

# COE-835 Controle adaptativo

## Trabalho 7

**Grupo:** Guilherme Pires Sales de Carvalho  
Matheus Ferreira dos Reis  
Renan Salles de Freitas

**Algoritmo:** Adaptive Backstepping Control

**Caso:**  $n = 2$  (ordem da planta)  
 $n^* = 2$  (grau relativo)  
 $n_p = 3$  (# de parâmetros)

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Backstepping - Formulação teórica sem observador</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Backstepping - Formulação teórica com observador</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Implementação</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Resultados das simulações</b>	<b>9</b>
4.1	Simulação #1 . . . . .	9
4.2	Simulação #2 . . . . .	12
4.3	Simulação #3 . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Discussão</b>	<b>17</b>

## 1 Backstepping - Formulação teórica sem observador

Backstepping é um método recursivo de controle adaptativo baseado em Lyapunov e proposto no começo da década de 90. A ideia é projetar um controle recursivo considerando algumas das variáveis de estado como “controle virtuais” e implementar para elas leis de controle intermediárias. Com esta técnica é possível resolver problemas de estabilidade e rastreamento. Neste trabalho, desenvolveremos a fundamentação teórica para o caso de um sistema de segunda ordem com parâmetros desconhecidos:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \phi_1^T(x_1) \theta \\ \dot{x}_2 &= k_p u + \phi_2^T(x_1, x_2) \theta\end{aligned}\tag{1}$$

onde  $\theta$  é o vetor de parâmetros desconhecidos e  $k_p$  é o ganho de alta frequência, também desconhecido. As não linearidades do sistema são representadas pela variável  $\phi$ . Para o desenvolvimento do algoritmo, assume-se:

- o sinal de  $k_p$  é conhecido;
- o sinal de referência  $y_r$  e suas derivadas são contínuas e limitadas.

Introduzem-se as variáveis  $\mathbf{z}$  (mudança de coordenadas):

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 - y_r \\ z_2 &= x_2 - \alpha_1 - \dot{y}_r,\end{aligned}\tag{2}$$

onde  $\alpha$  é a variável de controle virtual. O primeiro passo para a elaboração do método é começar pela equação 2, considerando  $x_2$  como uma variável de controle virtual. A derivada do erro de rastreamento  $z_1$  é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_r \\ &= z_2 + \alpha_1 + \phi_1^T \theta\end{aligned}\tag{3}$$

Podemos projetar a primeira função estabilizante  $\alpha_1$  como:

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - \phi_1^T \hat{\theta},\tag{4}$$

onde  $c_1$  é uma constante positiva e  $\hat{\theta}$  é uma estimativa de  $\theta$ . Consideremos a função de Lyapunov:

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta},\tag{5}$$

onde  $\Gamma$  é uma matriz positiva definida e  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ . Derivando a função de Lyapunov, temos:

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}&= z_1(z_2 + \alpha_1 + \phi_1^T \hat{\theta}) - \tilde{\theta}^T (\Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} - \phi_1 z_1) \\ &= -c_1 z_1^2 + \tilde{\theta}^T (\tau_1 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + z_1 z_2 \\ \tau_1 &= \phi_1 z_1\end{aligned}\tag{7}$$

Observe que se escolhermos a variação dos parâmetros como  $\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_1$  anulamos um dos termos, mas ainda falta considerar a dinâmica de  $z_2$ . Devemos deixar a escolha da lei de adaptação em aberto. Pela segunda equação, temos:

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= k_p u + \phi_2^\top \theta - \dot{\alpha}_1 - \ddot{y}_r \\ &= k_p u + \phi_2^\top \theta - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2 + \phi_1^\top \theta) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \ddot{y}_r\end{aligned}\quad (8)$$

Escolhemos a função Lyapunov:

$$V = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{|k_p|}{2\gamma} \tilde{p}^2, \quad (9)$$

onde  $\tilde{p} = p - \hat{p}$  e  $\hat{p}$  é estimativa de  $p = \frac{1}{k_p}$ , e  $\gamma > 0$ . Derivando a função Lyapunov, obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\top (\tau_1 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + z_2 \dot{z}_2 + \frac{|k_p|}{\gamma} \tilde{p} \dot{\tilde{p}} \\ &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\top (\tau_1 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + z_2 \left( k_p u + \phi_2^\top \theta - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2 + \phi_1^\top \theta) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \ddot{y}_r \right) + \frac{|k_p|}{\gamma} \tilde{p} \dot{\tilde{p}} \\ \theta &= \tilde{\theta} + \hat{\theta} \\ \dot{V} &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\top (\tau_1 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + z_2 \left( k_p u + (\tilde{\theta}^\top + \hat{\theta}^\top)(\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \ddot{y}_r \right) + \frac{|k_p|}{\gamma} \tilde{p} \dot{\tilde{p}} \\ \tau_2 &= \tau_1 + \left( \phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1 \right) z_2 \\ \dot{V} &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\top (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + z_2 \left( k_p u + \hat{\theta}^\top (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \ddot{y}_r \right) + \frac{|k_p|}{\gamma} \tilde{p} \dot{\tilde{p}}\end{aligned}\quad (10)$$

Escolhemos a lei de controle:

$$u = \hat{p} \bar{u} \quad (11)$$

$$\bar{u} = \alpha_2 + \ddot{y}_r \quad (12)$$

Note que:

$$k_p u = k_p \hat{p} \bar{u} = \bar{u} - k_p \tilde{p} \bar{u} \quad (13)$$

Substituindo a eq.13 em eq.10, temos:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\top (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + z_2 \left( \bar{u} - k_p \tilde{p} \bar{u} + \tilde{\theta}^\top (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \ddot{y}_r \right) + \frac{|k_p|}{\gamma} \tilde{p} \dot{\tilde{p}} \\ &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\top (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + z_2 \left( \bar{u} + \tilde{\theta}^\top (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \ddot{y}_r \right) + \frac{|k_p|}{\gamma} \tilde{p} (\dot{\tilde{p}} - \text{sign}(k_p) \gamma \bar{u} z_2) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\top (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + z_2 \left( \alpha_2 + \tilde{\theta}^\top (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r \right) - \frac{|k_p|}{\gamma} \tilde{p} (\dot{\tilde{p}} + \text{sign}(k_p) \gamma \bar{u} z_2) \end{aligned} \tag{15}$$

Escolhemos  $\alpha_2$  como:

$$\alpha_2 = -c_2 z_2 - z_1 - \tilde{\theta}^\top (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r \tag{16}$$

