

# Dimensão Fractal e Rede Livre de Escala

Fagundes, R. L.\*

Mestrando em Física Estatística

Departamento de Física - DFI/UFLA, Lavras, MG.

## Sumário

1	Objetivos . . . . .	1
2	Teoria . . . . .	1
2.1	Geometria fractal . . . . .	1
2.2	<i>Box-counting</i> . . . . .	1
2.3	Modelo de Soneira-Peebles . . . . .	2
2.4	Rede livre de escala . . . . .	3
2.5	Renormalização e fractalidade . . . . .	6
3	Métodos . . . . .	9
4	Orientações para o relatório . . . . .	9

## 1 Objetivos

O presente projeto tem os seguintes objetivos:

- Compreender o que é um rede livre de escala;
- Gerar uma rede geométrica livre de escala a partir do modelo de Soneira-Peebles (usando a classe `SoneiraPeebles`) e do mecanismo de ligação preferencial;
- Calcular a distribuição de grau de uma rede livre de escala e estimar o expoente da distribuição;
- Calcular a dimensão fractal (usando a classe `FractalBox`) da rede livre de escala;
- Estimar a **dimensão fractal de distribuição de grau** a partir da **dimensão fractal de contagem de caixas** e do expoente de escala  $\gamma$ .
- Construir um relatório com uma breve discussão do assunto e dos resultados obtidos;

## 2 Teoria

### 2.1 Geometria fractal

Geometria fractal é uma ramo da matemática que estuda fractais, estruturas que exibem padrões similares quando observados em diferentes níveis de detalhe. A auto-similaridade é a propriedade de que uma parte de um objeto é similar ao objeto inteiro, Figura 2.1.

### 2.2 *Box-counting*

O método de contagem de caixas ou *box-counting* pode ser implementado realizando-se os seguintes procedimentos:

- Construa um reticulado sobre o fractal consistindo de  $N(\epsilon_1)^2$  caixas e determine o número  $N(\epsilon_1)$  de caixas que são necessárias para cobrir o fractal;
- A cada contagem de caixas que sobrepõem o fractal, diminua a escala da caixa de modo a formar a sequência de caixas  $N(\epsilon_1)^2 < N(\epsilon_2)^2 < \dots < N(\epsilon_n)^2$ ;

---

\*renan\_lucas@id.uff.br; <https://github.com/renabridged>.

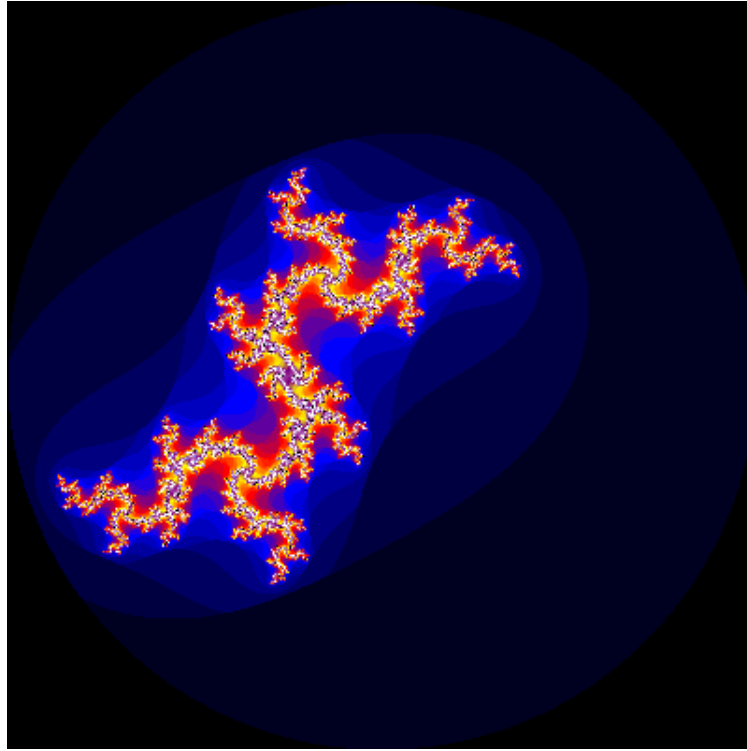


Fig. 2.1: Conjunto Julia é uma estrutura fractal gerada a partir de interações e números complexos. Este conjunto pode ser derivado do conjunto de Mandelbrot, outra estrutura fractal que exibe a propriedade de auto-similaridade. Fonte: Introduction to Fractal Geometry Martin Churchill, 2004.

- Calcule os números correspondentes de caixas  $N(\epsilon_1), N(\epsilon_2) \dots, N(\epsilon_n)$  necessários para cobrir o fractal;
- Construa um gráfico na escala log-log de  $N(\epsilon_n)$  versus  $1/\epsilon_n$  e interprete o coef. angular da reta como a dimensão fractal do sistema.

Nesta construção temos que o número de caixas  $N(\epsilon_n)$  necessário para cobrir o fractal na escala  $\epsilon_n$  cresce muito rapidamente quando  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , isto implica que

$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-d_f} \quad (2.1)$$

onde foi deixado implícito as  $n$  escalas [2]. Portanto, a dimensão fractal do sistema pode ser obtida calculando o logaritmo de ambos os lados e resolvendo para  $d_f$ , fornecendo

$$d_f \sim \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}. \quad (2.2)$$

Esta é a definição mais comum na literatura de dimensão fractal.

