TD1: Probabilités

Méthodes mathématiques

CPES3 2025-2026

Combinatoire

Exercice 1

1. Combien de plaques minéralogiques à sept caractères peut on former si les 3 premiers caractères sont des lettres et les 4 derniers des chiffres ? Et si on ne veut pas que les caractères soient en double ?
2. Combien peut on former de permutations différentes avec les lettres PEPPER ?
3. Dans un tournoi d'échec, il y a 10 participants : 4 français, 3 américains, 2 anglais, et 1 brésilien. En ne considérant que la nationalité des joueurs, combien de classements différents peut-on obtenir ?
4. Combien de groupes de 3 objets peut-on construire en tirant parmi les 5 lettres A, B, C, D, E?
5. De combien de façons peut-on asseoir en rang 3 garçons et 3 filles lorsque
(a) les filles (resp. les garçons) sont distinguables entres elles (resp. eux) ?
(b) les filles (resp. les garçons) sont indistinguables entres elles (resp. eux) ?

Exercice 2

1. Montrer, pour $k < n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0} \binom{n}{k}$
3. Montrer que $k \leq n \in \mathbb{N}^*$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

Note: On peut à chaque fois employer 2 méthodes, l'une "combinatoire" et l'autre en utilisant l'expression des coefficients binomiaux

Probabilités: généralités

Exercice 3

Quel est l'événement le plus probable : avoir un six au moins une fois quand on lance quatre fois un dé ou obtenir au moins une fois un double six en lançant 24 fois une paire de dés distinguables ?

Exercice 4

Une urne contient b boules bleues et r boules rouges. Une boule est tirée au hasard ; on la replace dans l'urne en ajoutant d boules de la même couleur.
1. Quelle est la probabilité que la seconde boule tirée soit rouge ?
2. Quelle est la probabilité que la première boule soit rouge sachant que la seconde est rouge ?

Exercice 5

Montrer que si $E_1, \cdots, E_n$ sont des événements mutuellement indépendants, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(E_i))$$

Variables aléatoires discrètes

Exercice 6

1. Soit X le rang d'obtention du premier 1 avec un dé équilibré. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

2. Une urne contient initialement deux boules, l'une noire et l'autre blanche. On tire une à une des boules dans cette urne en suivant le protocole suivant :
- Si la boule tirée est noire, on la remet simplement dans l'urne avant le tirage suivant.
- Si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et l'on y rajoute une boule blanche avant le tirage suivant. On note X le rang du premier tirage d'une boule noire. On pourra utiliser les événements : B_i : " la i^{eme} boule tirée est blanche " et N_i : " la i^{eme} boule tirée est noire "
(a) Déterminer $X(\Omega)$.
(b) Calculer $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = k)$ et interpréter.
(c) Calculer, si possible $E(X)$.

Exercice 7

Un fermier a N poules dans son poulailler : r rousses, n noires et b blanches, avec $N = r + b + n$. Lorsqu'il ouvre la porte du poulailler elles sortent une par une dans un ordre aléatoire. Soient:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si la } 1^{\text{ère}} \text{ poule à sortir est rousse} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \text{si la } 2^{\text{ème}} \text{ est rousse} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors,

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Déterminer, sous la forme d'un tableau la loi de probabilité jointe du couple (X, Y).

3. Déterminer la loi de probabilité de Y.

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

5. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = XY$. Calculer $E(Z)$.

6. Calculez la covariance de (X, Y). En déduire la variance de $X + Y$.

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$. On définit $Y = \frac{1}{1+X}$. Donner l'espérance de Y. On suppose ensuite que $p = 1/2$ et on pose $Z = \frac{a^X}{2n}$. Calculer $E(Z)$.

Exercice 9

Le nombre X de candidats se présentant à un examen suit une loi de Poisson de moyenne M . Chaque candidat a une probabilité p d'être reçu, indépendamment des résultats des autres candidats. On note Y le nombre de candidats reçus.

1. Déterminer la loi de X.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(Y = k|X = j)$ (deux cas à distinguer selon la valeur de j).
3. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(Y = k)$ sous forme d'une somme.
4. Déterminer la loi de Y

Variables aléatoires continues

Exercice 10

Soit $a > 1$. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \ln x}{x^2} \text{ si } x \in [1, a] \\ \quad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe a tel que f soit une densité de probabilité d'une variable X.
2. Montrer que X admet alors une espérance et calculer $E(X)$ en fonction de a.

Exercice 11

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right), m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On rappelle que X est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que sa densité est :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

1. Montrer que $aX + b$ est de loi $\mathcal{N}\left(am + b, a^2\sigma^2\right)$ pour tout $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. En déduire que $U = (X - m)/\sigma$ est de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

2. Soient F_X la fonction de répartition de X et ϕ la fonction de répartition de U. Montrer que $F_X(x) = \phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Soit $X \sim \mathcal{N}(3, 4)$. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1)$.

5. Pour $\alpha \in [0, 1]$ soit $u_\alpha = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.
a) Montrer que $-u_\alpha = \phi^{-1}(\alpha/2)$.
b) Répresenter u_α et $-u_\alpha$ sur le graphe de la densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
c) Calculer $\mathbb{P}\left(U \in [-u_\alpha, u_\alpha]\right)$.

6. Montrer que U^2 est de loi χ_i^2, dont la densité est

$$f_{U^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0$$