Substituindo a eq.16 em eq.15, obtemos:

$$\dot{V} = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + \tilde{\theta}^\top (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) - \frac{|k_p|}{\gamma} \tilde{p} (\dot{\tilde{p}} + \text{sign}(k_p) \gamma \bar{u} z_2) \tag{17}$$

A lei de atualização dos parâmetros é, portanto:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \text{sign}(k_p) \bar{u} z_2 \tag{18}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_2 \tag{19}$$

## 2 Backstepping - Formulação teórica com observador

Neste trabalho, consideramos o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - a_1 y \\ \dot{x}_2 &= k_p u - a_0 y\end{aligned} \tag{20}$$

onde os parâmetros  $a_1$ ,  $a_0$  e  $k_p$  são desconhecidos. Para esta formulação apenas a saída do sistema  $y$  está disponível, portanto  $x_2$  não é conhecido e deve ser estimado. Podemos reescrever o sistema 21:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - F(y, u)^\top \theta \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F(y, u)^\top = [B(u) \quad \Phi(y)], \Phi(y) = \begin{bmatrix} -y & 0 \\ 0 & -y \end{bmatrix}, B(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} k_p \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \\ y &= e_1^\top x \\ e_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{21}$$

Para estimar os estados, utilizamos os filtros abaixo:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A_0\xi + ky \\ \dot{\Omega}^\top &= A_0\Omega^\top + F^\top \\ k &= \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}, A_0 = A - ke_1^\top = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{22}$$

Os valores de  $k$  devem ser escolhidos de forma que  $A_0$  seja Hurwitz. E, dessa forma, o estado estimado pode ser escrito como:

$$\hat{x} = \xi + \Omega^\top \theta\tag{23}$$

Derivando a equação 23 e substituindo as equações dos filtros 22, verifica-se que a dinâmica do estimador é igual à dinâmica da planta 21.

Porém,  $\Omega$  é uma matriz e opta-se pela redução das ordens dos filtros. Observe que  $\Omega^\top = [v_0 \mid \Xi]$  e, pela equação 22, temos que:

$$\dot{v}_0 = A_0 v_0 + e_2 u\tag{24}$$

$$\dot{\Xi} = A_0 \Xi - I y\tag{25}$$

Introduzem-se dois novos filtros, para substituir os filtros da equação 22:

$$\dot{\lambda} = A_0 \lambda + e_2 u\tag{26}$$

$$\dot{\eta} = A_0 \eta + e_2 y\tag{27}$$

É fácil verificar que, para esta planta de segunda ordem sem zeros ( $m = 0$ ),  $v_0 = \lambda$ . Para o caso geral, temos que:

$$\dot{\lambda} = A_0 \lambda + e_2 u\tag{28}$$

$$v_i = A_0^i \lambda \quad (i = 0, \dots, m)\tag{29}$$

É possível demonstrar que:

$$\Xi = -[A_0 \eta \quad \eta]\tag{30}$$

$$\xi = -A_0^2 \eta\tag{31}$$

Podemos reescrever a dinâmica da saída  $y$ :

$$\begin{aligned}\dot{y} &= x_2 + \phi^\top \theta \\ &= k_p v_{0,2} + \xi_2 + \bar{\omega}^\top \theta + \epsilon_2 \\ \bar{\omega}^\top &= [0 \quad (\Xi_2 + \phi_1^\top)]\end{aligned}\tag{32}$$

Desta forma, o sistema 21 pode ser representado com os estados do observador:

$$\dot{y} = k_p v_{0,2} + \xi_2 + \bar{\omega}^\top \theta + \epsilon_2\tag{33}$$

$$\begin{aligned}\dot{v}_{0,2} &= u - k_2 v_{0,1} \\ &\quad (34)\end{aligned}$$

O projeto backstepping agora segue como na seção anterior. Primeiro, fazemos a mudança de coordenadas em  $\mathbf{z}$ :

$$\begin{aligned} z_1 &= y - y_r \\ z_2 &= v_{0,2} - \alpha_1 - \hat{\rho}\dot{y}_r \end{aligned} \quad (35)$$

onde  $\hat{\rho}$  é estimativa de  $\frac{1}{k_p}$ . O controle virtual  $\alpha_1$ , a lei de controle  $u$  e as leis de adaptação  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\rho}$  são obtidas pelo método de Lyapunov. Derivando  $z_1$ , obtemos:

$$\dot{z}_1 = k_p\alpha_1 + \xi_2 + \bar{\omega}^\top\theta + \epsilon_2 - k_p\tilde{\rho}\dot{y}_r + k_pz_2 \quad (36)$$

$$\alpha_1 = \hat{\rho}\bar{\alpha}_1 \quad (37)$$

$$\dot{z}_1 = \bar{\alpha}_1 + \xi_2 + \bar{\omega}^\top\theta + \epsilon_2 - k_p(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)\tilde{\rho} + k_pz_2 \quad (38)$$

E escolhemos a primeira função estabilizante:

$$\bar{\alpha}_1 = -c_1z_1 - d_1z_1 - \xi_2 - \bar{\omega}^\top\hat{\theta} \quad (39)$$

A dinâmica de  $z_1$  pode ser reescrita como:

$$\dot{z}_1 = -c_1z_1 - d_1z_1 + \epsilon_2 + [\omega - \hat{\rho}(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)e_1]^\top\tilde{\theta} - k_p(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)\tilde{\rho} + \hat{k}_p z_2 \quad (40)$$

Escolhe-se a função de Lyapunov:

$$2V_1 = z_1^2 + \tilde{\theta}^\top\Gamma^{-1}\tilde{\theta} + |k_p|\gamma^{-1}\tilde{\rho}^2 + \frac{1}{2d_1}\epsilon^\top P\epsilon \quad (41)$$

Nessas condições, é possível que a atualização de  $\hat{\rho}$  é dada pela equação:

$$\hat{\rho} = -\gamma z_1 \text{sign}(k_p)(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1) \quad (42)$$

Derivando  $z_2$ , obtemos:

$$\dot{z}_2 = \dot{v}_{0,2} - \hat{\rho}\ddot{y}_r - h\dot{\rho}\dot{y}_r - \dot{\alpha}_1 \quad (43)$$

$$= u - k_2v_{0,1} - \hat{\rho}\ddot{y}_r - \beta - \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}(\omega^\top\tilde{\omega} + \epsilon_2) - \frac{\alpha_1}{\theta}\dot{\theta} \quad (44)$$

$$\beta = k_2v_{0,1} + \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}(\xi_2 + \omega^\top\hat{\theta}) + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\eta}(A_0\eta + e_2y) + \frac{\partial\alpha_1}{\partial y_r}\dot{y}_r + (\dot{y}_r + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\rho}})\dot{\hat{\rho}} \quad (45)$$

