COE-835 Controle adaptativo

Trabalho 7

Grupo: Guilherme Pires Sales de Carvalho
Matheus Ferreira dos Reis
Renan Salles de Freitas

Algoritmo: Adaptive Backstepping Control

Caso: $n = 2$ (ordem da planta)
$n^* = 2$ (grau relativo)
$n_p = 3$ (# de parâmetros)

Conteúdo

1 Backstepping - Formulação teórica sem observador

Backstepping é um método recursivo de controle adaptativo baseado em Lyapunov e proposto no começo da década de 90. A ideia é projetar um controle recursivo considerando algumas das variáveis de estado como "controle virtuais" e implementar para elas leis de controle intermediárias. Com esta técnica é possível resolver problemas de estabilidade e rastreamento. Neste trabalho, desenvolveremos a fundamentação teórica para o caso de um sistema de segunda ordem com parâmetros desconhecidos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \phi_1^\intercal(x_1)\,\theta \\ \dot{x}_2 &= k_p\,u + \phi_2^\intercal(x_1, x_2)\,\theta \end{aligned} \tag{1}$$

onde θ é o vetor de parâmetros desconhecidos e k_p é o ganho de alta frequência, também desconhecido. As não linearidades do sistema são representadas pela variável ϕ. Para o desenvolvimento do algoritmo, assume-se:

- o sinal de k_p é conhecido;
- o sinal de referência y_r e suas derivadas são contínuas e limitadas.

Introduzem-se as variáveis $\mathbf{z}$ (mudança de coordenadas):

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - y_r \\ z_2 &= x_2 - \alpha_1 - \dot{y}_r, \end{aligned} \tag{2}$$

onde α é a variável de controle virtual. O primeiro passo para a elaboração do método é começar pela equação 2, considerando x_2 como uma variável de controle virtual. A derivada do erro de rastreamento z_1 é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_r \\ &= z_2 + \alpha_1 + \phi_1^\intercal\,\theta \end{aligned} \tag{3}$$

Podemos projetar a primeira função estabilizante α_1 como:

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - \phi_1^\intercal\,\hat{\theta}, \tag{4}$$

onde c_1 é uma constante positiva e $\hat{\theta}$ é uma estimativa de θ. Consideremos a função de Lyapunov:

$$V_1 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^\intercal\,\Gamma^{-1}\,\tilde{\theta}, \tag{5}$$

onde Γ é uma matriz positiva definida e $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$. Derivando a função de Lyapunov, temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1\dot{z}_1 - \tilde{\theta}^\intercal\,\Gamma^{-1}\,\dot{\hat{\theta}} \\ &= z_1(z_2 + \alpha_1 + \phi_1^\intercal\,\hat{\theta}) - \tilde{\theta}^\intercal(\Gamma^{-1}\,\dot{\hat{\theta}} - \phi_1 z_1) \\ &= -c_1 z_1^2 + \tilde{\theta}^\intercal(\tau_1 - \Gamma^{-1}\,\dot{\hat{\theta}}) + z_1 z_2 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\tau_1 = \phi_1 z_1 \tag{7}$$

Observe que se escolhermos a variação dos parâmetros como $\dot{\hat{\theta}} = \Gamma\,\tau_1$ anulamos um dos termos, mas ainda falta considerar a dinâmica de z_2. Devemos deixar a escolha da lei de adaptação em aberto. Pela segunda equação, temos:

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= k_p u + \phi_2^\intercal\,\theta - \dot{\alpha}_1 - \ddot{y}_r \\ &= k_p u + \phi_2^\intercal\,\theta - \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}(x_2 + \phi_1^\intercal\,\theta) - \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial\alpha_1}{\partial y_r}\dot{y}_r - \ddot{y}_r\end{aligned} \tag{8}$$

Escolhemos a função Lyapunov:

$$V = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{|k_p|}{2\gamma}\tilde{p}^2, \tag{9}$$

