cambio].

Ej. $\int_{-1}^1 \operatorname{sh}^3 x dx = 0$, sin nada que calcular. El integrando es impar (como $\operatorname{sh} x$).

[Aunque se podría hallar la primitiva: $\int (\operatorname{ch}^2 x - 1) \operatorname{sh} x = \frac{1}{3} \operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x$].

Ej. $\int_{-2}^1 \frac{dx}{1+|x|}$. El $|x|$ tiene dos expresiones en el intervalo, con lo que hay que dividir la integral:

$$\int_{-2}^0 \frac{dx}{1-x} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = -\log|1-x| \Big|_{-2}^0 + \log|1+x| \Big|_0^1 = \log 3 + \log 2.$$

Ej. $\int_{-2}^1 \frac{dx}{1+x}$. Esta parece más inofensiva y podría pensarse que es: $\log|1+x| \Big|_{-2}^1 = \log 2$.

Pero esto es absolutamente falso. La integral se ha definido para funciones acotadas y existía para funciones continuas (o a trozos) y los teoremas fundamentales eran también para ese tipo de funciones. Nuestro integrando tiene una asíntota en $x=-1$ (dentro del intervalo) y **la integral no existe**.

[Ni siquiera existirá como una **integral impropia** de las que vamos a definir en la próxima sección].

5.4. Integrales impropias

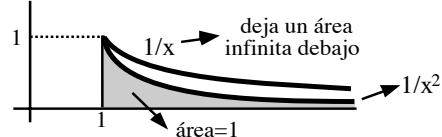
La integral la hemos definido para funciones f acotadas en intervalos $[a, b]$ finitos. Extendemos la definición, primero para intervalos de integración no acotados $[a, \infty)$ ó $(-\infty, b]$. Como siempre que aparece un ∞ aparecerá un límite en la definición:

Def. Supongamos que $\int_a^b f$ existe para todo $b \geq a$. Si existe el $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f$ se le llama **integral impropia** de f en $[a, \infty)$, se representa por $\int_a^\infty f$ ó $\int_a^\infty f(x)dx$ y la integral impropia se dice **convergente**. Si $\int_a^\infty f$ no es convergente, se dice **divergente**.

[Análogamente se define $\int_{-\infty}^b f = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f$].

[La integral entre a y b existe $\forall b$, como sabemos, si por ejemplo f es continua (o continua a trozos) en $[a, \infty)$; como para cada b la integral es un número, tenemos una función de b y tiene sentido hablar de su límite cuando $b \rightarrow \infty$; este límite (el valor de la integral impropia) será otro número si la integral converge].

Ej. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{b} \right] = 1$.
[la integral es convergente y su valor es 1].



Ej. $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\log x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} [\log b]$ diverge.

En general, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ diverge si $s \leq 1$ y converge si $s > 1$ [hacia $\frac{1}{s-1}$].

[es inmediato comprobarlo; para los mismos s converge la $\int_a^\infty \frac{dx}{x^s}$ $\forall a > 0$, pues \int_a^b e \int_1^b son dos funciones de b que sólo difieren en la constante \int_1^a]

$\int_0^\infty e^{ax} dx = \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{ax}]_0^b = \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{ab} - 1]$ [converge si $a < 0$] [hacia $-\frac{1}{a}$] y diverge si $a \geq 0$.

[Se suele abreviar $[e^{ax}]_0^\infty$ en lugar de $\lim_{b \rightarrow \infty} [e^{ax}]_0^b$; pero no olvidemos que es un límite].

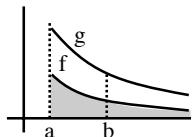
Aunque no sepamos calcular la primitiva podremos, en bastantes ocasiones, determinar si es o no convergente (como ocurría con las series; incluso teníamos un criterio integral que relacionaba unas y otras; los criterios de convergencia son muy parecidos).

Criterios para funciones positivas (los damos para la \int_a^∞ ; son análogos para $\int_{-\infty}^b$).

En todos suponemos que las funciones que aparecen son integrables en $[a, b] \forall b$.

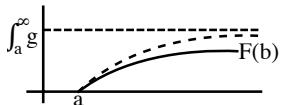
Teorema:

Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para $x \geq a$, $\int_a^\infty g$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f$ converge, e $\int_a^\infty f \leq \int_a^\infty g$.



$$0 \leq F(b) = \int_a^b f \leq \int_a^b g \leq \int_a^\infty g \quad \forall b \geq a \Rightarrow$$

$F(b)$ creciente y acotada superiormente $\Rightarrow F(b)$ tiene límite si $b \rightarrow \infty$
(la última \Rightarrow se prueba como en las sucesiones).



[El teorema dice también que $\int_a^\infty f$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty g$ diverge, desde luego; pero como siempre, en este tipo de criterios, de que la pequeña converja o de que la gorda diverja, no se sigue nada; e insistimos en que es para funciones positivas: si una f cualquiera es menor que otra de integral convergente, no tiene que converger su integral, ya que podría irse a $-\infty$].

Las comparaciones con \leq son siempre más complicadas que las hechas por paso al límite:

Teorema:

Si f y g son positivas para $x \geq a$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ finito, entonces:

Si $c > 0$, $\int_a^\infty g$ convergente $\Leftrightarrow \int_a^\infty f$ convergente.

Si $c = 0$, $\int_a^\infty g$ convergente $\Rightarrow \int_a^\infty f$ convergente [es decir, $\int_a^\infty f$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty g$ diverge].

Si $c > 0$, para $x \geq M$ es $\frac{c}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3c}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{c}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3c}{2}g(x)$ y podemos aplicar el teorema anterior. Si $c = 0$, para $x \geq M$ es $0 \leq f(x) \leq g(x)$ y de nuevo el teorema. Además está claro que $\int_M^\infty f$ converge $\Leftrightarrow \int_a^\infty f$ converge.

Si el integrando f no es positivo, como en las series, conviene considerar el $|f|$:

Teorema: $\int_a^\infty |f|$ convergente $\Rightarrow \int_a^\infty f$ convergente [f se dice absolutamente integrable en $[a, \infty)$].

$0 \leq f + |f| \leq 2|f| \Rightarrow \int_a^\infty [f + |f|]$ convergente $\Rightarrow \int_a^\infty f = \int_a^\infty [f + |f|] - \int_a^\infty |f|$ convergente.

Ej. $\int_3^\infty \frac{[\log x]^2}{x} dx$ diverge, pues si $x \geq 3$ es $\frac{[\log x]^2}{x} \geq \frac{1}{x}$ e $\int_3^\infty \frac{dx}{x}$ diverge.

Por paso al límite debemos utilizar la parte con $c=0$ ya que $\log x$ no se parece a ningún x^s :

$\frac{1/x}{[\log x]^2/x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ e $\int_3^\infty \frac{dx}{x}$ divergente $\Rightarrow \int_3^\infty \frac{[\log x]^2}{x} dx$ diverge (mayor que divergente).

También nos bastaba la definición: $\int_3^\infty \frac{[\log x]^2}{x} dx = \frac{1}{3} [\log x]^3 \Big|_3^\infty \rightarrow \infty$.

Ej. $\int_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^5-x+1}}$. Cuando $x \rightarrow \infty$, $\frac{x}{\sqrt{x^5-x+1}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ [es decir, $\frac{x/\sqrt{x^5-x+1}}{1/x^{3/2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$].

Como $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}$ converge, la dada también (no sabemos a qué número).

Ej. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ (sin primitiva elemental) converge, pues $\frac{e^{-x^2}}{e^{-x}} = e^{x-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ e $\int_0^\infty e^{-x} dx$ converge.

O bien, por desigualdades: si $x \geq 1$ es $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ y de aquí:

$\int_1^\infty e^{-x} dx$ converge ($\Leftrightarrow \int_0^\infty$ converge) $\Rightarrow \int_1^\infty e^{-x^2} dx$ converge ($\Leftrightarrow \int_0^\infty$ converge).

[con técnicas de integrales dobles se puede ver que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$].

Ej. $\int_1^\infty \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} dx \sim \int_1^\infty \frac{dx}{x}$ divergente [pues $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$] \Rightarrow la dada diverge.

Ej. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^3} dx$ es convergente pues $|\frac{\sin x}{1+x^3}| \leq \frac{1}{1+x^3}$ e $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$ converge ($\sim \frac{1}{x^3}$ cuando $x \rightarrow \infty$).

Ej. Aplicando la misma idea a $\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ no podemos concluir nada, ya que $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}$ diverge.

Pero $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \dots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, donde

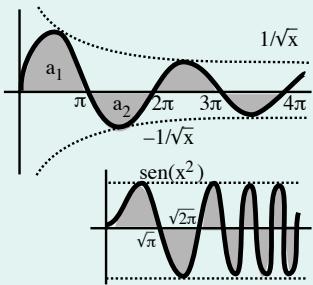
$$|a_k| = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \leq \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2[\sqrt{k\pi} - \sqrt{(k-1)\pi}].$$

La serie es alterna, decreciente y con $a_k \rightarrow 0$, con lo que por Leibniz converge (y por tanto la integral).

De aquí deducimos que

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = [t = x^2] = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \text{ también converge.}$$

(¡a pesar de que $f(x)$ no tiende a 0 si $x \rightarrow \infty$! [esto no es como en las series]).



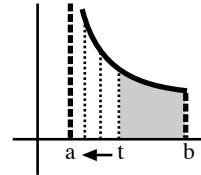
La segunda extensión de la integral es para **f no acotada en un extremo del intervalo**:

Def. Supongamos que $\int_t^b f$ existe para todo $t \in (a, b]$. Se define $\int_{a^+}^b f = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f$ si el límite existe y en ese caso la integral impropia se dice convergente.

$$[\text{Análogamente: } \int_a^{b^-} f = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f].$$

(En vez de a^+ y b^- suele escribir a y b ; no olvidemos que la integral es impropia).

[No se pide que f esté acotada en $(a, b]$, ni siquiera que esté definida en el punto a ; para que f sea integrable en $[t, b]$, debe, desde luego, estar acotada en cada intervalo de esa forma; por ejemplo, si f es continua en $(a, b]$ se tiene, para todo t , garantizada la existencia de la integral de f en $[t, b]$, aunque el límite puede no existir y divergir la integral impropia].



Ej. $\int_{0^+}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} [\frac{1}{t} - 1]$ no existe (la integral impropia diverge).

$\int_{0^+}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} [2 - 2\sqrt{t}] = 2$, converge (y su valor es 2).

En general, se ve fácil que $\int_{a^+}^b \frac{dx}{[x-a]^s}$ e $\int_c^{a^-} \frac{dx}{[a-x]^s}$ convergen si $s < 1$ y divergen si $s \geq 1$.

($[x-a]^s$ tiene sentido para $x < a$ si $s = \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \dots$; si $s = \frac{1}{2}$ ó $s = \pi$ la función no está definida).

Para este otro tipo de impropias existen criterios de convergencia totalmente análogos a los vistos para las del primer tipo. Resumiendo (las de a^+) y sin demostraciones:

Teorema:

Si $0 \leq f \leq g$ en $(a, b]$, $\int_{a^+}^b g$ convergente $\Rightarrow \int_{a^+}^b f$ convergente e $\int_{a^+}^b f \leq \int_{a^+}^b g$.

Sean $f, g \geq 0$ en $(a, b]$ y sea finito el $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, entonces:

si $c > 0$, $\int_{a^+}^b g$ converge $\Leftrightarrow \int_{a^+}^b f$ converge; si $c = 0$, $\int_{a^+}^b g$ converge $\Rightarrow \int_{a^+}^b f$ converge.

$\int_{a^+}^b |f|$ convergente $\Rightarrow \int_{a^+}^b f$ convergente.

Ej. $\int_{0^+}^1 \frac{\cos^2 x}{x^{3/4}} dx$ converge, pues $0 \leq \frac{\cos^2 x}{x^{3/4}} \leq \frac{1}{x^{3/4}}$ e $\int_{0^+}^1 \frac{1}{x^{3/4}}$ converge (o porque $\frac{\cos^2 x / x^{3/4}}{1/x^{3/4}} \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} 1$).

Ej. $\int_{2^+}^7 \frac{dx}{x^3 - 8}$ diverge, pues se parece cerca de $x = 2$ a $\int_{2^+}^7 \frac{dx}{x-2}$ divergente:

$$\frac{1/[x^3 - 8]}{1/[x-2]} = \frac{1}{x^2 + 2x + 4} \xrightarrow[x \rightarrow 2]{} \frac{1}{12} \text{ (o usando L'Hôpital).}$$

Ej. $\int_{0^+}^3 \frac{dx}{\sin x}$. Cerca de 0 el $\sin x \sim x$: $\frac{1/\sin x}{1/x} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1$. Como $\int_{0^+}^3 \frac{dx}{x}$ diverge, la dada diverge.

Ej. La $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ de antes, no plantea problemas en $x = 0$, a pesar de anularse su denominador, pues se parece cerca de 0 a \sqrt{x} que no sólo converge, es continua.

Ej. $\int_{0^+}^1 (\log x)^2 dx$ es convergente, pues $\frac{(\log x)^2}{1/\sqrt{x}} = (x^{1/4} \log x)^2 \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} 0$ (lo sabemos desde 4.5),

con lo que la nuestra es más pequeña que una convergente. Y podemos hallar su valor:

$$\int (\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx = x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x \Rightarrow \int_{0^+}^1 (\log x)^2 dx = 2.$$

Hay otras integrales que reúnen **más de un tipo de impropiedad**: $\int_{-\infty}^{\infty} f$, $\int_a^{\infty} f$, $\int_{a^+}^{b^-}$, ...

Cada integral de estas se dice convergente si, dividido el intervalo en subintervalos tales que en cada uno de ellos haya una única impropiedad, **todas** las integrales resultantes convergen. Por ejemplo, si f es continua en todo \mathbb{R} :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f \text{ converge} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 f \text{ e } \int_0^{\infty} f \text{ convergen y su valor es } \int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{\infty} f$$

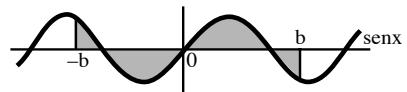
[esta integral no se define como $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f$ que podría existir a pesar de ser $\int_{-\infty}^{\infty} f$ divergente; a ese límite de las integrales calculadas en intervalos simétricos $[-b, b]$, si existe, se le llama valor principal de Cauchy y aparece en matemáticas más avanzadas].

Ej. $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$ diverge, pues $\int_0^{\infty} \sin x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [1 - \cos b]$

no existe (y tampoco existe $\int_{-\infty}^0 \sin x dx$).

[Sí existe el valor principal de Cauchy:

$$\text{VP } \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \sin x dx = 0 \text{ (sen } x \text{ es impar).}$$



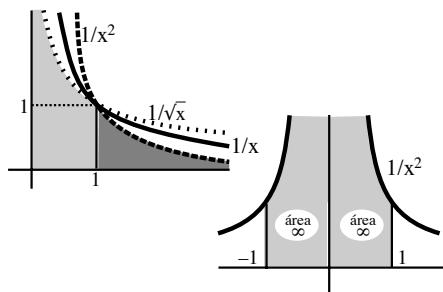
Ej. $\int_{0^+}^{\infty} \frac{\arctan x}{x+x^2} \cdot \int_1^{\infty}$ es convergente pues comporta como $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ convergente [$\frac{\arctan x / x + x^2}{1/x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$].

Cerca de 0: $\frac{\arctan x}{x+x^2} \sim \frac{1}{1+x}$ con límite finito $\Rightarrow \int_{0^+}^1$ converge.

Como convergen las dos, $\int_{0^+}^{\infty}$ converge.

Ej. $\int_{0^+}^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \int_{0^+}^1 + \int_1^{\infty}$ diverge $\forall s$:

Si $s > 1$ converge la de ∞ , pero diverge la de 0^+ , si $s < 1$ ocurre al revés y si $s = 1$ divergen ambas.



Ej. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ no es una integral normal y ni siquiera existe como impropia, pues no convergen ni \int_{-1}^0 ni \int_0^1 .

(Tampoco existe el VP de Cauchy de la impropia, definido en estos casos por $\lim_{b \rightarrow 0} [\int_{-1}^b f + \int_b^1 f]$).

Ej. $\int_{1^+}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}} \cdot \int_{1^+}^2$ converge (pues $\frac{x}{\sqrt{x-1}\sqrt{x^3+x^2+x+1}} \sim \frac{x}{2\sqrt{x-1}}$), pero \int_2^{∞} diverge (pues $\sim \frac{1}{x}$).

Por tanto, la inicial diverge (insistimos en que deben converger las dos para ser convergente).

Ej. $\int_{0^+}^{\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} dx$ converge, pues lo hacen $\int_{0^+}^1$ (tiene límite en $x=0$) e \int_1^{∞} (es $0 \leq \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$).

Ej. $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. En $x=0$ converge si y sólo si $x > 0$ (pues se parece a $\int_0^{\infty} t^{x-1} dt$).

En ∞ converge siempre: $\frac{t^{x-1} e^{-t}}{t^{-2}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \forall x$ e $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge. La \int_0^{∞} inicial converge $\forall x > 0$.

La $\Gamma(x)$ (**función gamma**) definida por esta impropia generaliza el factorial:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt \stackrel{\text{partes}}{=} -t^x e^{-t}]_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x) \Rightarrow \text{si } n \in \mathbb{N},$$

$$\Gamma(n+1) = n! \Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!, \text{ pues } \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Ej. $\int_{0^+}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^3 \log x} dx$. Plantea problemas en 0^+ , 1^{\pm} , ∞ . Para converger, deben hacerlo las cuatro.

Analizamos todas. En 0^+ : $\sim \int_{0^+}^{1/2} \frac{dx}{x \log x} = \log(|\log x|)]_0^{1/2} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} -\infty$ (diverge).

En 1^{\pm} : $\sim \int \frac{dx}{\log x} \sim \int \frac{dx}{x-1}$ (divergen ambas). En ∞ : $\leq \int \frac{dx}{x^3}$ (converge).

5.5. Integración aproximada

Como sabemos, funciones integrables pueden no tener primitivas elementales o exigir un cálculo muy largo. Pero en muchas ocasiones, sólo se necesita el **valor aproximado** de una integral definida (en otras, simplemente, **cotas** de dicha integral). Las U_n y L_n de 5.1 (y algún teorema con desigualdades visto en ella) nos daban ya alguna (mala) estimación, pero será más preciso utilizar **sries de Taylor** o utilizar las fórmulas sencillas (sobre todo para los ordenadores) de los **trapezios** o de **Simpson** que veremos al final de esta sección.

Integración de series de Taylor.

Estas series se podían derivar término a término (en el intervalo de convergencia). Veamos que también se pueden integrar término a término en ese intervalo (de nuevo como si se tratases de 'polinomios infinitos'). Esto será consecuencia de los siguientes resultados:

Teorema: Sea $\{f_n\}$ sucesión de funciones continuas que converge **uniformemente** hacia f en $[a, b]$. Entonces $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$.

Sea $\varepsilon > 0$. Existe un N tal que si $n \geq N$ entonces $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ para todo $x \in [a, b]$.

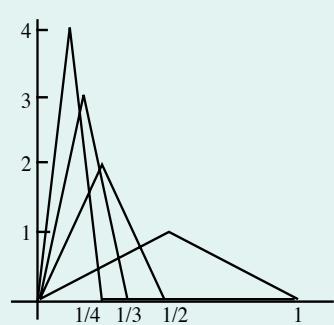
$$\text{Si } n \geq N, \quad \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon.$$

Este resultado es **falso** si la sucesión de funciones converge sólo puntualmente (el límite de las integrales puede ser distinto de la integral del límite) como para la siguiente $\{f_n\}$:

Ej. $f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x, & 0 \leq x \leq 1/2n \\ 2n - 2n^2 x, & 1/2n \leq x \leq 1/n \\ 0, & 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$

La gráfica de cada f_n es un triángulo isósceles de altura n sobre el intervalo $[0, \frac{1}{n}]$ y vale 0 en el resto de $[0, 1]$; el área encerrada por cada f_n es $\frac{1}{2}$ para todo n . El límite puntual de las f_n es $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$ ya que para cada x , a partir de un N todas las $f_n(x) = 0$ y $f_n(0) = 0 \forall n$. Está claro que $\{f_n\}$ no converge uniformemente y que se tiene:

$$0 = \int_0^1 f_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n = \frac{1}{2}.$$



Como consecuencia inmediata de lo anterior, tenemos que:

Teorema:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge **uniformemente** hacia f en $[a, b]$ entonces $\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$

Ej. Como $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ converge uniformemente en todo \mathbb{R} , es $\int_0^{\pi} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{[2n-1]^3}$.

Y en el caso particular de las series de potencias concluimos:

Teorema:

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $|x| < R \Rightarrow$
 $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots$ si $|x| < R$.

Pues en $[-x, x]$ sabemos que la serie converge uniformemente.

[Fuera de $(-R, R)$ la serie no convergerá y no servirá para aproximar ninguna integral].

[El conjunto de primitivas de f será, desde luego: $\int f(x) dx = C + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots$].