Escolhe-se a função de Lyapunov:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{4d_2}\epsilon^\top P\epsilon \quad (46)$$

É possível mostrar que a atualização de parâmetros e a lei de controle são:

$$\hat{\theta} = \Gamma\tau_2 \quad (47)$$

$$\tau_1 = (\omega - \hat{\rho}(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)e_1)z_1 \quad (48)$$

$$\tau_2 = \tau_1 - z_2 \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\omega \quad (49)$$

$$u = -c_2z_2 + \beta + \hat{\rho}\ddot{y}_r + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\hat{\theta} - d_2z_2 \left( \frac{\partial\alpha_1}{\partial y} \right)^2 - \hat{k}_p z_1 \quad (50)$$

### 3 Implementação

Para a implementação, só é preciso computar os filtros:

$$\dot{\lambda} = A_0\lambda + e_2 u \quad (51)$$

$$\dot{\eta} = A_0 + e_2 y \quad (52)$$

Pois é possível demonstrar que:

$$\Xi = -[A_0\eta \quad \eta] \quad (53)$$

$$\xi = -A_0\eta \quad (54)$$

$$v_0 = \lambda \quad (55)$$

Temos ainda que  $\alpha = \hat{\rho}(-c_1 z_1 - d_1 z_1 - \xi_2 - \bar{\omega}^\top \hat{\theta})$ . Logo:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = -\hat{\rho}(c_1 + d_1) + \hat{\rho}e_2^\top \hat{\theta} \quad (56)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} = \hat{\rho} \left( e_2^\top A_0^2 \frac{d\eta}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & e_2^\top A_0 \frac{d\eta}{dt} & e_2^\top I_2 \frac{d\eta}{dt} \end{bmatrix} \hat{\theta} \right) \quad (57)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} = \hat{\rho}(c_1 + d_1) \quad (58)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} = -\rho \bar{\omega} \quad (59)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\rho}} = -(c_1 + d_1)(y - y_r) + e_2^\top A_0 \eta - \bar{\omega}^\top \hat{\theta} \quad (60)$$

```

1 %-----
2 %
3 % COE-835 Controle adaptativo
4 %
5 % Script para simular o trabalho 7
6 %
7 % Backstepping : n = 2      Second and third order plant
8 %                  n* = 2      Relative degree
9 %                  np = 3      Adaptive parameters
10 % Caso com observador completo
11 %-----
12
13 function dx = backstepping_obs(t,x)
14
15 global A B thetas A0 c1 c2 d1 d2 Gamma gamma kp a w e1 e2 k;
16
17 y          = x(1:2);
18 theta       = x(3:5);
19 lambda     = x(6:7);
20 eta        = x(8:9);
21 rho        = x(10);
22
23 %% Input
24 yr = a(1) * sin(w(1)*t) + a(2) * sin(w(2)*t);
25 dyr = a(1) * w(1) * cos(w(1)*t) + a(2) * w(2) * cos(w(2)*t);
26 ddyr = -a(1) * w(1)^2 * sin(w(1)*t) - a(2) * w(2)^2 * sin(w(2)*t);
27
```

```

28 Phi = [-y(1) 0;0 -y(1)];
29
30 %% Variables 1
31 xi = -A0^2 * eta;
32 Xi = -[A0*eta eta];
33 v1 = lambda(1);
34 v2 = lambda(2);
35 omega_bar = [0, (Xi(2,:) - y(1)*e1')];
36 omega = [v2, (Xi(2,:) - y(1)*e1')];
37
38 %% Z
39 z1 = y(1) - yr;
40 alpha_bar = -c1*z1 - d1*z1 - xi(2) - omega_bar'*theta;
41 alpha_1 = rho * alpha_bar;
42 z2 = v2 - rho*dyr - alpha_1;
43
44 %% Filtro eta
45 data = A0*eta + e2*y(1);
46
47 %% dalpha/dt
48 dady = rho * (- c1 - d1 + [0,e1']*theta);
49 dadeta_data = rho * (e2' * A0^2 * data + [0,e2'*A0*data, e2'*eye(2)*data]*theta
    );
50 dadyr = rho*(c1 + d1);
51 dadtheta = - rho * omega_bar';
52 dadrho = -(c1 + d1)*z1 - e2'*xi - omega_bar'*theta;
53
54
55 %% Variables 2
56 tau_1 = (omega - rho*(dyr + alpha_bar)*[e1',0]')*z1;
57 tau_2 = tau_1 - z2 * (dady * omega);
58
59
60 %% Atualização dos parâmetros
61 dtheta = Gamma * tau_2;
62 drho = - gamma * z1 * sign(kp) * (dyr + alpha_bar);
63 beta = k(2)*v1 + dady * (xi(2) + omega'*theta) + ...
    dadeta_data + dadyr * dyr + (dyr + dadrho) * drho;
64 u = -c2*z2 + beta + rho*ddyr + dadtheta*dtheta - d2*z2*(dady)^2 - ...
    z1*theta(1);
65
66
67 %% Filtros
68 dlambda = A0*lambda + e2*u;
69
70
71
72
73 %% Planta
74 F = [B*u Phi];
75 dy = A*y + F*thetas;
76
77 %% Translation
78 dx = [dy' dtheta' dlambda' data' drho'];

```

## 4 Resultados das simulações

Nas simulações, procuramos avaliar o comportamento do sistema para as seguintes condições: (i) condições iniciais  $\theta(0)$  e  $y(0)$ ; (ii) Parâmetros da planta e do modelo; (iii) ganho de adaptação  $\Gamma$ .

Apresentaremos os resultados obtidos através de simulações no ambiente **Matlab/Simulink** e os discutiremos na próxima seção.