onde $\tilde{p} = p - \hat{p}$ e $\hat{p}$ é estimativa de $p = \frac{1}{k_p}$, e $\gamma > 0$. Derivando a função Lyapunov, obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\intercal(\tau_1 - \Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}) + z_2\dot{z}_2 + \frac{|k_p|}{\gamma}\tilde{p}\dot{\tilde{p}} \\ &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\intercal(\tau_1 - \Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}) + z_2\left(k_p u + \phi_2^\intercal\,\theta - \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}(x_2 + \phi_1^\intercal\,\theta) - \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial\alpha_1}{\partial y_r}\dot{y}_r - \ddot{y}_r\right) + \frac{|k_p|}{\gamma}\tilde{p}\dot{\tilde{p}} \\ \theta &= \tilde{\theta} + \hat{\theta} \\ \dot{V} &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\intercal(\tau_1 - \Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}) + z_2\left(k_p u + (\tilde{\theta}^\intercal + \hat{\theta}^\intercal)(\phi_2 - \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}\phi_1) - \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}x_2\right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial\alpha_1}{\partial y_r}\dot{y}_r - \ddot{y}_r\right) + \frac{|k_p|}{\gamma}\tilde{p}\dot{\tilde{p}} \\ \tau_2 &= \tau_1 + \left(\phi_2 - \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}\phi_1\right) z_2 \\ \dot{V} &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\intercal(\tau_2 - \Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}) + z_2\left(k_p u + \hat{\theta}^\intercal(\phi_2 - \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}\phi_1) - \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}x_2\right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial\alpha_1}{\partial y_r}\dot{y}_r - \ddot{y}_r\right) + \frac{|k_p|}{\gamma}\tilde{p}\dot{\tilde{p}}\end{aligned} \tag{10}$$

Escolhemos a lei de controle:

$$u = \hat{p}\bar{u} \tag{11}$$
$$\bar{u} = \alpha_2 + \ddot{y}_r \tag{12}$$

Note que:

$$k_p u = k_p\hat{p}\bar{u} = \bar{u} - k_p\tilde{p}\bar{u} \tag{13}$$

Substituindo a eq.13 em eq.10, temos:

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\intercal(\tau_2 - \Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}) + z_2 \Bigg(\bar{u} - k_p \tilde{p}\bar{u} + \hat{\theta}^\intercal(\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\phi_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \\
&\quad - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r}\dot{y}_r - \ddot{y}_r \Bigg) + \frac{|k_p|}{\gamma}\tilde{p}\dot{\hat{p}} \\
&= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\intercal(\tau_2 - \Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}) + z_2 \Bigg(\bar{u} + \hat{\theta}^\intercal(\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\phi_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \\
&\quad - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r}\dot{y}_r - \ddot{y}_r \Bigg) + \frac{|k_p|}{\gamma}\tilde{p}\ (\dot{\hat{p}} - \text{sign}(k_p)\gamma\bar{u}z_2) \qquad (14) \\
&= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^\intercal(\tau_2 - \Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}) + z_2 \Bigg(\alpha_2 + \hat{\theta}^\intercal(\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\phi_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \\
&\quad - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r}\dot{y}_r \Bigg) - \frac{|k_p|}{\gamma}\tilde{p}\ \left(\dot{\hat{p}} + \text{sign}(k_p)\gamma\bar{u}z_2\right) \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Escolhemos α_2 como:

$$
\alpha_2 = -c_2 z_2 - z_1 - \hat{\theta}^\intercal(\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\phi_1) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r}\dot{y}_r \qquad (16)
$$

Substituindo a eq.16 em eq.15, obtemos:

$$
\dot{V} = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + \tilde{\theta}^\intercal(\tau_2 - \Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}) - \frac{|k_p|}{\gamma}\tilde{p}\ \left(\dot{\hat{p}} + \text{sign}(k_p)\gamma\bar{u}z_2\right) \qquad (17)
$$

A lei de atualização dos parâmetros é, portanto:

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{p}} &= -\gamma \text{sign}(k_p)\bar{u}z_2 \qquad (18) \\
\dot{\hat{\theta}} &= \Gamma\tau_2 \qquad (19)
\end{aligned}
$$

2 Backstepping - Formulação teórica com observador

Neste trabalho, consideramos o sistema:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 - a_1 y \qquad (20) \\
\dot{x}_2 &= k_p\, u - a_0 y
\end{aligned}
$$

onde os parâmetros a_1, a_0 e k_p são desconehcidos. Para esta formulação apenas a saída do sistema y está disponível, portanto x_2 não é conhecido e deve ser estimado. Podemos reescrever o sistema 21:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax - F(y,u)^\intercal\theta \\
&A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F(y,u)^\intercal = \begin{bmatrix} B(u) & \Phi(y) \end{bmatrix}, \Phi(y) = \begin{bmatrix} -y & 0 \\ 0 & -y \end{bmatrix}, B(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} k_p \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \\
&y = e_1^\intercal x \\
&e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad (21)
$$

Para estimar os estados, utilizamos os filtros abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_0\xi + ky \\ \dot{\Omega}^\intercal &= A_0\Omega^\intercal + F^\intercal \\ k &= \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}, A_0 = A - ke_1^\intercal = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{22}$$

Os valores de k devem ser escolhidos de forma que A_0 seja Hurwitz. E, dessa forma, o estado estimado pode ser escrito como:

$$\hat{x} = \xi + \Omega^\intercal\theta \tag{23}$$

Derivando a equação 23 e substituindo as equações dos filtros 22, verifica-se que a dinâmica do estimador é igual à dinâmica da planta 21.