Ej. Calculemos aproximadamente $\int_0^1 \sin x^2 dx$ (función sin primitiva elemental). Tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin t^2 dt &= \int_0^x [t^2 - \frac{1}{3!}t^6 + \frac{1}{5!}t^{10} - \frac{1}{7!}t^{14} + \dots] dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{42}x^7 + \frac{1}{1320}x^{11} - \frac{1}{75600}x^{15} + \dots \forall x \\ &\rightarrow \int_0^1 \sin t^2 dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \dots \end{aligned}$$

y podemos aproximar la integral con las sumas parciales de esta serie alternada decreciente:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin t^2 dt &\approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \approx 0.3095 \text{ con error menor que } \frac{1}{1320} \approx 0.00007 < 10^{-3} \\ \int_0^1 \sin t^2 dt &\approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} \approx 0.310281 \text{ con error menor que } \frac{1}{75600} \approx 0.0000013 \sim 10^{-5} \\ \int_0^1 \sin t^2 dt &\approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} \approx 0.310268158 \text{ con error menor que } \frac{1}{9!19} \approx 0.000000145 \sim 10^{-7} \end{aligned}$$

La misma serie de potencias nos da la integral para cualquier otro x . Por ejemplo, si $x = \frac{1}{2}$:

$$\int_0^{1/2} \sin t^2 dt = \frac{1}{24} - \frac{1}{5376} + \frac{1}{2703360} - \frac{1}{2477260800} + \dots \text{ (converge mucho más rápidamente, pues cerca de } x=0 \text{ se parece más el desarrollo).}$$

También vemos que si $x = \sqrt{2\pi}$ (≈ 2.51) la integral es positiva (como sospechábamos en 5.2):

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin t^2 dt = \frac{[2\pi]^{2/3}}{3} \left[1 - \frac{2\pi^2}{7} + \frac{2\pi^4}{55} - \frac{4\pi^6}{1575} + \dots \right] \approx 5.24 [1 - 2.82 + 3.54 - 2.44 + 1.06 - 0.31 + \dots]$$

Las sumas parciales de la serie entre corchetes son: $1, -1.82, 1.72, -0.72, 0.34, 0.09, \dots$ (todo va más lento ahora). Como es alternada decreciente (a partir de tercer término) su suma está entre dos sumas parciales consecutivas, con lo que la integral es > 0 . [Para dar su valor con un error $< 10^{-2}$ se ve que hay que sumar 8 términos (dos más) y se obtiene 0.43].

Como disponemos de su desarrollo de Taylor, aparte de las anteriores aproximaciones, podemos realizar otras operaciones en la que aparezca la integral, como, por ejemplo, calcular algún límite indeterminado:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \int_0^x \sin t^2 dt - x^4}{\arctan x^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x^4 - \frac{1}{14}x^8 + \dots \right] - x^4}{x^8 - \frac{1}{3}x^{24}} = \frac{\frac{1}{14}x^8 + o(x^8)}{x^8 + o(x^8)} = -\frac{1}{14}$$

$$(\text{Por L'H más largo: } \lim_{x \rightarrow 0} [1+x^{16}] \frac{3 \int_0^x \sin t^2 dt + 3x \sin x^2 - 4x^3}{\arctan 8x^7} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin x^2 + 6x^2 \cos x^2 - 12x^2}{\arctan 56x^6} = \dots).$$

Ej. Encontremos cotas racionales de $I = \int_0^1 g$ si $g(x) = x^2 e^{-x^2}$ (de primitiva no calculable).

Las cotas más sencillas, pues claramente $0 \leq g(x) \leq 1$, son $0 = \int_0^1 0 \leq I \leq \int_0^1 1 = 1$.

Podemos mejorar la cota superior hallando el máximo de g en $[0, 1]$:

$$g'(x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2} \Rightarrow \text{máximo si } x=1 \text{ y } g(1)=e^{-1} \Rightarrow I \leq \int_0^1 e^{-1} \leq e^{-1} < e^{>2.7} \frac{10}{27}.$$

Si comparamos en $[0, 1]$ con diversas funciones integrables:

$$g(x) \leq x^2 \Rightarrow I \leq \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ (mejor que la anterior)}$$

$$g(x) \leq xe^{-x^2} \Rightarrow I \leq \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}[1 - e^{-1}] < \frac{1}{2}[1 - \frac{10}{28}] = \frac{9}{28} \text{ (aún menor)}$$

$$g(x) \leq x^2 e^{-x^3} \Rightarrow I \leq \left[-\frac{1}{3}e^{-x^3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}[1 - e^{-1}] < \frac{1}{3}[1 - \frac{10}{28}] = \frac{3}{14} \text{ (más pequeña aún)}$$

$$g(x) \geq x^2 e^{-x} \Rightarrow I \geq \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \left[-[x^2 + 2x + 2]e^{-x} \right]_0^1 = 2 - 5e^{-1} > 2 - \frac{50}{27} = \frac{4}{27}$$

Pero si queremos obtener cotas con la precisión que necesitemos, lo mejor es usar Taylor:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [x^2 - x^4 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{6}x^8 + \dots] dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{14} - \frac{1}{54} + \dots \forall x \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} < \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{14} - \frac{1}{54} = \frac{176}{945} < \dots < I < \dots < \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{14} = \frac{43}{210} < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

La cota inferior $\frac{2}{15}$ es peor que la obtenida comparando, pero $\frac{176}{945} > \frac{4}{27}$ ya la mejora.

Y la superior $\frac{43}{210}$ es más pequeña que la menor de las anteriores: $\frac{43}{210} < \frac{3}{14}$.

[Con un ordenador se consigue mucha precisión ($I \approx 0.189472$), nosotros hemos conseguido sólo deducir que $\frac{176}{945} \approx 0.186 < I < \frac{43}{210} \approx 0.205$; pero nos costaría poco sumar más términos].

Ej. Si $\boxed{h(x) = \frac{2x}{8-x^2}}$, hallemos racionales que aproximen $\boxed{I = \int_0^1 h}$ con error menor que 10^{-2} .

Parece inútil aproximarla si podemos fácilmente dar el valor exacto: $I = -\log|8-x^2| \Big|_0^1 = \log \frac{8}{7}$.

El problema es que, sin calculadora, no sabemos el valor de ese logaritmo. Pero por Taylor:

$$\log(1+\frac{1}{7}) = \frac{1}{7} - \frac{1}{2 \cdot 49} + \frac{1}{3 \cdot 243} - \dots \text{ serie de Leibniz} \rightarrow I \approx \frac{13}{98}, \text{ con error } < \frac{1}{729} < 10^{-2}.$$

Podríamos también desarrollar primero el integrando y luego integrar la serie:

$$\frac{2x}{8-x^2} = \frac{x}{4} \frac{1}{1-x^2/8} = \frac{x}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^2}{8} \right]^n = \frac{x}{4} + \frac{x^3}{32} + \frac{x^5}{256} + \dots \rightarrow I = \frac{1}{8} + \frac{1}{128} + \frac{1}{1536} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n8^n}.$$

El problema de esta serie (que, desde luego, debe sumar lo mismo) es que no es alternada, lo que hace menos fácil y mecánico estimar los errores.

Sumando dos términos $I \approx \frac{17}{128}$, el error cometido es $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n8^n} < \frac{1}{3 \cdot 8^3} \sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{1}{8} \right]^n = \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 8^2} < 10^{-2}$.

Ej. Dibujar la gráfica de $\boxed{r(x) = \frac{x-1}{x^4+1}}$ y hallar, si existen, los x en los que la función $\boxed{R(x) = \int_0^x r}$, con $x \in [0, \infty)$, alcanza sus extremos.

$$r \in C^\infty(\mathbf{R}). \quad r(x) \rightarrow 0 \text{ si } x \rightarrow \pm\infty. \quad r(x) \gtrless 0 \text{ si } x \gtrless 1. \quad r'(x) = -\frac{3x^4 - 4x^3 - 1}{[x^4 + 1]^2}, \quad r''(x) = -\frac{4x^2[3x^5 - 5x^4 - 5x + 3]}{[x^4 + 1]^3}.$$

$P = 3x^4 - 4x^3 - 1$ tiene 1 raíz positiva x_+ [---] y 1 negativa x_- [++-].

$$P(-1) = 6, P(0) = -1, P(1) = -2, P(2) = 15 \Rightarrow x_- \in [-1, 0] \text{ y } x_+ \in [1, 2]$$

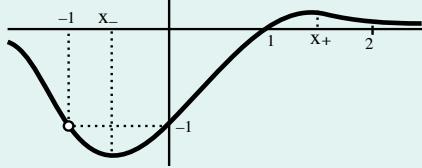
$\Rightarrow r$ decrece hasta x_- , crece hasta x_+ y decrece a partir de entonces.

$x = -1$ inflexión; en $x = 0$ no hay (no cambia de signo r''); los otros puntos de inflexión los darían las raíces (ya no hay más enteras y negativas sólo la -1) de $3x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 8x + 3$ (se pueden hallar haciendo $z = x + \frac{1}{x}$).

$$\text{Valores: } r(-2) = -\frac{3}{17}, r(2) = \frac{1}{17},$$

$$r(-1) = -1, r(0) = -1 \text{ (Rolle confirma } x_- \text{);}$$

$$r'(-1) = -\frac{3}{2}, r'(0) = 1 \text{ (otra vez } x_- \text{),...}$$



A la vista de la gráfica de $r : R$ decrece si $0 \leq x \leq 1$ [añadimos áreas negativas] y luego crece [lo mismo se deduce del signo ya analizado de $R'(x) = r(x)$]. El **mínimo** se da, pues, si $x = 1$.

Aproximemos el valor de $R(1)$ desarrollando por Taylor el integrando, que si $|x| < 1$ es:

$$[x-1][1-x^4+x^8-\dots] = -1 + x + x^4 - x^5 - x^8 + \dots \stackrel{?}{\rightarrow} I_1 = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \dots$$

En principio, quizás no podamos integrar hasta 1, pero parece ir bien, pues la serie converge:

$$S_1 = -1 < S_5 \approx -0.578 < \dots < I_1 < \dots < S_7 \approx -0.401 < S_3 = -0.3$$

Podría no haber máximo de R en $[0, \infty)$. Si $\int_1^\infty r$ fuese divergente (que no lo es, pues $r(x) \sim x^{-3}$ en el ∞), la R tendería a ∞ ; si fuese convergente y tendiese a un valor $I_2 > |I_1|$, R tendería hacia $I_1 + I_2 > 0$ (valor que no alcanzaría); y si converge hacia un $I_2 < |I_1|$ entonces el máximo se alcanza en $x = 0$ (y vale $R(0) = 0$). Veamos que esto último es lo que sucede realmente:

$r \geq 0$ en $[1, \infty)$. El criterio de comparación por desigualdades da cotas fáciles de la impropia:

$$I_2 \equiv \int_1^\infty r < \int_1^\infty \frac{x}{x^4+1} = [\arctan x^2]_1^\infty = \frac{1}{2}[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}] = \frac{\pi}{8} < 0.4, \text{ o bien:}$$

$$I_2 < \int_1^\infty \frac{x-1}{x^4} = [\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2x^2}]_1^\infty = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} < 0.17, \text{ bastante mejor cota.}$$

$$R(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\rightarrow} \int_0^1 f + \int_1^\infty f = I_1 + I_2 < 0, \text{ según las cotas halladas} \Rightarrow \text{el **máximo** es } R(0).$$

[Con esfuerzo podemos hallar la primitiva R (el denominador lo factorizamos en 1.5):

$$R(x) = \int_0^x \frac{t dt}{[t^2 + \sqrt{2}t + 1][t^2 - \sqrt{2}t + 1]} = \dots = \arctan x^2 - \frac{\sqrt{2}}{8} \log \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{\sqrt{2}}{4} [\arctan(x\sqrt{2} + 1) + \arctan(x\sqrt{2} - 1)]$$

y el valor exacto de ambas integrales. Con calculadora obtenemos: $I_1 \approx -0.474, I_2 \approx 0.149$].

Fórmulas de los trapecios y de Simpson.

Para aplicar cualquiera de estos dos métodos no necesitamos la expresión analítica de f ; nos bastan algunos de sus valores [situación que experimentalmente se presenta a menudo].

Trapecios:

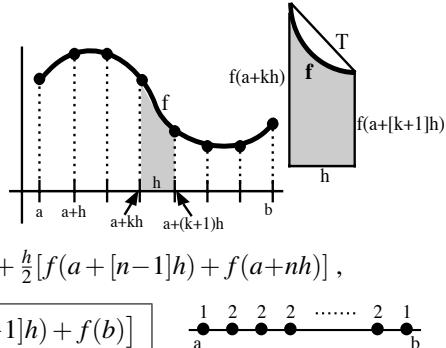
Dividimos $[a, b]$ en n partes iguales de anchura $\frac{b-a}{n} = h$.

Como aproximación de $\int_{a+kh}^{a+[k+1]h} f$ tomamos el área del trapecio T de la figura: $\frac{h}{2}[f(a+kh) + f(a+[k+1]h)]$.

Entonces $\int_a^b f$ será aproximadamente igual a la suma de las áreas de los n trapecios:

$$\int_a^b f \approx \frac{h}{2}[f(a) + f(a+h)] + \frac{h}{2}[f(a+h) + f(a+2h)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(a+[n-1]h) + f(a+nh)],$$

$$\boxed{\int_a^b f \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 2f(a+[n-1]h) + f(b)]}$$



Simpson:

Una aproximación mejor se tendrá si, dividiendo $[a, b]$ en un número par $n = 2m$ de partes iguales de longitud $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$, en vez de sustituir cada trozo de f por una recta, la sustituimos por la parábola que interpola la gráfica de f en tres puntos consecutivos:

$$x_0 = a + kh, x_1 = a + [k+1]h = x_0 + h, x_2 = a + [k+2]h = x_0 + 2h,$$

es decir, por el polinomio: $Q_2(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1)$,

$$\text{con: } A_0 = f(x_0), A_1 = \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)], A_2 = \frac{1}{2h^2}[f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)].$$

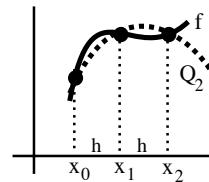
Integrando Q_2 se tiene tras algunos cálculos:

$$\int_{a+kh}^{a+[k+2]h} f \approx \int_{x_0}^{x_0+2h} Q_2(x) dx = 2hA_0 + 2h^2A_1 + \frac{2}{3}h^3A_2 = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_0+h) + f(x_0+2h)]$$

Y sumando las m integrales anteriores obtenemos:

$$\boxed{1 \ 4 \ 2 \ 4 \ \dots \ 2 \ 4 \ 1}$$

$$\boxed{\int_a^b f \approx \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \cdots + 4f(a+[n-1]h) + f(b)]}$$



Si se quiere utilizar con seriedad un método numérico se debe hablar del error cometido. Demos algún resultado sin demostración. La estimación por trapecios es exacta si $f(x)$ es una recta, función con $f''=0$. No es de extrañar que el error dependa de f'' . Puede probarse que:

$$\text{Si } |f''(x)| \leq M_2 \text{ para } x \in [a, b] \text{ entonces: } |\text{error}| \leq \frac{1}{12}(b-a)M_2h^2$$

Se prueba que Simpson es exacto si $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ y que:

$$\text{Si } |f^{(4)}(x)| \leq M_4 \text{ para } x \in [a, b] \text{ entonces: } |\text{error}| \leq \frac{1}{180}(b-a)M_4h^4$$

Se ve que ambos métodos mejoran, como era esperable, cuando $h \rightarrow 0$, más rápidamente Simpson ya que h^4 tiende más fuertemente a 0 que h^2 . Como las cuentas a realizar en ambos casos son casi las mismas, será mejor acudir a Simpson si tenemos que aproximar una integral (hay métodos mucho mejores, pero también más complicados).

Ej. Poco práctico, para comparar y ver si funcionan los métodos. Aproximemos $\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$ ($= \pi$):

$$\text{Trapecios: } h = \frac{1}{2}, n = 2 : \int_0^1 \approx \frac{4}{4} \left[1 + 2 \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \right] = \frac{31}{10} = 3.1$$

$$h = \frac{1}{4}, n = 4 : \int_0^1 \approx \frac{4}{8} \left[1 + 2 \frac{16}{17} + 2 \frac{4}{5} + 2 \frac{16}{25} + \frac{4}{5} \right] \approx 3.1312$$

$$\text{Simpson: } h = \frac{1}{2}, n = 2 : \int_0^1 \approx \frac{4}{6} \left[1 + 4 \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \right] = \frac{47}{15} \approx 3.13$$

$$h = \frac{1}{4}, n = 4 : \int_0^1 \approx \frac{4}{12} \left[1 + 4 \frac{16}{17} + 2 \frac{4}{5} + 4 \frac{16}{25} + \frac{4}{5} \right] \approx 3.14157$$

Comparemos ahora los números que nos da trapecios y Simpson con los obtenidos por otros caminos en los ejemplos anteriores de esta sección:

Ej. Calculemos aproximadamente $\int_0^1 \sin x^2 dx$ (ya estimada utilizando Taylor):

$$h = \frac{1}{2} \quad \mathbf{T.} \int_0^1 \approx \frac{1}{4}[0 + 2 \sin \frac{1}{4} + \sin 1] \approx 0.334 \quad \mathbf{S.} \int_0^1 \approx \frac{1}{6}[0 + 4 \sin \frac{1}{4} + \sin 1] \approx 0.305$$

$$h = \frac{1}{4} \quad \mathbf{T.} \int_0^1 \approx \frac{1}{8}[0 + 2 \sin \frac{1}{16} + 2 \sin \frac{1}{4} + 2 \sin \frac{9}{16} + \sin 1] \approx 0.316$$

$$\mathbf{S.} \int_0^1 \approx \frac{1}{12}[0 + 4 \sin \frac{1}{16} + 2 \sin \frac{1}{4} + 4 \sin \frac{9}{16} + \sin 1] \approx 0.3099$$

$$h = \frac{1}{6} \quad \mathbf{T.} \int_0^1 \approx \frac{1}{12}[0 + 2 \sin \frac{1}{36} + 2 \sin \frac{1}{9} + \dots + \sin 1] \approx 0.313$$

$$\mathbf{S.} \int_0^1 \approx \frac{1}{18}[0 + 4 \sin \frac{1}{36} + 2 \sin \frac{1}{9} + \dots + \sin 1] \approx 0.310205$$

$$h = \frac{1}{100} \quad \mathbf{T.} \int_0^1 \approx 0.3105 \quad \mathbf{S.} \int_0^1 \approx 0.3102683009$$

$$h = \frac{1}{1000} \quad \mathbf{T.} \int_0^1 \approx 0.31026839 \quad \mathbf{S.} \int_0^1 \approx 0.3102683017$$

[estos últimos valores exigen, desde luego, o una enorme paciencia o un ordenador].

Como $f''(x) = 2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2$, $f^{(4)}(x) = (16x^4 - 12) \sin x^2 - 48x^2 \cos x^2$, en $[0, 1]$ es
 $|f''| \leq 6$, $|f^{(4)}| \leq 4|4x^4 - 3| + |48x^2| \leq 60 \rightarrow |\text{error T}| \leq \frac{1}{2}h^2$; $|\text{error S}| \leq \frac{1}{2}h^4$

[Para aproximar la integral de 5.2, $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin t^2 dt$, Simpson con $n = 2$ y $n = 4$ da, respectivamente, 1.67 (la gráfica se parece muy poco a una parábola) y 0.42].

Ej. Para otra integral aproximada con Taylor $I = \int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx$, Simpson da muy buenos resultados:

$$n = 2 \rightarrow I \approx \frac{1}{6}[0 + e^{-1/4} + e^{-1}] \approx 0.191$$

$$n = 4 \rightarrow I \approx \frac{1}{12}[0 + \frac{1}{4}e^{-1/16} + \frac{1}{2}e^{-1/4} + \frac{9}{4}e^{-9/16} + e^{-1}] \approx 0.18951].$$

[Lo largo de Simpson es acotar el error (tampoco sabemos con Taylor si sale serie no alterna-dada)].

Ej. Hallemos también con estos métodos algún racional que aproxime $I = \int_0^1 h$, $h(x) = \frac{2x}{8-x^2}$.

Probablemente Simpson daría un error $< 10^{-2}$ con ya con $h = \frac{1}{2}$, pero necesitaríamos acotar la $h^{(4)}$,

lo que es largo. Probemos con Trapecios que hay que derivar menos:

$$h' = 2 \frac{8+x^2}{[8-x^2]^2}, h'' = 4 \frac{x[24+x^2]}{[8-x^2]^3} \rightarrow \text{en } [0, 1] \text{ es } |h''| \leq \frac{100}{7^3} \rightarrow |\text{error}| \leq \frac{100}{12 \cdot 343} h^2 \rightarrow$$

$$\text{basta tomar } h = \frac{1}{2} \rightarrow I \approx [h(0) + 2h(\frac{1}{2}) + h(1)] = \frac{1}{4}[0 + \frac{8}{31} + \frac{2}{7}] = \frac{59}{434} \text{ con error } < 10^{-2}.$$

Ej. Por último, aproximemos con Simpson $I_1 = \int_0^1 r$, para la $r(x) = \frac{x-1}{x^4+1}$.

$$\text{Tomemos } h = \frac{1}{2}: I_1 \equiv \int_0^1 r \approx \frac{1}{6}[-1 - \frac{4 \cdot 8}{17} + 0] = -\frac{49}{102} \approx -0.480 \text{ (sin cota del error).}$$

Número coherente con las cotas que calculamos con Taylor:

$$S_5 \approx -0.578 < \dots < I_1 < \dots < S_7 \approx -0.401,$$

Y bastante similar al ‘exacto’ obtenido con la primitiva y utilizando la calculadora: $I_1 \approx -0.474$.

5.6. Aplicaciones

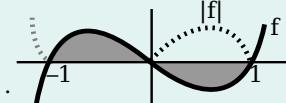
Áreas planas

Ya vimos que la integral no es exactamente un área, sino una suma de áreas con signo. Por tanto, para hallar el área encerrada entre el eje $y=0$ y la gráfica de una función f habrá que sumar las integrales de f en los intervalos en que esté por encima del eje y restar las integrales cuando f quede por debajo. Esto es equivalente a integrar $|f|$. Así:

Ej. Hallar el área de la región encerrada entre el eje horizontal y la gráfica de $f(x) = x^3 - x$.

$$\text{Área} = \int_{-1}^1 |f| = \int_{-1}^0 f - \int_0^1 f = -2 \int_0^1 f = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{1}{2}$$

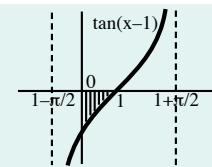
[la $\int_{-1}^1 f$ (que es 0 por ser f impar) no representa el área sombreada].



Ej. Determinar el área de la región acotada por los ejes y la gráfica de $h(x) = \tan(x-1)$ [la de $\tan x$ trasladada una unidad a la derecha].

$$\text{Área} = \int_0^1 |h| = -\int_0^1 \tan(x-1) dx = \log|\cos(x-1)| \Big|_0^1 = -\log(\cos 1) > 0$$

(porque $\cos 1 < 1$; las áreas deben salir siempre positivas).