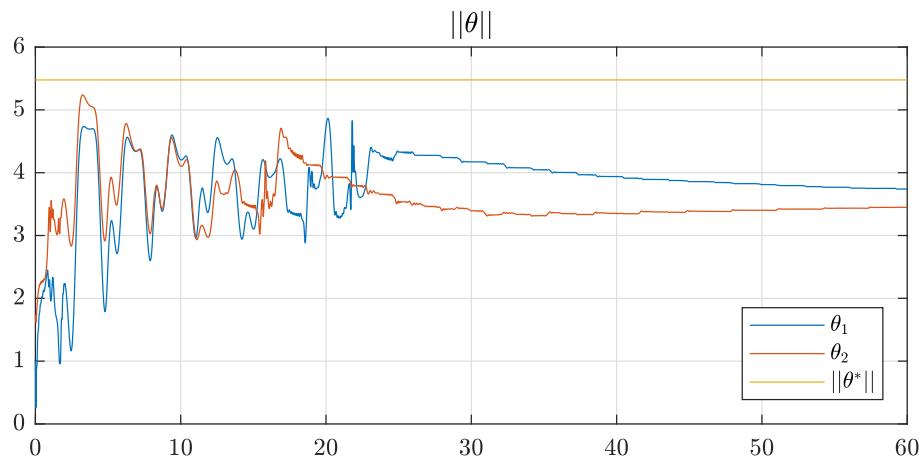
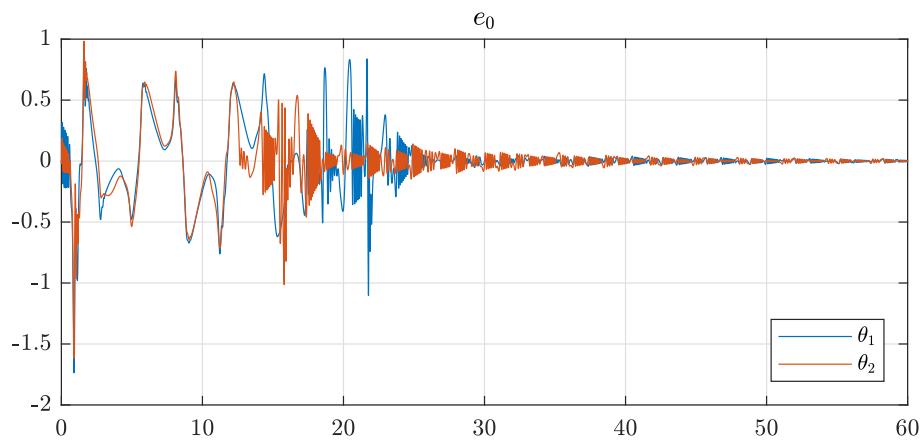
#### 4.1 Simulação #1

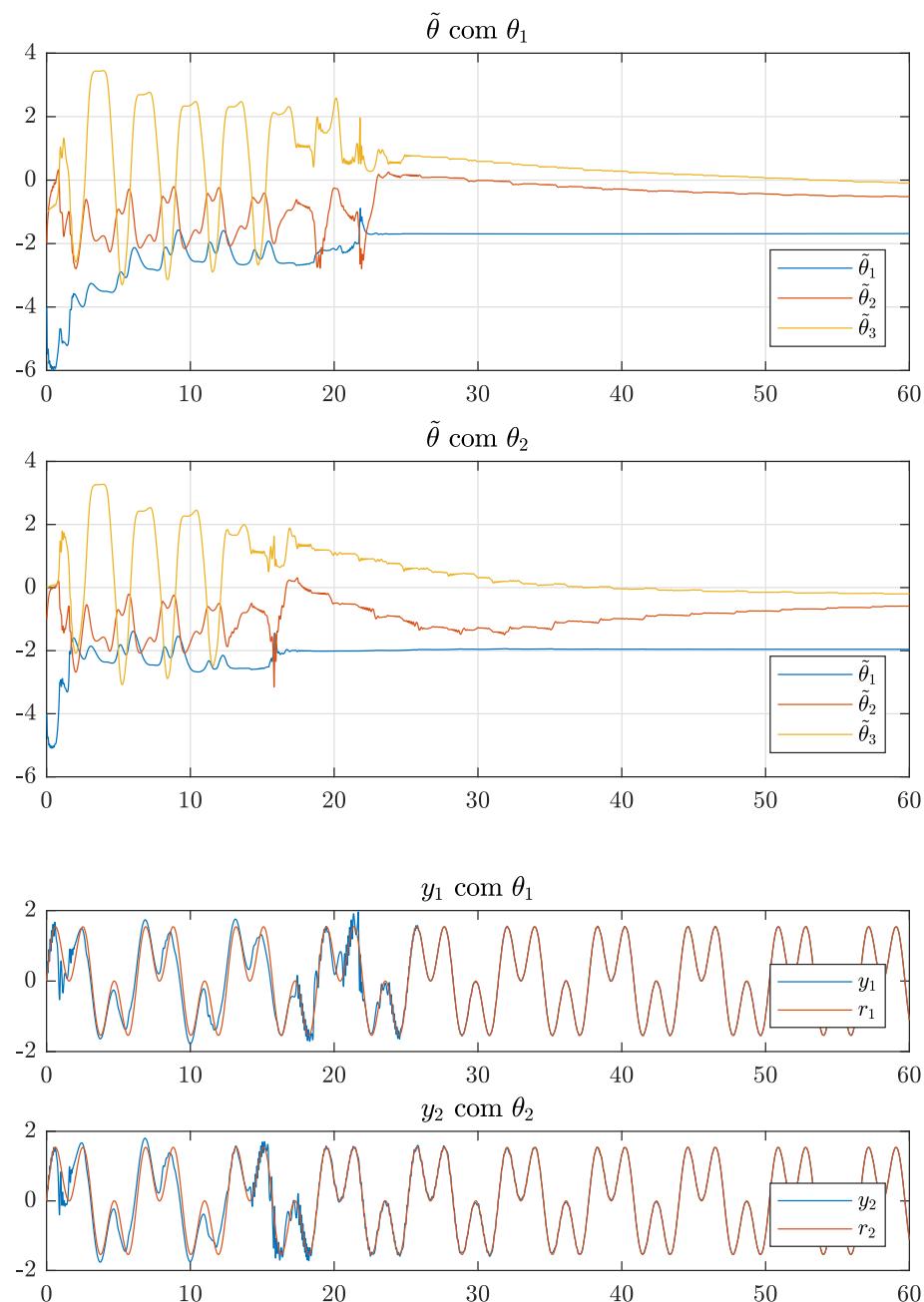
Inicialmente, desejamos verificar o comportamento do sistema para variações nas condições iniciais.