### 2.3 Modelo de Soneira-Peebles

O modelo de Soneira-Peebles permite construir fractais uma vez definido o número de objetos (pontos)  $\eta$  dentro de um círculo de raio  $R/\lambda$  na escala  $\lambda$  circunscrito em um círculo  $R \gg R/\lambda$ . Figura 2.2. Deste modo, para obtermos a dimensão fractal de uma estrutura usando a construção de Soneira-Peebles, devemos notar o seguinte:

- $p(R/\lambda, R)$  é a probabilidade de encontrar um ponto dentro de um círculo de raio  $R/\lambda$  circunscrito em um círculo de raio  $R \gg R/\lambda$ ;
- $N(\lambda)$  é o número de pontos na escala  $\lambda$ ;
- $\eta$  é o número de pontos que se encontra dentro de um círculo de raio  $R/\lambda$  circunscrito em um círculo de raio  $R \gg R/\lambda$ ;

De fato, multiplicando  $\eta$  por  $p(R/\lambda)$ , temos o número de pontos  $N(\lambda)$  na escala  $\lambda$ , ou seja,

$$N(\lambda) = \eta p(R/\lambda). \quad (2.3)$$

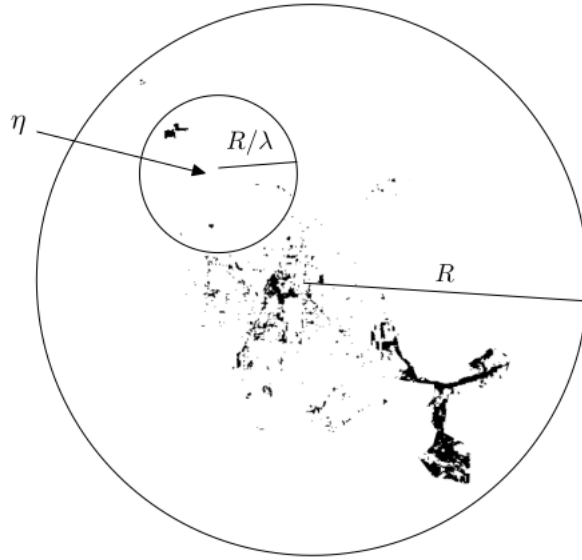


Fig. 2.2: Representação esquemática para a dedução da dimensão fractal usando a construção de Soneira-Peebles.

Ademais, assumindo que os pontos  $N(\lambda)$  satisfaçam a hipótese de estruturas fractais, devemos ter  $N(\lambda) \sim \lambda^{-d_f}$ , logo

$$d_f \sim \frac{\ln N(\lambda)}{\ln(1/\lambda)}. \quad (2.4)$$

Da geometria do problema, temos que

$$p(R/\lambda) = \frac{\pi(R/\lambda)^2}{\pi R^2} = 1/\lambda^2 \quad (2.5)$$

então

$$d_f \sim \frac{\ln(\eta/\lambda^2)}{\ln(1/\lambda)} \quad (2.6)$$

e, portanto,

$$d_f \sim \frac{\ln \eta}{\ln \lambda}. \quad (2.7)$$

a qual define a dimensão fractal de uma estrutura a partir da sequência  $\{\eta_n, \lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

## 2.4 Rede livre de escala

Redes complexas são estruturas compostas por um conjunto de nós interconectados por meio de relações ou conexões. Essas redes são caracterizadas por propriedades não triviais, como a presença de clusters e a distribuição não uniforme de conexões entre os nós Figura 2.3.

Uma rede livre de escala é um tipo específico de rede complexa em que a distribuição de grau ou conectividade segue uma lei de potência, o que significa que existem alguns nós altamente conectados, conhecidos como hubs, e a maioria dos nós tem um baixo número de conexões [3]. O expoente de escala é uma medida utilizada para descrever o grau de heterogeneidade na distribuição de grau. Quanto maior o valor do expoente de escala, mais heterogênea é a rede.

Uma rede livre de escala necessita de dois mecanismos, são eles:

- **Crescimento:** inicia-se com  $m_0$  nós previamente ligados e a cada passo é adicionado um novo nó com  $m \leq m_0$  ligações [5];
- **Ligação preferencial:** Novos links tendem a se ligar com nós mais ligados, o que significa que a probabilidade  $\Pi$  de um novo nó de se ligar com um nó  $i$  com grau  $k_i$  é proporcional  $k_i$ , ou seja,

