Definition und Visualisierung

Oliwier Przewlocki
Technologisches Gewerbemuseum
oprzewlocki@student.tgm.ac.at

Contents

1. Definition und Visualisierung

1.1. Def. n unabhängige Variablen

Unter einer reellen Funktion f in n unabhängigen Variablen versteht man eine Zuordnungsvorschrift f, die jedem geordneten n-tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reeller Zahlen aus einer Definitionsmenge D **genau eine** reelle Zahl z aus einer Wertemenge W zuordnet:

$$f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

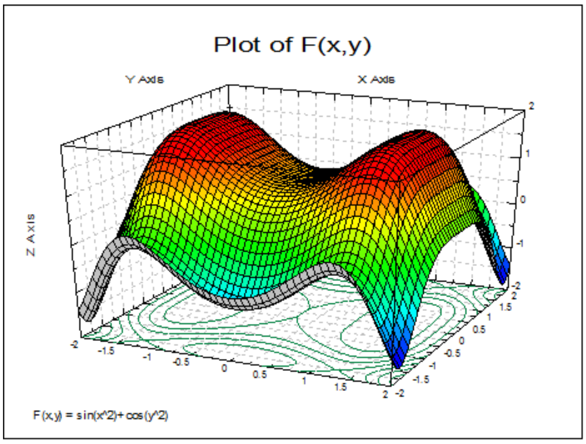
1.2. Def. zwei unabhängige Variablen

Unter einer reellen Funktionen f in zwei unabhängigen Variablen vesteht man eine Zuordnungsvorschrift f, die jedem geordneten Zahlenpaar (x, y) reeller Zahlen **genau eine** reele Zahl z zuordnet:

$$f : (x, y) \mapsto z) f(x, y)$$

x und y heißen unabhängige Variablen oder Argumente der Funktion, z heißt abhängige Variable oder Funktionswert. Man schreibt auch: $z = f(x, y)$

1.3. Visualisierung in zwei Variablen



Wenn im dreidimensionalen Raum jedem Punkt der x-y Ebene eine Höhe und daher einen Raumpunkt zugeordnet wird, erhält man insgesamt eine **Ebene**

1.3.1. Aufgabe 2.11)

1.3.1.1. a)

$$f(a, b) = a \times b^2 + c$$

Die unabhängigen Variablen sind a und b

1.3.1.2. b)

$$s(v, t) = -\frac{g}{2} \times t^2 + v \times t + s_0$$

Die unabhängigen Variablen sind v und t

1.3.2. Aufgabe 2.19)

1) $\rightarrow$ C), 2) $\rightarrow$ B), 3) $\rightarrow$ D), 4) $\rightarrow$ A)

2. 2.4 Partielle Ableitung erster Ordnung

2.1. Definition

Unter einer **Partiellen Ableitung** einer reellen Funktion in 2 Variablen $f(x, y)$ versteht man die Ableitung nach einer der Variablen. Es wird (unter Anwendung der üblichen Ableitungsregeln) nach dieser Variable abgeleitet, die andere Variable wird als Konstante aufgefasst.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_{x(x,y)}$$

2.2. Aufgabe 2.21)

$$f(x, y) = x^2 \times \cos(y) + y^2$$

Lösung:

$$f_{x(x,y)} = 2x \times \cos(y)$$

$$f_{y(x,y)} = -x^2 \times \sin(y) + 2y$$

2.3. Aufgabe 2.24)

2.3.1. c)

$$z = 5xy + 3y^4 - 6x^2y^2$$

$$f_x = 5y - 12xy^2$$

$$f_y = 5x + 12y^3 - 12x^2y$$

2.4. Aufgabe 2.25)

2.4.1. c)

$$z = 4x + \frac{y^2}{x} - \frac{6}{y} + 4$$

$$f_x = 4 - \frac{y^2}{x^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{x} + \frac{6}{y^2}$$

2.5. Aufgabe 2.27

2.5.1. c)

$$z = \sqrt{3x^2y + 2xy^2}$$

$$f_x = \frac{2y^2 + 6xy}{2\sqrt{2xy^2 + 3x^2y}}$$

$$f_y = \frac{4xy + 3x^2}{2\sqrt{2xy^2 + 3x^2y}}$$

3. 2.5 Partielle Ableitung zweiter Ordnung

$\frac{\partial}{\partial y} f_x(x,y) = \frac{\partial f_{x(x,y)}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy}(x,y)$

3.1. Satz von Schwarz

Sind die gemischt-partiellen Ableitungen in einer Umgebung der Stelle (x_0, y_0) stetig, so sind sie in dieser Umgebung **einander gleich**.

4. Extremwertberechnung

Am Anfang einer Kurvendiskussion ist die erste und zweite Ableitung vernünftig. Danach bestimmt man die **Definitionsmenge** von $y = f(x)$. Der nächste Schritt ist die bestimmung der **Nullstellen** $f(x) = 0 \to N_1(x_{N1}|0), N_2(N_{N1}|0)$. Danach kommt die Berechnung der **lokalen Extremwerten**:

$$f'(x) = 0 \to x_{E1}, x_{E2}, \dots$$

$$f''(x_E) < 0 \to \text{Maxmium}$$

$$f''(x_E) > 0 \to \text{Minimum}$$

Zuletzt kommen Globale Extrema, Wendepunkte und Wendetangenten