##### Simulação 1.1: $\theta(0)$

$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1} u, \quad \theta(0) = [0 \ 1], \quad y(0) = 0, \quad \Gamma = 1 \mathbf{I}_3,$$

$$y_r = \sin(t) + \sin(3t).$$

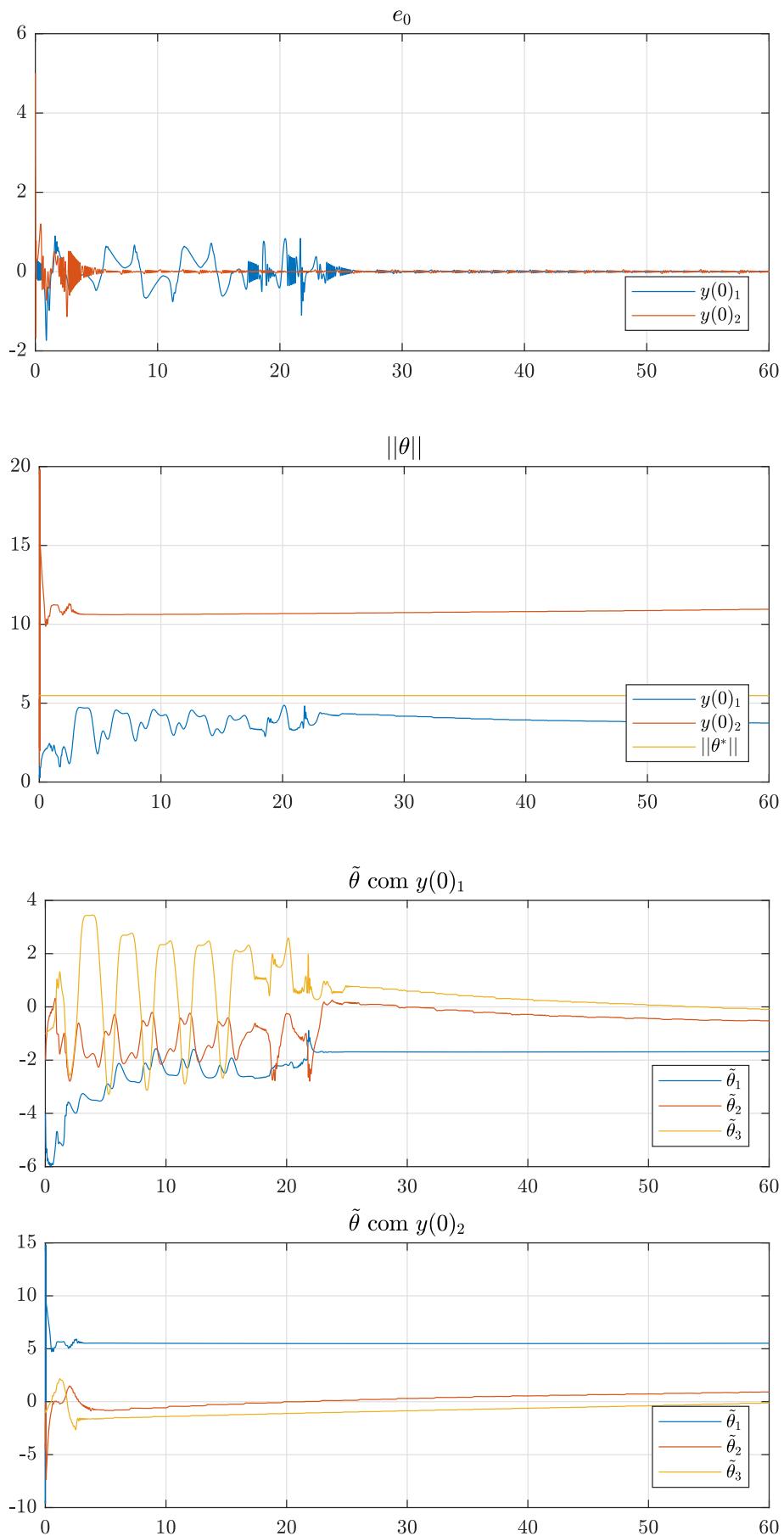


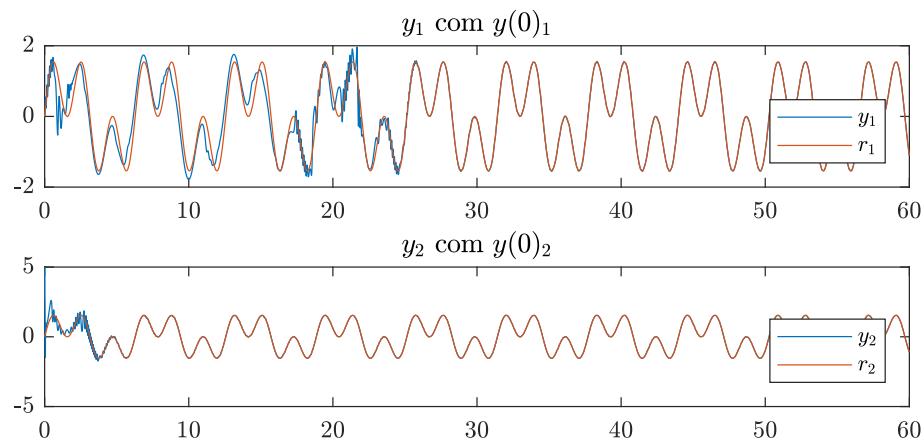


Simulação 1.2:  $y(0)$

$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1} u, \quad \theta(0) = 0, \quad y(0) = [0 \ 5], \quad \Gamma = 1 \mathbf{I}_3,$$