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \quad (2.8)$$

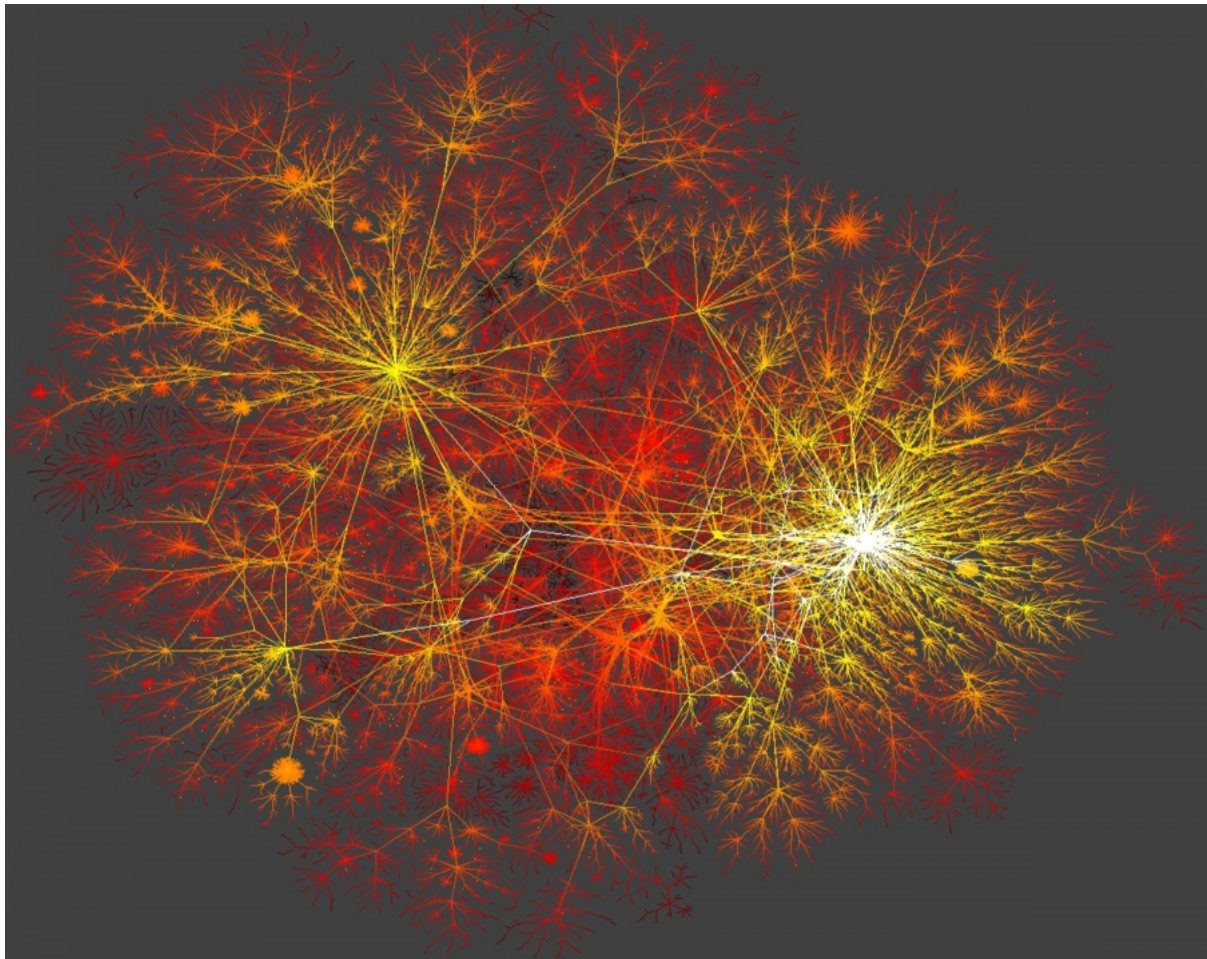


Fig. 2.3: Representação topológica da internet do século XXI. Note os pontos mais claros da imagem, eles são denominados de hubs por possuírem uma fração significativa dos links da rede. Este é um exemplo real de uma rede livre de escala. Veremos neste projeto como estimar o expoente de escala de uma rede semelhante. Em particular o expoente de escala da distribuição de grau da internet é  $\gamma = 3.42$ , o que significa que ela é uma rede que se encontra no regime aleatório com a propriedade de mundo pequeno. A.L. Barabási, Network science <http://networksciencebook.com/>.

Com tais mecanismos, depois de  $t$  passos, existirão  $t + m_0$  nós com  $mt$  ligações. De fato, é conveniente assumir que  $k_i$  e  $t$  sejam variáveis contínuas e que a taxa com que número de ligações  $k_i$  do nó  $i$  varia seja positiva e proporcional a probabilidade  $\prod(k_i)$ , ou seja,

$$\frac{dk_i}{dt} = m \prod(k_i) \quad (2.9)$$

onde o fator  $m$  é o número de links adicionados a rede por unidade de tempo. Assim, temos

$$\frac{dk_i}{dt} = m \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \quad (2.10)$$

Lembrando que no instante  $t$  existem  $mt$  ligações, a soma  $\sum_j k_j = 2mt$  onde o fator 2 significa uma contagem e duplicidade dos links (os que “entram” e os que “saem”). Além disso, correções de primeira ordem podem ser desconsideradas para  $t \gg 1$ , isto significa desprezar a contagem dos links iniciais. Com isto, em mente, temos

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{k_i}{2t} \longrightarrow k_i = Ct^{1/2} \quad (2.11)$$

onde foram utilizados a separação de variáveis e integração. Se denotarmos o tempo da inserção de um nó por  $t_i$  e considerarmos a condição inicial  $k_i(t_i) = m$ , é possível mostrar que

$$k_i(t) = m \left( \frac{t}{t_i} \right)^{1/2}. \quad (2.12)$$

Este resultado nos diz que o número de links conectados ao nó  $i$  cresce com  $t^{1/2}$ .

