TD2: Lois continues usuelles et limites de variables aléatoires

Méthodes mathématiques

CPES3 2025-2026

1 Variables aléatoires continues

Exercice 1

On suppose que la durée de vie d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1. (a) Rappeler l'expression de la densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre λ .
(b) Calculer l'espérance et la variance de X quand $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$
(c) Donner la fonction de répartition de X.

2. On suppose maintenant que $\lambda = 0.1$.
(a) Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie.
(b) Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 12 ans de durée de vie sachant que le véhicule a déjà duré 10 ans.
(c) Comparer ce résultat à la probabilité qu'une voiture dépasse 2 ans de durée de vie.
(d) La loi exponentielle vous paraît-elle bien adaptée pour modéliser la durée de vie d'une voiture ?

Exercice 2

On a étudié la glycémie d'une population d'individus présentant certaines caractéristiques précises ; on a obtenu les résultats suivants : 20% des glycémies sont inférieures à 0,82 g/l et 30% des glycémies sont supérieures à 0,98g/l.
Si on suppose que la glycémie des individus présentant ces caractéristiques suit une loi normale, déterminer la moyenne m et l'écart-type s de cette loi.
Quelle est la probabilité d'avoir une glycémie supérieure à 0.8 g/l ?

Exercice 3

Un club de voile souhaite s'équiper en gilets de sauvetage pour adultes. Il doit commander 3 tailles S, M et L qui correspondent à une gamme de poids :
• moins de 50kg : taille S
• entre 50 et 70kg : taille M
• plus de 70kg : taille L.
On suppose que le poids moyen d'un adulte pratiquant la voile peut être modélisé par une loi gaussienne de moyenne 65kg et d'écart type 12. Comment le club doit-il répartir ses achats en % entre les 3 tailles ?

2 Théorème central limite et applications

Exercice 4

Lors de la construction d'un collège accueillant 500 élèves, il est prévu la construction d'une cantine comprenant deux salles, chacune disposant de Nplaces. On fait l'hypothèse que chaque élève qui mange choisit au hasard et de façon équiprobable l'une des deux salles, indépendamment les uns des autres. Déterminer la valeur de N à prévoir pour que la probabilité que chaque élève trouve une place dans la salle qu'il a choisie soit supérieure à 0,99.

Exercice 5

Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 5000 abonnés. A un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t . Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance, son écart-type ?
2. On pose $Y = \frac{X-1000}{\sqrt{800}}$. Justifier précisément qu'on peut approcher la loi de Y par la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
3. Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées N le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2,5%. En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions.