

COE-835 Controle adaptativo

Trabalho 7

Grupo: Guilherme Pires Sales de Carvalho
Matheus Ferreira dos Reis
Renan Salles de Freitas

Algoritmo: Adaptive Backstepping Control

Caso: $n = 2$ (ordem da planta)
 $n^* = 2$ (grau relativo)
 $n_p = 3$ (# de parâmetros)

Conteúdo

1	Backstepping - Formulação teórica sem observador	2
2	Backstepping - Formulação teórica com observador	4
3	Implementação	7
4	Resultados das simulações	9
4.1	Simulação #1	9
4.2	Simulação #2	12
4.3	Simulação #3	13
5	Discussão	17

1 Backstepping - Formulação teórica sem observador

Backstepping é um método recursivo de controle adaptativo baseado em Lyapunov e proposto no começo da década de 90. A ideia é projetar um controle recursivo considerando algumas das variáveis de estado como “controle virtuais” e implementar para elas leis de controle intermediárias. Com esta técnica é possível resolver problemas de estabilidade e rastreamento. Neste trabalho, desenvolveremos a fundamentação teórica para o caso de um sistema de segunda ordem com parâmetros desconhecidos:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \phi_1^T(x_1) \theta \\ \dot{x}_2 &= k_p u + \phi_2^T(x_1, x_2) \theta\end{aligned}\tag{1}$$

onde θ é o vetor de parâmetros desconhecidos e k_p é o ganho de alta frequência, também desconhecido. As não linearidades do sistema são representadas pela variável ϕ . Para o desenvolvimento do algoritmo, assume-se:

- o sinal de k_p é conhecido;
- o sinal de referência y_r e suas derivadas são contínuas e limitadas.

Introduzem-se as variáveis \mathbf{z} (mudança de coordenadas):

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 - y_r \\ z_2 &= x_2 - \alpha_1 - \dot{y}_r,\end{aligned}\tag{2}$$

onde α é a variável de controle virtual. O primeiro passo para a elaboração do método é começar pela equação 2, considerando x_2 como uma variável de controle virtual. A derivada do erro de rastreamento z_1 é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_r \\ &= z_2 + \alpha_1 + \phi_1^T \theta\end{aligned}\tag{3}$$

Podemos projetar a primeira função estabilizante α_1 como:

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - \phi_1^T \hat{\theta},\tag{4}$$

onde c_1 é uma constante positiva e $\hat{\theta}$ é uma estimativa de θ . Consideremos a função de Lyapunov:

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta},\tag{5}$$

onde Γ é uma matriz positiva definida e $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$. Derivando a função de Lyapunov, temos:

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}&= z_1 (z_2 + \alpha_1 + \phi_1^T \hat{\theta}) - \tilde{\theta}^T (\Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} - \phi_1 z_1) \\ &= -c_1 z_1^2 + \tilde{\theta}^T (\tau_1 - \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}) + z_1 z_2 \\ \tau_1 &= \phi_1 z_1\end{aligned}\tag{7}$$

Observe que se escolhermos a variação dos parâmetros como $\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_1$ anulamos um dos termos, mas ainda falta considerar a dinâmica de z_2 . Devemos deixar a escolha da lei de adaptação em aberto. Pela segunda equação, temos:

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= k_p u + \phi_2^\top \theta - \dot{\alpha}_1 - \ddot{y}_r \\ &= k_p u + \phi_2^\top \theta - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2 + \phi_1^\top \theta) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \ddot{y}_r \end{aligned} \quad (8)$$

Escolhemos a função Lyapunov:

$$V = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{|k_p|}{2\gamma} \tilde{p}^2, \quad (9)$$

onde $\tilde{p} = p - \hat{p}$ e \hat{p} é estimativa de $p = \frac{1}{k_p}$, e $\gamma > 0$. Derivando a função Lyapunov, obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\top (\tau_1 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + z_2 \dot{z}_2 + \frac{|k_p|}{\gamma} \tilde{p} \dot{\tilde{p}} \\ &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\top (\tau_1 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + z_2 \left(k_p u + \phi_2^\top \theta - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2 + \phi_1^\top \theta) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \ddot{y}_r \right) + \frac{|k_p|}{\gamma} \tilde{p} \dot{\tilde{p}} \\ \theta &= \tilde{\theta} + \hat{\theta} \\ \dot{V} &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\top (\tau_1 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + z_2 \left(k_p u + (\tilde{\theta}^\top + \hat{\theta}^\top) (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \ddot{y}_r \right) + \frac{|k_p|}{\gamma} \tilde{p} \dot{\tilde{p}} \\ \tau_2 &= \tau_1 + \left(\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1 \right) z_2 \\ \dot{V} &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\top (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + z_2 \left(k_p u + \hat{\theta}^\top (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \ddot{y}_r \right) + \frac{|k_p|}{\gamma} \tilde{p} \dot{\tilde{p}} \end{aligned} \quad (10)$$

Escolhemos a lei de controle:

$$u = \hat{p} \bar{u} \quad (11)$$

$$\bar{u} = \alpha_2 + \ddot{y}_r \quad (12)$$

Note que:

$$k_p u = k_p \hat{p} \bar{u} = \bar{u} - k_p \tilde{p} \bar{u} \quad (13)$$

Substituindo a eq.13 em eq.10, temos:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\top (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + z_2 \left(\bar{u} - k_p \tilde{p} \bar{u} + \hat{\theta}^\top (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \ddot{y}_r \right) + \frac{|k_p|}{\gamma} \tilde{p} \dot{\hat{p}} \\
&= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\top (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + z_2 \left(\bar{u} + \hat{\theta}^\top (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \ddot{y}_r \right) + \frac{|k_p|}{\gamma} \tilde{p} (\dot{\hat{p}} - \text{sign}(k_p) \gamma \bar{u} z_2)
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
&= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\top (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + z_2 \left(\alpha_2 + \hat{\theta}^\top (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \ddot{y}_r \right) - \frac{|k_p|}{\gamma} \tilde{p} (\dot{\hat{p}} + \text{sign}(k_p) \gamma \bar{u} z_2)
\end{aligned} \tag{15}$$

Escolhemos α_2 como:

$$\alpha_2 = -c_2 z_2 - z_1 - \hat{\theta}^\top (\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r \tag{16}$$

Substituindo a eq.16 em eq.15, obtemos:

$$\dot{V} = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + \tilde{\theta}^\top (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) - \frac{|k_p|}{\gamma} \tilde{p} (\dot{\hat{p}} + \text{sign}(k_p) \gamma \bar{u} z_2) \tag{17}$$

A lei de atualização dos parâmetros é, portanto:

$$\dot{\hat{p}} = -\gamma \text{sign}(k_p) \bar{u} z_2 \tag{18}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_2 \tag{19}$$

2 Backstepping - Formulação teórica com observador

Neste trabalho, consideramos o sistema:

$$\dot{x}_1 = x_2 - a_1 y \tag{20}$$

$$\dot{x}_2 = k_p u - a_0 y$$

onde os parâmetros a_1 , a_0 e k_p são desconhecidos. Para esta formulação apenas a saída do sistema y está disponível, portanto x_2 não é conhecido e deve ser estimado. Podemos reescrever o sistema 21:

$$\dot{x} = Ax - F(y, u)^\top \theta$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F(y, u)^\top = [B(u) \quad \Phi(y)], \Phi(y) = \begin{bmatrix} -y & 0 \\ 0 & -y \end{bmatrix}, B(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} k_p \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$y = e_1^\top x$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(21)

Para estimar os estados, utilizamos os filtros abaixo:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A_0\xi + ky \\ \dot{\Omega}^\top &= A_0\Omega^\top + F^\top \\ k &= \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}, A_0 = A - ke_1^\top = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{22}$$

Os valores de k devem ser escolhidos de forma que A_0 seja Hurwitz. E, dessa forma, o estado estimado pode ser escrito como:

$$\hat{x} = \xi + \Omega^\top\theta\tag{23}$$

Derivando a equação 23 e substituindo as equações dos filtros 22, verifica-se que a dinâmica do estimador é igual à dinâmica da planta 21.

Porém, Ω é uma matriz e opta-se pela redução das ordens dos filtros. Observe que $\Omega^\top = [v_0 \quad \Xi]$ e, pela equação 22, temos que:

$$\dot{v}_0 = A_0v_0 + e_2u\tag{24}$$

$$\dot{\Xi} = A_0\Xi - Iy\tag{25}$$

Introduzem-se dois novos filtros, para substituir os filtros da equação 22:

$$\dot{\lambda} = A_0\lambda + e_2u\tag{26}$$

$$\dot{\eta} = A_0\eta + e_2y\tag{27}$$

É fácil verificar que, para esta planta de segunda ordem sem zeros ($m = 0$), $v_0 = \lambda$. Para o caso geral, temos que:

$$\dot{\lambda} = A_0\lambda + e_2u\tag{28}$$

$$v_i = A_0^i\lambda \quad (i = 0, \dots, m)\tag{29}$$

É possível demonstrar que:

$$\Xi = -[A_0\eta \quad \eta]\tag{30}$$

$$\xi = -A_0^2\eta\tag{31}$$

Podemos reescrever a dinâmica da saída y :

$$\begin{aligned}\dot{y} &= x_2 + \phi^\top\theta \\ &= k_pv_{0,2} + \xi_2 + \bar{\omega}^\top\theta + \epsilon_2 \\ \bar{\omega}^\top &= [0 \quad (\Xi_2 + \phi_1^\top)]\end{aligned}\tag{32}$$

Desta forma, o sistema 21 pode ser representado com os estados do observador:

$$\dot{y} = k_pv_{0,2} + \xi_2 + \bar{\omega}^\top\theta + \epsilon_2\tag{33}$$

$$\dot{v}_{0,2} = u - k_2v_{0,1}\tag{34}$$

O projeto backstepping agora segue como na seção anterior. Primeiro, fazemos a mudança de coordenadas em \mathbf{z} :

$$\begin{aligned} z_1 &= y - y_r \\ z_2 &= v_{0,2} - \alpha_1 - \hat{\rho}\dot{y}_r \end{aligned} \quad (35)$$

onde ρ é estimativa de $\frac{1}{k_p}$. O controle virtual α_1 , a lei de controle u e as leis de adaptação $\dot{\theta}$ e $\dot{\rho}$ são obtidas pelo método de Lyapunov. Derivando z_1 , obtemos:

$$\dot{z}_1 = k_p\alpha_1 + \xi_2 + \bar{\omega}^\top\theta + \epsilon_2 - k_p\tilde{\rho}\dot{y}_r + k_p z_2 \quad (36)$$

$$\alpha_1 = \hat{\rho}\bar{\alpha}_1 \quad (37)$$

$$\dot{z}_1 = \bar{\alpha}_1 + \xi_2 + \bar{\omega}^\top\theta + \epsilon_2 - k_p(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)\tilde{\rho} + k_p z_2 \quad (38)$$

E escolhemos a primeira função estabilizante:

$$\bar{\alpha}_1 = -c_1 z_1 - d_1 z_1 - \xi_2 - \bar{\omega}^\top\hat{\theta} \quad (39)$$

A dinâmica de z_1 pode ser reescrita como:

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 - d_1 z_1 + \epsilon_2 + [\omega - \hat{\rho}(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)e_1]^\top \tilde{\theta} - k_p(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)\tilde{\rho} + \hat{k}_p z_2 \quad (40)$$

Escolhe-se a função de Lyapunov:

$$2V_1 = z_1^2 + \tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + |k_p| \gamma^{-1} \tilde{\rho}^2 + \frac{1}{2d_1} \epsilon^\top P \epsilon \quad (41)$$

Nessas condições, é possível que a atualização de $\hat{\rho}$ é dada pela equação:

$$\dot{\hat{\rho}} = -\gamma z_1 \text{sign}(k_p)(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1) \quad (42)$$

Derivando z_2 , obtemos:

$$\dot{z}_2 = \dot{v}_{0,2} - \hat{\rho}\ddot{y}_r - \hat{\rho}\dot{y}_r - \dot{\alpha}_1 \quad (43)$$

$$= u - k_2 v_{0,1} - \hat{\rho}\ddot{y}_r - \beta - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}(\omega^\top \tilde{\omega} + \epsilon_2) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \quad (44)$$

$$\beta = k_2 v_{0,1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}(\xi_2 + \omega^\top \hat{\theta}) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta}(A_0 \eta + e_2 y) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r + (\dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\rho}}) \dot{\hat{\rho}} \quad (45)$$

Escolhe-se a função de Lyapunov:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{4d_2} \epsilon^\top P \epsilon \quad (46)$$

É possível mostrar que a atualização de parâmetros e a lei de controle são:

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_2 \quad (47)$$

$$\tau_1 = (\omega - \hat{\rho}(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)e_1)z_1 \quad (48)$$

$$\tau_2 = \tau_1 - z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \omega \quad (49)$$

$$u = -c_2 z_2 + \beta + \hat{\rho}\ddot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - d_2 z_2 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 - \hat{k}_p z_1 \quad (50)$$

3 Implementação

Para a implementação, só é preciso computar os filtros:

$$\dot{\lambda} = A_0\lambda + e_2u \quad (51)$$

$$\dot{\eta} = A_0\eta + e_2y \quad (52)$$

Pois é possível demonstrar que:

$$\Xi = -[A_0\eta \quad \eta] \quad (53)$$

$$\xi = -A_0\eta \quad (54)$$

$$v_0 = \lambda \quad (55)$$

Temos ainda que $\alpha = \hat{\rho}(-c_1z_1 - d_1z_1 - \xi_2 - \bar{\omega}^\top \hat{\theta})$. Logo:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = -\hat{\rho}(c_1 + d_1) + \hat{\rho}e_2^\top \hat{\theta} \quad (56)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} = \hat{\rho} \left(e_2^\top A_0^2 \frac{d\eta}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & e_2^\top A_0 \frac{d\eta}{dt} & e_2^\top I_2 \frac{d\eta}{dt} \end{bmatrix} \hat{\theta} \right) \quad (57)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} = \hat{\rho}(c_1 + d_1) \quad (58)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} = -\rho \bar{\omega} \quad (59)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\rho}} = -(c_1 + d_1)(y - y_r) + e_2^\top A_0 \eta - \bar{\omega}^\top \hat{\theta} \quad (60)$$

```

1  %-----
2  %
3  % COE-835 Controle adaptativo
4  %
5  % Script para simular o trabalho 7
6  %
7  % Backstepping : n = 2      Second and third order plant
8  %                n* = 2     Relative degree
9  %                np = 3     Adaptive parameters
10 % Caso com observador completo
11 %-----
12
13 function dx = backstepping_obs(t,x)
14
15 global A thetas A0 c1 c2 d1 d2 Gamma gamma kp a w e1 e2 k;
16
17 X          = x(1:2); y = e1'*X;
18 theta      = x(3:5);
19 lambda     = x(6:7);
20 eta        = x(8:9);
21 rho        = x(10);
22
23 %% Input
24 yr=0; dyr=0; ddyr=0;
25 for i=1:length(a)
26     yr = yr + a(i)*sin(w(i)*t);
27     dyr = dyr + w(i)*a(i)*cos(w(i)*t);

```

```

28     ddyr = ddyr - w(i)^2*a(i)*sin(w(i)*t);
29 end
30
31 Phi = [-y 0;0 -y];
32
33 %% Variables 1
34 xi = -A0^2 * eta;
35 Xi = -[A0*eta eta];
36 v0_1 = lambda(1);
37 v0_2 = lambda(2);
38 omega_bar = [0, (Xi(2,:) - y*e1')]';
39 omega = [v0_2, (Xi(2,:) - y*e1')]';
40
41 %% Z
42 z1 = y - yr;
43 alpha_bar = -c1*z1 - d1*z1 - xi(2) - omega_bar'*theta;
44 alpha_1 = rho * alpha_bar;
45 z2 = v0_2 - rho*dyr - alpha_1;
46
47 %% Filtro eta
48 deta = A0*eta + e2*y;
49
50 %% dalpha/dt
51 dady = rho * (- c1 - d1 + [0,e1']*theta);
52 dadeta_deta = rho * (e2' * A0^2 * deta + [0,e2'*A0*deta, e2'*eye(2)*deta]*theta
    );
53 dadyr = rho*(c1 + d1);
54 dadtheta = - rho * omega_bar';
55 dadrho = -(c1 + d1)*z1 - e2'*xi - omega_bar'*theta;
56
57 %% Variables 2
58 tau_1 = (omega - rho*(dyr + alpha_bar)*[e1',0]')*z1;
59 tau_2 = tau_1 - z2 * (dady * omega);
60
61 %% Atualização dos parâmetros
62 dtheta = Gamma * tau_2;
63 drho = - gamma * z1 * sign(kp) * (dyr + alpha_bar);
64 beta = k(2)*v0_1 + dady * (xi(2) + omega'*theta) + ...
    dadeta_deta + dadyr * dyr + (dyr + dadrho) * drho;
65 u = -c2*z2 + beta + rho*ddyr + dadtheta*dtheta - d2*z2*(dady)^2 - ...
    z1*theta(1);
66 % u = -c2*z2 + beta + rho*ddyr + dadtheta*dtheta - d2*z2*(dady)^2 - ...
67 % z1/rho;
68
69 %% Filtros
70
71 dlambd = A0*lambda + e2*u;
72
73 %% Planta
74 F = [e2*u Phi];
75 dX = A*X + F*thetas;
76
77 %% Translation
78 dx = [dX' dtheta' dlambd' deta' drho]';

```


4 Resultados das simulações

Nas simulações, procuramos avaliar o comportamento do sistema para as seguintes condições: (i) condições iniciais $\theta(0)$ e $y(0)$; (ii) Parâmetros da planta e do modelo; (iii) ganho de adaptação Γ .

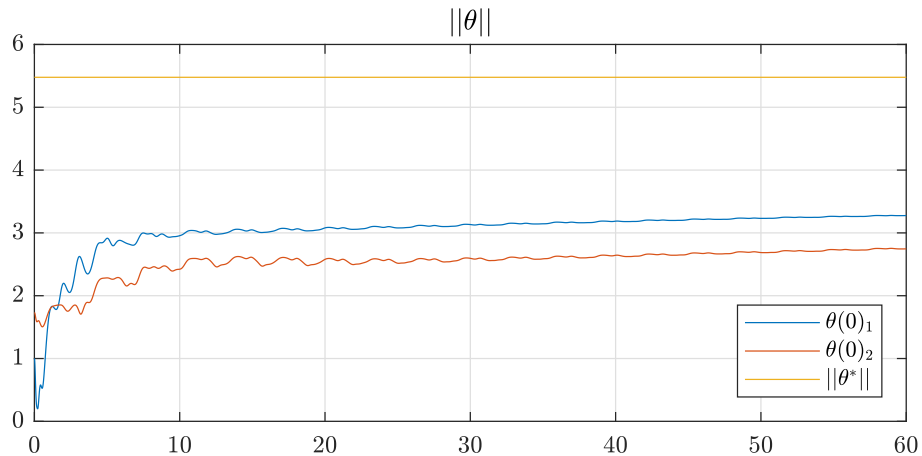
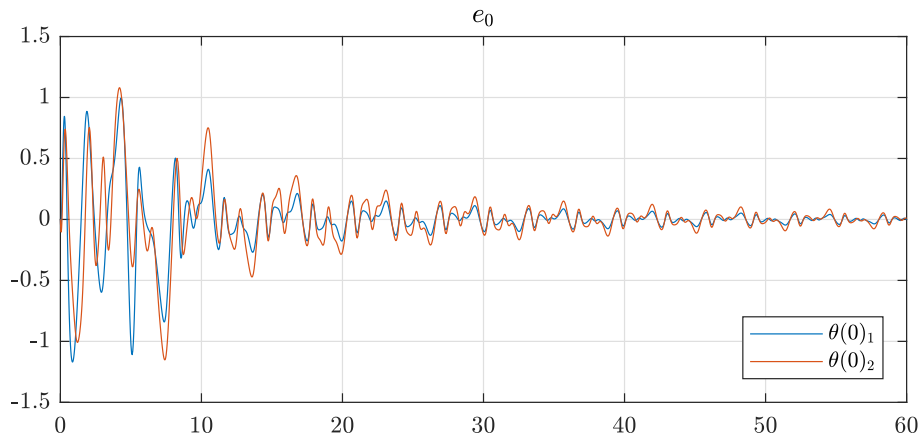
Apresentaremos os resultados obtidos através de simulações no ambiente **Matlab/Simulink** e os discutiremos na próxima seção.

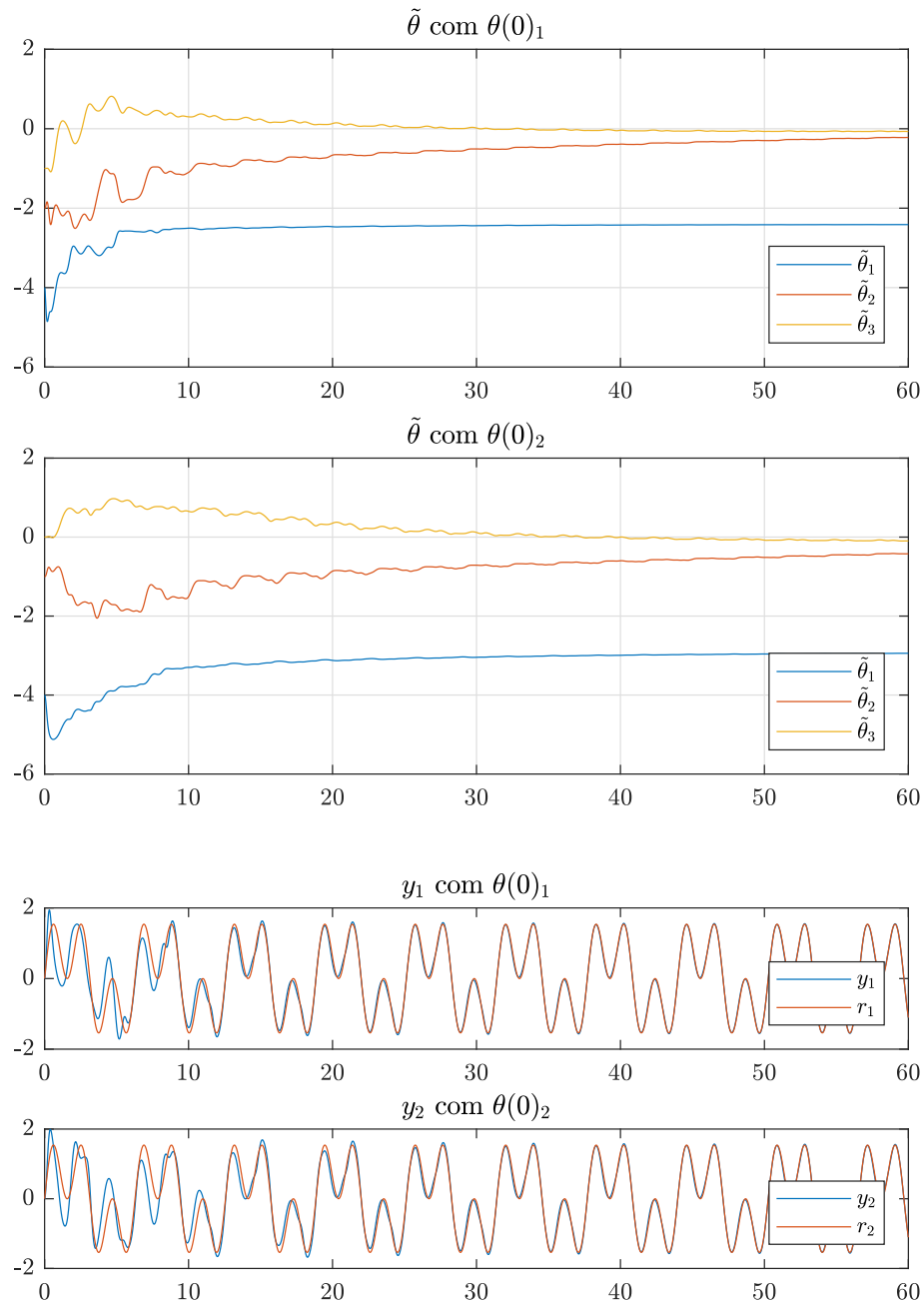
4.1 Simulação #1

Inicialmente, desejamos verificar o comportamento do sistema para variações nas condições iniciais.

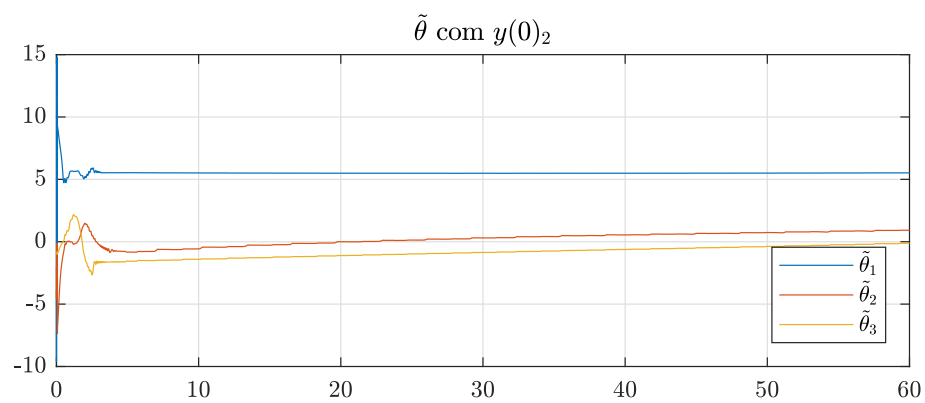
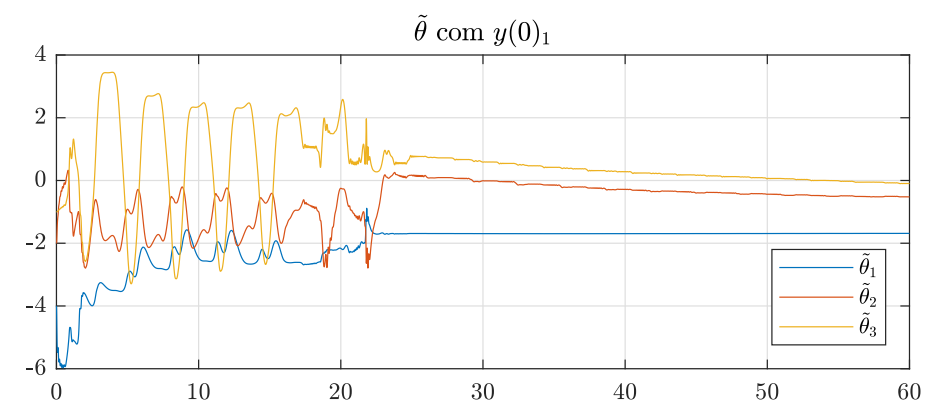
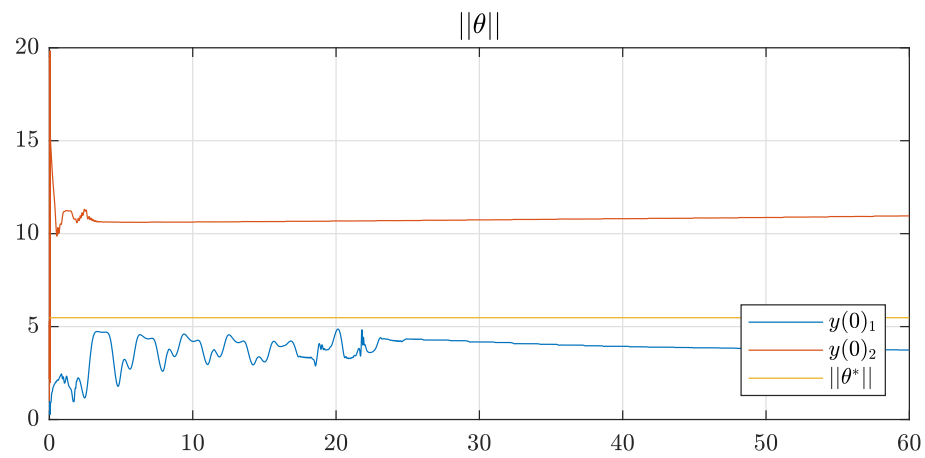
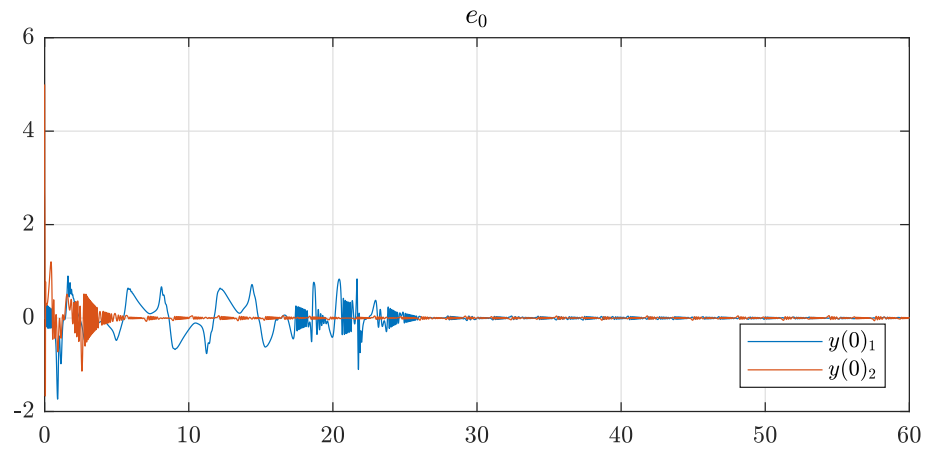
Simulação 1.1: $\theta(0)$

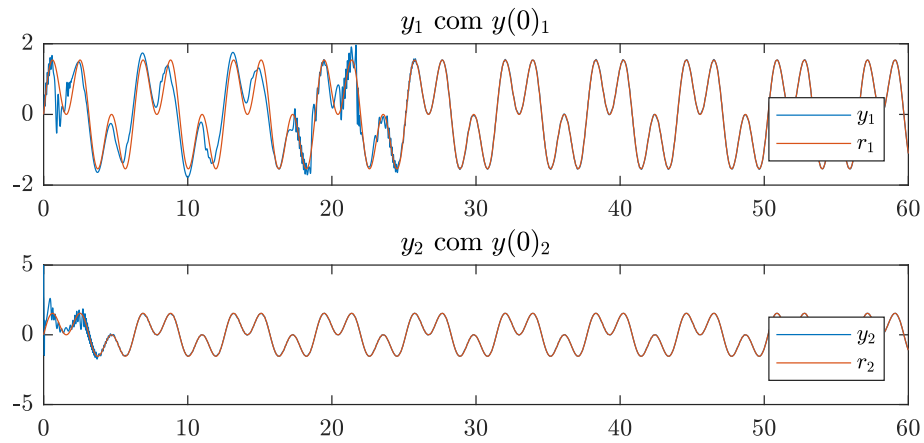
$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1}u, \quad \theta(0) = 0 \text{ e } 1, \quad y(0) = 0, \quad \Gamma = 1 \mathbf{I}_3, \\ y_r = \sin(t) + \sin(3t).$$



**Simulação 1.2:** $y(0)$

$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1}u, \quad \theta(0) = 0, \quad y(0) = 0 \text{ e } 5, \quad \Gamma = 1 \mathbf{I}_3, \\ y_r = \sin(t) + \sin(3t).$$

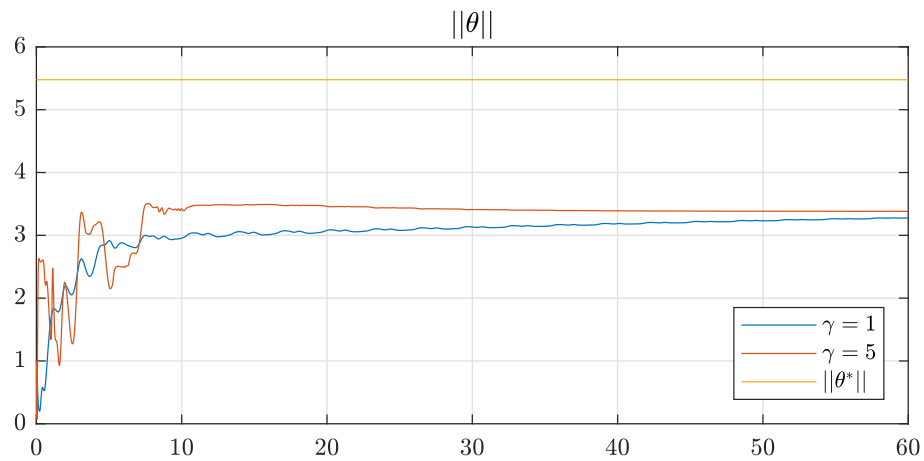
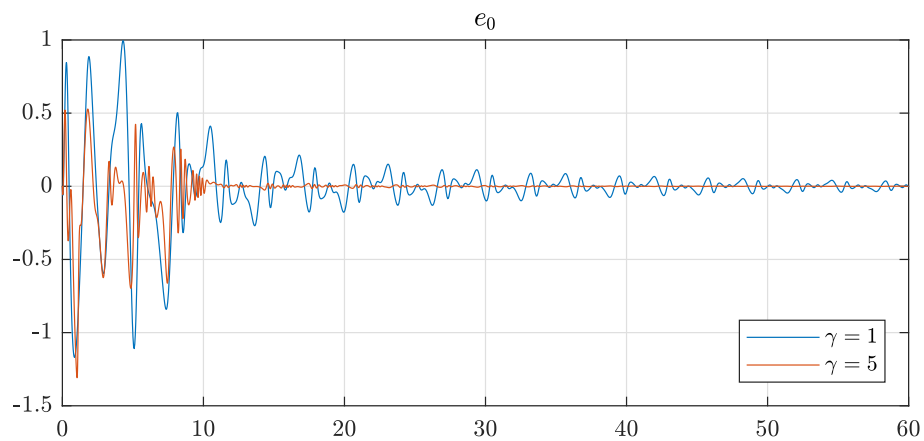


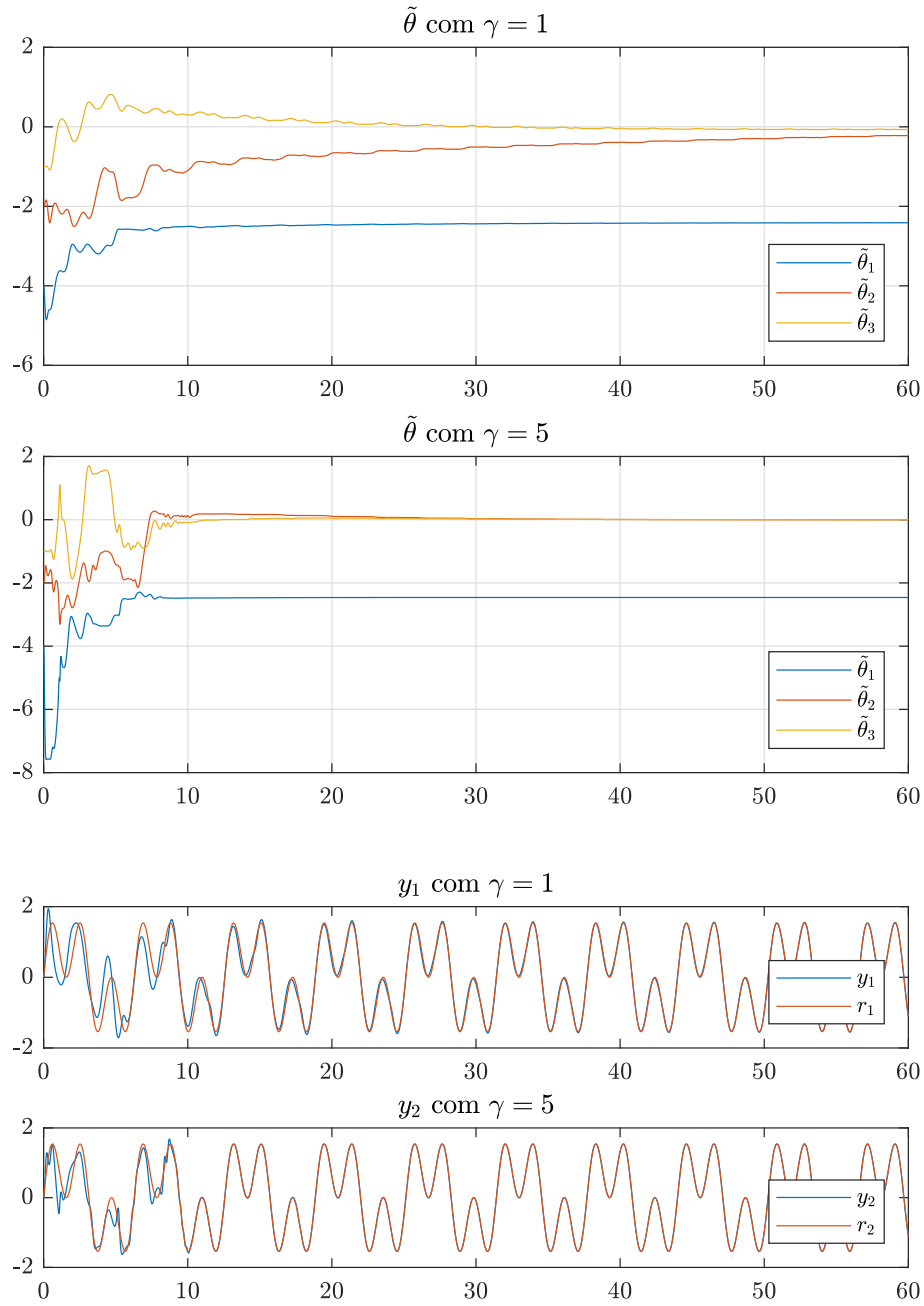


4.2 Simulação #2

Verificamos o comportamento do sistema para variações no parâmetro de adaptação Γ .

$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1}u, \quad \theta(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \Gamma = 1 \text{ e } 5 \mathbf{I}_3, \\ y_r = \sin(t) + \sin(3t).$$





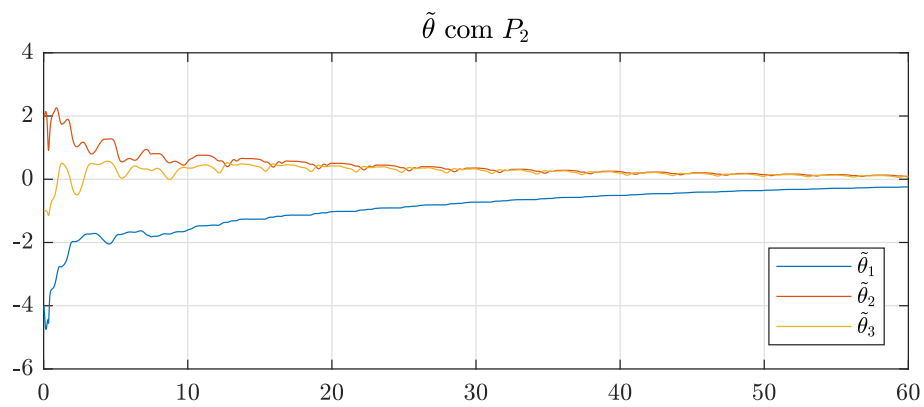
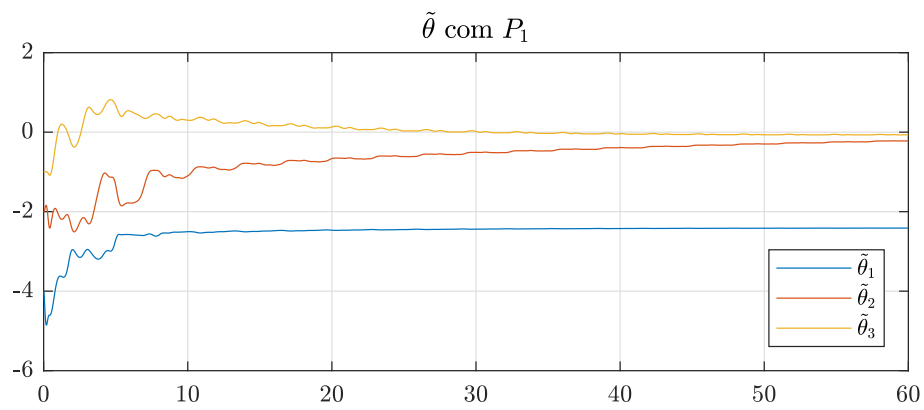
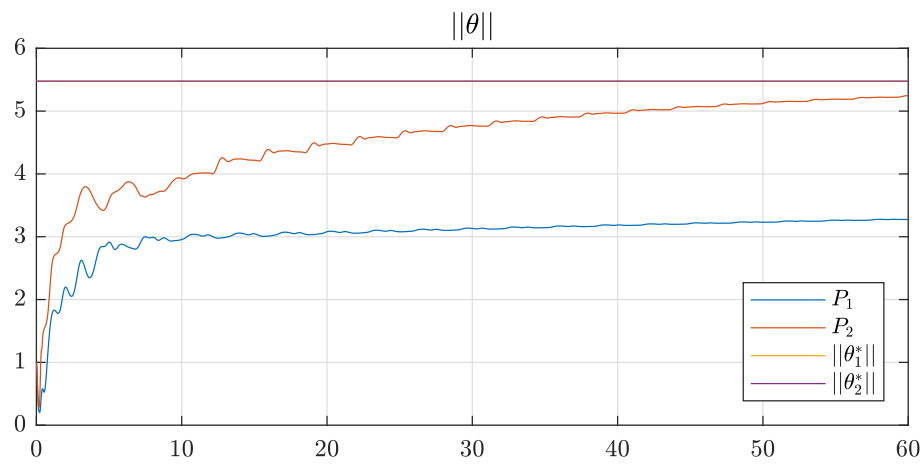
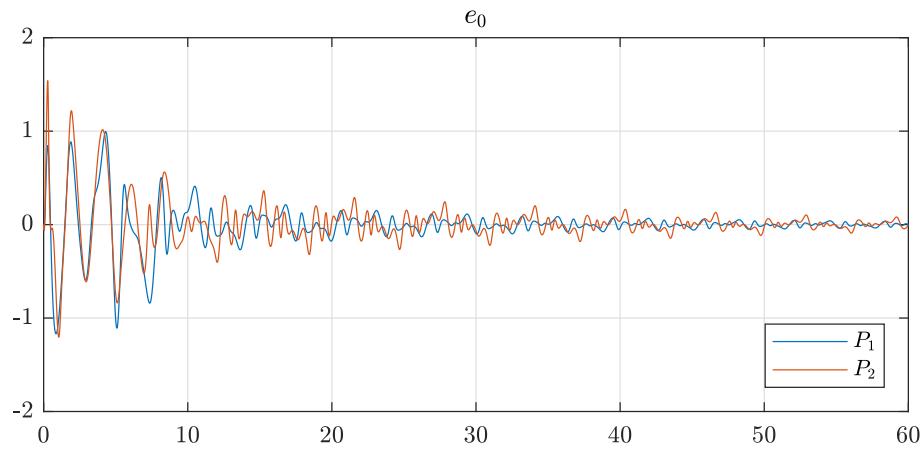
4.3 Simulação #3

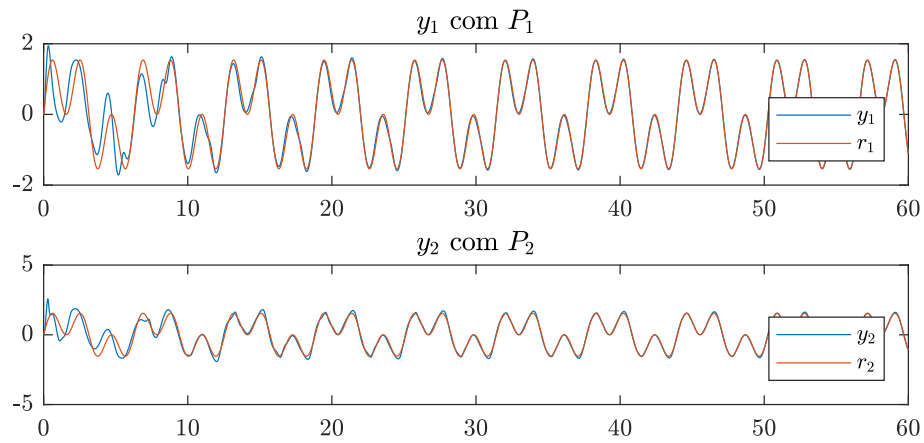
Verificamos o comportamento do sistema para variações na planta e modelo.

Simulação 3.1: planta

$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1} u e^{\frac{5}{s^2 - 2s + 1} u}, \quad \theta(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \Gamma = 1 \mathbf{I}_3,$$

$$y_r = \sin(t) + \sin(3t).$$

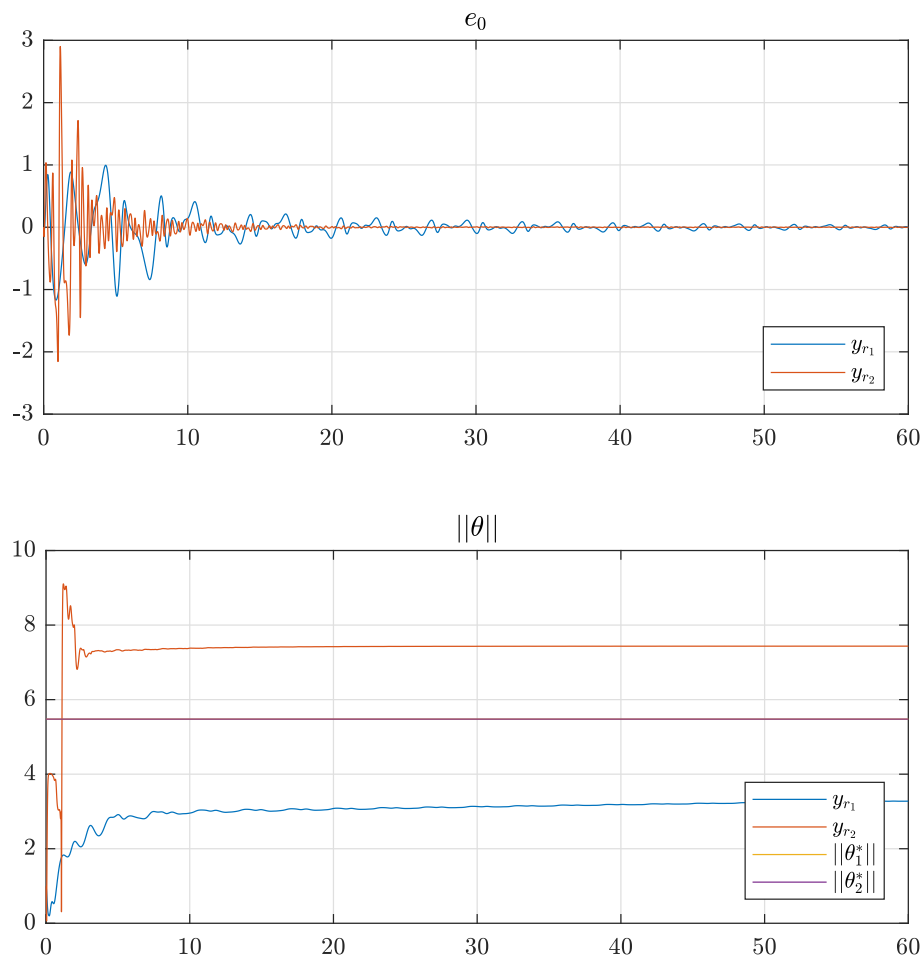


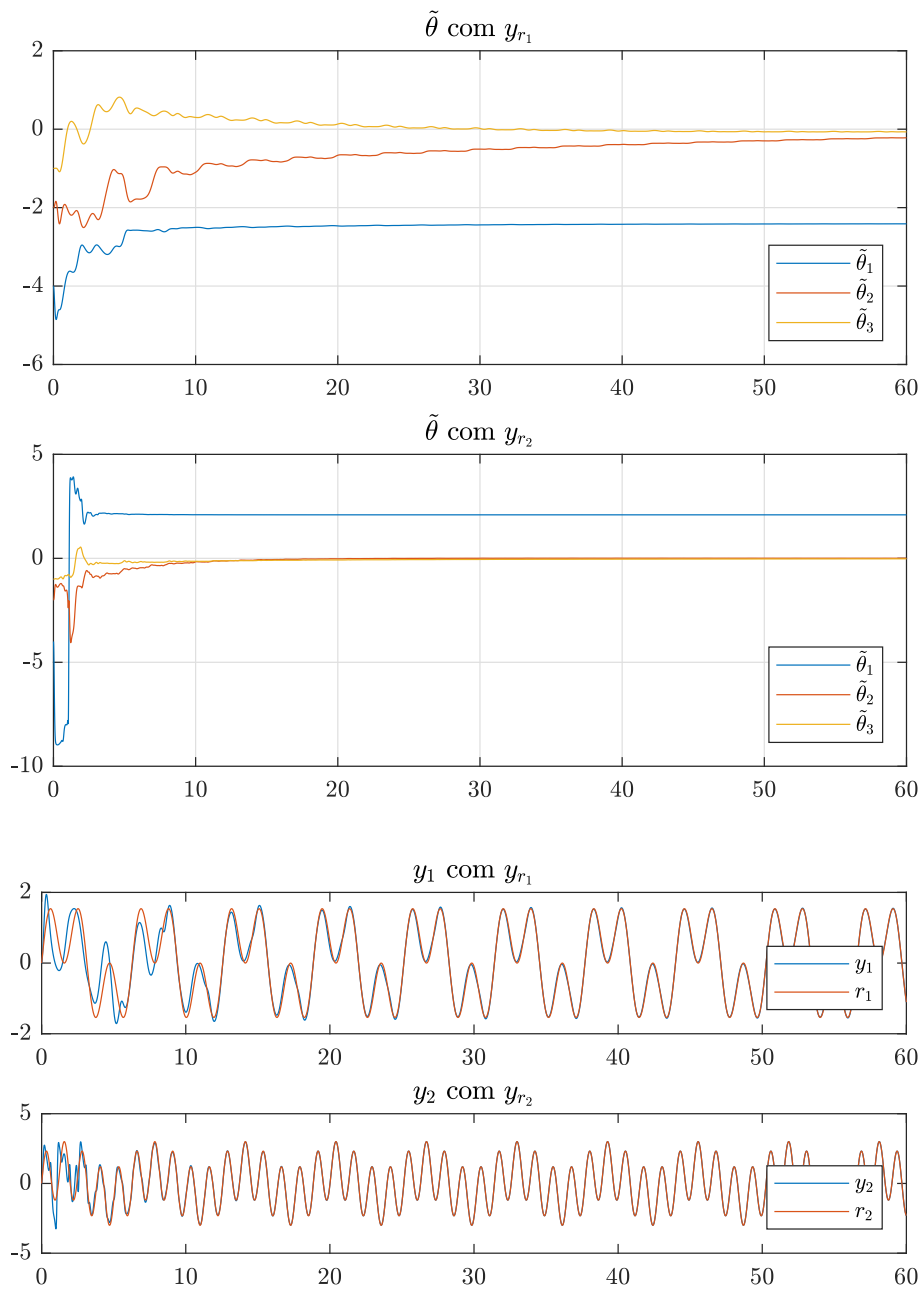


Simulação 3.2: modelo

$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1}u \quad \theta(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \Gamma = 1 \mathbf{I}_3,$$

$$y_r = \sin(t) + \sin(3t) \text{ e } \sin(t) + 2\sin(5t).$$





5 Discussão

A **simulação #1** mostra o comportamento do sistema para variações nas condições iniciais. A rapidez da convergência depende de quão próximo os parâmetros estimados estão dos parâmetros reais. A simulação mostrou um comportamento semelhante para ambos os casos. Quando deslocamos o $y(0)$, na simulação 1.2, os sistemas também apresentam comportamento semelhante, pois a variável de controle u é alterada e não apresenta saturação, compensando a condição inicial.

A **simulação #2** mostra o comportamento do sistema para variações no ganho de adaptação Γ . Podemos verificar convergência mais rápida quando o Γ é maior, porém também observamos maiores oscilações e picos de erro.

A **simulação #3** mostra o comportamento do sistema para variações na planta. Escolhemnos plantas instáveis e estáveis. Podemos observar que, em ambos os casos, o sinal de controle foi capaz de corrigir o erro, sem muitas dificuldades. O comportamento dos sistemas é semelhante. A alteração do modelo, na simulação 3.2, mostrou que modelos mais complexos, com frequências mais altas e maiores amplitudes, demoram mais para convergir.