Constudo, partindo da definição da função de probabilidade cumulativa, qual seja

$$P[k_i(t) < k] = \text{probabilidade de que o nó } i \text{ tenha um número de ligações } < k,$$

podemos escrever a probabilidade de encontrar um nó  $i$ , no instante  $t$ , com um número de ligações  $k_i(t) < k$  por meio de

$$P[k_i(t) < k] = P\left[m \left( \frac{t}{t_i} \right)^{1/2} < k\right]. \quad (2.13)$$

Manipulando  $m \left( \frac{t}{t_i} \right)^{1/2} < k$  segue

$$\left[ m \left( \frac{t}{t_i} \right)^{1/2} \right]^2 < k^2 \implies m^2 t < t_i k^2 \implies t_i > \frac{m^2 t}{k^2} \quad (2.14)$$

que levando na expressão da probabilidade cumulativa, fornece

$$r.h.s = P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right) \quad (2.15)$$

Agora, lembrando que:

- existem  $m_0 + t$  e um nó é adicionado a cada passo;
- o instante  $t_i$  no qual o nó  $i$  é adicionado é dado por uma distribuição uniforme entre 0 e  $m_0 + t$ ;
- do último item, a função densidade de probabilidade  $p(k_i)$  é constante no intervalo  $[0, m_0 + t]$  e é dada por  $p(k_i) = 1/(m_0 + t)$ .

Destas condições, temos

$$\begin{aligned} P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right) &= \int_{m^2 t/k^2}^{m_0+t} p(k_i) dt_i \\ &= \int_{m^2 t/k^2}^0 \frac{dt_i}{m_0+t} + \int_0^{m_0+t} \frac{dt_i}{m_0+t} \\ &= \frac{1}{m_0+t} \int_0^{m_0+t} dt_i - \frac{1}{m_0+t} \int_0^{m^2 t/k^2} dt_i \\ &= \frac{m_0+t}{m_0+t} - \frac{m^2 t}{(m_0+t)k^2} \\ &= 1 - \frac{m^2 t}{(m_0+t)k^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

logo

$$P[k_i(t) < k] = 1 - \frac{m^2 t}{(m_0 + t)k^2}. \quad (2.17)$$

Para obtermos  $p(k)$ , usamos que

$$p(k) = \frac{d}{dk} P[k_i(t) < k], \quad (2.18)$$

então

$$\begin{aligned} p(k) &= -\frac{d}{dk} \left( \frac{m^2 t}{(m_0 + t)k^2} \right) \\ &= -\frac{m^2 t}{m_0 + t} \frac{d}{dk} (k^{-2}) \\ &= \frac{2m^2 t}{m_0 + t} k^{-3} \end{aligned} \quad (2.19)$$

que para  $t \gg 1$ , temos

$$p(k) \sim k^{-3}. \quad (2.20)$$

De modo geral, podemos escrever

$$p(k) \sim k^{-\gamma}. \quad (2.21)$$

## 2.5 Renormalização e fractalidade

### Renormalização

Técnica que consiste em gerar pequenas réplicas de um dado objeto, preservando as principais características estruturais do objeto original, a fim de obter cópias com estruturas mais simples para facilitar a análise.

Renormalização  $\leftrightarrow$  Auto-similaridade

### Auto-Similaridade

Propriedade de um sistema o qual possui auto-semelhança em todas as escalas (comprimento, tempo, etc.). Exemplos: sistema sanguíneo, rede de ruas, etc.

Procedimento de renormalização em uma rede complexa:

1. Cobrir a rede inteira com caixas de tamanho (comprimento lateral)  $\epsilon$ ;
2. Cada caixa é trocada por um único nó e dois nós são conectados se e somente se ao menos um link existe entre duas caixas na rede original;
3. Aplica-se os passos 1 e 2 na rede renormalizada até se obter um único nó, fornecendo uma rede conectada (todos os nós possuem links).

Considerando  $G$  uma rede livre de escala, então sua distribuição de probabilidade de grau é dada por

$$p(k) \sim k^{-\gamma}, \quad (2.22)$$

onde  $p(k)$  é a probabilidade de encontrar um nó na rede  $G$  com grau  $k$ . Logo, a distribuição de probabilidade de grau da rede renormalizada  $G'$  é dada por

$$p'(k) \sim k^{-\gamma}. \quad (2.23)$$

Isto significa que uma rede livre de escala, possui uma distribuição de probabilidade de grau invariante por renormalizações, em que o processo de renormalização pode ser entendido com sinônimo de transformação [1]. De fato, a sequência de redes  $k$ -vezes renormalizadas  $\{G'_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{G''_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \dots, \{G_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{N}}, \dots$  possui o mesmo expoente de escala  $\gamma$ .