Porém, Ω é uma matriz e opta-se pela redução das ordens dos filtros. Observe que $\Omega^\intercal = [v_0 \quad | \quad \Xi]$ e, pela equação 22, temos que:

$$\dot{v}_0 = A_0 v_0 + e_2 u \tag{24}$$

$$\dot{\Xi} = A_0\Xi - Iy \tag{25}$$

Introduzem-se dois novos filtros, para substituir os filtros da equação 22:

$$\dot{\lambda} = A_0\lambda + e_2 u \tag{26}$$

$$\dot{\eta} = A_0\eta + e_2 y \tag{27}$$

É fácil verificar que, para esta planta de segunda ordem sem zeros ($m = 0$), $v_0 = \lambda$. Para o caso geral, temos que:

$$\dot{\lambda} = A_0\lambda + e_2 u \tag{28}$$

$$v_i = A_0^i\lambda \quad (i = 0, \ldots, m) \tag{29}$$

É possível demonstrar que:

$$\Xi = -\left[A_0\eta \quad \eta\right] \tag{30}$$

$$\xi = -A_0^2\eta \tag{31}$$

Podemos reescrever a dinâmica da saída y:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= x_2 + \phi^\intercal\theta \\ &= k_p v_{0,2} + \xi_2 + \bar{\omega}^\intercal\theta + \epsilon_2 \\ \bar{\omega}^\intercal &= \begin{bmatrix} 0 & (\Xi_2 + \phi_1^\intercal) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{32}$$

Desta forma, o sistema 21 pode ser representado com os estados do observador:

$$\dot{y} = k_p v_{0,2} + \xi_2 + \bar{\omega}^\intercal\theta + \epsilon_2 \tag{33}$$

$$\dot{v}_{0,2} = u - k_2 v_{0,1}$$

$$\tag{34}$$

O projeto backstepping agora segue como na seção anterior. Primeiro, fazemos a mudança de coordenadas em $\mathbf{z}$:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= y - y_r \\
z_2 &= v_{0,2} - \alpha_1 - \hat{\rho}\dot{y}_r
\end{aligned}
\tag{35}
$$

onde ρ é estimativa de $\frac{1}{k_p}$. O controle virtual α_1, a lei de controle u e as leis de adaptação $\dot{\hat{\theta}}$ e $\dot{\hat{\rho}}$ são obtidas pelo método de Lyapunov. Derivando z_1, obtemos:

$$
\dot{z}_1 = k_p\alpha_1 + \xi_2 + \bar{\omega}^{\intercal}\theta + \epsilon_2 - k_p\tilde{\rho}\dot{y}_r + k_p z_2 \tag{36}
$$

$$
\alpha_1 = \hat{\rho}\bar{\alpha}_1 \tag{37}
$$

$$
\dot{z}_1 = \bar{\alpha}_1 + \xi_2 + \bar{\omega}^{\intercal}\theta + \epsilon_2 - k_p(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)\tilde{\rho} + k_p z_2 \tag{38}
$$

E escolhemos a primeira função estabilizante:

$$
\bar{\alpha}_1 = -c_1 z_1 - d_1 z_1 - \xi_2 - \bar{\omega}^{\intercal}\hat{\theta} \tag{39}
$$

A dinâmica de z_1 pode ser reescrita como:

$$
\dot{z}_1 = -c_1 z_1 - d_1 z_1 + \epsilon_2 + \left[\omega - \hat{\rho}(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)e_1\right]^{\intercal}\tilde{\theta} - k_p(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)\tilde{\rho} + \hat{k}_p z_2 \tag{40}
$$

Escolhe-se a função de Lyapunov:

$$
2V_1 = z_1^2 + \tilde{\theta}^{\intercal}\Gamma^{-1}\tilde{\theta} + |k_p|\gamma^{-1}\tilde{\rho}^2 + \frac{1}{2d_1}\epsilon^{\intercal}P\epsilon \tag{41}
$$

Nessas condições, é possível que a atualização de $\hat{\rho}$ é dada pela equação:

$$
\hat{\rho} = -\gamma z_1 \mathrm{sign}(k_p)(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1) \tag{42}
$$

Derivando z_2, obtemos:

$$
\dot{z}_2 = \dot{v}_{0,2} - \hat{\rho}\ddot{y}_r - \dot{\hat{\rho}}\dot{y}_r - \dot{\alpha}_1 \tag{43}
$$

$$
= u - k2v_{0,1} - \hat{\rho}\ddot{y}_r - \beta - \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}(\omega^{\intercal}\tilde{\theta} + \epsilon_2) - \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} \tag{44}
$$

$$
\beta = k_2 v_{0,1} + \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}(\xi_2 + \omega^{\intercal}\hat{\theta}) + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\eta}(A_0\eta + e_2 y) + \frac{\partial\alpha_1}{\partial y_r}\dot{y}_r + (\dot{y}_r + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\rho}})\dot{\hat{\rho}} \tag{45}
$$

Escolhe-se a função de Lyapunov:

$$
V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{4d_2}\epsilon^{\intercal}P\epsilon \tag{46}
$$

É possível mostrar que a atualização de parâmetros e a lei de controle são:

$$
\hat{\theta} = \Gamma\tau_2 \tag{47}
$$

$$
\tau_1 = (\omega - \hat{\rho}(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)e_1)z_1 \tag{48}
$$

$$
\tau_2 = \tau_1 - z_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\omega \tag{49}
$$

$$
u = -c_2 z_2 + \beta + \hat{\rho}\ddot{y}_r + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\hat{\theta} - d_2 z_2\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\right)^2 - \hat{k}_p z_1 \tag{50}
$$

3 Implementação

Para a implementação, só é preciso computar os filtros:

$$\dot{\lambda} = A_0\lambda + e_2 u \tag{51}$$
$$\dot{\eta} = A_0\eta + e_2 y \tag{52}$$

Pois é possível demonstrar que:

$$\Xi = -\left[A_0\eta \quad \eta\right] \tag{53}$$
$$\xi = -A_0\eta \tag{54}$$
$$v_0 = \lambda \tag{55}$$

Temos ainda que $\alpha = \hat{\rho}(-c_1 z_1 - d_1 z_1 - \xi_2 - \bar{\omega}^\intercal\hat{\theta})$. Logo:

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial y} = -\hat{\rho}(c_1 + d_1) + \hat{\rho}e_2^\intercal\hat{\theta} \tag{56}$$
$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \hat{\rho}\left(e_2^\intercal A_0^2\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + \begin{bmatrix}0 & e_2^\intercal A_0\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} & e_2^\intercal I_2\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}\hat{\theta}\right) \tag{57}$$
$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial y_r} = \hat{\rho}(c_1 + d_1) \tag{58}$$
$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}} = -\rho\bar{\omega} \tag{59}$$
$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\rho}} = -(c_1 + d_1)(y - y_r) + e_2^\intercal A_0\eta - \bar{\omega}^\intercal\hat{\theta} \tag{60}$$

```matlab
%-----------------------------------------------------------------------
%
%   COE-835   Controle adaptativo
%
%   Script para simular o trabalho 7
%
%   Backstepping   :  n   = 2     Second and third order plant
%                     n*  = 2     Relative degree
%                     np  = 3     Adaptive parameters
% Caso com observador completo
%-----------------------------------------------------------------------

function dx = backstepping_obs(t,x)

global A thetas A0 c1 c2 d1 d2 Gamma gamma kp a w e1 e2 k;

X            = x(1:2); y = e1'*X;
theta        = x(3:5);
lambda       = x(6:7);
eta          = x(8:9);
rho          = x(10);

%% Input
yr=0; dyr=0; ddyr=0;
for i=1:length(a)
    yr = yr + a(i)*sin(w(i)*t);
    dyr = dyr + w(i)*a(i)*cos(w(i)*t);
```

```
    ddyr = ddyr - w(i)^2*a(i)*sin(w(i)*t);
end

Phi = [-y 0;0 -y];

%% Variables 1
xi = -A0^2 * eta;
Xi = -[A0*eta eta];
v0_1 = lambda(1);
v0_2 = lambda(2);
omega_bar = [0, (Xi(2,:) - y*e1')]';
omega = [v0_2, (Xi(2,:) - y*e1')]';

%% Z
z1 = y - yr;
alpha_bar = -c1*z1 - d1*z1 - xi(2) - omega_bar'*theta;
alpha_1 = rho * alpha_bar;
z2 = v0_2 - rho*dyr - alpha_1;

%% Filtro eta
deta = A0*eta + e2*y;

%% dalpha/dt
dady = rho * (- c1 - d1 + [0,e1']*theta);
dadeta_deta = rho * (e2' * A0^2 * deta + [0,e2'*A0*deta, e2'*eye(2)*deta]*theta
    );
dadyr = rho*(c1 + d1);
dadtheta = - rho * omega_bar';
dadrho = -(c1 + d1)*z1 - e2'*xi - omega_bar'*theta;

%% Variables 2
tau_1 = (omega - rho*(dyr + alpha_bar)*[e1',0]')*z1;
tau_2 = tau_1 - z2 * (dady * omega);

%% Atualização dos parâmetros
dtheta = Gamma * tau_2;
drho = - gamma * z1 * sign(kp) * (dyr + alpha_bar);
beta = k(2)*v0_1 + dady * (xi(2) + omega'*theta) + ...
    dadeta_deta + dadyr * dyr + (dyr + dadrho) * drho;
u = -c2*z2 + beta + rho*ddyr + dadtheta*dtheta - d2*z2*(dady)^2 - ...
    z1*theta(1);
% u = -c2*z2 + beta + rho*ddyr + dadtheta*dtheta - d2*z2*(dady)^2 - ...
%  z1/rho;

%% Filtros
dlambda = A0*lambda + e2*u;

%% Planta
F = [e2*u Phi];
dX = A*X + F*thetas;

%% Translation
dx = [dX' dtheta' dlambda' deta' drho]';
```