$$y_r = \sin(t) + \sin(3t).$$

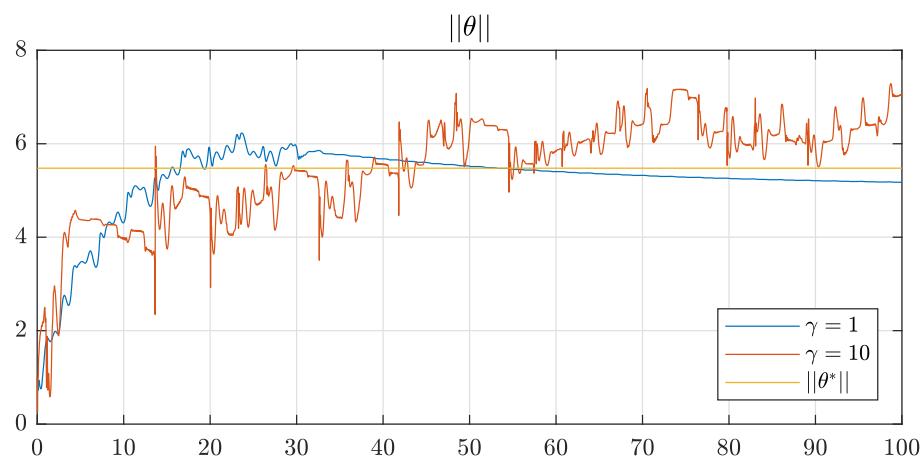
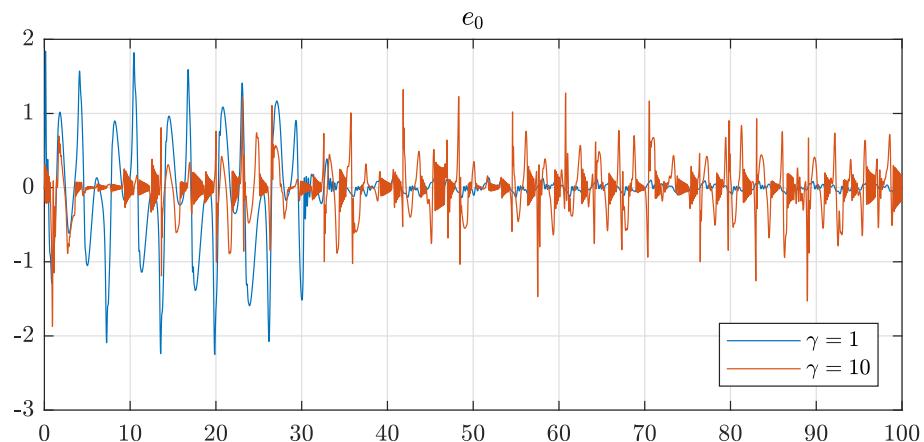


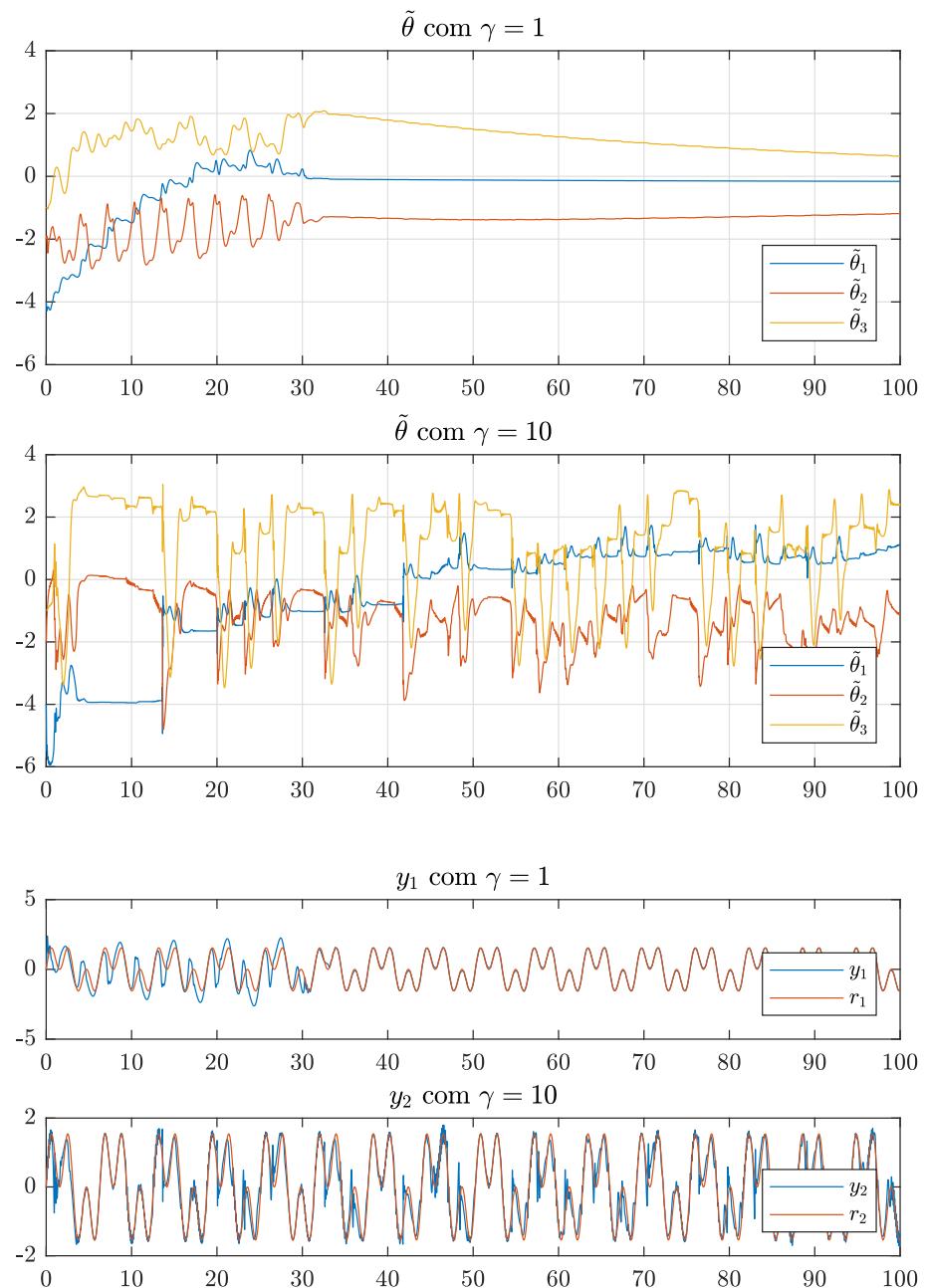


## 4.2 Simulação #2

Verificamos o comportamento do sistema para variações no parâmetro de adaptação  $\Gamma$ .