Dados empíricos sugerem que plotando o grau  $k(\epsilon)$  de cada nó da rede renormalizada versus o grau  $k_{max}$  do nó mais conectado da caixa correspondente de tamanho  $\epsilon$ , é possível obter uma lei de escala linear

$$k(\epsilon) \sim s(\epsilon) \cdot k_{max} \quad (2.24)$$

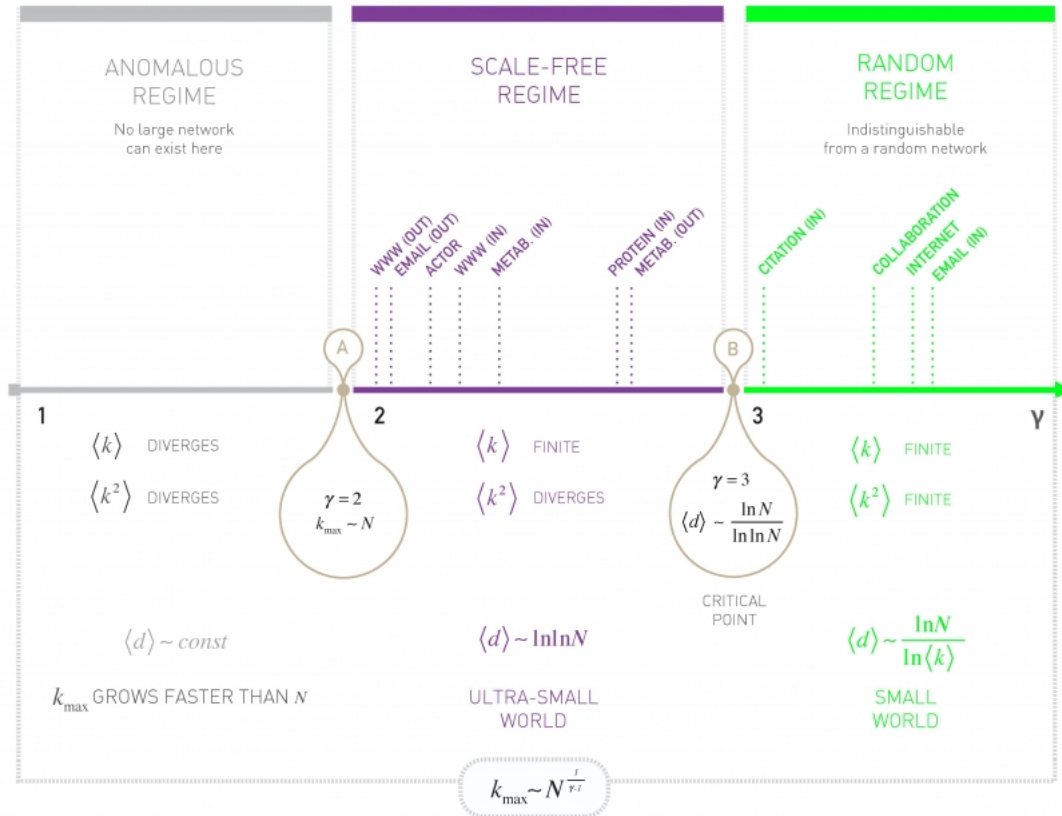


Fig. 2.4: Regimes do expoente de escala  $\gamma$ .  $\langle k \rangle$  é o número médio de ligações ou tendência central de  $k$ ,  $\langle k^2 \rangle$  é o segundo momento associado ou variância de  $k$  em relação a média,  $\langle d \rangle$  é o diâmetro médio da rede e  $k_{\max}$  é o número de ligações do maior hub da rede. Note que a maioria das redes reais livres de escala possuem expoentes de escala no intervalo  $2 < \gamma < 3$  caracterizado pela propriedade de mundo ultra pequeno. Uma rede tem a propriedade de mundo pequeno se tiver relativamente poucas conexões de longa distância, mas tiver um comprimento de caminho médio pequeno em relação ao número total de nós. 1)  $\gamma < 2$  significa que o número de links que se conectam ao maior hub da rede cresce mais rapidamente que o tamanho da rede. 2)  $2 < \gamma < 3$  o número de links que se conectam ao maior hub da rede cresce com o tamanho da rede. 3)  $\gamma > 3$  indica que a distância média entre os nós converge para a fórmula de mundo pequeno. Fonte: A.L. Barabási, Network science <http://networksciencebook.com>.

onde  $s(\epsilon)$  é um fator de escala. Além disso, este fator  $s$  ( $s < 1$ ) escala com  $\epsilon$  definindo um expoente  $d_k$  (dimensão fractal de distribuição de grau)

$$s(\epsilon) \sim \epsilon^{-d_k} \quad (2.25)$$

de modo que o expoente de grau para uma sequência de rede  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é definido por

$$d_k = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln s^n(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} \quad (2.26)$$

em que  $s^n(\epsilon)$  é o fator de escala da rede  $G_n$  e caixa de lado  $\epsilon$ .