Más en general, el **área comprendida entre las gráficas de f y g en el intervalo $[a, b]$**

viene dada por $\boxed{\int_a^b |f-g|}$.

Ej. Determinar el área de la región encerrada entre las gráficas de $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = x$.

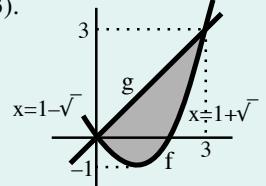
Las gráficas se cortan si $x^2 - 2x = x \Leftrightarrow x = 0$ ($y = 0$) ó $x = 3$ ($y = 3$).

En $[0, 3]$ la gráfica de g está por encima de la de f , por tanto:

$$A = \int_0^3 [g-f] = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \frac{9}{2}.$$

O bien de otra forma (más complicada en este caso, pero mejor en otros), integrando respecto a y : $y = x^2 - 2x \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+y} \rightarrow$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 [1 + \sqrt{1+y} - (1 - \sqrt{1+y})] dy + \int_0^3 [1 + \sqrt{1+y} - y] dy \\ &= \left[\frac{4}{3}(1+y)^{3/2} \right]_{-1}^0 + \left[y + \frac{2}{3}(1+y)^{3/2} - \frac{y^2}{2} \right]_0^3 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



Ej. Hallar (sin calculadora) con un error menor que 0.04 el valor aproximado del área de la región acotada por la gráfica de $h(x) = \arctan x^2$ y la recta $y = \frac{\pi}{4}$.

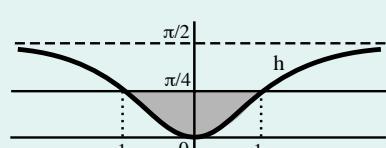
$$h \text{ par}, h \underset{|x| \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{\pi}{2}, h'(x) = \frac{2x}{1+x^4} \text{ (crece si } x > 0 \text{)} \rightarrow$$

$$\text{corta } y = \frac{\pi}{4} \text{ si } x = \pm 1 \rightarrow \text{Área} = \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^1 \arctan(x^2) dx.$$

Hallar la primitiva es posible pero largo:

$$\int \arctan(x^2) dx = x \arctan(x^2) - \int \frac{2x^2 dx}{1+x^4} = \dots$$

[y los log y arctan del resultado no podríamos evaluarlos sin calculadora].



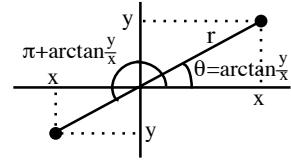
Trapezios o Simpson dan valores desconocidos del arctan (y sería largo acotar el error). Mejor es integrar el desarrollo de Taylor [se puede llegar hasta $x=1$] y usar la serie alternada que sale:

$$2 \int_0^1 [x^2 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{5}x^{10} - \frac{1}{7}x^{14} + \dots] dx = \frac{2}{3} - \frac{2}{21} + \frac{2}{55} - \dots \approx \frac{4}{7}, \text{ con error} < \frac{2}{55} < \frac{2}{50} = 0.04.$$

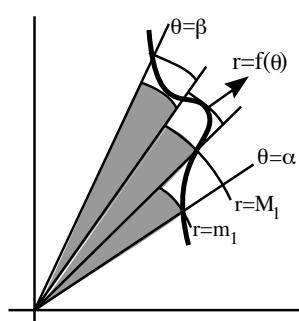
Por tanto, Área $\approx 1.571 - 0.571 = 1.00$ con error < 0.04 (con ordenador: Área ≈ 0.974991).

Áreas en coordenadas polares.

Un punto P del plano de coordenadas cartesianas (x, y) se puede describir además por un par de coordenadas polares (r, θ) siendo r la distancia de P al origen y θ el ángulo en radianes comprendido entre el semieje de las x positivas y la semirrecta que une el origen con P . Unas coordenadas se pueden obtener de otras utilizando que:



$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan \frac{y}{x} [+ \pi], \text{ si } \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) [\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})].$$



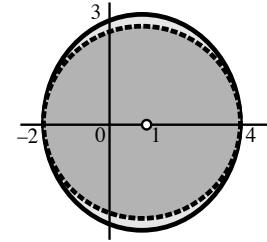
Para hallar el área de una región R como la del dibujo, acotada por las semirrectas $\theta = \alpha, \theta = \beta$ y la curva $r = f(\theta)$, con $f(\theta) \geq 0$, dividamos el ángulo $\beta - \alpha$ en n partes iguales (de longitud $\Delta\theta$). Como el área de un sector circular de radio r y ángulo θ es $r^2\theta/2$, si m_k y M_k son el mínimo y el máximo de $f(\theta)$ en cada sectorcillo, se tiene que el área de cada uno de ellos está comprendida entre $m_k^2\Delta\theta$ y $M_k^2\Delta\theta \rightarrow \sum m_k^2\Delta\theta \leq \text{área de } R \leq \sum M_k^2\Delta\theta$. Como estas son las sumas inferior y superior de f^2 en $[\alpha, \beta]$ deducimos que:

$$\text{Área de } R = \boxed{\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta}.$$

Ej. Hallar el área de la región acotada por la curva $r = 3 + \cos \theta$.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [3 + \cos \theta]^2 d\theta = \int_0^{2\pi} [\frac{19}{2} + 6\cos \theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta] d\theta = \frac{19\pi}{2}.$$

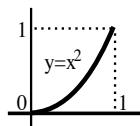
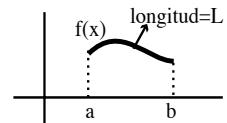
R no es el círculo de centro $(1, 0)$ y radio 3, con área 9π y expresión en polares: $r^2 - 2r\cos \theta - 8 = 0 \rightarrow r = \cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta}$; la curva dada en cartesianas es muy complicada: $x^2 + y^2 - x = 3\sqrt{x^2 + y^2}$.



De forma similar a las del área en polares se prueban las otras fórmulas de la sección:

Longitud de la gráfica
de f en el intervalo $[a, b]$:
$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx.$$

(Lo natural es probar la fórmula estudiando las ‘integrales de línea’).



Ej. Hallar la longitud del tramo de parábola $y = x^2$ que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx = \left[u = 2x + \sqrt{1+4x^2} \right] = \frac{1}{8} \int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{(1+u^2)^2}{u^3} du = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\log(2+\sqrt{5})}{4} \approx 1.48$$

Ej. Probar que la longitud L del tramo de $y = x^3$ que une $(0, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ cumple $\frac{1}{2} < L < \frac{9}{16}$.

$$y' = 3x^2 \rightarrow L = \int_0^{1/2} \sqrt{1+9x^4} dx \text{ (primitiva no calculable).}$$

$$f(x) \equiv [1+9x^4]^{1/2} = 1 + \frac{9}{2}x^4 - \frac{81}{8}x^8 + \dots \text{ si } |9x^4| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow L = \left[x + \frac{9}{10}x^5 - \frac{9}{8}x^9 + \dots \right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} + \frac{9}{320} - \frac{9}{4096} + \dots,$$

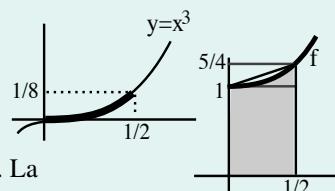
[válido por estar $[0, 1/2]$ dentro del intervalo de convergencia]. La serie de L es decreciente y alternada a partir de segundo término

$$\rightarrow \frac{1}{2} = S_1 < S_3 < \dots < L < \dots < S_2 = \frac{169}{320} < \frac{9}{16}.$$

De otra forma (la integral puede describir el área limitada por f en $[0, 1/2]$):

$$\text{área rectángulo} = \frac{1}{2} < L \text{ área trapecio} = \frac{9}{16} \text{ [es fácil ver que } f \text{ es convexa en ese intervalo].}$$

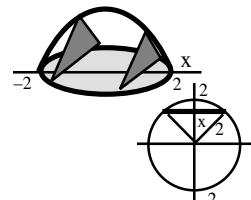
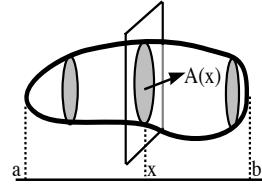
[La acotación $L > 1/2$ era clara geométricamente antes de hacer ninguna cuenta].



Volúmenes (sencillos):

El instrumento natural para calcular volúmenes son las integrales múltiples del cálculo en varias variables, pero para hallar algunos bastan integrales de funciones de una variable.

Volumen de un sólido que se extiende desde $x=a$ hasta $x=b$, conocida el área $A(x)$ de cada sección plana:
$$V = \int_a^b A(x) dx$$

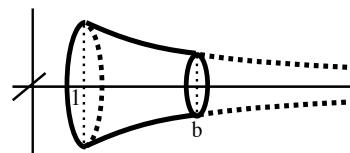
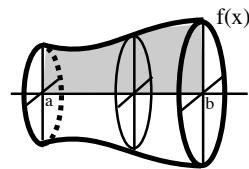


Ej. Un sólido tiene base circular de radio 2. Cada sección producida por un plano perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero. Calcular el volumen del sólido.

$$A(x) = \text{área triángulo de base } 2\sqrt{4-x^2} = \sqrt{3}(4-x^2), V = 2 \int_0^2 A(x) dx = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

En particular, volumen de un **sólido de revolución** engendrado al girar en torno al eje x la región comprendida entre la gráfica de f ($f(x) \geq 0$) y el eje x en $[a, b]$. El área de cada sección [círculo de radio $f(x)$] es

$$A(x) = \pi[f(x)]^2. \text{ Por tanto, } V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$



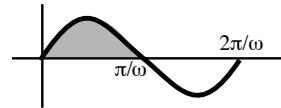
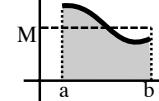
Ej. El volumen obtenido al girar la región determinada por $g(x) = \frac{1}{x}$ y el eje x en el intervalo $[1, b]$, $b > 1$ es

$$V_b = \pi \int_1^b \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi[1 - \frac{1}{b}]. \text{ Observemos que } V_b \xrightarrow[b \rightarrow \infty]{} \pi:$$

el volumen del sólido infinito es finito (impropia convergente).

Valor medio de una función en un intervalo; se define:
$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

(si $f \geq 0$, es la altura de un rectángulo de base $b-a$ y área igual a la limitada por la gráfica de f)



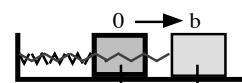
Ej. Hallar el valor medio de $f(x) = A \operatorname{sen} \omega x$ en el semiperiodo $[0, \frac{\pi}{\omega}]$:

$$M = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\omega/\pi} A \operatorname{sen} \omega x dx = \frac{2A}{\pi} \text{ (el valor medio en } [0, \frac{2\pi}{\omega}] \text{ es 0).}$$

Trabajo de una fuerza variable: un punto se mueve en el eje x sometido a una fuerza $f(x)$ función sólo de x . El trabajo realizado por f para mover el punto desde a hasta b es

$$T = \int_a^b f(x) dx$$

Ej. El trabajo preciso para estirar un muelle una longitud b desde su posición de equilibrio es $\int_0^b cx dx = \frac{1}{2}cb^2$.



Sea una varilla de densidad lineal variable $\rho(x)$ que ocupa desde a hasta b . Su **masa** m , su **centro de gravedad** x^* y su **momento de inercia** I respecto a 0 son:

$$m = \int_a^b \rho(x) dx, x^* = \int_a^b x \rho(x) dx, I = \int_a^b x^2 \rho(x) dx$$

Distancia recorrida en el intervalo de tiempo $[a, b]$ por un móvil de velocidad $v(t)$:
$$D = \int_a^b v(t) dt$$
.

Problemas de Matemáticas (2017/2018).

1. Preliminares.

1.1. Comprobar visualmente con diagramas de Venn las siguientes igualdades entre conjuntos:

$$a) A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) \quad b) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

1.2. Sea $f : L \rightarrow L$ la función definida en el alfabeto latino L por $f = \{(a,b), (b,c), \dots, (y,z), (z,a)\}$ y sea $g : P \rightarrow L$ la que asigna a cada miembro de un grupo de personas la inicial de su primer apellido. ¿Es f inyectiva o suprayectiva?, ¿lo es g si $P = \{\text{habitantes de Madrid}\}$?, ¿y si es P mi grupo de Matemáticas? ¿Es g inyectiva para algún P ? Hallar $f^{-1}(f^{-1}(z))$ y $f(g(\text{lector}))$.

1.3. Sea $p \Rightarrow q$ la implicación: ‘Si un cuadrilátero tiene las diagonales iguales entonces el cuadrilátero es un rectángulo’. Decidir si son ciertas $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $(\text{no } p) \Rightarrow (\text{no } q)$ y $(\text{no } q) \Rightarrow (\text{no } p)$.

1.4. Demostrar por inducción sobre n la fórmula: $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

1.5. Hallar el mcd y el mcm de 1995 y 9009.

1.6. Escribir en la forma más simplificada posible:

$$\begin{aligned} a) \frac{2772}{12474}, \quad b) (-2^3)^2, \quad c) 2^{(-3)^2}, \quad d) (-2)^{3^2}, \quad e) \left(\frac{4}{9}\right)^{3/2}, \quad f) \left(\frac{9}{4}\right)^{-3/2}, \quad g) 8^{-2/3}3^{-4}2^{-4/6}9^22^{13/15}4^{7/5}, \\ h) (\sqrt{2}-1)^{3!}, \quad i) (\sqrt{2}-1)^{-3}, \quad j) (3+\sqrt{8})^3(3-\sqrt{8})^3, \quad k) \frac{1}{(n-1)!} - \frac{n-1}{n!}, \quad l) \frac{n!}{(n-3)!(n^2-2n)}. \end{aligned}$$

1.7. Calcular: a) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 1024$, b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 1024$,
c) $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots 1/1024$, d) $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$.

1.8. Si $n \geq 3$, probar la igualdad de números combinatorios $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{3}$.

1.9. Calcular $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ para $n = 2, 3, 4, 5$ y 6 , y deducir de la fórmula del binomio el valor de la suma para cualquier n . ¿Cuánto vale $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$?

1.10. Hallar todos los números reales x que cumplen cada igualdad:

$$\begin{aligned} a) x^2 + x + 2 = 0, \quad b) x^4 - x^2 - 2 = 0, \quad c) x^4 + 2x^2 + 8x + 5 = 0, \quad d) 3x^4 - 7x^3 - 7x + 3 = 0, \\ e) \frac{2}{x^2 - 2x} + \frac{3}{x^2 - 4x + 4} = 1, \quad f) \sqrt{x+9} - 2\sqrt{x+1} = 0, \quad g) \sqrt{x+3} + 2\sqrt{x} = 0, \quad h) |x| = -x. \end{aligned}$$

1.11. Encontrar todos los reales x para los que:

$$\begin{array}{llll} a) \frac{x-2}{x+2} \geq 0 & b) |x-3| < 5 & c) |x-5\pi| \geq 4\pi & d) |4-7x| = 4-x^2 \\ e) \left|1 - \frac{1}{x}\right| \leq 2 & f) x^3 + x^2 > 2x & g) |x||x-2| < 1 & h) |x| + |x-3| \leq 5 \\ i) -3x^3 > \frac{1}{9} & j) \frac{2x}{3} + \frac{5x}{12} - 3 \leq \frac{4x}{15} + \frac{1}{2} & k) 7+x + \frac{6}{x} < 0 & l) 3^{4+x^2-x^3} < 1 \end{array}$$

1.12. Determinar si cada afirmación es cierta o falsa (probarlas o dar un contraejemplo):

$$\begin{aligned} a) x < y \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}, \forall x, y \neq 0; \quad b) x < y \Rightarrow x^3 < y^3, \forall x, y; \quad c) 0 < x < y \Rightarrow 3x^2 < x^2 + xy + y^2 < 3y^2; \\ d) |x-5| < 2 \Rightarrow 0 < x < 8; \quad e) x < 5 \Rightarrow |x| < 5; \quad f) |x| < 5 \Rightarrow x < 5; \quad g) \exists x \text{ que cumple } |x+1| < x; \\ h) \exists x \text{ que cumple } |x-1| = |2-x|; \quad i) \exists x \text{ que cumple } |x-1| = -|2-x|; \quad j) x^2 - 1 \leq |x^2 - 1| \leq x^2 + 1 \quad \forall x. \end{aligned}$$

1.13. Precisar si los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} tienen supremo, ínfimo, máximo, mínimo y si son abiertos o cerrados :

$$a) \{x : |x| > 2\} - \{7\}; \quad b) \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 4\}; \quad c) \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}; \quad d) \{10^{-7}n : n \in \mathbb{N}\}; \quad e) \emptyset.$$

1.14. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \frac{\arctan x}{2 - \sqrt[3]{x}} \quad \text{b) } g(x) = \arcsen(\log x) \quad \text{c) } h(x) = \frac{1}{1-x+\sqrt{5-x^2}} \quad \text{d) } k(x) = \sqrt{16 - |9-x^2|}$$

1.15. Sean $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = \frac{2}{x}$. Hallar el dominio de $f \circ g$, $g \circ f$ y $f \circ f$. Hallar $\text{im } f$ e $\text{im } g$. Comprobar que f es inyectiva en todo su dominio y calcular f^{-1} indicando su dominio.

1.16. Si $f(x) = |x^2 + 2x|$, hallar todos los números reales x que cumplen $f(x) \leq 3$. ¿Es f inyectiva?

1.17. Si f y g son crecientes, ¿lo es $f+g$? ¿Y $f \cdot g$? ¿Y $f \circ g$?

1.18. Determinar si $f+g$ y $f \circ g$ son necesariamente pares o impares en los cuatro casos obtenidos al tomar f par o impar y g par o impar.

1.19. Expresar los siguientes ángulos en radianes: 15° , 18° , 120° , 150° , 270° . Y estos ángulos, que están en radianes, en grados: $\frac{\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{6}$, 3π . Usando Pitágoras deducir el valor de $\cos \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{4}$ y $\cos \frac{\pi}{3}$.

1.20. Si desde cierta distancia un edificio se ve bajo un ángulo $\frac{\pi}{3}$, y alejándose 200 m se vé bajo un ángulo $\frac{\pi}{6}$, ¿cuáles son la altura del edificio y la distancia que a la que estaba en la primera posición?

1.21. a) Expresar $\sen \frac{x}{2}$ y $\cos \frac{x}{2}$ en función de $\cos x$. b) Expresar $\sen x$ y $\cos x$ en función de $\tan \frac{x}{2}$.
c) Probar que $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sen x}{1+\cos x}$. d) Calcular $\tan \frac{\pi}{8}$, $\sen \frac{\pi}{12}$ y $\cos \frac{\pi}{12}$.

1.22. Hallar (sin calculadora) los siguientes valores (en el caso de que existan):

$$\begin{array}{lllllll} \text{a) } 125^{2/3} & \text{b) } e^{3\log 4 - \log 5} & \text{c) } \log_2 64 & \text{d) } \operatorname{ch}(\log 3) & \text{e) } \log(\log(\log 2)) & \text{f) } [\operatorname{sh}(-1)]^\pi & \text{g) } \cos(-\frac{13\pi}{3}) \\ \text{h) } \sen \frac{\pi}{8} & \text{i) } \sen \frac{7\pi}{12} & \text{j) } [\cos \frac{3\pi}{4}]^{1/4} & \text{k) } \tan \frac{5\pi}{4} & \text{l) } \arctan(\tan \frac{5\pi}{4}) & \text{m) } \operatorname{arc sen}(\operatorname{arc cos} 0) & \text{n) } \cos(\arctan 17) \end{array}$$

1.23. Hallar todos los números reales x tales que:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 8^x = 2^{-x^2} & \text{b) } \log(x+2) = 2 \log x & \text{c) } \log(4x^3 - 3x) \leq 0 \\ \text{d) } \cos 2x - 5 \cos x = 2 & \text{e) } \tan^2 x = 12 \cos^2 x & \text{f) } |\tan x| < 1 \\ \text{g) } \cos^4 x - \sen^4 x = \frac{1}{2} & \text{h) } 1 - \cos x = \sen \frac{x}{2} & \text{i) } |\operatorname{sh} x| \leq \frac{3}{4} \end{array}$$

1.24. a) Expresar mediante identidades trigonométricas $\sen 3x$ y $\cos 3x$ en función de $\sen x$ y $\cos x$.

b) Si $\sen \alpha = -\frac{3}{5}$ y α es del tercer cuadrante, hallar $\cos 3\alpha$ y precisar en qué cuadrante está 3α .

1.25. Escribir $\cos 5x$ en función de $\cos x$ y $\sen 5x$ en función de $\sen x$. Encontrar a partir de estas expresiones algún polinomio que deba anular el $\cos \frac{\pi}{5}$, hallar sus raíces y probar que: $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1.26. Escribir el complejo $z = \frac{i-5}{3+2i}$ en la forma $re^{i\theta}$ y hallar z^5 y escribirlo en la forma $a+bi$.

1.27. Calcular: a) $\frac{1}{i} + \frac{3}{1+i}$, b) $(-\sqrt{3}+i)^{10}$, c) $(\frac{1-i}{1+i})^5$, d) $\overline{(\frac{2-3i}{i+4})}$, e) $|\operatorname{e}^{3-i|2+i|}|$, f) $\sqrt[3]{8i^2}$.

1.28. Hallar los números complejos z tales que $z^4 = -64$ y escribir el polinomio $P(x) = x^4 + 64$ como producto de polinomios de segundo grado con coeficientes reales.

1.29. Escribir las raíces cuartas del complejo $z = 8i(\sqrt{3}+i)$ en la forma $a+bi$ y dibujarlas.

1.30. Resolver las ecuaciones: $z^3 + 8 = 0$, $z^4 - 16z^2 + 100 = 0$, $z^2 + iz + 2 = 0$, $\operatorname{e}^z = 1$.

Problemas de Matemáticas (2017/2018).

