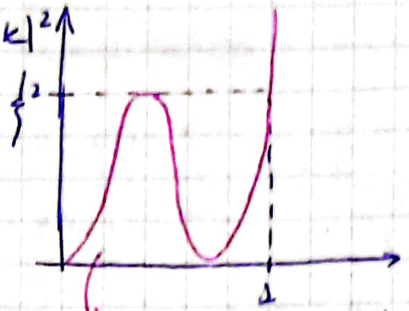
Clase 4

Aproximación de Chebyshev

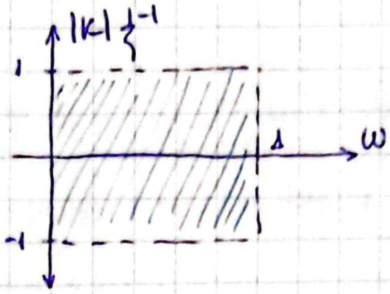


se va a buscar definir, a comparación de la aproximación de Butterworth, una banda de oscilación. Una vez que se supere la banda de paso la función crecerá monotonamente

para un Butter la función crecía monótomamente en esa banda

siendo: $|T|^2 = \dfrac{1}{1+\underbrace{\xi^2 w^{2n}}_{|K|^2}}$ se puede ver que sus valores están acotados entre 1 y $\dfrac{1}{1+\xi^2}$ en la banda de paso

si luego se despeja $|K|^2$ y se la normaliza por el factor ξ^{-1} se obtiene



analizando el resultado final se propone una función cosenoidal que pueda satisfacer

$$y(x) = \cos nx$$

como $|x|<1 \Rightarrow x = \cos^{-1} w$

de esta forma se acota la función

$$y(x) = \cos(n\cos^{-1}(w)) = C_n(w)$$

$|w| \leq 1$

polinomios de Chebyshev

$$C_n(w) = 2^{n-1}w^n - \frac{n}{1!}2^{n-3}w^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!}2^{n-5}w^{n-4} - \dots$$

$$= 2w\,C_{n-1}(w) - C_{n-2}(w)$$

$$\begin{cases} C_0(w) = 1 \\ C_1(w) = w \\ C_2(w) = 2w^2 - 1 \\ \vdots \end{cases}$$

$$|T_n(jw)|^2 = \frac{1}{1+\xi^2 C_n^2(w)}$$ TRANSFERENCIA DE CHEBYSHEV

se puede observar que haciendo esta aproximación, la función solo estaría definida para valores de $|w| \leq 1$, por lo que todavía faltaría definir para el otro rango de valores.

Cuando el argumento del $\cos^{-1}$ es mayor a 1 o menor a -1 entonces este se vuelve imaginario

$$\cos^{-1} w = jz \longrightarrow w = \cos jz$$

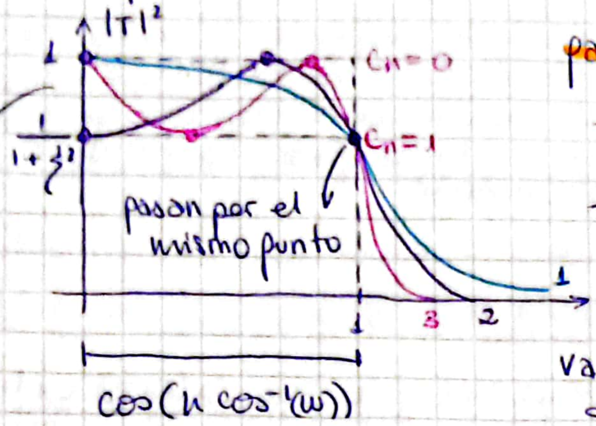
$$\Rightarrow \left\{ w = \cos jz = \frac{e^{j(jz)} + e^{-j(jz)}}{2} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \cosh(z) \right.$$

$\rightarrow \cos^{-1} w = j\cosh^{-1} w$

como se fue la parte imaginaria se vuelve un coseno hiperbólico

Quedando: $C_n(\omega) = \cos(n j \cosh^{-1}(\omega)) = \cosh(n \cosh^{-1}(\omega)) \quad |\omega| \geq 1$

De esta forma se obtienen los valores de $|T|^2$ para todos los valores de frecuencia.



para $\omega = 0$

$\rightarrow \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right)$

$\begin{cases} n \text{ IMPAR } C_n = 0 \\ n \text{ PAR } C_n = 1 \end{cases}$

va a ir alternando dónde va a empezar

para $\omega = 1$

$\rightarrow \cos^{-1}(1)$

$\rightarrow \cos(n \cdot 2\pi) = 1$

para todo n

la cantidad de toques en las cotas define el orden (n) y la modulación siempre va a estar esquinada hacia la derecha