$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1} u, \quad \theta(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \Gamma = [1 \ 10] \mathbf{I}_3, \\ y_r = \sin(t) + \sin(3t).$$





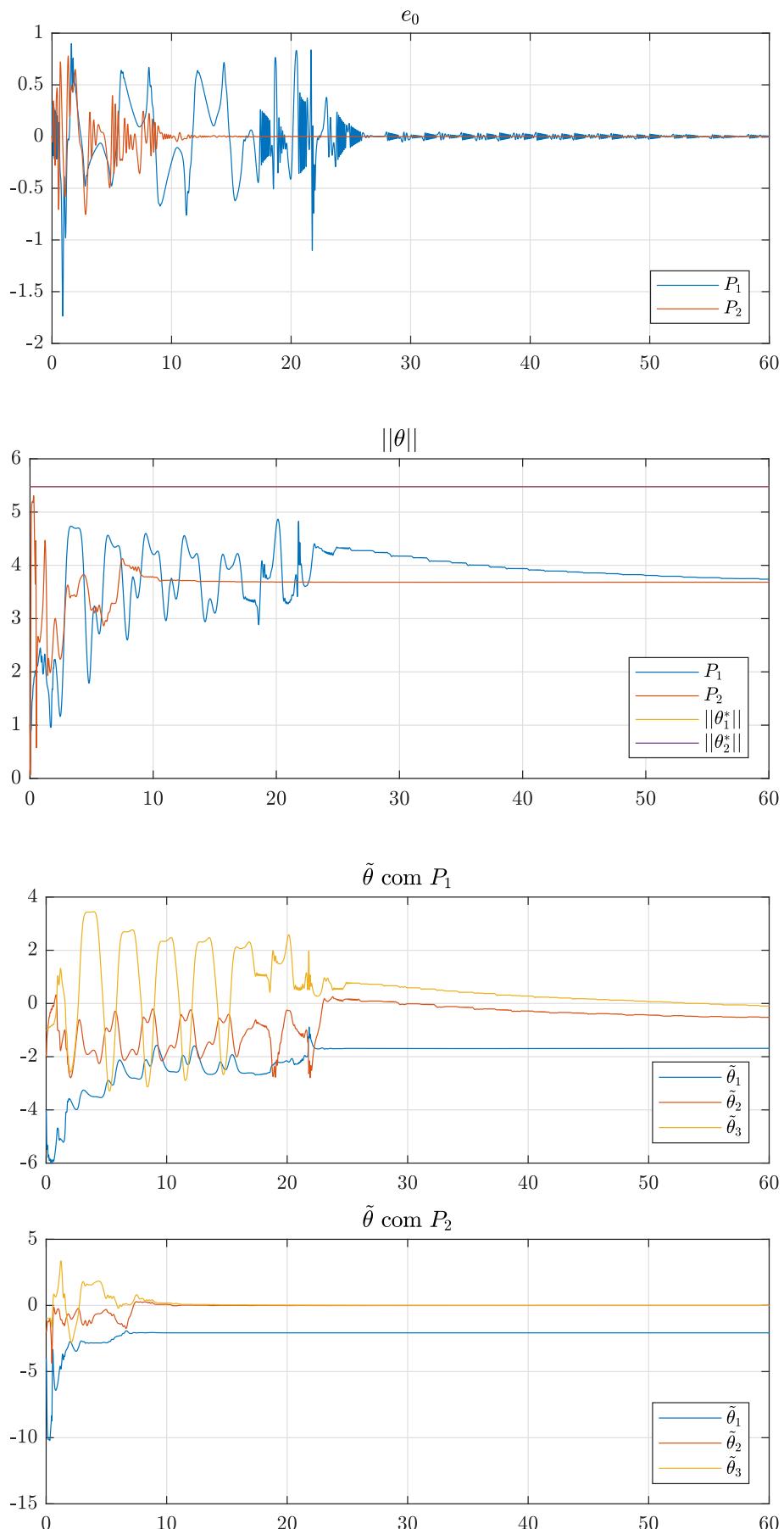
### 4.3 Simulação #3

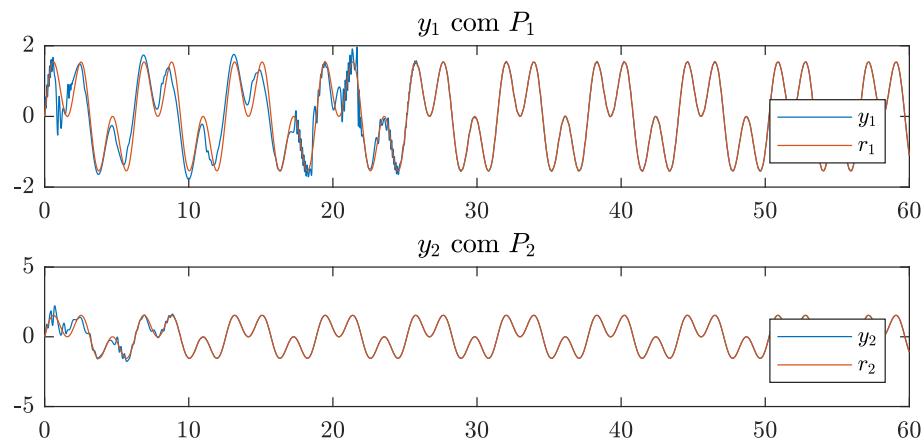
Verificamos o comportamento do sistema para variações na planta e modelo.

#### Simulação 3.1: planta

$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1} u e \frac{5}{s^2 - 2s + 1} u, \quad \theta(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \Gamma = 1 \mathbf{I}_3,$$