Assumindo que [1]

$$\frac{N}{N(\epsilon)} \sim \epsilon^{d_f} \quad (2.27)$$

onde  $N$  é o número de nós da rede,  $N(\epsilon)$  o número de caixa necessárias para cobrir perfeitamente toda a rede,  $\epsilon$  o tamanho da caixa,  $d_f$  a dimensão fractal da rede e denotando as distribuições de probabilidade de grau da rede  $G$  não-renormalizada e da rede  $G'$  renormalizada, repectivamente, por

$$p(k) \sim k^{-\gamma}, \quad P'(k') \sim k'^{-\gamma}, \quad (2.28)$$

podemos escrever

$$NP(k)dk \sim N(\epsilon)p'(k')dk'. \quad (2.29)$$

Esta expressão significa que a probabilidade de encontrar um certo número de nós com grau entre  $k + dk$  em uma rede  $G$  não renormalizada de tamanho  $N$  é numericamente igual a probabilidade de encontrar um certo número de nós com grau entre  $k' + dk'$  dentro de caixas  $N(\epsilon)$  de tamanho  $\epsilon$  as quais sobrepõem perfeitamente um rede  $G'$  renormalizada.

Neste sentido, podemos escrever

$$Np(k) \sim N(\epsilon)p'(k') \frac{dk'}{dk} \quad (2.30)$$

e impondo que  $k = k_{max}$  virá

$$Np(k_{max}) \sim N(\epsilon)p'(s(\epsilon)k_{max})s(\epsilon). \quad (2.31)$$

Usando as eqs. (2.28) resulta em

$$Nk_{max}^{-\gamma} \sim N(\epsilon)k_{max}^{-\gamma}s(\epsilon)^{-\gamma}s(\epsilon) \implies \frac{N}{N(\epsilon)} \sim s(\epsilon)^{-\gamma+1} \implies \epsilon^{d_f} \sim (\epsilon^{-d_k})^{-\gamma+1} \quad (2.32)$$

o que implica em  $d_f = -d_k(-\gamma + 1) = d_k(\gamma - 1)$  e, portanto,

$$\gamma = 1 + \frac{d_f}{d_k}. \quad (2.33)$$

Este resultados nos mostra que o expoente de escala  $\gamma$  pode ser explicado a partir da complexidade dos padrões espaciais e geométricos da rede  $d_f$  e da complexidade dos padrões das conexões entre seus links  $d_k$ . Quando  $d_f = d_k$ , temos o primeiro regime crítico A quando  $\gamma = 2$ , veja Figura 2.4 enquanto  $d_f = 2d_k$  temos o segundo regime crítico B quando  $\gamma = 3$ . Note que a maioria das redes reais livres de escala possuem expoentes de escala no intervalo  $2 < \gamma < 3$  caracterizado pela propriedade de mundo ultra pequeno.

Além disso, uma vez que

$$\epsilon \sim \left( \frac{N}{N(\epsilon)} \right)^{\frac{1}{d_f}}, \quad s(\epsilon) \sim \epsilon^{-d_k} \quad (2.34)$$

é possível escrever

$$s(\epsilon) \sim \left( \frac{N}{N(\epsilon)} \right)^{-\frac{d_k}{d_f}}. \quad (2.35)$$

Usando a expressão de  $\gamma$  resulta que  $-\frac{d_k}{d_f} = \frac{1}{1-\gamma}$ , logo

$$s(\epsilon) \sim \left( \frac{N}{N(\epsilon)} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \implies \frac{k(\epsilon)}{k_{max}} \sim \left( \frac{N}{N(\epsilon)} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \implies k_{max}^{-1} \sim N^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (2.36)$$



NETWORK	$N$	$L$	$\langle k \rangle$	$\langle k_{in}^2 \rangle$	$\langle k_{out}^2 \rangle$	$\langle k^2 \rangle$	$\gamma_{in}$	$\gamma_{out}$	$\gamma$
Internet	192,244	609,066	6.34	-	-	240.1	-	-	3.42*
WWW	325,729	1,497,134	4.60	1546.0	482.4	-	2.00	2.31	-
Power Grid	4,941	6,594	2.67	-	-	10.3	-	-	Exp.
Mobile Phone Calls	36,595	91,826	2.51	12.0	11.7	-	4.69*	5.01*	-
Email	57,194	103,731	1.81	94.7	1163.9	-	3.43*	2.03*	-
Science Collaboration	23,133	93,439	8.08	-	-	178.2	-	-	3.35*
Actor Network	702,388	29,397,908	83.71	-	-	47,353.7	-	-	2.12*
Citation Network	449,673	4,689,479	10.43	971.5	198.8	-	3.03**	4.00*	-
E. Coli Metabolism	1,039	5,802	5.58	535.7	396.7	-	2.43*	2.90*	-
Protein Interactions	2,018	2,930	2.90	-	-	32.3	-	-	2.89*

Fig. 2.5: Principais estatísticas de algumas redes livres de escala.  $N$  é o número de nós e  $L$  o número de links da rede. Fonte: A.L. Barabási, Network science <http://networksciencebook.com>.

e, portanto,

$$k_{max} \sim N^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2.37)$$

que nos diz que o hub com maior número de ligações escala com o tamanho da rede com expoente  $\frac{1}{\gamma-1}$ . A Figura 2.5 apresenta algumas redes livres de escala e algumas de suas principais estatísticas.