2. Sucesiones, límites y continuidad en \mathbf{R} .

2.1. Sean a) $a_n = \frac{(-1)^n + n}{1+n}$, b) $b_n = 10^{7-n}$, c) $c_n = \frac{300 \cos n - 2n}{n^2}$ y d) $d_n = \frac{n^2 + \operatorname{sen} n}{n+1} - \frac{n^3}{(n+1)^2}$.

Hallar un N a partir del cual sus términos difieran del límite en menos de $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.01$.

2.2. Hallar el límite L de la sucesión $a_n = \frac{n^2+1}{n+1} - \frac{n^2+4}{n+2}$. Probar que a_n es creciente. Hallar razonadamente un N tal que $|a_n - L| < \frac{1}{2}$ si $n \geq N$.

2.3. Probar a partir de la definición de límite que $\{a_n\}$ convergente $\Rightarrow \{a_n^2\}$ convergente. ¿Es cierta \Leftarrow ?

2.4. Calcular el límite de las sucesiones que sean convergentes:

a) $\frac{n^2 - 30n}{3 - 100n}$	b) $\frac{17\sqrt{n+3} + 9}{\sqrt{n^2 + 1} - 1}$	c) $\frac{n^2}{2n-1} - \frac{n^2-1}{2n}$	d) $\sqrt{n} [\sqrt{n+4} - \sqrt{n}]$
e) $(-1)^n \sqrt{n} - n$	f) $(-1)^n \left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} - 1 \right)$	g) $\frac{(-1)^n \sqrt{n(n-1)}}{n+1}$	h) $(\sqrt{2n^2 - 1} - 1)^4$
i) $\frac{\sqrt{2n^4 + 3} - 4}{n^2 + 5 \operatorname{sen} n}$	j) $\frac{5 + (-2)^{n+1}}{3^n \cos \frac{\pi}{n+2}}$	k) $\sqrt{n} \cos n - n \operatorname{th} n$	l) $\frac{\log(e^n + 2^n)}{\sqrt{4n^2 - 1}}$
m) $\frac{\sqrt{(n^4 - 1) \operatorname{sen}(9/n)}}{n^2 + 1}$	n) $\frac{n^2 \operatorname{sen} \frac{3}{n}}{\sqrt{4n^2 + 9}}$	ñ) $e^{\cos n \pi \log \frac{n+1}{n}}$	o) $n e^{\cos n} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$
p) $\frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$	q) $\left(n - \frac{n^2}{n+4}\right)^{-\frac{n+2n}{2n}}$	r) $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$	s) $1 + \dots + \frac{1}{2^n}$

2.5. Precisar para qué valores de $a, b > 0$ convergen las sucesiones:

a) $\sqrt{n^2 + an} - bn$	b) $\frac{n^a + \log n}{n^b + 3}$	c) $\sqrt[n]{a^n + b^n}$	d) $(n^a + b)^{1/n}$	e) $\left(a + \frac{b}{n}\right)^n$
---------------------------	-----------------------------------	--------------------------	----------------------	-------------------------------------

2.6. Utilizando únicamente las definiciones probar que:

a) $f(x) = x \cos \frac{\pi}{x}$ y $g(x) = 1 + \sqrt{4+x}$ son continuas en $x=0$, b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x^2}{1+x^2} = 0$, c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x}{x^3} = \infty$.

2.7. Sea $f(x)$ una función tal que $|f(x)| \leq x^4$ para todo $x \in \mathbf{R}$. ¿Es necesariamente continua en $x=0$? ¿Y en $x=1$? Probarlo o dar un contraejemplo.

2.8. a) Hallar una f que no sea continua en ningún punto, pero tal que $|f(x)|$ sea continua $\forall x$.

b) ¿Existe alguna función que sea continua en todo \mathbf{R} menos en un único punto?

c) ¿Existe alguna que sea continua en un único punto de \mathbf{R} y discontinua en todos los demás?

d) Escribir, si existe, una f definida en todo \mathbf{R} tal que la sucesión $\{f(\frac{1}{n})\}$ no tienda a $f(0)$.

2.9. Hallar (si existen) los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+5)^{10}}{(2x+1)^{10}}$	b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + e^x}{x+6}$	c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x+5}$	d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - x$	e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x} - x$
f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x-1}$	g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x-1}$	h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x-1}$	i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctan}(\log x^2)$	j) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctan}(\log x^2)$
k) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} x$	l) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{arc sen} x}{x}$	m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3 + 2^{1/x}}$	n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + 2^{1/x}}$	ñ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3 + 2^{1/x}}$
o) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\operatorname{sen} x}$	p) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\log(2-x^2)}$	q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}$	r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}$	s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{ x }$

2.10. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ continua y tal que $\operatorname{im} f \subset [0, 1]$. Probar que entonces existe algún $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$ [a x se le llama punto fijo de f].

Problemas de Matemáticas (2017/2018).

3. Derivadas en R.

3.1. Hallar el dominio de las siguientes funciones y el valor de su derivada en el punto que se indica:

a) $f(x) = \log [\pi - 4 \arctan(x^2)]$, $x = 3^{-1/4}$; b) $g(x) = \arctan [x - \log(2-x)]$, $x = 1$.

3.2. Sea $f(x) = \arctan(\sqrt{3 \cos x})$. a) Precisar los $x \in \mathbb{R}$ que cumplen i) $f(x) = \frac{\pi}{3}$ ii) $f(x) = \frac{7\pi}{3}$. b) Hallar $f'(\frac{5\pi}{3})$.

3.3. Hallar la primera y segunda derivadas de las funciones siguientes indicando su dominio:

a) $f(x) = x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$; b) $g(x) = x \log |x|$, $g(0) = 0$; c) $h(x) = |x^{7/3} - x^2|$; d) $k(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$.

3.4. Determinar el dominio de la función y hallar los x que anulan su derivada segunda:

a) $f(x) = x^2 + 7x - 5 + \frac{8}{x-1}$, b) $g(x) = \operatorname{sen} x \cos x$, c) $h(x) = \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$, d) $k(x) = \cos x + \frac{1}{\cos x}$.

3.5. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } 0 < |x| \leq 1 \\ a + bx^2 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$. Hallar a y b para que exista $f'(1)$.

3.6. Sea $g(x) = x \operatorname{sen}(\log|x|)$, $g(0) = 0$. Precisar si es continua y derivable en $x = 0$. Hallar todos los x tales que $g'(x) = 0$.

3.7. Sea $f(x) = x \arctan(\log|x|)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. a) Estudiar si es continua y derivable en $x = 0$.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$.

3.8. Sea $f(x) = \sqrt{1 - \log|x^2 - 2|}$. a) Determinar su dominio. b) Hallar su recta tangente en $x = 1$.

3.9. Hallar la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en el punto que se indica:

a) $x^2 + 4y^2 - 10x = 0$ en $(1, \frac{3}{2})$ b) $y + yx^2 + y^3 = 6$ en $(2, 1)$.

3.10. Hallar, si existe, un $c \in (0, 1)$ en el que la recta tangente a $f(x) = \arctan \frac{x}{2-x}$ sea paralela a la recta que une $(0, 0)$ y $(1, \frac{\pi}{4})$.

3.11. Estudiar la derivabilidad y hallar (si existen) los valores extremos en los intervalos indicados:

a) $f(x) = 2x - 9x^{2/3}$ en $[-8, 64]$	b) $g(x) = \operatorname{sen} x + 2 x $ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}]$
c) $h(x) = x^3 - 3 2x-1 $ en $[0, 2]$	d) $k(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 9} + \sqrt{(x-8)^2 + 16}$ en \mathbb{R}

3.12. Sea $g(x) = \frac{1}{e^x + e^{-1/x}}$, $g(0) = 1$. a) Precisar si es continua y derivable en $x = 0$. b) ¿Es g inyectiva en $[0, \infty)$? ¿Lo es en todo su dominio?

3.13. Sea $f(x) = e^{x^2 - x}$. a) Determinar para qué puntos de su gráfica la recta tangente pasa por el origen.

b) Probar que existe f^{-1} , función inversa de f para $x \in [1, \infty)$, y hallar la derivada $(f^{-1})'(e^2)$.

3.14. Sea $g(x) = 3e^{2x} - e^x - x$. a) Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$. b) Hallar los x que anulan g' y g'' .

c) Precisar cuántas veces se anula g en su dominio.

3.15. Determinar cuántas veces se anulan estas funciones en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} - 3 \operatorname{sen} x$ en $[-\pi, \pi]$ b) $g(x) = \log|x + \frac{1}{2}| + x$ en $[0, 1]$

3.16. Hallar la imagen de $g(x) = x - 4 \arctan \sqrt{x}$ y precisar cuántas veces se anula en el intervalo $[0, 4]$.

3.17. Discutir, según los valores de la constante a , cuántas soluciones reales tiene la ecuación $e^x = ax$.

3.18. Sea $f(x) = |e^x - 2|$. a) Esquematizar su gráfica a partir de la de e^x . b) Hallar todos los números reales x que satisfacen $f(x) > 1$. c) Hallar su recta tangente en $x = 0$.

3.19. Sea $g(x)=x(\log|x|)^2$, $g(0)=0$. Precisar si es continua y derivable en $x=0$. Estudiar su crecimiento y hallar sus puntos de inflexión. Dibujar su gráfica.

3.20. Sea $g(x)=\frac{e^x}{x^3+4}$. a) Hallar su dominio y los límites cuando $x \rightarrow \infty$ y $x \rightarrow -\infty$. b) Encontrar sus valores extremos en $[0, 3]$. c) ¿Se anula g en el intervalo $[-2, 0]$? d) Esbozar su gráfica.

3.21. Sea $g(x)=\log\frac{x^2-2x+3}{x^2+2}$. a) Estudiar en qué intervalos crece y decrece. b) Precisar cuántas veces se anula g en $[0, 1]$ y cuántas soluciones tiene $g(x)=1$ en todo su dominio.

3.22. Sea $h(x)=4\arctan x + \frac{1}{x^2}$. a) Hallar sus asíntotas. b) Encontrar el valor mínimo de h en $[3^{-1/2}, 3^{1/2}]$. c) Probar que h se anula una única vez y que h'' se anula en $(1, 2)$. d) Dibujar la gráfica de h .

3.23. a) Probar que $P(x)=2x^3+x^2-1$ tiene sólo 1 raíz real y dar un intervalo $[n, n+1]$ al que pertenezca.
b) Sea $g(x)=\frac{3x+1}{x^3+1}$. Hallar su dominio, asíntotas, estudiar g' y dibujar aproximadamente la gráfica. Hallar (si existe) el valor mínimo de g en el intervalo $[0, 1]$.

3.24. Sea $f(x)=\frac{x-4}{x^3+x-4}$. a) Probar que el denominador se anula una única vez en el intervalo $[1, 2]$. b) Estudiar el crecimiento de f . c) Hallar sus valores extremos en $[-1, 1]$. d) Dibujar su gráfica.

3.25. Sea $f(x)=\log\frac{3x+2}{x^3+1}$. a) Precisar su dominio D y asíntotas verticales. b) Calcular $f'(1)$. c) Probar que f' sólo tiene un cero y esbozar la gráfica de f . d) ¿Es f inyectiva en $[1, \infty)$? ¿Lo es en todo D ?

3.26. Sea $h(x)=(3x-\frac{4}{x})e^{-x}$. a) Hallar su límite cuando x tiende a ∞ y $-\infty$ y sus asíntotas verticales. b) Precisar en qué intervalos h crece y decrece. c) Probar que $h''(x)=0$ sólo para un x del intervalo $(-1, 0)$ y para otro del $(2, 3)$. d) Dibujar su gráfica.

3.27. Dibujar las gráficas de las funciones:

a) $\frac{x^2-4x+5}{x-2}$	b) $\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$	c) $\cos^2(x+\frac{\pi}{4})$	d) $\arctan(3x-x^3)$
e) $(2x^2-1)e^{-x^2}$	f) $e^{-x} \cos x$	g) $x^3-4x+\log x$	h) $\log(x^2+\frac{1}{x})$

3.28. Dibujar las curvas:

a) $x^2+y^2+2x-4y=0$ b) $4x^2-y^2-8x=12$ c) $x^2-xy+y^2=3$ d) $x^2y^2=x^2-1$

3.29. Determinar el área mínima de todos los triángulos del primer cuadrante cuyos catetos son los ejes y cuya hipotenusa pasa por el punto $(1, 2)$. ¿Existe el triángulo de área máxima?

3.30. Sean las rectas que pasan por el punto $(1, 4)$ y que cortan los ejes coordenados en puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$ con $a, b > 0$. ¿Para cuál de ellas la suma $a+b$ es la menor?

3.31. Hallar el punto de la recta tangente a $x^2+y^2=4$ en el punto $(1, -\sqrt{3})$ más cercano al punto $(2, 0)$.

3.32. a) Escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2+4y^2+4x=0$ en el punto $(-2/3, -\sqrt{5}/3)$. b) Determinar, si existen, los puntos de la curva más cercanos y más lejanos al punto $(-1, 0)$.

3.33. Encontrar el punto de la gráfica de $f(x)=2\arctan(x-2)$ para el que es mínima la suma de sus distancias a ambos ejes.

3.34. Hallar el área máxima que puede tener un rectángulo que tenga dos lados sobre los semiejes x, y positivos y el vértice opuesto sobre la gráfica de $P(x)=6-x-x^3$.

3.35. Un nadador está en el punto A del borde de un estanque circular de 50 m de radio y desea ir al punto opuesto B , nadando hasta algún punto P del borde y andando luego por el arco PB del borde. Si nada 50 m por minuto y camina 100 m por minuto, ¿a qué punto P se debe dirigir para minimizar el tiempo de recorrido? [Ayuda: si O es el centro del círculo, ¿qué relación hay entre los ángulos PAB y POB ?].

Problemas de Matemáticas (2017/2018).

4. Series, Taylor y límites indeterminados.

4.1. Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_{n+1} = \frac{n+2}{3n+1} a_n$, con $a_1 = 1$. Probar que tiene límite y calcularlo. Determinar la convergencia de $\sum a_n$.

4.2. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes:

- | | | | |
|--|--|--|--|
| a) $\sum \frac{2^{n^2}}{n^n}$ | b) $\sum \frac{3+\cos n}{\sqrt{n}}$ | c) $\sum (-1)^n \left(\frac{\pi}{e}\right)^n$ | d) $\sum \left[\frac{e^{-100}}{n} - \frac{e^{-n}}{100}\right]$ |
| e) $\sum n e^{-n^2}$ | f) $\sum \frac{2^n n^{100}}{(n-1)!}$ | g) $\sum \frac{2+(-1)^n}{n^2+3}$ | h) $\sum (-1)^n \frac{n+24}{25n}$ |
| i) $\sum \frac{n^n}{(n+2)^n}$ | j) $\sum \frac{1}{(\ln n)^2}$ | k) $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ | l) $\sum (-1)^n \frac{4n-1}{n(n-1)}$ |
| m) $\sum \left(\frac{1+n^3}{1+n^4}\right)^3$ | n) $\sum \left(\frac{2n-1}{4n-3}\right)^n$ | ñ) $\sum \frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n^3+\cos^3 n}}$ | o) $\sum \left[\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]$ |

4.3. Determinar para qué números reales c convergen las siguientes series:

- a) $\sum \frac{(-1)^n}{n^c}$ b) $\sum \frac{c^n + c^{-n}}{n+7}$ c) $\sum \frac{(n!)^c}{(3n)!}$ d) $\sum \frac{(c-1)^n}{2^{2n-1}}$ e) $\sum \frac{c^n + 2}{e^n + n}$ f) $\sum [1 - c \cos \frac{1}{n}]$

4.4. Precisar todos los a para los que converge $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} a^n (1-a)^n$ y hallar su suma para $a = \frac{1}{2}$.

4.5. Determinar para qué $a \in \mathbf{R}$ converge $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{a^n}$. Precisar para qué valores de a su suma es $\frac{1}{3}$.

4.6. Probar que $0.8414 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \leq 0.8417$ (sumar 3 y 4 términos de la serie). ¿Cuántos términos habría que sumar para estimar la suma con error menor que 10^{-5} ?

4.7. Razonar si son ciertas las afirmaciones: a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{2n+1} > \frac{9}{5}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \arctan n}{\sqrt{3n^3+1}} < \frac{9}{5}$.

4.8. Estudiar si convergen puntual y uniformemente en el intervalo que se indica:

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}} \text{ en } [0, 2]; \quad g_n(x) = \frac{nx}{n+1} \text{ en } [0, 1]; \quad h_n(x) = e^{x-n} \text{ en i) } (-\infty, 0], \text{ ii) } [0, \infty).$$

4.9. Estudiar para qué x convergen, y si lo hacen uniformemente en el intervalo que se indica:

- a) $\sum \frac{\arctan(nx)}{5^n}$ en \mathbf{R} b) $\sum \frac{\cos^n x}{n^3}$ en \mathbf{R} c) $\sum \frac{x^n}{n^n}$ en $[-7, 7]$ d) $\sum \frac{(5x)^{n-1}}{(x^2+6)^n}$ en $[5, 6]$.

4.10. i) Calcular los valores máximo y mínimo de $f_n(x) = \frac{x}{n} e^{-nx}$ en $[0, \infty)$.

ii) Determinar si convergen uniformemente en $[0, \infty)$ la sucesión $f_n(x)$ y la serie $\sum f_n(x)$.

4.11. Determinar todos los valores de x para los que convergen las series:

- | | | | | |
|--|---|---|---|--|
| a) $\sum \frac{7^n}{\sqrt{n^2+1}} x^n$ | b) $\sum \left(\frac{n-1}{2n}\right)^n x^n$ | c) $\sum \frac{8^n x^{2n}}{1+\sqrt{n+3}}$ | d) $\sum 2^{n^2} (x-2)^n$ | e) $\sum \frac{(-4)^n}{2n+1} (x-1)^{2n}$ |
| f) $\sum \frac{(n+1)! x^{3n}}{(2n)!}$ | g) $\sum \frac{2^n x^{2n}}{1+n^2}$ | h) $\sum \left(3 + \frac{1}{n}\right)^{2n} x^n$ | i) $\sum \frac{n^2 x^{2n}}{2^n \sqrt{n}}$ | j) $\sum \frac{9^n x^{2n}}{n^2 \log(n+1)}$ |

4.12. Precisar si converge la serie $\sum \frac{(x-2)^n}{\arctan n}$ para: a) $x=0$, b) $x=1$, c) $x=e$.

4.13. Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n}$. Determinar para qué $x \in \mathbf{R}$ converge la serie anterior. ¿Converge para los mismos x la serie de f' ? ¿Qué función es f' ?

4.14. Determinar para qué valores de x converge $\sum_{n=1}^{\infty} n 3^n x^{n-1}$ y hallar su suma para esos valores.

4.15. Determinar para qué x converge la serie $\sum \frac{n+1}{n+3} x^n$ y precisar si converge para $x = \operatorname{sh} 1$.

4.16. Precisar el valor de la suma de las siguientes series:

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3^{n-2}} \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} \quad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n! 2^n} \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{n+1} [\sqrt{n} + \sqrt{n+1}]}$$

4.17. Utilizando polinomios de Taylor determinar con un error menor que 10^{-3} el valor de:

$$\text{a) } \cos 1 \quad \text{b) } e \quad \text{c) } \log \frac{3}{2} \quad \text{d) } \log \frac{4}{3} \quad \text{e) } \log 2$$

4.18. Calcular los 3 primeros términos no nulos del desarrollo de Taylor de $f(x)=x(1+x^3)^{-1/5}$ en $x=0$. Aproximar por un racional $f(\frac{1}{2})$ con error menor que 0.001.

4.19. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Taylor en $x=0$ de:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \cos^2 \frac{x}{3} & \text{b) } \frac{5}{3-x} & \text{c) } \frac{\log(1+2x)}{1+2x} & \text{d) } (2-x)\sqrt{1+x} \\ \text{e) } \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x & \text{f) } \frac{1}{\cos x} & \text{g) } \operatorname{arc sen} x & \text{h) } \cos(\operatorname{sen} x) \end{array}$$

4.20. Sea $f(x)=\frac{\cos(\pi x/2)}{\sqrt{1-x^2}}$. **a]** Hallar los 3 primeros términos no nulos de su desarrollo de Taylor en $x=0$ y deducir el valor de $f^{(2)}(0)$ y $f^{(2017)}(0)$. **b]** Hallar $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

4.21. Sea $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} \operatorname{arctan} x, & x<0 \\ 1+x \operatorname{arctan} \frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$, $f(0)=1$. **a]** Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. **b]** Estudiar si es continua y derivable en $x=0$.

4.22. Sea $g(x)=\frac{x}{e^x-1}$, $g(0)=1$. Hallar, si existe, $g'(0)$.

4.23. Calcular los siguientes límites indeterminados cuando x tiende al a indicado:

$$\begin{array}{llll} a=0: & \text{a) } \frac{\sqrt{1-x^2}-\cos x}{x^4} & \text{b) } \frac{x-\tan x}{\operatorname{arctan} x^3} & \text{c) } \frac{\log(1+\operatorname{sen}^2 x)-x^2}{x^4} \\ & \text{d) } (\cos 2x)^{3/x^2} & \text{e) } \tan x \log |x| \\ a=1: & \text{f) } \frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1} & \text{g) } \frac{x^x-x}{1-x+\log x} & \text{h) } \frac{1-x^{1/2}}{1-x} \\ a=\infty: & \text{i) } \frac{e^x+\operatorname{sen} x}{e^x+\cos x} & \text{j) } x \tan \frac{1}{x} & \text{k) } \left[\frac{x+3}{x-3} \right]^x \end{array}$$

4.24. Discutir según los valores de a el valor del límite cuando $x \rightarrow 0$ de la funciones:

$$\text{a) } f(x)=\frac{\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{arctan} ax}{x^3} \quad \text{b) } g(x)=\frac{e^{2x+x^2}-1-ax}{x \log(1+x)}$$

4.25. Hallar los límites cuando $x \rightarrow 0$ y cuando $x \rightarrow \infty$ de:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\operatorname{arctan} x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \text{b) } \frac{\operatorname{arctan} x^2-(e^x-1)^2}{\log(1+x^3)} \quad \text{c) } \frac{1+2x-e^{2x-2x^2}}{x^3+\operatorname{sen} x^3} \quad \text{d) } (x^2+\cos x) \operatorname{arctan} \frac{1}{x^2}$$

4.26. Determinar (si existen) los límites cuando: i) $x \rightarrow 0$; ii) $x \rightarrow -\infty$; iii) $x \rightarrow \infty$ de:

$$\text{a) } f(x)=\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3 \operatorname{arctan} \frac{1}{x^2}} \quad \text{b) } g(x)=\frac{(1+x^2)^{1/3} \operatorname{arctan} x-x}{x \operatorname{sh} x^4} \quad \text{c) } h(x)=\frac{\operatorname{arctan}(\operatorname{sen} x)-x}{\log(1+x^3)} \quad \text{d) } k(x)=\frac{1-e^{x^3}}{x-\operatorname{sen} x}$$

4.27. Hallar el real b tal que $f(x)=x^{-2}[e^{bx^4}-\cos bx]$ tiende hacia 0 si $x \rightarrow \infty$ y hacia 2 si $x \rightarrow 0$.