$$y_r = \sin(t) + \sin(3t).$$

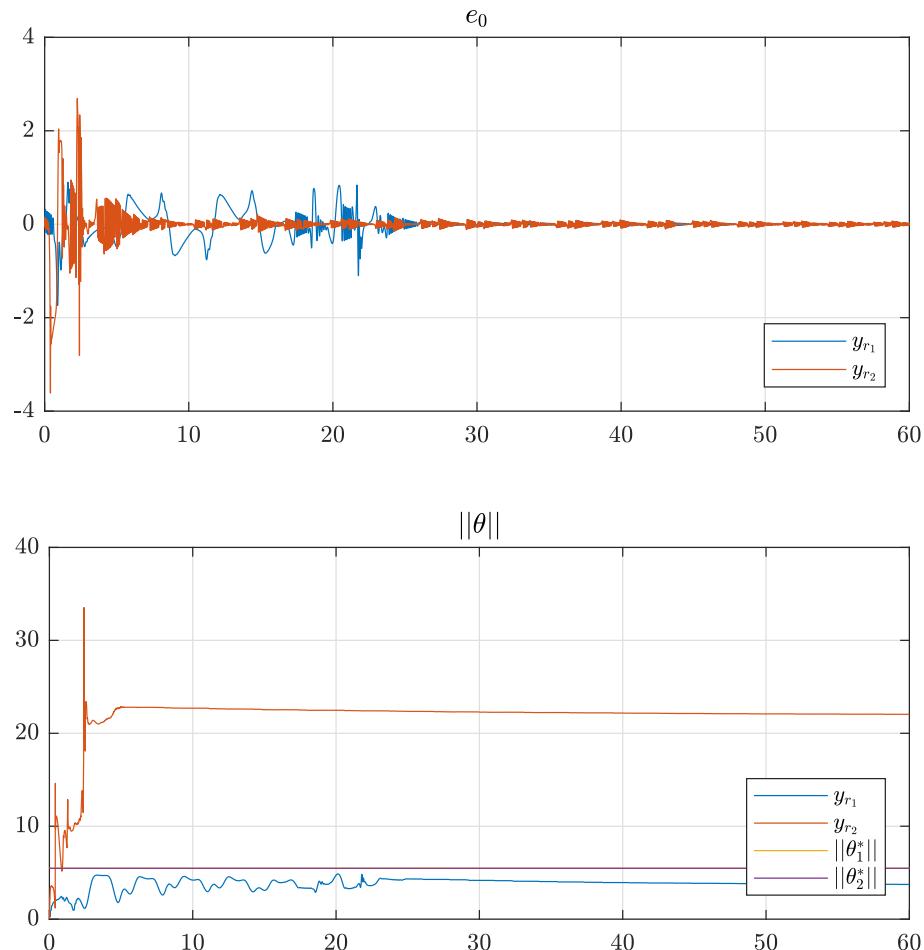


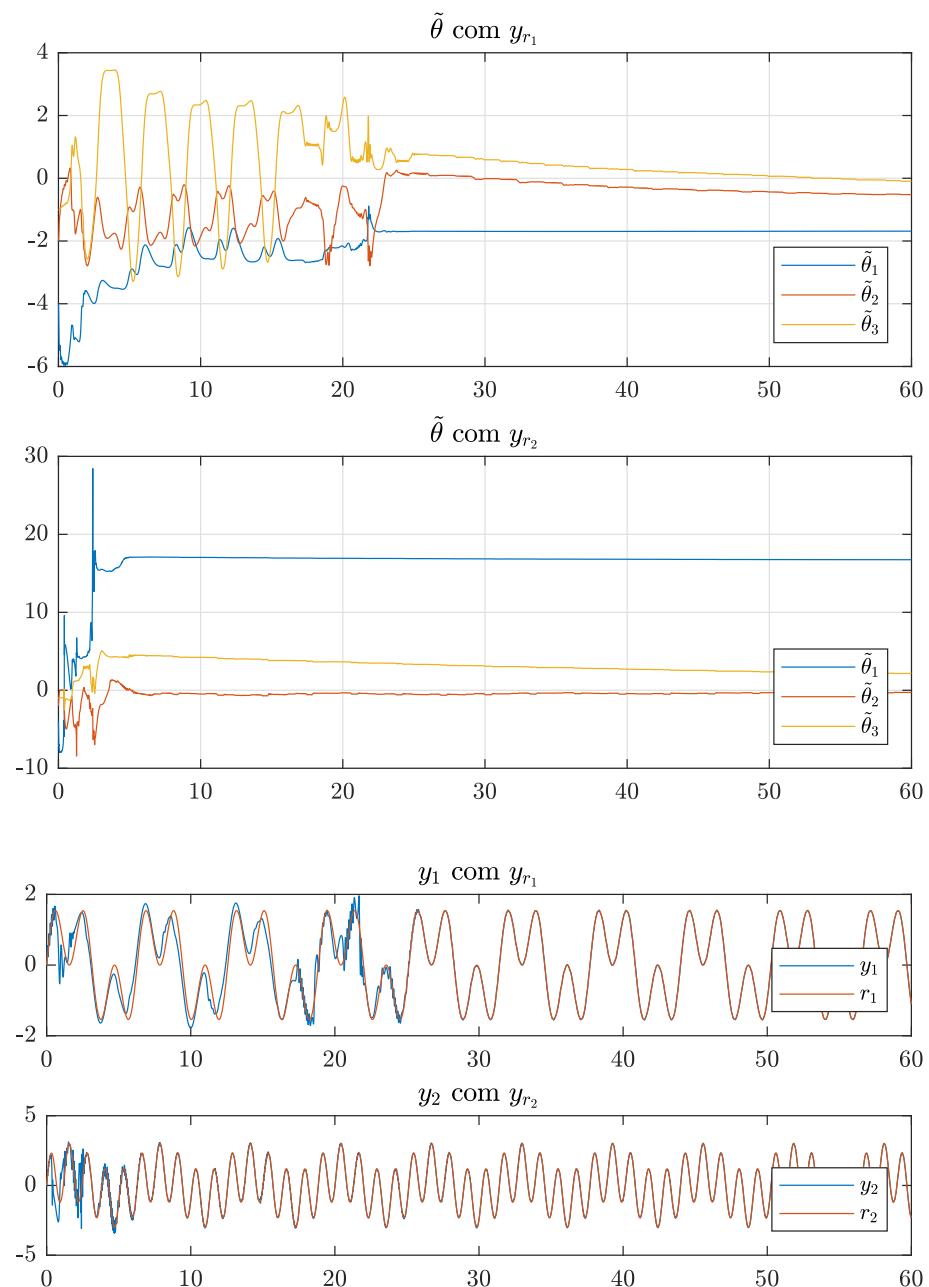


### Simulação 3.2: modelo

$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1} u \quad \theta(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \Gamma = 1 \mathbf{I}_3,$$

$$y_r = \sin(t) + \sin(3t) e \sin(t) + 2\sin(5t).$$





## 5 Discussão

A **simulação #1** mostra o comportamento do sistema para variações nas condições iniciais. A rapidez da convergência depende de quão próximo os parâmetros estimados estão dos parâmetros reais. A simulação mostrou um comportamento semelhante para ambos os casos. Quando deslocamos o  $y(0)$ , na simulação 1.2, os sistemas também apresentam comportamento semelhante, pois a variável de controle  $u$  é alterada e não apresenta saturação, compensando a condição inicial.

A **simulação #2** mostra o comportamento do sistema para variações no ganho de adaptação  $\Gamma$ . Podemos verificar convergência mais rápida quando o  $\Gamma$  é maior, porém também observamos maiores oscilações e picos de erro.

A **simulação #3** mostra o comportamento do sistema para variações na planta. Escolhemos plantas instáveis e estáveis. Podemos observar que, em ambos os casos, o sinal de controle foi capaz de corrigir o erro, sem muitas dificuldades. O comportamento dos sistemas é semelhante. A alteração do modelo, na simulação 3.2, mostrou que modelos mais complexos, com frequências mais altas e maiores amplitudes, demoram mais para convergir.