### 3 Métodos

- Classe Soneira-Peebles
- Classe FractalBox

Usando as classes acima, execute os seguintes passos:

1. Utilize a classe Soneira-Peebles para gerar os pontos de um fractal com determinada dimensão fractal. A dimensão fractal é dada pela razão dos logaritmos dos últimos valores de  $\eta$  (número de pontos na última camada) e de  $\lambda$  (fator de redução da última camada). Por exemplo, para gerar um fractal com dimensão 1.5,  $\eta = 8$  e  $\lambda = 5$ . Sugestão: comece com o mesmo número de pontos em cada camada e varie estes valores para ver o que acontece.
2. Gerado os pontos do fractal, utilize a classe FractalBox para estimar a dimensão fractal desses pontos. A dimensão fractal estimada é a mesma que escolheu usando os valores de  $\eta$  e  $\lambda$  na última camada? Qual o erro relativo cometido? A dimensão fractal é maior o menor que o espaço onde os pontos estão embebidos? Interprete este último resultado.
3. Depois de comparar a dimensão fractal escolhida e a estimada, agora é hora de gerar uma rede posicionada com as mesmas coordenadas dos pontos obtidos do fractal.
4. Siga os procedimentos apresentados no notebook disponibilizado e obtenha os valores do expoente de escala  $\gamma$  estimado e das dimensões  $d_f$  e  $d_k$  com as incertezas e os respectivos coeficiente de determinação ( $R^2$ );
5. Finalize o projeto elaborando um breve relatório com os pontos da seção 4 deste projeto. (Não esqueça de incluir uma imagem da rede no relatório! Use a criatividade!)

### 4 Orientações para o relatório

O relatório deve conter os seguintes pontos:

- Background geral (Redes complexas e Fractais);
- Background específico (Redes livre de escala);
- O que encontraram:

$\gamma$	$R^2$	$d_f$	$R^2$	$d_k$
$(\gamma \pm \sigma_\gamma)$	-	$(d_f \pm \sigma_{d_f})$	-	$(d_k \pm \sigma_{d_k})$

Tab. 1: Tabela a ser constituída com os valores obtidos a partir da simulação.

- Quais os valores obtidos das dimensões fractais e do expoente de escala e seus respectivos erros e  $R^2$ ?
- Qual o regime de escala da rede? Anômalo, mundo pequeno ou aleatório?
- A eq. (2.37) consegue predizer o valor de  $k_{max}$ ? Justifique sua resposta;
- Imagens da rede e dos gráficos gerados;
- Tabela 1 com o expoente de escala  $\gamma$  estimado e as dimensões  $d_f$  e  $d_k$  com as incertezas e os respectivos coeficientes de determinação ( $R^2$ ) para  $\gamma$  de  $d_f$ .
- Breve discussão dos resultados encontrados;
- Conclusões,
- O que acharam do projeto (em poucas palavras).

Uma vez que

$$d_k = \frac{d_f}{\gamma - 1} \rightarrow d_k = d_k(d_f, \gamma) \quad (4.1)$$

temos

$$\sigma_{d_k} = \sqrt{\left(\frac{\partial d_k}{\partial d_f}\right)^2 \sigma_f^2 + \left(\frac{\partial d_k}{\partial \gamma}\right)^2 \sigma_\gamma^2}. \quad (4.2)$$

Assim, como

$$\frac{\partial d_k}{\partial d_f} = \frac{1}{\gamma - 1}, \quad \frac{\partial d_k}{\partial \gamma} = -\frac{d_f}{(\gamma - 1)^2} \quad (4.3)$$

temos

$$\begin{aligned} \sigma_{d_k} &= \sqrt{\frac{\sigma_f^2}{(\gamma - 1)^2} + \frac{d_f^2 \sigma_\gamma^2}{(\gamma - 1)^4}} \\ &= \sqrt{\frac{\sigma_f^2 (\gamma - 1)^2}{(\gamma - 1)^4} + \frac{d_f^2 \sigma_\gamma^2}{(\gamma - 1)^4}} \\ &= \sqrt{\frac{\sigma_f^2 (\gamma - 1)^2 + d_f^2 \sigma_\gamma^2}{(\gamma - 1)^4}} \\ &= \frac{1}{(\gamma - 1)^2} \sqrt{\sigma_f^2 (\gamma - 1)^2 + d_f^2 \sigma_\gamma^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

que a incerteza padrão da dimensão fractal da distribuição de grau  $d_k$  (Verifiquem!).

## Referências

- [1] Molontay, R. Fractal Characterization of Complex Networks. MSc Thesis. Budapest University of Technology and Economics Institute of Mathematics Department of Stochastics. 2015. [https://math.bme.hu/~molontay/Msc\\_MolontayR.pdf](https://math.bme.hu/~molontay/Msc_MolontayR.pdf).
- [2] Bunde, A. Havlin, S. Fractal in Science. Springer-Verlag. 1994.
- [3] Barabási, A. L. Network Science. Cambridge University Press, 2016. <http://networksciencebook.com/>.
- [4] P.J.E. Peebles, The fractal galaxy distribution, Physica D: Nonlinear Phenomena, Volume 38, Issues 1–3, 1989, Pages 273-278, ISSN 0167-2789, [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(89\)90205-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(89)90205-4).
- [5] D. H. Rothman. Modeling Environmental Complexity. Lecture notes for 12.086/12.58, MIT. 2014.