4.28. Hallar el límite de las sucesiones: a) $a_n=n^2 \left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1 \right]$, b) $b_n=n \operatorname{arctan} n - n^2 \operatorname{arctan} \frac{2}{n}$.

4.29. Sea $f(x)=\frac{\log|1+x^3|}{x}$, $f(0)=0$. Hallar $f'(0)$ y $f''(0)$. Dibujar su gráfica. Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f(f(n))\}$.

4.30. Sea $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}$, $f(0)=1$. Hallar $f'(0)$. Determinar los límites $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ y la $\operatorname{im} f$. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de f . Hallar la derivada $f^{(2011)}(0)$.

Problemas de Matemáticas (2017/2018).

5. Integración en R.

5.1. Sea $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$; $f(x) = 0$, $x \in [1, 2]$; $f(x) = 1$, $x \in [2, 3]$, y sea $F(x) = \int_0^x f$.

Determinar los $x \in [0, 3]$ para los que F es continua y derivable. Hallar $F(3)$. Hallar $F(x) \forall x$.

5.2. Sea $F(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^1 \frac{\arctan t}{1+t^4} dt$. Hallar $F\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ y $F'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

5.3. Si $H(x) = x \int_x^{2x} \sqrt{1+3t^3} dt$, calcular $H''(1)$.

5.4. ¿Posee función inversa la función f definida para todo $x \geq 2$ por $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\log t}$?

5.5. Sea $f(x) = \int_1^x e^{4 \operatorname{arctan} t} dt$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$. Probar que f posee inversa en todo \mathbf{R} y calcular $(f^{-1})'(0)$.

5.6. Sea $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{\log t dt}{1+4t}$, $x > 0$. Estudiar su crecimiento. Probar que $H\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ y que $0 < H(2) < \frac{4}{9}$.

5.7. Sea $H(x) = \int_x^{2x} e^{-3s^2} ds$. Probar que $0 < H(1) < \frac{1}{8}$. Hallar la ecuación de la tangente a su gráfica en $x = 0$. Precisar los x en los que H alcanza sus valores extremos en el intervalo $[0, 1]$.

5.8. Determinar en qué x del intervalo que se indica alcanzan su máximo y su mínimo las funciones:

a) $F(x) = \int_{-1}^x t [e^t - e^{t^4}] dt$ en $[-1, 1]$ b) $H(x) = \int_{-x^2}^4 \frac{t dt}{1+|t|}$ en $[0, 2]$

c) $G(x) = \int_{-1}^{\tan x} \frac{t^3}{1+t^2} dt$ en $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ d) $K(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{36+t^3}}$ en $[-1, 6]$

5.9. Precisar cuántas veces se anula cada función en el intervalo indicado:

a) $H(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ en $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ b) $K(x) = \int_0^{x^3} \frac{2e^s}{1+s} ds - 1$ en $[0, 1]$.

5.10. Hallar las siguientes primitivas:

a) $\int \frac{x+1}{x+9} dx$	b) $\int \frac{x+1}{x^2+9} dx$	c) $\int x(x^2+3)^2 dx$	d) $\int \frac{\log x}{x^2} dx$	e) $\int (\log x)^3 dx$
f) $\int \frac{x^4}{x+1} dx$	g) $\int \frac{dx}{x^4-2x^3}$	h) $\int \frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1} dx$	i) $\int \frac{x+2}{x^3-8} dx$	j) $\int x^2 \arctan \frac{1}{x} dx$
k) $\int x^3 e^{-x} dx$	l) $\int x^3 e^{x^2} dx$	m) $\int \frac{dx}{1+2e^x+e^{2x}}$	n) $\int \tan^2 x dx$	ñ) $\int \operatorname{sen} x \cos x dx$
o) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$	p) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x dx}{5+4\cos x}$	q) $\int \frac{dx}{3\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}$	r) $\int 4x \cos x^2 dx$	s) $\int 4x \cos^2 x dx$
t) $\int \operatorname{arc sen} x dx$	u) $\int \sqrt{x+5} dx$	v) $\int x^3 \sqrt{1-x^2} dx$	w) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx$	x) $\int \sqrt{x^2-1} dx$

5.11. Calcular, si existen, las integrales:

a) $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x+x^3}$	b) $\int_1^1 \frac{dx}{x^4}$	c) $\int_0^{1/2} \frac{(2x^3-x^2) dx}{2x^2-x-1}$	d) $\int_{-2}^4 (x+4 -3 x) dx$
e) $\int_{-\log 3}^{-\log 2} \frac{e^{2x}}{e^x-1} dx$	f) $\int_1^e x \log x dx$	g) $\int_1^4 \log(x+\sqrt{x}) dx$	h) $\int_0^1 \arctan(\sqrt{x}) dx$
i) $\int_0^{\pi/2} \cos 2x \cos x dx$	j) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x dx$	k) $\int_0^{\pi/4} \frac{(\tan^3 x+1) dx}{(3+\tan^2 x)\cos^2 x}$	l) $\int_{-\pi/6}^0 \frac{\cos x dx}{3\operatorname{sen} x-2\cos^2 x}$
m) $\int_1^3 x \sqrt{1+x} dx$	n) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+4} dx$	ñ) $\int_0^{1/2} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$	o) $\int_0^{1/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5.12. Calcular la integral $\int_{-1}^0 x^3 \operatorname{sen} x^2 dx$. Decidir si esta integral es mayor o menor que 0.

5.13. a] Hallar $I = \int_0^{\pi/3} \sin 2x e^{-2\cos x} dx$. b] Probar, sin utilizar el resultado de a], que $0 \leq I \leq \frac{2}{3}$.

5.14. Calcular la integral $\int_0^{\log 3} \frac{9 - e^x}{e^{2x} + 3} dx$. Probar que esta integral es mayor que $\frac{1}{2}$.

5.15. Hallar los valores máximo y mínimo de $g(x) = \frac{x^2 - 5x}{x - 9}$ en $[2, 4]$. Probar que $\frac{8}{5} < \int_2^4 g(x) dx < 2$. Hallar la integral y, usando desarrollos de Taylor, comprobar las desigualdades anteriores.

5.16. Sea $f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x+3}}$. Hallar los x tales que $f(x) = 0$ y tales que $f'(x) = 0$. Dibujar su gráfica. Hallar el área de la región acotada por los ejes y la gráfica.

5.17. Sea $g(x) = \frac{x^3 + x^2 - 7}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$. Hallar la primitiva $G(x)$ que cumple $G(0) = -1$. Probar que $g(x) > 1$ si $x \in [0, 1]$ y que existe un único $c \in (0, 1)$ tal que $G(c) = 0$.

5.18. a] Hallar una primitiva de $f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2}$. b] Si $G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$, hallar $G'(-1)$ y $G(-1)$. c] Estudiar si convergen $\int_1^\infty f$ e $\int_{-1}^1 f$.

5.19. Sea $g(x) = x \arctan \frac{1}{x^2}$, $g(0) = 0$. a] Determinar si es continua y derivable en $x = 0$. b] Calcular una primitiva de g . c] Estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_0^\infty g$.

5.20. Sea $f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$. a] Calcular $\int_4^9 f$. b] Precisar si converge $\int_0^1 f$.

5.21. Sea $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x-5}$. a] Hallar $\int_{-4}^0 f(x) dx$. b] Precisar si converge $\int_5^\infty f(x) dx$.

5.22. Calcular $\int_0^{\log 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$. Estudiar si converge $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$.

5.23. Probar que $\int_3^\infty x^{-3} e^{-6/x} dx$ es convergente y que su valor es menor que $\frac{1}{18}$.

5.24. a] Hallar los 2 primeros términos no nulos de la serie de Taylor de $f(x) = e^x \log(1+2x)$ en $x=0$. b] Precisar si converge la integral impropia $\int_0^1 \frac{e^x \log(1+2x)}{x^2} dx$.

5.25. Sean $g(x) = e^{x-x^2}$ y $G(x) = \int_{2x}^{2x+1} g(t) dt$. a] Hallar $G'(\frac{1}{2})$ y estudiar dónde crece y decrece G . b] Probar que para todo x se cumple $0 \leq G(x) \leq e^{1/4}$. c] Estudiar si converge $\int_0^\infty g$.

5.26. Sea $f(x) = (2x-1)e^{-x}$. a] Dibujar aproximadamente su gráfica. b] Hallar el área de la región limitada por los ejes y la gráfica de f . c] Decidir si converge la integral $\int_1^\infty f$.

5.27. Sea $F(x) = \int_2^x s^3 e^{-s} ds$. a] Hallar los x en los que F alcanza sus valores extremos en $[0, 2]$ y probar que su valor máximo es menor que 7. b] Estudiar si F tiene cota superior en $[0, \infty)$. c] Precisar cuántas veces se anula F en $[0, 2]$.

5.28. a] Precisar, si existen, los x para los que $F(x) = \int_0^x \frac{2s-1}{\sqrt{s^3+1}} ds$ toma sus valores extremos en $[0, \infty)$. b] Probar que $-\frac{1}{2} < F(\frac{1}{2}) < 0$.

5.29. Sean $h(x) = \frac{4x-1}{(x+4)(x^2+1)}$ y $H(x) = \int_0^{x/2} h$. a] Calcular $H'(2)$. b] Determinar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{H(x)}{x}$. c] Precisar cuántos ceros tiene H en el intervalo $[\frac{1}{2}, 4]$.

5.30. Sean $h(x) = \frac{4-x^4}{4+x^4}$, $H(x) = \int_0^x h$. a] Hallar 3 términos no nulos del desarrollo de Taylor de h en $x=0$. Probar que $\frac{3}{4} < H(1) < 1$. b] Precisar los x en los que H toma sus valores extremos en el intervalo $[0, 1]$. ¿Existe el valor máximo o mínimo de H en $[0, \infty)$?

5.31. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias. Hallar su valor si se puede:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} & \text{b)} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} & \text{c)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx & \text{d)} \int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x^{3/2}} dx \\ \text{e)} \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx & \text{f)} \int_0^1 \log x dx & \text{g)} \int_1^\infty (1 - \cos \frac{2}{x}) dx & \text{h)} \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+1/x}} \\ \text{i)} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} & \text{j)} \int_1^\infty \log x \sin \frac{1}{x^2} dx & \text{k)} \int_0^\infty \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\arctan x^2} dx & \text{l)} \int_0^1 \frac{\cos x dx}{e^{x^2}-1} \end{array}$$

5.32. Discutir según los valores de $a \in \mathbb{R}$ la convergencia de las integrales:

$$\text{a)} \int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^a} dx \quad \text{b)} \int_0^\infty [x^3 + \sin x]^a dx \quad \text{c)} \int_0^\infty \frac{\log(1+e^{ax})}{1+x^2} dx$$

5.33. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{2x} \sin t^2 dt}{x^3}$, utilizando L'Hôpital y desarrollos de Taylor.

5.34. Probar que $\int_0^1 x^2 \cos x^2 dx \geq \frac{1}{6}$: **a)** acotando el integrando, **b)** utilizando desarrollos de Taylor.

5.35. Sea $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$. Estudiar si es derivable en $x=0$. Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de f en el intervalo $[-4, 1]$. Calcular $\int_{-4}^4 f$. Probar que $\frac{7}{10} \leq \int_0^1 f \leq \frac{7}{8}$.

5.36. Sea $F(x) = \int_{-1}^x t e^{t^3} dt$, con $x \in [-1, \infty)$. i) Hallar los x del intervalo en los que F alcanza sus valores máximo y mínimo. ii) Probar que $F(0) > -\frac{1}{2}$.

5.37. Sea $f(x) = \sqrt{x} \arctan \sqrt{x}$. Calcular una primitiva de f y hallar el área de la región encerrada entre su gráfica y las rectas $y=0$ y $x=3$.

5.38. Calcular el área encerrada entre las gráficas de $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ y $f(x) = x$ en $[0, 2]$.

5.39. Calcular el área de la región acotada entre las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{2-x}$ e $y = 0$.

5.40. Hallar el área de la región encerrada entre la gráfica de $f(x) = |49-x^2|$ y su recta tangente en $x=-1$.

5.41. Hallar el área de la región encerrada entre la curva $y = x^3$ y la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = a > 0$.

5.42. Hallar el área de la región acotada encerrada por la gráfica de $f(x) = x \log(1+x)$ y la recta $y=x$.

5.43. Calcular el área de la menor de las dos regiones acotadas por las curvas $x^2 + y^2 = 2$ y $x = y^2$.

5.44. Calcular el área de una de las regiones comprendidas entre la gráfica de $f(x) = \sin x$ y esta misma gráfica trasladada horizontalmente una distancia $\frac{\pi}{3}$ hacia la derecha.

5.45. Sea la región del cuarto cuadrante limitada por la gráfica de $f(x) = -e^{-ax}$ ($a > 0$) y el eje x . Probar que la recta tangente a $f(x)$ en $x=0$ divide dicha región en dos partes de igual área.

Problemas adicionales (17-18)

Preliminares

1. Sea $f : A \rightarrow B$ una función y sean $X, Y \subset A$. Estudiar si son ciertas o no las afirmaciones:

a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, b) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$, c) $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$.

Probar que f es inyectiva si y sólo si $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ para cualquier par $X, Y \subset A$.

2. Demostrar por inducción sobre n : a) que la suma de los n primeros números impares es n^2 ; b) las desigualdades: $\sqrt{n} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}$.

3. Sean las igualdades: i) $\sum_{k=1}^n \frac{2}{(k+1)(k+2)} = \frac{n}{n+2}$, ii) $\sum_{k=1}^n \frac{2}{k} = \frac{7n+1}{n+3}$.

Probar que una de ellas es falsa y demostrar (por inducción) que la otra es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. ¿Cuánto vale $\sum_{k=1}^n 1$? ¿Cuánto vale $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})$? ¿Es $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^n 1$?

5. Hallar el mcd y el mcm de: a) 12345 y 67890, b) 135, 315 y 351.

6. Si $a_1 = -3$ y $a_{n+1} = a_n + \frac{3}{5}$, calcular a_4, a_{28} y la suma $S = a_4 + a_5 + \dots + a_{28}$. ¿Se pueden encontrar 25 enteros en progresión aritmética cuya suma sea la misma S ? ¿Y si son 24 los enteros?

7. La suma de 3 números en progresión geométrica es 70. Si el primero se multiplica por 4, el segundo por 5 y el tercero por 4, los números resultantes están en progresión aritmética. Hallar los 3 números.

8. Calcular $\binom{7}{7}, \binom{7}{6}, \dots, \binom{7}{0}$: a) Mediante el triángulo de Tartaglia, b) con la fórmula $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$, c) con la fórmula $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$. Utilizando lo anterior, hallar $(\sqrt{2}-1)^7$.

9. Probar que $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{2}$ son irracionales.

10. En dos partidos de baloncesto sucesivos un jugador ha obtenido un porcentaje de acierto en tiro de tres puntos superior al de otro jugador. ¿Implica esto que en el conjunto de los dos partidos es más alto el porcentaje del primer jugador?

11. Demostrar que la media geométrica de dos números positivos x e y es menor o igual que la aritmética, es decir, que $\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$, si $x, y > 0$. ¿Cuándo coinciden?

12. Determinar todos los reales x que satisfacen:

a) $|x^2+x-2|=2-x-x^2$ b) $|x^3+11x-30| \leq 30$ c) $\left|\frac{x-2}{x+1}\right| \leq 2$ d) $\frac{|x-1|}{x} > -2$

13. Probar que: $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x+y+|y-x|)$, $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x+y-|y-x|)$.

14. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

i) $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, $\forall a, b \neq 0$; ii) $\sqrt{a^2} = -a$, $\forall a \leq 0$; iii) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$, $\forall a, b > 0$;

iv) $4^{a+b} = 4^a + 4^b$, $\forall a, b$; v) $(a^b)^c = (a^c)^b$, $\forall a > 0$; vi) $\log(ab) = \log a + \log b$, $\forall a, b$;

vii) $a < b \Rightarrow ac < bc$, $\forall a, b, c$; viii) $a > a^3$, si $0 < a < 1$; ix) $a^b > 1$, $\forall a > 1, \forall b$.

15. La unión infinita de intervalos $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}})$, ¿tiene supremo e ínfimo? ¿es abierto o cerrado?

16. Probar que si A y B son conjuntos abiertos entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son también abiertos. Más en general, ¿es abierto el conjunto unión de una sucesión infinita de conjuntos abiertos?, ¿lo es su intersección? Deducir propiedades análogas para conjuntos cerrados.

17. Encontrar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$

b) $g(x) = \sqrt{\sin x + \cos x}$

c) $h(x) = \frac{1}{\tan x}$

d) $k(x) = \sqrt{1-x} + \log(1+x)$

e) $l(x) = \log(1-x^2)$

f) $m(x) = \tan(\pi x^2)$

18. Sea $g(x) = \log(2+\sqrt{x+3})$. Precisar el dominio de g . ¿Para algún x es $g(x)=0$?

19. Sea $g(x) = \log(4x-3\sqrt{x})$. Hallar su dominio. Encontrar todos los reales x que satisfacen $g(x)=0$.

20. Sean f con dominio \mathbf{R} . Probar que son falsas las implicaciones: a) f impar $\Rightarrow f$ inyectiva en \mathbf{R} . b) f inyectiva en $\mathbf{R} \Rightarrow f$ impar.

Probar que es falsa la implicación: f inyectiva en su dominio $D \Rightarrow f$ estrictamente monótona en D .

21. Si $f(x) = \frac{|4-x^2|}{3x}$, precisar los reales x que cumplen i) $f(x) = -\frac{5}{9}$. ii) $f(x) \leq 1$. ¿Es f inyectiva en su dominio?

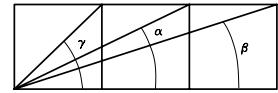
22. Sean $c(x) = x^2$, $r(x) = \sqrt{x}$ y $l(x) = 1-x$. Precisar en qué intervalos es $f = r \circ c \circ l$ inyectiva, hallando f^{-1} en cada uno. Expresar $g(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ como composición de c , r y l y hallar $\text{dom } g$.

23. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 4)$ y $(2, -5)$. Hallar y dibujar la función inversa $y = f^{-1}(x)$ de la función $y = f(x)$ definida por la recta anterior. Escribir las funciones compuestas $f^2 \circ [f^{-1}]^2$ y $[f^{-1}]^2 \circ f^2$.

24. Sabiendo que $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ y que α está en el segundo cuadrante, calcular $\cos \alpha$, $\sin 2\alpha$, $\tan \alpha$ y $\sin 3\alpha$, usando tan sólo sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces cuadradas.

25. La base de un triángulo mide 15 metros y los dos ángulos que se apoyan en ella son de 30° y 45° . ¿Cuánto valen los restantes lados y el ángulo que falta por determinar?

26. Si los tres cuadrados del dibujo son iguales, ¿cuánto vale $\alpha + \beta + \gamma$?



27. Hallar todos los x reales que verifican:

a) $\log(4x^2-3x) \leq 0$ b) $\cos 3x = 3 \cos x$ c) $\cos 2x - 2 \cos x = 3$ d) $3 \tan x + 2 \cos x = 0$
 e) $1 + 4 \sin^2 x = 2 \tan x \tan 2x$ f) $\sin 2x + \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin 5\pi$ g) $\cos^{58} x + \sin^{40} x = 1$

28. Escribir en la forma más simplificada posible $\text{th}(\log(\sin \frac{\pi}{6}))$. [Es un racional. log siempre neperiano].

29. i) Escribir los complejos $-5i$, $1+i$, $-3-i\sqrt{3}$, $-\pi$, $4-3i$, en la forma $re^{i\theta}$.

ii) Escribir $3e^{i\pi}$, $3e^{-3\pi i}$, $4\cos \frac{\pi}{6} - 4i \sin \frac{\pi}{6}$, $e^{i \sin^2}$, i^{765432} , en la forma $x+iy$.

30. Hallar y dibujar el complejo conjugado de $z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$. Calcular z^3 .

31. Si $z=2i$, $w=i-1$, escribir z , w y $\frac{z}{w}$ en la forma $re^{i\theta}$ y escribir w^5 en la forma $a+bi$.

32. Escribir el complejo $z = -1 + i\sqrt{3}$ en la forma $re^{i\theta}$ y calcular z^3 .

33. Sea $z = \frac{2}{\sqrt{3}+i}$. Escribir z en las formas $a+bi$ y $re^{i\theta}$. Escribir z^5 en cartesianas.

34. Calcular y expresar en la forma $a+bi$: a) $(\frac{2-4i}{1+3i})^6$, b) $\sqrt[4]{-16e^{i\pi/3}}$.

35. Escribir $w = -\sqrt{3} + i$ en la forma $re^{i\theta}$. Escribir $z = w^6$ y las raíces $\sqrt[3]{z}$ en la forma $a+bi$.

