Допълнителна работа № 1 ДУПРил

Ирена Стантева – СИ, 2ри курс, 3та група, 4MI0600386

a) $\begin{cases} x\,y' = \dfrac{3.a.y^2 + 2.b.x.y + 2.c.x^2}{2.a.y + b.x} \\ y(1) = 4 \end{cases}$

$a = 4, \quad b = 6, \quad c = 3$

$$x\,y' = \frac{12y^2 + 12xy + 6x^2}{8y + 6x} \quad / \cdot \frac{1}{x}$$

(1) $$y' = \frac{12y^2 + 12xy + 6x^2}{x(8y + 6x)} = \frac{x^2\left(12\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 12\frac{y}{x} + 6\right)}{x^2\left(8\frac{y}{x} + 6\right)}$$

Хомогенно у-ние => Полагаме $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ => $y = x.z$, $y' = z + x z'$

Заместваме в (1):

$$z + x z' = \frac{12z^2 + 12z + 6}{8z + 6} \Rightarrow z' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{F(x)}\underbrace{\left(\frac{12z^2 + 12z + 6}{8z + 6} - \frac{8z+6}{z}\right)}_{G(x) \neq 0}$$

$$z' = \frac{1}{x}\left(\frac{4z^2 + 6z + 6}{8z + 6}\right)$$ Получихме у-ние с разделящи се променливи

$$\frac{8z + 6}{4z^2 + 6z + 6}\, z' = \frac{1}{x} \quad / \text{ Интегрираме по } x$$

(2) $$\underbrace{\int \frac{8z + 6}{4z^2 + 6z + 6}\, z'\, dx}_{= I} = \int \frac{dx}{x}$$ табличен $\ln|x|$

$$I = \int \frac{8z + 6}{4z^2 + 6z + 6}\, z'\, dx = \int \frac{8z + 6}{4z^2 + 6z + 6}\, dz$$

$D_1 = 9 - 24 < 0$

$4z^2 + 6z + 6 = \left(2z + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$

$8z + 6 = 4\left(2z + \frac{3}{2}\right)$

$$I = 4\int \frac{\left(2z + \frac{3}{2}\right)}{\left(2z + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}}\, dz = \frac{4}{4}\int \frac{d\left[\left(2z + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right]}{\left(2z + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}}$$

табличен $\int \frac{dt}{t}$ за $t = \left(2z + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$

$I = \ln\left(\left(2z+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right)$

Заместваме в (2)

$$\ln\left(\left(2z+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right) = \ln|x| + C_0$$

$$e^{\ln\left(\left(2z+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right)} = e^{\ln|x| + C_0} \qquad e^{\ln|x| + C_0} = \underbrace{e^{\ln|x|}}_{=x} \cdot \underbrace{e^{C_0}}_{=C_1}$$

$$\left(2z+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} = C_1 \cdot x$$

$$\left(2z+\frac{3}{2}\right)^2 = C_1 x - \frac{15}{4} \quad / \sqrt{\ }$$

$$2z + \frac{3}{2} = \sqrt{C_1 \cdot x - \frac{15}{4}} \rightarrow \text{НЕ е дефинирано за } \forall x \text{ и } \forall C_1$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \left[\sqrt{C_1 x - \frac{15}{4}} - \frac{3}{2}\right] \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{C_1 x - \frac{15}{4}} - \frac{3}{2}\right] \cdot x}$$

$$\boxed{y(1) = 4}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{C_1 - \frac{15}{4}} - \frac{3}{2}\right] \Rightarrow 16 + 3 = \sqrt{C_1 - \frac{15}{4}} \Rightarrow \boxed{C_1 = 19^2 + \frac{15}{4}}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(19^2 + \frac{15}{4}\right)x - \frac{15}{4}} - \frac{3}{2}\right] \cdot x}$$

ДО: $\left(19^2 + \frac{15}{4}\right)x - \frac{15}{4} \geq 0$

$$\Rightarrow \boxed{x \geq \frac{\frac{15}{4}}{19^2 + \frac{15}{4}}} \approx 0{,}0103$$

Решение:

б) Имаме файл curve, в който имаме:

```
function curve
    axis([1 2 4 10])   → интервалът може да е друг, просто за
    hold on;             тези ми харесва във фигурата как
    grid on;             се събира всичко ☺

    xlabel('x');
    ylabel('y');
    title('Интегрална крива за задачата на Коши');

    x0=1;
    y0=4;
    syms y(x);

    sol = dsolve(x * diff(y,x) == (12*y^2+12*x*y+6*x^2)/(8*y+6*x), ...
                                    y(x0)==y0);

    xvalid = (15/4)/(19^2+15/4)+1;
    x= xvalid:0.01:2000;   → може и до 10 ☺

    plot(x, eval(sol), 'g')

end
```

Условие

25.03.25г. Домашна работа №1 по ДУПрил

Ирена Станчева - СИ, 2ри курс, 3та група, 4МІО600336

Задача:

а) (2т.) Да се реши задачата на Коши:

$$xy' = \frac{3.a.y^2 + 2.b.x.y + 2.cx^2}{2.a.y + b.x}, \quad y(1) = 4,$$

където a, b, c са първите 3 ненулеви цифри от факултетния Ви номер.

б) (2т.) Да се напише MATLAB код, който решава символно тази задача на Коши в подходящ интервал и изчертава интегралната крива на намереното решение.