# Introdução à Análise de Algoritmos

Quanto tempo leva a execução de determinado algoritmo?
Quando dois algoritmos fazem a mesma coisa, qual deles leva menos tempo?

A análise do algoritmo preocupa-se com as questões acima.
É sempre conveniente conhecer ou ter uma medida da eficiência de um algoritmo ao programá-lo.

## O comportamento de alguns algoritmos

### Raízes de equação do 2. grau

```
def raiz(a, b, c):
   ...
     x1 = (-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a)
     x1 = (-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a)
     return x1, x2
```

Se desconsiderarmos os casos particulares (delta negativo, a=0, etc.), esse algoritmo realiza sempre o mesmo número de operações.
Podemos afirmar então que o tempo que esse algoritmo leva é uma constante.
t = k

### Máximo entre os elementos de uma lista

```
def max(a, N):
    m = a[0]
    for i in range(1, N):
        if m < a[i]: m = a[i]
    return m
```

Esse algoritmo sempre repete um conjunto de operações N-1 vezes.
Podemos afirmar então que seu tempo é proporcional a N-1 mais uma constante.
t = k1 + k2 * (N - 1)

### Contar a quantidade de nulos numa lista de N elementos

```
def nulos(a, N):
   c = 0
   for i in range(N):
       if a[i]) == 0: c += 1
   return c
```

Idem ao anterior. Repetindo N vezes. Portanto o seu tempo é da forma:
t = k1 + k2 * N

**Verifica se duas listas de N elementos são iguais**

```
# devolve True se iguais e False se diferentes
def compara(a, b, N):
     if len(a) != len(b): return False
     tam = len(a)
     for i in range(tam):
         if a[i] != b[i]: return False
     return True
```

Neste caso o resultado depende dos dados, pois termina no primeiro elemento diferente encontrado. No pior caso (todos iguais ou o último diferente) também é proporcional a N. Mesmo considerando um caso médio de N/2, será proporcional a N.

`t = k1 + k2 * N`

**Conta os algarismos significativos de um inteiro**

```
def num_algar(x):
   c = 0
   while x != 0:
      c += 1
      x /= 10
   return c
```

O resultado `c` é o menor inteiro maior que `log x (base 10)`.

$10^{c-1} <= x <= 10^{c}$

O tempo é então proporcional a `log x`.

`t = k1 + k2 * log(x)`

**Contar quantos bits significativos tem um inteiro**

```
def num_bits(x):
   c = 0
   while x != 0:
       c += 1
       x /= 2  # ou x = x << 1
   return c
```

O resultado `c` é o menor inteiro maior que `lg x (base 2)`.

$2^{c-1} <= x <= 2^{c}$

`O tempo é então proporcional a lg x.`

`t = k1 + k2 * lg(x)`

**Notação:**

`log x` – (base 10)
`lg x` – (base 2)
`ln x` – (base e) – logaritmo natural

Observe que podemos dizer que os dois últimos exemplos acima são proporcionais ao logaritmo, sem mencionar a base, pois:

`log N = lg N/lg 10` **ou** `log N = k.lg N`

**Imprimir tabela de i / j (1 ≤ i, j ≤ N)**

```
def imp_tabela (N, M):
    for i in range(1, N + 1):
         for j in range(1, N + 1):
              print(i / j, end = "")
         print()
```

O tempo é proporcional a `N*N`.
$t = k1 + k2 * N^2$.

**Multiplicar matriz A[NxM] por vetor X[M]**

Faça o algoritmo. São dois comandos **`for`** encaixados:

O tempo é proporcional a `N*M`. Um limitante superior é `N*N`, supondo `N` o maior deles.
$t = k1 + k2 * N^2$.

**Idem imprimindo a tabela i * j * k (1 ≤ i ≤ N; 1 ≤ j ≤ M; 1 ≤ k ≤ P)**

Serão três comandos **`for`** encaixados. Neste caso será proporcional a `N*M*P`.
Podemos considerar `N*N*N,` supondo N o maior deles.
$t = k1 + k2 * N^3$.

**Multiplicar matriz A[NxM] por matriz X[MxP]**

Faça o algoritmo. Serão três comandos **`for`** encaixados:

O tempo é proporcional a `N*M*P`. Um limitante superior é `N*N*N`, supondo `N` o maior deles.
$t = k1 + k2 * N^3$.

**Proporcionalidade dos algoritmos anteriores:**

Os algoritmos acima são proporcionais a:

`1` – sempre executam as mesmas instruções uma só vez. Dizemos que o tempo de execução neste caso é uma constante.

`N` – dependem apenas de um parâmetro que é o número de vezes que um determinado laço é executado.

`log N` – Não importa a base, pois log N, lg N ou ln N são proporcionais. Assim não vamos indicar a base. Vamos dizer apenas que o algoritmo leva um tempo logarítmico para ser executado. Note também que um algoritmo com essa característica é muito interessante. Quando N é 1.000 o tempo é proporcional a 3. Quando N fica 1.000 vezes maior (1.000.000) o tempo apenas dobra (proporcional a 6).