- 36.** Sean los números complejos $z = 1 + i$, $w = -2 - i$. Expresarlos en notación módulo y argumento, y representar gráficamente los siguientes complejos: z , w , $z+w$, $z-w$, zw , $1/z$, $1/w$, z/w y w/z . Representar también $ze^{i\pi/2}$, $ze^{-i\pi/2}$, $ze^{i\pi}$ y $ze^{i2\pi}$. ¿Cuánto vale $ze^{-5\pi i}$?
- 37.** Si $z = 2 + 3i$ y $w = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, hallar: $z+w$, $\bar{z}-w$, zw , w^4 , \sqrt{w} , $\frac{z}{w}$, $\frac{w}{z}$, $|w|$, $|z|\operatorname{Re} w$, $|z|\operatorname{Im} w$.
- 38.** Si $z = x + iy$, escribir la parte real y la parte imaginaria de: $z + \bar{z} + z \cdot \bar{z}$, z^{-2} , e^{iz} .
- 39.** Determinar si las siguientes igualdades son ciertas para todo z complejo:
- a) $2\operatorname{Re}(z) = z + \bar{z}$ b) $|z| = |\bar{z}|$ c) $\operatorname{Re}(z \cdot w) = \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Re}(w)$ d) $z^2 = |z|^2$.
- 40.** Representar los complejos que satisfacen:

$$z - \bar{z} = i, |z - 1| \leq |z + 1|, |z - 1| = 2|z + 1|, |e^z| = \operatorname{Re}(z), \operatorname{Arg}(z^3) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Sucesiones, límites y continuidad en R

1. ¿Qué forma tienen las sucesiones convergentes cuyos términos son todos enteros?
2. ¿Tienen $a_n = \sin \frac{n^2\pi}{4} - \frac{7}{n}$, $b_n = 2^{(-2)^n}$ y $c_n = \cos n + n$ alguna subsucesión convergente?
3. ¿Es cierta la afirmación: $\{a_n\}$ creciente $\Rightarrow \{a_n^2\}$ creciente? Probarla o dar un contrarejemplo.
4. Demostrar que $\{a_n\} \rightarrow a > 0 \Rightarrow \{\sqrt{a_n}\} \rightarrow \sqrt{a}$, y que $\{a_n\} \rightarrow \infty \Rightarrow \{\sqrt{a_n}\} \rightarrow \infty$.
5. Sea $a_n \leq b_n \leq c_n$. Probar que:
 - $a_n \rightarrow L$, $c_n \rightarrow L \Rightarrow b_n \rightarrow L$;
 - $b_n \rightarrow \infty \Rightarrow c_n \rightarrow \infty$;
 - $b_n \rightarrow -\infty \Rightarrow a_n \rightarrow -\infty$.
6. Demostrar que si $\{a_n\}$ es acotada y sus únicos puntos de acumulación son 10^7 y 10^{-7} , y la sucesión $\{b_n\}$ diverge hacia $+\infty$, entonces la sucesión $\{a_n b_n\}$ es divergente hacia $+\infty$.
7. Sea la sucesión $\left\{ \frac{\arctan \sqrt{n} - 2^{1/n}}{\sqrt{4n^2 - 1}} \right\}_{n \geq N}$. Hallar, explicando los pasos, algún $N \in \mathbf{N}$ tal que para $n \geq N$ sus términos disten del límite menos de $\varepsilon = 10^{-1}$.
8. Hallar (si existe) el límite de las siguientes sucesiones:
 - $n \left(\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n-1}} - \sqrt{2} \right)$
 - $\frac{1}{2n} \sqrt{12n^3 + 6n - 2} - \sqrt{3n - 5}$
 - $\sqrt[3]{n^4 - n^2} - ne^{\arctan n}$
 - $n^3 - \sqrt{n!}$
 - $n \ln(2n - 2n \ln n)$
 - $\frac{n!}{n^n}$
 - $\frac{2n - \sqrt{n^3}}{3n + \log n}$
 - $\frac{\sqrt[3]{8n^7(1-n^2)} - n^3 \sin \frac{1}{n}}{(n+1)^3}$
 - $(n^5 + n + 7)^{1/n}$
 - $\left(2 - \frac{1}{n} \right)^{2n}$
 - $\left(\frac{3n^2 + 10}{\sqrt{10n^4 + 3n}} \right)^n$
 - $\left(\frac{2^{2n+1} + 3^n}{2^{2n-1} + 3} \right)^{\frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{2n + \sin n}}$
 - $\left(\frac{n+1}{n^2 + 2} \right)^n$
 - $\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 2} \right)^n$
9. Sean las sucesiones $a_n = \sqrt{4n^4 + n} - n!$ y $b_n = \frac{2n-4(-1)^n}{n^2 + 4(-1)^n}$.
 - Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
 - Para la que tiene límite finito, hallar razonadamente algún $N \in \mathbf{N}$ tal que para $n \geq N$ sus términos disten del límite menos de $\varepsilon = \frac{1}{10}$.
 - Hallar el límite de las sucesiones $\left\{ \frac{\sin(a_n)}{a_n} \right\}$ y $\left\{ \frac{\sin(b_n)}{b_n} \right\}$.
10. Sean las sucesiones $a_n = \frac{2n - \sqrt{n^2 + 9n}}{9 - \sqrt{2n}}$ y $b_n = \frac{e^n e^{-2/n}}{e^{3n} + e^{-n}}$.
 - Calcular razonadamente su límite.
 - Para la que tiene límite finito, dar razonadamente algún $N \in \mathbf{N}$ tal que para $n \geq N$ sus términos disten del límite menos de $\varepsilon = \frac{1}{100}$.
11. Sean: $c_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 1$, $i_n \rightarrow \infty$, $d_n \rightarrow -\infty$ y a_n acotada. ¿Qué se puede decir sobre la convergencia de:
 $\{i_n + d_n\}$, $\{c_n + a_n\}$, $\{c_n i_n\}$, $\{i_n a_n\}$, $\{b_n a_n\}$, $\{\frac{c_n}{a_n}\}$, $\{\frac{b_n}{c_n}\}$, $\{\frac{i_n}{d_n}\}$, $\{i_n^c\}$, $\{b_n^{i_n}\}$?
12. Probar por inducción que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ y hallar el límite de $\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$.
13. Hallar una sucesión cuyos 5 primeros términos sean $-1, \frac{3}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{7}{24}, -\frac{9}{120}$ y precisar si converge.
14. Definimos la sucesión $\{a_n\}$ mediante: $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, $a_1 = \sqrt{2}$. Probar que tiene límite y calcularlo. [Demostrar por inducción que $a_n < 2$ y probar que $\{a_n\}$ es creciente].
15. Hallar el límite de $a^{1/n}$ para todo $a \geq 0$, sin hacer uso de teoremas no demostrados.
16. Precisar las funciones f que cumplen la condición:
 - $\forall \varepsilon \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
 - $\forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
17. Si $f(x) = \frac{\arctan x}{x+5}$, razonar si es cierto que $\forall \varepsilon > 0 \exists M$ tal que si $x > M$ entonces $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

- 18.** Sean $f(x) = \frac{2x - \operatorname{sen} x}{x + 2 \operatorname{sen} x}$ y $L = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Hallar un M tal que $|f(x) - L| < 0.1$ si $x > M$.
- 19.** Utilizando únicamente las definiciones probar que: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x + 100 \cos x) = \infty$, b) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$, y que es falso: a) $\lim_{x \rightarrow 2} 3x = 5$, b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{sen} x = 0$.
- 20.** Probar que $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$ y $g(x) = \sqrt{|x|} - 5x$ son continuas en 0 con la definición $\varepsilon - \delta$. En particular, determinar un δ para $\varepsilon = 1$ y $\varepsilon = 0.01$.
- 21.** Sea $f(x) = x \operatorname{arctan} \frac{1}{x-2}$, $f(2) = \pi$. a] Probar que tiene límite en $x=0$ usando sólo la definición $\varepsilon - \delta$. b] Estudiar si f es continua en $x=2$.
- 22.** Sea $f(x) = x^2 - x^2 \operatorname{arctan} \frac{2}{x}$. Hallar $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Probar que tiene límite en $x=0$ con la definición $\varepsilon - \delta$.
- 23.** Sea $f(x) = \log \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{x} \right)$. Hallar su dominio y calcular, si existe, $\lim_{x \rightarrow 2/3^+} f(x)$.
- 24.** Sea $f(x) = \frac{2x}{4 - \sqrt{x^2 - 9}}$. a] ¿Es par o impar? b] Hallar el dominio de f . c] Hallar razonadamente el límite de f cuando: i) $x \rightarrow \infty$, ii) $x \rightarrow 5^+$, iii) $x \rightarrow -3^-$, iv) $x \rightarrow -\infty$.
- 25.** Sean $f(x) = [\frac{1}{x}]$ (parte entera), $x > 0$; $g(x) = \cos \frac{1}{x}$; $h(x) = \frac{\tan x}{x^2}$; $k(x) = \begin{cases} |2-x| & \text{si } x < 3 \\ x-4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$. Determinar los puntos a para los que dichas funciones tienen límite en a ; son continuas en a ; poseen límites laterales en a . Ver si tienen límite cuando x tiende a ∞ .
- 26.** Determinar (si existen) los límites siguientes:
- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{sen}|x|-x}-1}{1-\log(x+\cos x)}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{7x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3+2x}{x+5x^2} - \frac{3}{x} \right]$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x-\operatorname{sen} 2x}{2x+3 \operatorname{sen} 4x}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log \frac{1}{x}$;
- f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)^2}{x^2-1}$; g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{2x^2} - \sqrt{2x^2-6x} \right]$; h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{th}(\operatorname{ch} x - \cos x)$; i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctan} x}{x}$;
- k) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{\log x} - \frac{3}{\sqrt{\log x}} \right]$; l) $\lim_{x \rightarrow 1} e^{-1/|x-1|}$; m) $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{sh}(\log x)$; n) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5-1}{x-1}$; ñ) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$.
- 27.** Sea $g(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$. a] Precisar todos los reales x que cumplen $g(x) = \frac{3}{2}$. b] Probar que g se anula en el intervalo $[-\frac{\pi}{6}, 0]$. c] ¿Es g una función inyectiva en todo su dominio?
- 28.** Sea $g(x) = \log \left(3 - \frac{5}{x-1} \right)$. a] Hallar su dominio. b] Precisar si $g(c) = 0$ para algún c del intervalo $(0, 3)$. c] Hallar el límite de g cuando: i) $x \rightarrow \infty$, ii) $x \rightarrow 1^-$, iii) $x \rightarrow 8/3^+$.
- 29.** Probar que $x^5 = 2^x$ tiene una solución i) menor que 2, ii) mayor que 2.
- 30.** Estudiar si el polinomio $P(x) = 4x^4 + 2x - 1$ se anula o no en el intervalo $[-1, 1]$.
- 31.** Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué se puede decir de f ?
- 32.** Sea $f(x) = \log|x-1| - \cos x$. ¿Existe $c \in (0, 2)$ con $f(c) = 0$? ¿Alcanza su valor mínimo en $[0, 4]$?
- 33.** Probar que si f es continua en $[a, \infty)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ es finito, entonces f es acotada en $[a, \infty)$. ¿Alcanza siempre f su valor máximo en dicho intervalo?
- 34.** Supóngase f continua en $[a, b]$ y sea c un número cualquiera. Demostrar que existe un punto de la gráfica de f en $[a, b]$ para el que la distancia a $(c, 0)$ se hace mínima. ¿Es cierto lo anterior si sustituimos $[a, b]$ por (a, b) ? ¿Y si sustituimos $[a, b]$ por \mathbf{R} ?
- 35.** Demostrar que $f(x) = 7x - 5$ es uniformemente continua en \mathbf{R} y que $g(x) = x^2$ no lo es.

Derivadas en \mathbf{R}

1. Hallar la primera y segunda derivadas de las funciones siguientes indicando su dominio:
 a) $f(x) = \arctan(\log x^2)$; b) $g(x) = \arccos\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)$.
2. Hallar los x que anulan las derivadas segundas de: a) $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{3x+1}}$, b) $g(x) = \ln(1+\cos x)$.
3. Sea $f(x) = 2x + \frac{3}{\sin x}$. Hallar todos los reales x tales que i) $f'(x) = 0$, ii) $f''(x) = 0$.
4. Sea $f(x) = |x^2 - 4|$. Determinar los x tales que $f(x) < 3$. Hallar, si existen, $f'(-3)$ y $f'(2)$.
5. Sea $f(x) = \log(1 - |x^2 - 1|)$. Precisar su dominio. Hallar, si existen, $f'(1)$ y $f'(-\frac{4}{3})$.
6. Precisar si es cierta la implicación: f y g derivables en todo \mathbf{R} y $f(x) \leq g(x) \forall x \Rightarrow f'(x) \leq g'(x) \forall x$.
7. Demostrar que la derivada de una función par es impar y viceversa. ¿Es periódica la derivada de una función periódica?
8. Hallar las derivadas de las funciones inversas $(\text{sh})^{-1}$, $(\text{ch})^{-1}$ y $(\text{th})^{-1}$.
9. Hallar y dibujar la ecuación de la recta tangente en $x=2$ a las siguientes funciones:
 a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, b) $g(x) = \frac{3x}{7} - 12$, c) $h(x) = 3x^2 + 2x - 1$, d) $k(x) = (2x - 3)^{-7/3}$.
10. Sea $f(x) = x \arctan\left(\frac{1}{\sin x}\right)$, $f(0) = 0$. Estudiar si f es continua y derivable en $x=0$. Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = \frac{5\pi}{2}$.
11. Hallar los puntos de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 40$ en los que la recta tangente tiene pendiente $-\frac{2}{9}$.
12. Hallar b y c tales que la parábola $y = x^2 + bx + c$ sea tangente a la recta $y = x$ en $x = 1$.
13. Hallar la ecuación de la elipse con sus ejes paralelos a los coordenados y centrada en el origen que tiene por tangente la recta $5y + 4x = 25$ en un punto de abscisa $x = 4$.
14. Hallar la recta tangente a la curva $y^4 - 4xy^2 + 2x = 2$ en el punto $(1, 2)$.
15. Probar que la tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ corta a la gráfica de f sólo en el propio punto $(a, \frac{1}{a})$.
16. Hallar el punto de corte de las tangentes a la gráfica de $g(x) = |1 - \frac{4}{x}|$ en $x = -2$ y $x = 2$.
17. Encontrar la recta que pasa por $(4, 3)$ y es paralela a la recta tangente a $f(x) = \ln(1 + e^{\sin x})$ en $x = 0$.
18. Un astronauta viaja de izquierda a derecha sobre la curva $y = x^2$. Al desconectar el cohete viajará a lo largo de la tangente a la curva. ¿En qué punto debe desconectar para alcanzar i) $(4, 9)$, ii) $(4, -9)$?
19. Hallar los a tales que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$ en $x = a$ pase por $(1, 0)$.
20. ¿Bajo qué ángulos se cortan las curvas $y = \sin x$, $y = \cos x$?
21. Sea $f(x) = 3 + x^5(x-3)^4$. Probar que su derivada f' tiene al menos un cero en el intervalo $(0, 3)$.
22. Probar que f' acotada en un intervalo $I \Rightarrow f$ uniformemente continua en I . Deducir que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ lo es en todo \mathbf{R} .
23. Sea $f(x) = x + 2\cos x$. Hallar, si existe, el valor mínimo de f en el intervalo $[0, 1]$. Probar que existe f^{-1} , función inversa de f para $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, y hallar la derivada $(f^{-1})'(2)$.

24. Hallar (si existen) los valores máximo y mínimo de:

a) $f(x) = x + 2|\cos x|$ en $[0, \pi]$. b) $g(x) = \frac{e^x}{1-|x|}$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$
 c) $h(x) = \arcsen x + \sqrt{3} \log |2-x|$ en su dominio.

25. Determinar los valores máximo y mínimo que alcanza $f(x) = |4x-3|-x^2$ en el intervalo $[-3, 3]$.
 ¿Existe algún $x \in (0, 2/3)$ para el que $f(x) = 0$?

26. Sea $f(x) = \arctan x - x^2 - 2$. Hallar sus valores máximo y mínimo en $[0, \sqrt{3}]$. Precisar cuántas veces se anula f en el intervalo $[0, 1]$.

27. Probar que si $x > 0$ es $x + \frac{4}{x} \geq 4$: i) usando sólo desigualdades, ii) hallando su valor mínimo.

28. Sea $f(x) = \arctan \frac{2}{x-3}$, $f(3) = \frac{\pi}{2}$. a] Estudiar donde es f continua y derivable. b] Hallar $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.
 c] ¿Se anula f en $[1, 5]$? d] Probar que posee función inversa f^{-1} en $[4, \infty)$ y hallar $(f^{-1})'(\frac{\pi}{4})$.

29. Probar que $f(x) = x^2 - \cos x - x \operatorname{sen} x$ tiene exactamente dos ceros.

30. Estudiar cuántas veces se anulan las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} - x - 1$ en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ b) $g(x) = e^{-x} + 3x$ en $[-2, 0]$

31. Sea $f(x) = x^2(1-x^2)^{-1/2}$. Determinar su dominio e intervalos de crecimiento y decrecimiento. Probar que existe un único $c \in (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ tal que $f(c) = \frac{2}{3}$.

32. Sean $P(x) = x^5 + 3x^4 - 7x^3 - 21x^2 + 10x + 30$ y $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15$. Hallar el $\operatorname{mcd}(P, Q)$. Hallar las raíces de P y de Q . Realizar el producto $P \cdot Q$ y la división P/Q .

33. Ver que $P(x) = 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 3$ tiene raíces múltiples y hallar todas sus raíces.

34. Probar que si c es raíz real de $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ se cumple: $|c| \leq \max\left\{1, \frac{1}{|a_n|} [|a_0| + \dots + |a_{n-1}|]\right\}$.

35. Precisar cuántos ceros reales tiene el polinomio $P(x)$ cuya derivada es $P'(x) = 3x^2 + 2x - 8$ y tal que la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ pasa por $(1, -1)$.

36. Precisar cuántas raíces de los siguientes polinomios hay en los intervalos que se indican:

a) $P(x) = 3x^3 - x^2 + x - 1$ en $(-\infty, 0)$ y en $(1, \infty)$ b) $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$ en $(-\infty, 0)$ y en $(0, 1)$
 c) $P(x) = x^4 + 8x - 1$ en $(-3, -2)$ y en $(0, 1)$ d) $P(x) = 2x^5 + 8x^3 + 5x - 6$ en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$

37. Dibujar la gráfica de $f(x) = |\log(x+1) - 1|$ a partir de la de $\log x$. Hallar los x tales que $f(x) < 1$.

38. Sea $g(x) = x^2 - 8 \log(x+3)$. a] Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en $x=-2$.
 b] Precisar en qué intervalos crece y decrece g y ver si se anula g'' . c] Hallar $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.
 d] Probar que g se anula en el intervalo $[0, 5]$. ¿Cuántas veces se anula en todo su dominio?

39. Sea $g(x) = 4 \log(x^3 + 8) - 3x$. a] Determinar su dominio. b] Hallar, si existen, sus valores extremos en el intervalo $[0, 2]$. c] Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ y precisar cuántas veces se anula g en el intervalo $[0, \infty)$.

40. Sea $g(x) = \log\left(2 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$. a) Determinar su dominio y asíntotas. b) Hallar sus extremos en $[3, 6]$.
 c) Precisar cuántas veces se anula g en su dominio.

41. Sea $f(x) = (x^2 + 1)e^{3x - x^2}$. Hallar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Probar que f' se anula en un punto del intervalo $(1, 2)$ y que no lo hace más veces en su dominio. Estudiar cuántas soluciones tiene $f(x) = 1$.

42. Sea $h(x) = (x^3 + 3x + 1)e^{-x}$. a] Hallar el límite de la sucesión $\{h(a_n)\}$, si $a_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n/2} + 2^n}$. b] Hallar, si existen, los valores extremos de h en: i) $[0, 3]$, ii) $[0, \infty)$. c] Determinar la imagen de h .

43. Dibujar las gráficas de las funciones:

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} 3x^4 - 4x^3 & \text{b)} \frac{x}{x^2 + 1} & \text{c)} \frac{x}{4 - x^2} & \text{d)} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} & \text{e)} \sqrt{\frac{x+3}{x^2}} & \text{f)} x\sqrt{\frac{x+3}{x^2}} \\ \text{g)} x^3\sqrt{4-x^2} & \text{h)} 3x^{2/3} + 2x & \text{i)} \sin^2 x & \text{j)} \tan \frac{x}{2} & \text{k)} 3 \sin(x-2) & \text{l)} \sin \frac{\pi x}{180} \\ \text{m)} 1 + |\tan x| & \text{n)} \frac{x}{4} - \frac{1}{\cos x} & \text{o)} \frac{\sin x}{x} & \text{p)} \sin(\tan x) & & \\ \text{q)} \arcsen \frac{1-x^2}{1+x^2} & \text{r)} e^{-|x|} & \text{s)} e^{-x^2} & \text{t)} \frac{1}{2e^x - 1} & \text{u)} \log(x^2 - x) & \text{v)} x \log|x-2| \end{array}$$

44. Discutir según los valores a las formas que puede tener la gráfica de: a) $1 + ax^2 + x^4$, b) $\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x}$.

45. Una farola, que tiene su luz a 3 m de su base, ilumina a un peatón de 1.75 m que se aleja a una velocidad constante de 1 m/s. ¿A qué velocidad se mueve el extremo de su sombra? ¿A qué velocidad crece dicha sombra?

46. Un globo se eleva verticalmente desde el suelo a 100 m de un observador, a una velocidad de 2 m/s. ¿A qué ritmo crece el ángulo de elevación de la línea de visión del observador cuando el globo está a una altura de i) 10 m, ii) 100 m?

47. Un tren parte de una estación en línea recta hacia el este a 100 km/h. 12 minutos después parte otro hacia el norte a 50 km/h. ¿A qué ritmo cambia la distancia entre los trenes 1 hora después de la partida del segundo?

48. El radio de una esfera aumenta con velocidad $v = 2 \text{ cm/s}$. ¿A qué velocidad aumentan la superficie y el volumen de la esfera cuando $r = 10 \text{ cm}$?