Determinación de polos

$$|T_n(j\omega)|^2 \Big|_{\omega = s/j} = T(s)\, T(-s) = \frac{1}{1 + \xi^2 C_n^2(s/j)}$$

para poder saber la ubicación de los polos va a ser necesario analizar el comportamiento de los $C_n(s/j)$.

para $\omega < 1 \longrightarrow C_n(s/j) = \cos(n \cos^{-1}(s/j)) = \cos(n\omega)$ $\quad \omega = u + jv$ número complejo

$$= 0 \pm j \frac{1}{\xi}$$

$\begin{cases} \cos(nu)\cosh(nv) = 0 \\ \sin(nu)\sinh(nv) = \pm j \frac{1}{\xi} \end{cases}$ $\longrightarrow$ el cosh nunca se anula por tanto cos debe ser cero

$\Rightarrow u_k^{*} = \frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n},$

distintos valores de k para que se cumpla la condición

* también puede ser escrito como $u_k = \frac{\pi}{2n}(2k-1)$

para estos valores que toma $u_k \rightarrow \sin(nu_k) = \pm 1$

de esta forma se despeja v_k

$\sin(nu_k)\sinh(nv_k) = \pm j\, 1/\xi \longrightarrow \pm \sinh(nv_k) = \pm j\, 1/\xi$

$\longrightarrow v_k = \pm \frac{1}{n} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\xi}\right) = \pm a$

$\Rightarrow \omega_k = u_k + j v_k$

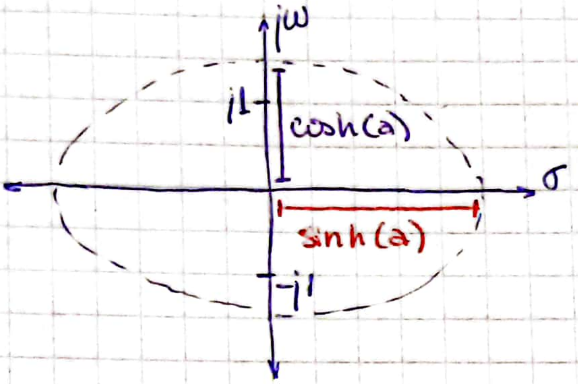
$= \cos^{-1}(s/j) \longrightarrow s_k = j\cos(\omega_k) = j\cos\Big(\underbrace{\frac{\pi}{2n}(2k-1)}_{u_k} + j\underbrace{a}_{v_k}\Big)$

Si a su vez: $S_k = \sigma_k + j\omega_k$

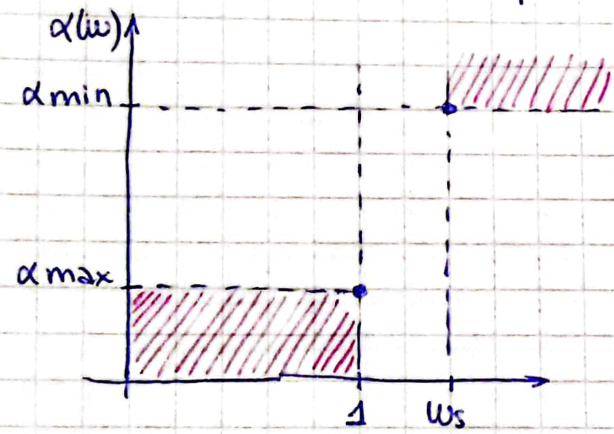
$$\sigma_k = \pm \sinh(a) \sin\left(\frac{2k-1}{2n} \cdot \pi\right) \qquad \omega_k = \cosh(a) \cos\left(\frac{2k-1}{2n} \pi\right)$$

finalmente $\rightarrow \left(\frac{\sigma_k}{\sinh(a)}\right)^2 + \left(\frac{\omega_k}{\cosh(a)}\right)^2 = 1 \longrightarrow \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

de esta forma se obtiene la ecuación de una elipse



Partiendo ahora desde la plantilla, se busca poder averiguar los parámetros del filtro



sabiendo que para $\omega = 1$, independientemente del orden, $C_n(1) = 1$ y por tanto $|T|^2 = \frac{1}{1+\xi^2}$

obteniendo

$$\alpha max = \frac{1}{|T|^2} = \sqrt{1+\xi^2} \quad \text{(en veces)}$$

$$\alpha max = 10 \log(1+\xi^2) \quad \text{(en dB)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi^2 = 10^{\alpha max (dB)/10} - 1}$$

para $\omega = \omega_s$

$$\alpha min = 10 \log(1 + \xi^2 C_n^2(\omega_s)) = 10 \log(1 + \xi^2 \cosh^2(n \cosh^{-1}(\omega_s)))$$

debido a que no es una expresión sencilla de recordar, se va a hacer, al igual que con los filtros Butter, iterar el valor de n hasta conseguir un valor mayor de αmin.