$N^2$ – em geral esses algoritmos têm um for encaixado em outro for. Quando N é 1.000, o tempo é proporcional a 1.000.000. Quando N dobra o tempo multiplica por 4.

$N^3$ - em geral possuem um for dentro dum um for dentro de um for. Quando N dobra, o tempo se multiplica por 8.

Outros algoritmos podem ainda serem proporcionais a `N.log N`, ou exponenciais, proporcionais a $2^N$ ou $10^N$.

**Um pouco de intuição**

É intuitivo que para valores de N grandes, quanto maior a ordem do expoente, mais tempo leva o algoritmo.

`1(constante)   log N     N    N.log N        N²          N³`

$\longrightarrow$

mais tempo

**Sobre os algoritmos**

O tempo depende dos dados em cada execução do algoritmo. Pode ser que para um conjunto de dados o algoritmo A1 seja mais rápido que o A2. Para outro conjunto o tempo pode se inverter.

Um algoritmo pode levar um tempo pequeno quando N é pequeno, mas demorar muito quando N é grande. Por exemplo, um algoritmo que tem um tempo proporcional a $N^3$.

Às vezes não interessa muito se o algoritmo leva um tempo maior ou menor, pois a execução numa máquina é tão rápida que não faz diferença usarmos o algoritmo A1 ou A2.

O comportamento de dois algoritmos pode ser diferente em CPUs diferentes.

O que realmente dá para se afirmar a respeito do tempo que um algoritmo vai demorar?

**A notação O(f(N)) – Ordem de f(N) ou notação Grande-O**

Para expressar essa idéia de tempo proporcional a alguma função, foi proposta a notação O(f(N)) – Ordem de f(N) ou ainda notação Grande-O (big-O notation).

**Definição:**

Dizemos que g(N) é O(f(N)) se existirem constantes $c_0$ e $N_0$ tais que $g(N) < c_0 f(N)$ para todo $N>N_0$. Ou seja, a partir de um determinado N, a função f(N) multiplicada por uma constante é sempre maior que g(N). Veja o gráfico abaixo.

Outra forma é definir O(f(N)) como um conjunto:

$O(f(N)) = \{ g(N)$ se existem constantes $c_0$ e $N_0$ tais que $g(N) < c_0 f(N)$ para todo $N>N_0 \}$

Podemos dizer livremente que g(N) = O(f(N)), mas o mais correto é dizer:
g(N) é O(f(N)) ou $g(N) \in O(f(N))$.

Com essa notação, podemos desprezar os termos que contribuem em menor grau para o tempo total, obtendo assim um limitante superior mais simplificado para o tempo total.

Veja que $c_0$ e $N_0$ escondem coisas importantes sobre o funcionamento do algoritmo:
- Nada sabemos para $N < N_0$.
- $c_0$ pode esconder uma enorme ineficiência do algoritmo – por exemplo, é melhor $N^2$ nano-segundos que log N séculos.

Somente o termo de maior ordem é considerado.

O(1) é o mesmo que O(2) que é o mesmo que O(K) – constante

$O(1 + N + N^2)$ é $O(N^2)$
    Observe que $1 + N + N^2 < N^2 + N^2 + N^2 = 3.N^2$ para $N > N_0$

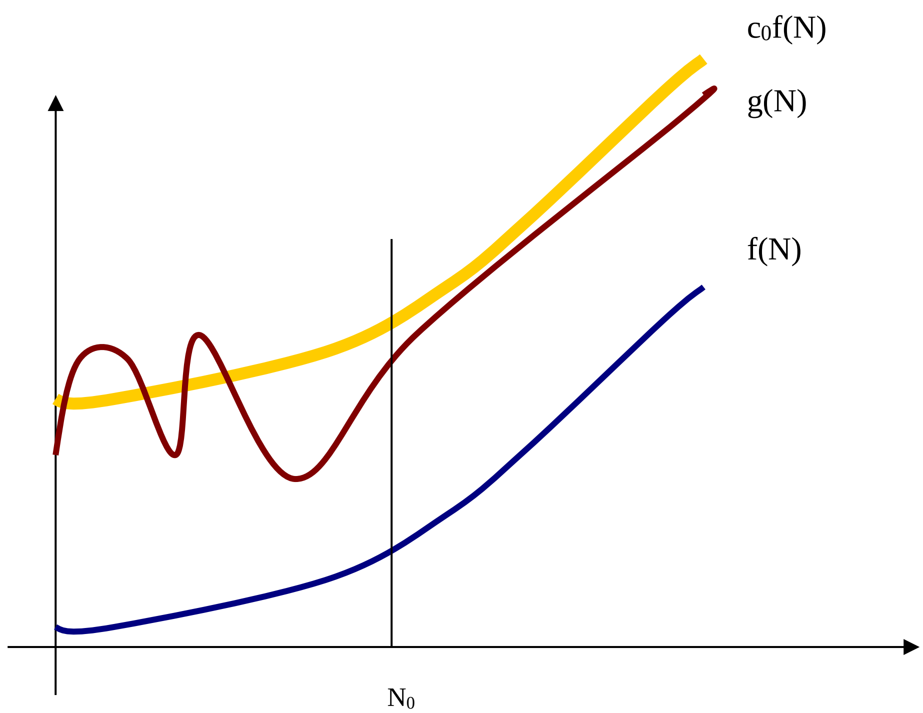
$O(N.\log N + N^2)$ é $O(N^2)$
    Observe que $N.\log N + N^2 < N^2 + N^2 = 2.N^2$ para $N > N_0$