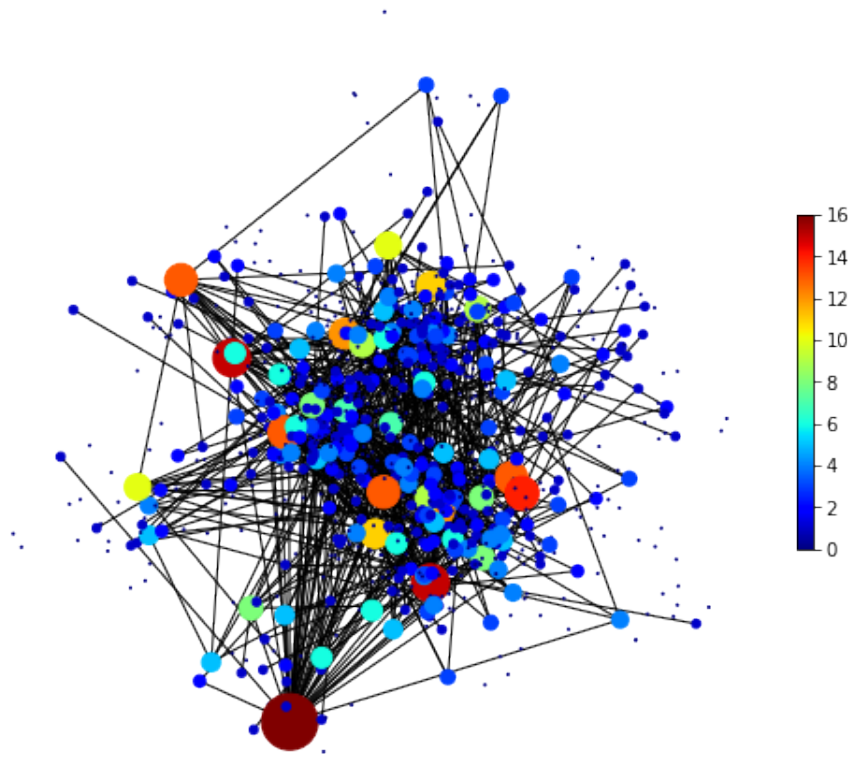


Fig. 4.1: Rede livre de escala gerada por mim. Dados obtidos a partir da simulação.

$\eta$	$\lambda$	$d_f^{teo} = \ln \eta / \ln \lambda$	# interações	$\gamma$	$R^2$	$d_f^{sim}$	$R^2$	$d_k$	$N$	$\langle s^{teo}(\epsilon) \rangle$	$k_{max}^{teo}$	$k_{max}^{sim}$
9	4	1.58	500	$(1.75 \pm 0.39)$	0.98	$(1.59 \pm 0.01)$	1	$(2.18 \pm 1.10)$	960	$(2 \pm 2) \times 10^{-2}$	45	306

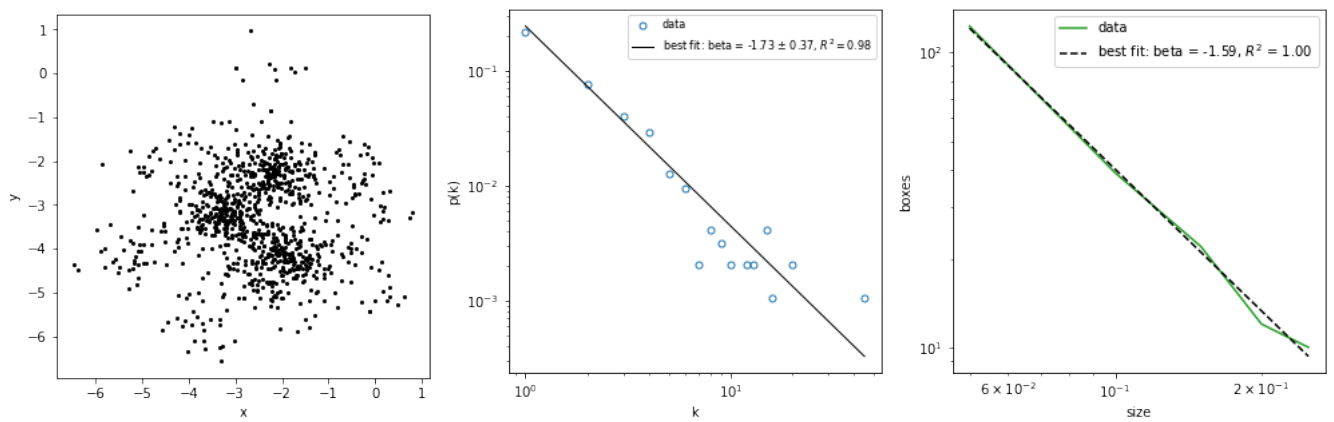


Fig. 4.2: (Esquerda) Pontos gerados pelo modelo de Soneira-Peebles  $\ln \eta / \ln \lambda = 1.58$ . (Centro) Distribuição de grau da rede livre de escala. (Direita) Dimensão fractal estimada.