49. Hallar el a para el que la suma de los cuadrados de las soluciones de $x^2 + ax + a - 2 = 0$ es mínima.

50. Hallar el valor mínimo de la suma de los arcos tangentes de dos reales ≥ 0 cuya suma sea 1.

51. a) Hallar dos números x, y tales que $|x| + |y| = 1$ y tales que la suma de sus cuadrados sea i) máxima, ii) mínima. b) Dibujar en el plano xy los puntos que cumplen $|x| + |y| = 1$.

52. Sea O el punto $(2, 1)$, y sea L la gráfica de $f(x) = 1 - 3x$. ¿Cuál es el punto de L que dista menos de O ? ¿Y el que dista más?

53. Hallar el punto de la parábola $y = x^2$ más cercano al punto $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$.

54. Hallar los puntos de la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ más cercanos al punto $(\frac{3}{2}, 0)$.

55. Dibujar la elipse $x^2 + 4y^2 - 2x = 24$, hallar la ecuación de su recta tangente en el punto $(4, 2)$ y el punto de esta recta más cercano al origen. Hallar los puntos de la elipse situados a mayor y menor distancia de: i) $(4, 0)$, ii) $(5, 0)$.

56. Hallar los puntos de la curva $3y^2 = 21 + 20x - x^4$ situados a mayor y menor distancia del origen.

57. a) Precisar el número de raíces reales de $P(x) = 3x^4 - 3x + 1$. b) Determinar si el punto de la curva $y = x^3$ más cercano al punto $(0, 1)$ está a la derecha o a la izquierda de $x = 1/2$.

58. Hallar el punto P sobre la gráfica de $f(x) = e^{-x}$ en el primer cuadrante para el que es máxima el área del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a dicha gráfica en P y cuyos catetos están sobre los ejes coordenados.

- 59.** Hallar la forma del cono de mayor volumen entre aquellos de superficie fija (base incluida).
- 60.** Determinar los puntos de la parte de la gráfica de $g(x) = 1 - (x - 2)^3$ contenida en $x, y \geq 0$, para los que la recta tangente en ellos corta el eje y en el punto i) más alto, ii) más bajo.
- 61.** Determinar el área máxima que puede tener un rectángulo que tenga dos lados sobre los semiejes x, y positivos y el vértice opuesto sobre la gráfica de $f(x) = [x^3 + 4]^{-1/2}$.
- 62.** Un lanzador de peso es capaz de lanzar desde una altura de 1.5 m sobre el suelo con una velocidad de 12 m/s. Hallar el ángulo con el que debe hacerlo para llegar lo más lejos posible. ¿Qué longitud puede alcanzar (tomar $g=10 \text{ m/s}^2$)?
- 63.** Probar que el polinomio $P(x) = x^5 + x + 9$ tiene una única raíz real. Encontrar, utilizando el teorema de Bolzano, un intervalo de longitud $1/4$ en el que se encuentre dicha raíz. Precisar el valor de la raíz utilizando el método de Newton.
- 64.** Sean los polinomios cúbicos: a) $P(x) = x^3 + x - 17$, b) $Q(x) = 2x^3 - 7x^2 + 1$, c) $R(x) = 16x^3 - 12x^2 + 1$. Dibujar sus gráficas. Hallar sus raíces reales a partir de las fórmulas de los apuntes. Hallar aproximadamente dichas raíces utilizando el método de Newton.
- 65.** Hallar aproximadamente todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones:
- a) $3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = 0$ b) $x^4 + 4x^2 - 1 = 0$ c) $x^5 + 2x^3 + x + 2 = 0$
 d) $x^2 - \cos x - x \operatorname{sen} x = 0$ e) $x \operatorname{th} x = 1$ f) $\log |x| = x - 1$
- 66.** Hallar aproximadamente los cortes con $y = 0$, los extremos y los puntos de inflexión de $Q(x) = 9x^4 + 8x^3 + 28x^2 + 24x + 3$, $P(x) = 2x^5 - 15x^3 + 20x^2 + 5x + 3$ y $f(x) = e^x - x^3$.
- 67.** Aplicar el método de Newton partiendo de $x_0 = 1$ a las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$.
- 68.** Ver que $f(x) = e^{x/3}$ es contractiva en $[0, 2]$ y aproximar el único cero de $x = e^{x/3}$ en dicho intervalo.

Problemas adicionales (17-18)

Series, Taylor y límites indeterminados

1. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes:

$$\begin{array}{lllll} \text{a)} \sum \frac{\sqrt[3]{4n+5}}{\sqrt[4]{n^5+3}} & \text{b)} \sum n^2 \left(\frac{e}{3}\right)^n & \text{c)} \sum \left[\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1\right] & \text{d)} \sum \frac{7^n + \log n}{n! + n^3} & \text{e)} \sum \frac{3n+1}{n(2n-1)} \\ \text{f)} \sum \frac{n}{(-3)^n} & \text{g)} \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} & \text{h)} \sum (-1)^n \frac{2n+(-1)^n}{n^3+(-1)^n} & \text{i)} \sum (-1)^n e^{-1/n^2} & \text{j)} \sum \frac{\operatorname{sen} n}{n^{3/2}} \\ \text{k)} \sum 3^n \cos^2 n & \text{l)} \sum \cos \frac{\sqrt{n+1}}{n!} & \text{m)} \sum \arctan \frac{1}{n^2} & \text{n)} \sum (-1)^n \arctan \frac{1}{n^2} & \text{o)} \sum \log \left(1 + \frac{2}{n}\right) \end{array}$$

2. Estudiar la convergencia de la serie $\sum a_n$, siendo $a_{n+1} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/2} a_n$ y $a_1 = 1$.

3. Ver para qué $c \in \mathbf{R}$ convergen las series:

$$\begin{array}{lllll} \text{a)} \sum (\sqrt{n^c+1} - \sqrt{n^c}) & \text{b)} \sum \frac{2^n c^n}{n!} & \text{c)} \sum \frac{c^{n^2-5n}}{n^3} & \text{d)} \sum \frac{n^4 c^{2n}}{(n-1)!} & \text{e)} \sum \frac{(2c-1)^{n^2}}{n+1} \\ \text{f)} \sum \frac{(-4)^n (c+1)^{2n}}{(2n)!} & \text{g)} \sum \frac{c^n}{e^{\sqrt{n}}} & \text{h)} \sum \frac{n^2 c^{2n}}{\pi^n} & \text{i)} \sum \frac{c^n}{n^2 - \sqrt{2n}} & \text{j)} \sum \frac{c^n}{n + \log n} \end{array}$$

4. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11}}$ con error menor que 10^{-5} .

5. Precisar los x para los que converge $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$ y hallar su suma. Para i) $x = \frac{1}{4}$, ii) $x = -\frac{1}{4}$, ¿cuántos términos hay que sumar para aproximar el valor exacto con error menor que 10^{-3} ?

6. Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+5^n}$ converge y que su suma está entre 0.213 y 0.215.

[Usar los tres primeros términos y acotar el resto mediante una serie geométrica].

7. Utilizando series de potencias escribir la fracción (fracción generatriz) que coincide con los siguientes racionales expresados mediante decimales: a) 2.713713..., b) 0.2345757...

8. Una pelota cae desde una altura inicial de 1 m sobre una superficie horizontal. Si en cada rebote alcanza un 80% de la altura anterior, ¿qué distancia recorre hasta pararse?

9. Una persona y su perro caminan a una velocidad de 1 m/s hacia su casa. A 100 m de la puerta el perro comienza a correr yendo y vieniendo de la persona a la puerta a 4 m/s, hasta que la persona entra en casa. ¿Qué distancia recorre el perro desde que empieza a correr?

10. Estudiar en qué subconjuntos de \mathbf{R} convergen uniformemente las siguientes $f_n(x)$:

$$\begin{array}{lllll} \text{a)} x^{1/n} & \text{b)} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} & \text{c)} \cos^n x & \text{d)} \frac{x}{\sqrt[n^3+x^2}} & \text{e)} nx^2 e^{-nx^2} \end{array}$$

11. Estudiar para qué x convergen, y si lo hacen uniformemente en el intervalo que se indica:

$$\text{a)} \sum \frac{x}{n+1} \text{ en } [0, 1] \quad \text{b)} \sum e^{-nx^2} \operatorname{sen} nx \text{ en } [1, \infty) \quad \text{c)} \sum \frac{x^n}{(n+1)^{2n}} \text{ en } [-1, 1] \quad \text{d)} \sum \frac{x^2 + \operatorname{arctan} n}{\sqrt{1+n^3 x^2}} \text{ en } [1, 2].$$

12. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx) + x^{2n}}{(n+1)^2 4^n}$. Ver para qué x converge. Hallar un racional que aproxime la suma para $x=0$ con error $< 10^{-3}$. Probar que converge uniformemente en el intervalo $[0, 1]$.

13. Sumar la serie $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{[x+1][2x+1]} + \frac{x}{[2x+1][3x+1]} + \dots$ ¿Converge uniformemente en $[0, \infty)$?

14. a) Precisar si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)^5 n}$ converge para: i) $x=5$, ii) $x=\pi$, iii) $x=3e^{2/3}$.

b) Probar que la suma de la serie para $x=-1$ es menor que $\frac{9}{20}$.

15. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} x^{3n}$. Precisar para qué x converge la serie y hallar el valor de $f(-1)$.
16. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^{n+1} x^{2n}$. Precisar para qué x converge la serie. Probar que $f\left(\frac{1}{4}\right) > 3$.
17. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^{n+1}}{n!}$. Precisar para qué x converge la serie y probar que $f'(1) > 20$.
18. Precisar para qué valores de x converge la serie $\sum \frac{2^n x^n}{\arctan n}$. ¿Converge para $x = \log \frac{3}{2}$?
19. Hallar los x para los que converge $\sum (-2x)^{3n}$. Decidir si converge para $x = \arctan \frac{3}{5}$.
20. Escribir el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$ ordenado en potencias de $(x - 2)$.
21. Hallar 4 términos no nulos del desarrollo de Taylor en $x=0$ de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ por 3 vías diferentes [haciendo producto, composición o división de series, usando el de $(1+x)^P$, derivando otra serie o derivando f].
22. Calcular a partir de la definición P_3 , el polinomio de Taylor de grado 3 en $x=0$ de $f(x) = \tan x$. Determinar si $P_3(1)$ es mayor o menor que $\tan 1$ sin utilizar calculadora.
23. Hallar (sin calculadora) un racional que aproxime con un error menor que 10^{-2} a i) $e^{-1/3}$, ii) $e^{1/3}$.
24. Probar que $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$. Usando el desarrollo de $\arctan x$, calcular π con error $< 10^{-3}$.
25. Calcular el valor de $\sqrt[10]{1.2}$ con error menor que 0.01. Hallar el valor de $\sqrt{1/2}$ a partir de un polinomio de Taylor de orden 3 y dar una cota del error cometido.
26. Escribir la serie de Taylor de $f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$, hallar su radio de convergencia y precisar donde la serie coincide con f . Aproximar con el P_3 de Taylor el valor de $\log 2$ dando una cota del error.
27. Sea $P_3(x)$ el polinomio de Taylor de orden 3 en $x=e$ de $f(x) = x \log x$. ¿Se comete un error menor que 10^{-3} si se aproxima $f(3) = \log 27$ con el valor de $P_3(3)$?
28. Hallar el desarrollo de Taylor hasta x^6 de la función $f(x) = [36 + x^3]^{-1/2}$. Hallar un racional que aproxime con error menor que 10^{-2} : i) $f(2)$, ii) $f(-1)$.
29. Utilizando polinomios de Taylor determinar con un error menor que 10^{-3} el valor de:
 a) $\sin 3$ b) e^{-2} c) $\log \frac{1}{2}$ d) $\operatorname{sh}(-1)$ e) $\operatorname{ch} \frac{1}{2}$
30. Hallar los 4 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Taylor en $x=0$ de:
 a) $e^{-x} \cos x$ b) $[\arctan x]^2$ c) $\frac{\operatorname{ch} x}{(1+x)^3}$ d) $\frac{\cos 2x}{1+x^2}$ e) $\log(x + \sqrt{1+x^2})$
31. Desarrollar en $x=0$, hallando su término general e indicando dónde coinciden función y serie:
 a) $2x e^{-2x}$ b) $3x^2$ c) $-\log(1-2x)$ d) $\frac{5x-1}{x^2-x-2}$ e) $(1+x)^{-2}$
32. Hallar la suma de las siguientes series:
 a) $\sum_{n=2}^{\infty} e^{1-4n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^2-1}$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}$ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n+1)}$ g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$
33. a) Hallar el A_4 de la fórmula de interpolación de Newton para puntos equidistantes.
 b) Hallar el Q_4 que interpola $\operatorname{sen}^2 \pi x$ en $0, 1/4, 1/2, 3/4$ y 1 . Aproximar con él $\operatorname{sen}^2 \frac{7\pi}{12}$.
34. Hallar los polinomios Q_1 , Q_2 y Q_3 de interpolación de $\cos x$, respectivamente, en los puntos:
 a) 0 y $\frac{\pi}{3}$. b) $0, \frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$. c) $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$. Utilizar Q_2 para aproximar el x tal que $\cos x = x$.
35. Sea $f \in C^4$. Probar que: $f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} + o(h)$ y $f''(a) = \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} + o(h)$. Si $f(x) = 4^x$, aprovechar lo anterior para aproximar $f'(0)$ y $f''(0)$ tomando $h = 1/2$.

- 36.** Hallar un polinomio cúbico $P(x)$ tal que $\frac{x \cos x - P(x)}{(x-1)^3}$ tienda a 0 cuando x tiende a 1 .
- 37.** Hallar un polinomio P tal que $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-7} [\sqrt{1-x^4} - P(x)] = 0$. ¿Es único dicho polinomio?
- 38.** Calcular los siguientes límites indeterminados cuando $x \rightarrow 0$ de las siguientes funciones:
- $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$
 - $\frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2}$
 - $\frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$
 - $\frac{\sin x \cos x - \arctan x}{\log(1+x^3)}$
 - $\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$
 - $\frac{\log[\cos 2x]}{\log[\cos 3x]}$
 - $\frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$
 - $\frac{(1+3x)^{1/3} \log(1+2x) - 2x}{\sin x - x}$
- 39.** Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ para el único a para el que es finito: a) $f(x) = \frac{\cos x - e^{ax}}{\sin x + \log(1-x)}$, b) $f(x) = \frac{\sin x}{x^3} - \frac{a}{x^2}$.
- 40.** Hallar el límite cuando $x \rightarrow 0$ de $\frac{\sin x^2 - x^2}{x^{2n}}$ y $\frac{\tan x}{x^n}$ para todos los n enteros en que exista.
- 41.** Calcular los siguientes límites indeterminados cuando x tiende al a indicado:
- $a = 1^- : \log x \log(1-x)$. $a = \infty : \frac{1 - x \arctan(1/x)}{1 - \cos(1/x)}$, $x^4 [\cos \frac{1}{x} - e^{-1/x^2}]$, $[\cos \frac{1}{x}]^{\log x}$.
- 42.** Determinar (si existe, finito o infinito) el límite cuando i) $x \rightarrow 0$, ii) $x \rightarrow \infty$, iii) $x \rightarrow -\infty$ de:
- $f(x) = \frac{x^2 - \sin^2 x}{\log(1+x^4)}$.
 - $g(x) = x[\cos \frac{1}{x} - 1]$
 - $g(x) = \frac{x e^{-x} \sqrt{1+x} - \log(1+x)}{\arctan(x^3)}$
- 43.** Hallar el límite cuando x tiende a $0, \infty, -1^+$ de:
- $\frac{\log(1+2x^2) - \log(1+x^2)}{\arctan x^2}$
 - $\frac{x - \sin x}{x \arctan x^2}$
 - $\frac{\arctan x - \sin x}{x(\operatorname{ch} x - \cos x)}$
 - $\frac{\log(1+x) \sqrt{1+x} - x}{\arctan x^3}$
- 44.** Precisar para qué valores de b tiene límite $x^{-b} [\sqrt{1+9x^4} - 1]$ si i) $x \rightarrow 0^+$, ii) $x \rightarrow \infty$.
- 45.** a] Hallar el desarrollo de Taylor hasta x^5 de la función $f(x) = \arctan x \cos 2x$.
b] Hallar el límite de $\frac{f(x)-x}{x^4 - x^5}$, cuando x tiende hacia: i) 0^+ , ii) ∞ , iii) 1^- .
- 46.** Hallar el coeficiente de x^4 en el desarrollo de Taylor de $f(x) = \frac{\arctan(2x)}{\sqrt{1+x}}$ y deducir el valor de $f^{(4)}(0)$.
- 47.** a) Hallar el desarrollo de Taylor hasta x^6 de la función $f(x) = x^2 - \sin x \operatorname{sh} x$. ¿Cuánto vale $f^{(iv)}(0)$?
b) Para $n=1, 2, \dots$, hallar, si existe (finito o infinito), $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n}$. c] Precisar si existe $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- 48.** Sea $f(x) = \cos x^2 \log(1+2x^2)$. a] Calcular su desarrollo de Taylor hasta x^8 y hallar el valor de $f^{(vi)}(0)$.
b] Para $n=1, 2, \dots$, hallar, si existe (finito o infinito): i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n}$, ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^n}$.
- 49.** Definiendo $f(0)$ para que sean continuas, estudiar si existen $f'(0)$ y $f''(0)$:
- $x \arctan \frac{1}{x}$
 - $\frac{\tan x}{x}$
 - $\frac{1}{|x|} \log(1+|x|)$
 - $\arctan(\log x^2)$
- 50.** Estudiar la continuidad de $f(x) = (1 - \frac{1}{x}) \log |1-x^2|$, $f(\pm 1) = f(0) = 0$. ¿Existe $f'(0)$? Probar que $\exists c \in (0, 1)$ con $f'(c) = 0$.
- 51.** Sea $f(x) = e^{4/x-4/x^2}$, $f(0) = 0$. Precisar los puntos en que es continua y derivable, hallar sus extremos, puntos de inflexión y asíntotas y dibujar su gráfica. Utilizando $P_{1,1}$, polinomio de Taylor de grado 1 en $x=1$, dar un valor aproximado de $f(1.1)$ y determinar si es mayor o menor que el exacto.
- 52.** Dibujar las gráficas de las siguientes funciones:
- $x \log x^2 - x^2$
 - $x^{-3} e^{-6/x}$
 - $x^{-1} e^{-x}$
 - $\operatorname{th} \frac{1}{x}$
 - $x^{1/x}$
 - $x \arctan \frac{1}{x}$
 - $x^a \sin \frac{1}{x}$, $a \in \mathbb{R}$

53. Sea $f(x) = \operatorname{sen}x - x\cos x$. Dibujar su gráfica. Precisar para qué m existe: i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^m}$, ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^m}$.

54. Estudiar en qué puntos es continua la función: $f(x) = \frac{x^2 \operatorname{sen} \pi x}{1 - \cos \pi x}$ si $x \notin \mathbf{Z}$, $f(x) = 0$ si $x \in \mathbf{Z}$.

55. Sea $f(x) = x^{-2} \operatorname{sen}^2 \pi x$, $f(0) = \pi^2$. Determinar si existen $f'(0)$ y $f''(0)$. Dibujar su gráfica.

Probar que existe la inversa f^{-1} en un entorno de $x = \frac{1}{2}$ y calcular la derivada de f^{-1} en $f(\frac{1}{2})$.

56. i) Sea $g(x) = \operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{x})$. ¿Converge $\{g(\frac{4}{n})\}$? ¿Posee subsucesiones convergentes? Esbozar su gráfica.

ii) Sea $f(x) = x \operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{x})$, $f(0) = 0$. Estudiar si es continua y derivable en $x = 0$. Hallar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Dibujar la gráfica de f . Probar que el máximo absoluto de f en todo \mathbf{R} se alcanza en un $x \in [2, 3]$.

57. Calcular (justificando los pasos) el límite de las siguientes sucesiones:

$$\text{a) } a_n = n^{-1} \log_2 n + n^2 2^{-n} \quad \text{b) } b_n = \frac{n^2 - 1}{3n} \operatorname{sen} \frac{n}{n^2 - 1} \quad \text{c) } c_n = n^3 (1 - \cos \frac{1}{n}) \log(1 + \frac{1}{n})$$

58. Usando el teorema del valor medio encontrar el límite de la sucesión $a_n = n^{1/3} - (n+1)^{1/3}$.

59. Estudiar si $f(z) = |z|$ y $g(z) = |z|^2$ son continuas y derivables en $z = 0$.

60. Estudiar si la función $f(z) = \sqrt{z}$ que hace corresponder a cada z la raíz con argumento principal más pequeño es continua en todo el plano complejo.

61. Probar que si $z, w \in \mathbf{C}$ entonces $\|z| - |w|\| \leq |z - w|$. Probar que si la sucesión compleja $\{a_n\}$ converge entonces también lo hace la sucesión real $\{|a_n|\}$.

62. Hallar (si existe) el límite de las siguientes sucesiones de complejos:

$$2^{-n/2}(1+i)^n, \left(\frac{1+5i}{3+2i}\right)^n, 2^{-n}(1+i)^n(1-i)^{-n}, (n-i)^3 n^{-3}, e^{in/(n+1)}, e^{(2-i)/n}, e^{-ne^i}.$$

63. Probar que converge $\sum \frac{(-i)^n}{\sqrt{n}}$, pero que no lo hace absolutamente.

64. Determinar si convergen: a) $\sum \frac{(4-3i)^n}{n!}$, b) $\sum \frac{2-ni}{n^2}$, c) $\sum e^{i/n}$, d) $\sum \frac{i^n}{n^2}$, e) $\sum \frac{1}{[2-e^{in}]n^2}$.