Propriedades:

a) O(f(N)) + O(g(N)) é O(max{f(N), g(N)})

b) O(f(N)).O(g(N)) é O(f(N).g(N))

c) O(k.f(N)) é O(f(N)) desde que $k \neq 0$




## Exemplo de análise de algoritmos

Vejamos um algoritmo simples e algumas características de sua análise.

Algoritmo de busca sequencial:

```
# procura x em a[0], a[1], ... a[N-1]
# devolve o índice do primeiro elemento encontrado
def busca(a, x, N):
   for i in range(N):
      if a[i] == x return i
   return -1
```

A função index do Python faz algo parecido com a função acima. A única forma de procurar um elemento numa lista é varrer a lista comparando um a um.

Existem muitas variações deste algoritmo, mas todas elas têm que percorrer a lista.

Quantas comparações são necessárias até encontrar o elemento procurado ou concluir que ele não está na tabela?

Melhor caso: 1 - uma só comparação quando `x == a[0]`.
Pior caso: N – quando não encontra ou `x == a[N-1]`.

Caso médio: (1+N) / 2 – média entre o pior e o melhor ?

Para considerarmos a média entre o melhor e o pior caso, estamos assumindo uma hipótese importante. A probabilidade de ser qualquer valor entre 1 e N é a mesma. Isso normalmente não é verdade.

De uma maneira geral, a determinação do pior caso dá uma boa informação de como o algoritmo se comporta e oferece um limitante superior para o tempo que o algoritmo demandará.

O caso médio é o mais interessante de ser determinado, mas nem sempre é possível, pois muitas vezes depende de hipóteses adicionais sobre os dados.

Supondo então o pior caso, o algoritmo acima é O(N) (linear). Mesmo considerando a média de N/2 repetições, esse algoritmo seria O(N).

**Outro exemplo**

Determinar qual o último elemento igual a x de uma lista.
A melhor solução é a busca sequencial do fim para o começo do vetor.

```
# procura x em a[N-1], a[N-2], ... a[0]
def busca(a, x, N):
   for i in range(N - 1; -1):
       if a[i] == x: return i
   return -1
```

É uma solução O(N). O pior caso, é repetição N vezes e mesmo num caso médio, seria sempre proporcional a N.

**A notação O(f(N)) é a complexidade dos algoritmos**

Como já vimos, a notação O(f(N)) ignora pontos importantes sobre o algoritmos:

- Como ele funciona para N menores
- Se vamos rodar num computador lento ou rápido

Mas do ponto de vista de complexidade, o que se pode afirmar e, portanto, o que interessa sobre o algoritmo é o seu comportamento assintótico, isto é, qual a curva que melhor descreve o seu comportamento.

Veremos que existem algoritmos com vários comportamentos:

Constantes – O(1)
Lineares – O(N)
Quadráticos – $O(N^2)$
Polinomiais – $O(N^k)$
Exponenciais - $O(k^N)$

Logarítmicos – O(lg N) ou O(N.lg N)

Sempre que desenvolvermos um algoritmo a partir de agora neste curso, tentaremos responder sempre a sua complexidade ou o seu comportamento frente a notação O.

**Alguns exemplos**

Vejamos os algoritmos acima:

**Raízes de equação do 2. grau**

**O(1)**

**Máximo de uma sequência de n elementos**

**O(N)**

**Conta a quantidade de nulos num vetor de N elementos**

**O(N)**

**Verifica se dois vetores de N elementos são iguais**

**O(N)**

**Conta os algarismos significativos de um inteiro**

**O(log N)**

**Conta quantos bits significativos tem um inteiro**

**O(log N)**

**Imprimir tabela de i / j ($1 \leq i, j \leq N$)**

**O(N.M)** ou **O($N^2$)** se **N > M**

**Multiplicar matriz A[NxM] por vetor X[M]**

**O(N.M)** ou **O($N^2$)** se **N > M**

**Idem imprimindo a tabela i * j * k ($1 \leq i \leq N$; $1 \leq j \leq M$; $1 \leq k \leq P$)**

**O(N.M.P)** ou **O($N^3$)** se **N > M,P**

**Multiplicar matriz A[NxM] por matriz X[MxP]**

**O(N.M.P)** ou **$O(N^3)$** se **N > M,P**

**Imprimir todos os números com até N dígitos**

**$O(10^N)$**