65. Estudiar si la serie $\sum n^7 z^n$ converge cuando i) $z = \frac{4-3i}{5+i}$, ii) $z = e^{-3\pi i}$.

66. Determinar la región del plano complejo en que converge la serie $\sum \frac{z^n}{e^n + n}$.

67. Hallar el radio de convergencia de estas series de potencias complejas y decidir si convergen para

i) $z = i$, ii) $z = -i$, iii) $z = (1-i)^2$, iv) $z = 1 + ei$, v) $z = \frac{1}{5}e^{i|7+3i|}$:

$$\sum \frac{(-1)^n z^n}{n^3} \quad \sum \frac{2^n z^n}{n!} \quad \sum \frac{n! z^n}{n^n} \quad \sum \frac{i^n n^n z^n}{2^n} \quad \sum \frac{n z^n}{n+1} \quad \sum \frac{i^n z^n}{n+1}$$

68. Demostrar que $e^{z+w} = e^z e^w$ multiplicando las series. Probar que $f(z) = e^z$ toma todos los valores complejos menos el 0, que no es inyectiva y que tiene periodo $2\pi i$.

69. Se define $\ln z = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)$, $z \neq 0$ [$\operatorname{Arg}(z)$, argumento principal de z]. Comprobar que $e^{\ln z} = z$. Hallar $\ln 1$, $\ln(-1)$, $\ln(2i)$, $\ln(1+i)$, $\ln(1-i)$. Estudiar la continuidad de $\ln z$.

70. Determinar si la siguiente igualdad es cierta para todo z complejo: $\operatorname{sen}(2z) = 2 \operatorname{sen}z \cos z$.

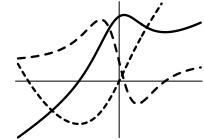
71. Resolver la ecuación $\cos z = 4$.

72. Desarrollar en serie de Taylor en torno a $z = 0$, determinando el radio de convergencia:

$$\frac{3z}{1+z-2z^2} \quad \operatorname{sen}z \cos z \quad \frac{\operatorname{sen}^2 z}{z} \quad \frac{e^z}{1+z}$$

Integración en R

1. Utilizando exclusivamente la definición de integral calcular a) $\int_0^1 x dx$ y b) $\int_1^2 x^{-2} dx$.
2. Sea f acotada en $[a,b]$. Determinar si las siguientes implicaciones son verdaderas o falsas:
 - a) $f \in C^1[a,b] \Rightarrow f$ integrable en $[a,b]$
 - b) f integrable en $[a,b] \Rightarrow f$ alcanza su máximo en $[a,b]$
 - c) f decreciente en $[a,b] \Rightarrow f$ integrable en $[a,b]$
 - d) f integrable en $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f^2 = [\int_a^b f]^2$
3. Sea $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$. ¿Es $F(x) = \int_0^x f$ continua en $x=1$? ¿Es derivable en ese punto?
4. Si $f(x) = \begin{cases} -1/x, & x \leq -1 \\ 1, & x > -1 \end{cases}$ y $F(x) = \int_{-e}^x f$, calcular: i) $F(-1)$, ii) $F(x) \forall x$. ¿Es F continua en $x=-1$?
5. Sea f definida para $x \in [0,7]$ por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 4 \\ 5-x & \text{para } 4 < x \leq 5 \\ -1 & \text{para } 5 < x \leq 7 \end{cases}$ y sea $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Dibujar $f(x)$. Calcular $F(4), F(5)$ y $F(7)$. Dibujar aproximadamente F y estudiar dónde es continua y derivable.
6. Sea f definida por: $f(x) = -1$ si $x \in (0,1)$; $f(x) = 3-2x$ si $x \in (1,2)$; $f(0)=f(1)=f(2)=0$. Hallar $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ y $\Phi(x) = \int_0^x F(t) dt$ para los $x \in [0,2]$ que exista. Determinar dónde Φ tiene primera y segunda derivadas, calculando Φ' y Φ'' .
7. En esta gráfica se pueden ver una función $f(x)$, su derivada $f'(x)$ y una primitiva $F(x)$. Identificar razonadamente cada curva con la función correspondiente.
8. Si $F(x) = x \int_0^x e^{t^2} dt$, hallar $F''(5)$.
9. Derivar las siguientes funciones: a) $F(x) = \int_1^{x^3} \sin^3 t dt$; b) $G(x) = \int_1^x x \sin t^3 dt$.
10. Siendo $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+3t^4} dt$ y $g(x) = e^{2x}$, hallar $(f \circ g)'(0)$ y $(g \circ f)'(0)$.
11. Sea $F(x) = \int_{1-2x}^x t e^{-t^4} dt$. Hallar $F(1), F'(1)$ y $(F \circ F)'(1)$. ¿Es $F(0)$ mayor o menor que $F(1)$?
12. Aproximar e con la definición $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ y las desigualdades $t^{-21/20} < \frac{1}{t} < t^{-19/20}$, $t > 1$.
13. Sean $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^3}{x^2-4}, & x \in [-1,1] \\ x-2, & x \in (1,2] \end{cases}$ y $F(x) = \int_{-1}^x f$.
 - a] Hallar, si existe, $F'(1)$.
 - b] Hallar $F(2)$.
 - c] Probar que $0 \leq F(0) \leq 1$.
14. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $H(x) = \int_{e^x}^4 \frac{\log t dt}{t+t^2}$ en el intervalo $[-1,1]$.
15. Sea $F(x) = \int_{-2}^{\sqrt{2x}} \frac{t^3 dt}{8+t^2}$. Hallar $F'(2)$ y $F(2)$. Precisar el signo de $F(8)$. Ver si F es inyectiva en $[0,8]$.
16. Calcular $(f^{-1})'(0)$ si $f(x) = \int_{\pi}^x [1 + \sin(\operatorname{sen} t)] dt$.
17. Sean $f(x) = \begin{cases} -2, & 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ y $F(x) = \int_0^x f$.
 - a] Calcular: i) $F(4)$, ii) $F(x) \forall x \geq 0$. ¿Es F continua en $x=1$?
 - b] Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de F en $[0,4]$.
18. Sea $f(x) = x^2 e^{-x^2}$. Si $H(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$, determinar el x para el que $H(x)$ es máximo. Dibujar aproximadamente la gráfica de f y probar que el valor máximo de H es menor que $1/2$.
19. Precisar en qué $x > 0$ toma su valor máximo $F(x) = \int_x^{2x} \frac{t dt}{t^4+4}$ y probar que ese valor máximo es $< \frac{1}{2}$.



20. Determinar en qué x del intervalo que se indica alcanzan su máximo y su mínimo las funciones:

- a) $F(x) = \int_{-1}^x \frac{t dt}{t^2 - 9}$ en $[-1, 2]$ b) $G(x) = \int_x^{x+1} \frac{t dt}{t^2 + 2}$ en \mathbf{R} c) $H(x) = \int_{x/2}^x \frac{dt}{6+t^3}$ en $[0, 4]$
 c) $J(x) = \int_{-2}^{3x-x^2} t e^{t^4} dt$ en $[0, 2]$ d) $K(x) = \int_{\pi}^x \sin^2 t dt$ en $[0, 4\pi]$ e) $L(x) = \int_0^{x-x^3} \frac{dt}{\sqrt{2-\sin^2 t}}$ en $[0, 2]$
 f) $M(x) = x - \int_1^x \cos(\sin t) dt$ en $[1, 4]$ g) $N(x) = \int_{-x}^x [1-t^2]^{1/3} dt$ en $[0, 3]$

21. Sean $f(x) = x \sin^2 \pi x$ y $F(x) = \int_{-2}^x f$. Hallar el valor máximo de F en el intervalo $[0, 2]$. Probar que el valor mínimo de F en ese intervalo es negativo y mayor que -2 .

22. Estudiar su crecimiento y precisar cuántas veces se anula $F(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} dt - e^{x^4}$ en $[0, \infty)$

23. Sea $F(x) = \int_{-1/x}^{1/x^2} e^{-t^4} dt$. Hallar $F'(1)$. Estudiar si la serie $\sum (-1)^n F(n)$ converge.

24. Precisar para todo $n \in \mathbf{N}$ en qué $x \geq 0$ alcanza su valor máximo la función $f_n(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t^3 + 6n^6}$, y probar que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $[0, \infty)$.

25. Decir en cada caso (sin hallar primitivas) cuál es el valor de la integral entre las tres opciones:

- i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8 x dx$: a) $\frac{\pi}{4} - 1$, b) $\frac{35\pi}{128}$, c) π .
 ii) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3 - 8}$: a) $-\frac{\ln 3}{24} - \frac{\sqrt{3}\pi}{72}$, b) $\ln \frac{9}{8}$, c) $\frac{33}{4}$.

26. Calcular $\int_1^3 \frac{x}{x+1} dx$, y decidir si esa integral es mayor o menor que 1.

27. a) Calcular $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{3 + \cos x} dx$. b) Probar que su valor es menor que $\frac{1}{3}$.

28. Sea f continua en \mathbf{R} y sea F una primitiva de f . Si f es impar, es necesariamente F par? Si f es par, es necesariamente F impar? Si f es periódica es necesariamente F periódica?

29. Calcular las siguientes primitivas:

- a) $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$ b) $\int \frac{dx}{x^3+x-2}$ c) $\int x \arctan x dx$ d) $\int x^3 (\log x)^2 dx$ e) $\int e^x \log(e^x + 1) dx$
 f) $\int \frac{\cos x dx}{3 + \cos^2 x}$ g) $\int \sin^6 x dx$ h) $\int \cos^2(\pi x) dx$ i) $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$ j) $\int \sqrt{x} e^{-2\sqrt{x}} dx$
 k) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ l) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$ m) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+4}}$ n) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ ñ) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1-\sqrt{x+1}}}$

30. Hallar el valor de las integrales:

- a) $\int_{-1}^1 e^{-|x|} dx$ b) $\int_{-1}^1 (1-x)^3 dx$ c) $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \log x dx$ d) $\int_0^1 x^3 \arctan x dx$
 e) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x dx$ f) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x dx}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x}$ g) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}$ e) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1} - 3}$

31. Expresar $I_n(x) = \int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^n}$ en función de $I_{n-1}(x)$. Calcular $\int \frac{dx}{[x^2 + 1]^2}$ y $\int \frac{dx}{[x^2 + 2x + 5]^3}$.

32. Expresar $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ en función de I_{n-2} . Calcular I_{2n} , I_{2n+1} .

33. Calcular: $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx$, $\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx$, $\int_0^{\pi} \sin mx \cos nx dx$, $m, n \in \mathbf{N}$.

34. Explicar por qué el cambio de variable resultados falsos si:

- a) $\int_{-1}^1 dx$, $t = x^{2/3}$ b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$, $t = \frac{1}{x}$.

35. Sea $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$. Hallar su dominio, estudiar crecimiento y decrecimiento y esbozar su gráfica.

Hallar el área comprendida entre la gráfica y el eje x en el intervalo en que f es creciente.

¿Cuántos máximos y mínimos tiene una primitiva cualquiera de f ? ¿Y puntos de inflexión?

36. Sea $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $f(0) = \frac{1}{2}$. Hallar, si existe, $f'(0)$. Probar que f es decreciente en todo su dominio. ¿Cuántas soluciones tiene $f(x) = -1$? Calcular $I = \int_3^8 f$. Probar que $I < \frac{5}{3}$.

37. Sea $f(x) = \frac{1}{x} + 4 \arctan x$. a) Dibujar su gráfica y probar que $\pi + 1 \leq \int_1^2 f \leq 2\pi$.

b) Determinar si converge la integral impropia $\int_1^\infty f$. c) Hallar $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x f$.

38. Sea $f(x) = x \log(1 + \frac{4}{x^2})$. a) Hallar una primitiva de f . b) Estudiar la convergencia de $\int_1^\infty f$.

39. Sea $f(x) = x \arctan \frac{4}{x^2}$, $f(0) = 0$. a) Hallar, si existen, $f'(0)$ y $f'(2)$. b) Hallar una primitiva de f . c) Estudiar si converge la integral impropia $\int_1^\infty f(x) dx$.

40. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias. Hallar su valor si se puede:

- | | | | | |
|---|---|--|---|---|
| a) $\int_{-\pi}^{\infty} \frac{\arctan x}{x^3 - 8} dx$ | b) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{4/3}}$ | c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 - 1}}$ | d) $\int_1^{\infty} \log(1 + \frac{4}{x^2}) dx$ | e) $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ |
| f) $\int_0^{\infty} \frac{x \cos x}{e^x} dx$ | g) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2e^x - 1}$ | h) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1}$ | i) $\int_1^{\infty} x \arctan \frac{1}{x^2} dx$ | j) $\int_0^{\infty} x \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{x} dx$ |
| k) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{e^{2x} - 1}$ | l) $\int_1^{\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x-1}} dx$ | m) $\int_1^{\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} dx$ | n) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + 4x + 4x\sqrt{x}}$ | ñ) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x^2} dx$ |
| o) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}} dx$ | p) $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ | q) $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ | r) $\int_4^{\infty} \frac{\arctan(1/x)}{(2x-8)^{1/3}} dx$ | s) $\int_1^{\infty} \frac{x + 2e^{\cos x}}{x^3 - 2\sqrt{2}} dx$ |
| t) $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^{3/2}} dx$ | u) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2}$ | v) $\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^3} dx$ | w) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1 + e^{x^2}}$ | x) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{(x-1)^{1/3}}$ |
| y) $\int_1^{\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right] dx$ | z) $\int_1^{\infty} e^{-1/x} dx$ | α) $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^{5/2}} dx$ | β) $\int_2^{\infty} \frac{\arctan \frac{2}{x}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} dx$ | γ) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{e^{x^2} - 1} dx$ |

41. Discutir según los valores de $a \in \mathbb{R}$ la convergencia de la integral $\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x^a} dx$.

42. Discutir según los valores de $n \in \mathbb{N}$ la convergencia de:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{\arctan(x + \frac{1}{x})}{(1 + x^2)^n} dx \quad \text{b) } \int_0^1 \left[\frac{n}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] dx \quad \text{c) } \int_2^{\infty} \frac{x dx}{x^n - 8}$$

43. Hallar, justificando los pasos, el valor de:

$$\text{a) } \int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \right) dx \quad \text{b) } \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \right) dx \quad \text{c) } \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n+x]^4} \right) dx$$

44. Sea $H(x) = |x-1| \int_{-1}^x \operatorname{sen} t^2 dt$. Aproximar $H(0)$ con error menor que 10^{-3} . Hallar, si existe, $H'(1)$.

45. Probar las acotaciones:

$$\text{a) } 0 \leq \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) dx \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{b) } \frac{2}{21} \leq \int_0^1 \frac{x^6 dx}{\sqrt{x^4 + 1}} \leq \frac{1}{7} \quad \text{c) } \frac{3}{8} \leq \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \leq \frac{2}{5}$$

46. Sea $f(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt$. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{f(x)}$. Utilizar el polinomio de Taylor de orden 3 de f en $x=0$ para encontrar un valor aproximado de $f(\frac{1}{2})$. ¿Es menor que 10^{-3} el error cometido?

47. Hallar el límite cuando x tiende a 0 y a ∞ de: a) $\frac{x \int_0^x e^{-t^2} dt - \arctan x^2}{\log[1+x^4]}$; b) $x^{-6} \int_{-x^2}^0 \operatorname{sen} t^2 dt$.

48. Precisar si converge $\int_0^{\infty} [1+t^3]^{-1/2} dt$. Si $f(x) = \frac{\int_0^x [1+t^3]^{-1/2} dt - \operatorname{sen} x^2}{x^6}$, hallar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

- 49.** Sea $F(x) = \int_2^x \frac{dt}{\sqrt{\log t}}$. Determinar si existe $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$. Hallar el $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(2x)}{F(x)}$ (si existe).
- 50.** Hallar el valor de $I = \int_0^1 \frac{x}{x^4 - 16} dx$ y un racional que aproxime I con error menor que 10^{-2} .
- 51.** Sea $f(x) = \frac{x^2+2}{x^4+4}$. Hallar una primitiva de f . Probar que $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 f \leq \frac{2}{3}$.
- 52.** Estudiar para qué valores enteros de n se verifica que $3 < \int_0^1 \frac{nx}{4+x^4} dx < 4$.
- 53.** Sea $f(x) = e^{2x-x^2}$. a) Aproximar $\int_0^1 f$ usando el desarrollo de Taylor hasta x^4 de f .
 b) Sea $H(x) = \int_x^{x+1} f$, $x \in [0, 2]$. Precisar en qué x alcanza sus valores máximo y mínimo.
 c) Calcular el límite de $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$, i) cuando $x \rightarrow 0$, ii) cuando $x \rightarrow \infty$.
- 54.** a) Precisar dónde $f(x) = \frac{1}{x} [\sqrt[3]{1+3x} - 1]$, $f(0) = 1$, es derivable. b) Hallar $\text{im } f$.
 c) Probar que $\int_{-2/3}^0 f = 6 - \frac{3}{2} \log 3 - \frac{\pi}{2} \sqrt{3}$ y aproximar la integral por Simpson con $h = \frac{1}{3}$.
 d) Determinar si converge $\int_1^\infty f$. e) Si $F(x) = \int_{-x}^0 f$, hallar $F'(3)$.
- 55.** Aproximar $\log 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ utilizando Trapecios ($n=2$ y 4) y Simpson ($n=2$ y 4 ; o sea, $m=1$ y 2).
- 56.** Aproximar utilizando Taylor y Simpson: a) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, b) $\int_0^1 \sqrt{x^4 + 1} dx$, c) $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$.
- 57.** Calcula el área de estas regiones:
 i) Región limitada por el eje x y por la gráfica de $f(x) = \sin x$, entre $x = 0$ y $x = \pi$.
 ii) Región limitada por las graficas de $f(x) = x + 1$ y $f(x) = x^2 - 2x + 1$.
 iii) Región finita encerrada entre el eje x y la gráfica de $f(x) = (x-1)^2(x-4)$.
 iv) Región finita encerrada entre la gráfica de $f(x) = x^3 - x$ y su recta tangente en $x = -1$.
 v) Región acotada entre el eje x y la gráfica de $f(x) = |x^3 - 1| - 2$.
- 58.** Calcular el área de la región acotada limitada por la curva $y = \frac{1}{x^2+1}$, el eje x y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de la curva.
- 59.** Hallar el área de una de las regiones iguales encerradas entre las gráficas de $|\sin x|$ y $|\cos x|$.
- 60.** Calcular el área de la región interior a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 61.** Hallar el área de la región acotada comprendida entre $y = 0$, la curva $x^2 + y^2 = 4$ y la tangente a la curva en $(1, -\sqrt{3})$.
- 62.** Hallar el área de la región encerrada entre la gráfica de $g(x) = |3 - \frac{4}{x^2}|$ y su recta tangente en $x = 2$.
- 63.** ¿Cuál de todas las rectas que pasan por $(1, 2)$ determina con $y = x^2$ la región de mínima área?
- 64.** Hallar el valor mínimo, si existe, de $S(m) = \int_0^1 |x^3 - mx| dx$.
- 65.** Determinar si es mayor o menor el área encerrada por la gráfica de las funciones i) $f(x) = e^{-x/2}$, ii) $g(x) = e^{-x^2}$ y el eje de las x en el intervalo $[0, 1]$ o en el intervalo $[1, \infty)$.
- 66.** Probar que el área de la región encerrada entre las gráficas $y = 3x$ e $y = e^x$ es menor que 3 .
- 67.** Describir las gráficas de las siguientes funciones escritas en coordenadas polares:
 a) $r = a \sin \theta$ b) $r = a \sec \theta$ c) $r = \cos 2\theta$ d) $r = |\cos 2\theta|$.

- 68.** Hallar el área de la región acotada por el eje x y la gráfica de la función $h(x) = 1 - |x-1|$, integrando en coordenadas i) cartesianas, ii) polares.
- 69.** Hallar el área determinada por la curva $r = \frac{1}{1+\cos\theta}$ y las semirrectas $\theta=0$ y $\theta=\frac{3\pi}{4}$, i) trabajando en polares, ii) tras escribir la ecuación de la curva en rectangulares.
- 70.** Hallar el área de la región encerrada entre la cardioide $r=1+\cos\theta$ y la circunferencia $r=\cos\theta$.
- 71.** Hallar el área comprendida entre las espirales $r=2e^{-\theta}$ y $r=e^{-\theta}$ si i) $\theta \in [0, 2\pi]$, ii) $\theta \geq 0$.
- 72.** Hallar la longitud de las curvas: a) $y = \log x$, $x \in [1, e]$; b) $y = x^{2/3}$, $x \in [0, 1]$.
- 73.** El perímetro de una elipse de eje mayor $2a$ y de excentricidad k ($k^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$) viene dado por $L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta$. Evaluar L integrando término a término el desarrollo de la raíz en potencias de $k^2 \sin^2 \theta$. Hallar aproximadamente el perímetro de la elipse $3x^2 + 4y^2 = 12$.
- 74.** Un sólido tiene por base el triángulo del plano xy limitado por los ejes y la recta $x+y=1$. Cada sección producida por un plano perpendicular al eje x es un cuadrado uno de cuyos lados está en la base. Hallar su volumen.
- 75.** Hallar el volumen del ‘toro’ obtenido al girar un círculo de radio r en torno a una recta, situada en el plano del círculo, que está a una distancia $d > r$ de su centro.
- 76.** Sea R la región limitada por $y = \frac{x}{1+x}$ y el eje x en $[1, 2]$.
 a) Hallar el área de R integrando respecto a i) x , ii) y . b) Hallar el volumen del sólido de revolución que genera R al girar en torno i) al eje x ; ii) al eje y ; iii) a la recta $y = 1$.
- 77.** Supongamos que $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} 3$. ¿Qué ocurre con el valor medio de f en $[0, b]$ cuando $b \rightarrow \infty$?
- 78.** Sea una varilla de longitud L situada en el eje x con un extremo en el origen. Hallar su centro de gravedad y su momento de inercia respecto del origen si su densidad es
- $$\rho(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq L/2 \\ L^2/4 & \text{si } L/2 \leq x \leq L \end{cases}.$$
- 79.** Una partícula avanza por el eje x con velocidad $v(t) = t(1+t^2)^a$ m/s en el instante t . Si inicialmente está en $x=0$, ¿para qué valores de a : a) recorre 1 m antes de 1 s, b) recorre 1 m en un tiempo finito, c) alcanza cualquier punto del semieje positivo en tiempo finito?