4 Resultados das simulações

Nas simulações, procuramos avaliar o comportamento do sistema para as seguintes condições: (i) condições iniciais $\theta(0)$ e $y(0)$; (ii) Parâmetros da planta e do modelo; (iii) ganho de adaptação Γ.

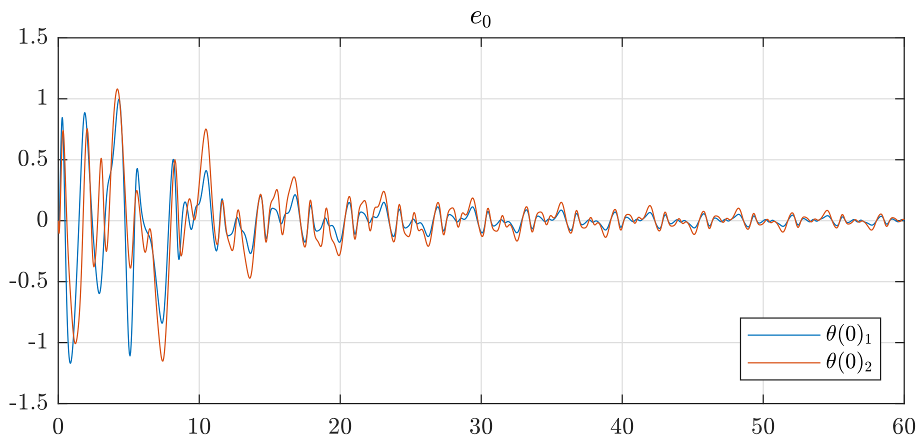
Apresentaremos os resultados obtidos através de simulações no ambiente `Matlab/Simulink` e os discutiremos na próxima seção.

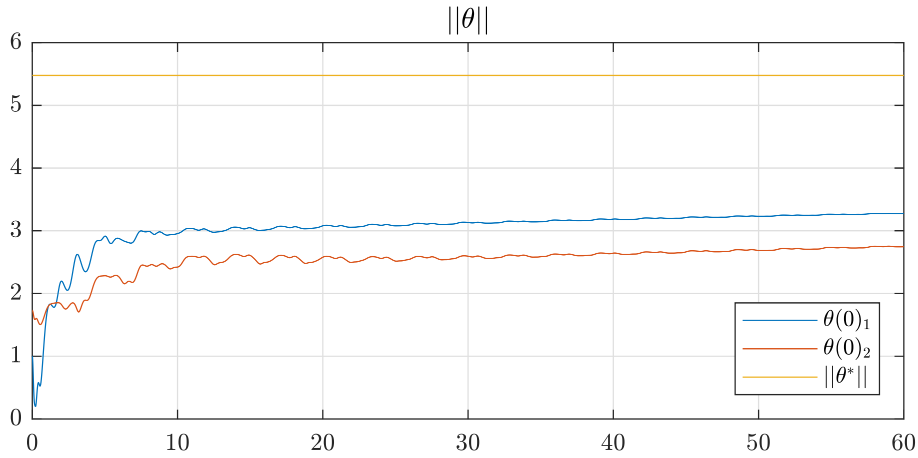
4.1 Simulação #1

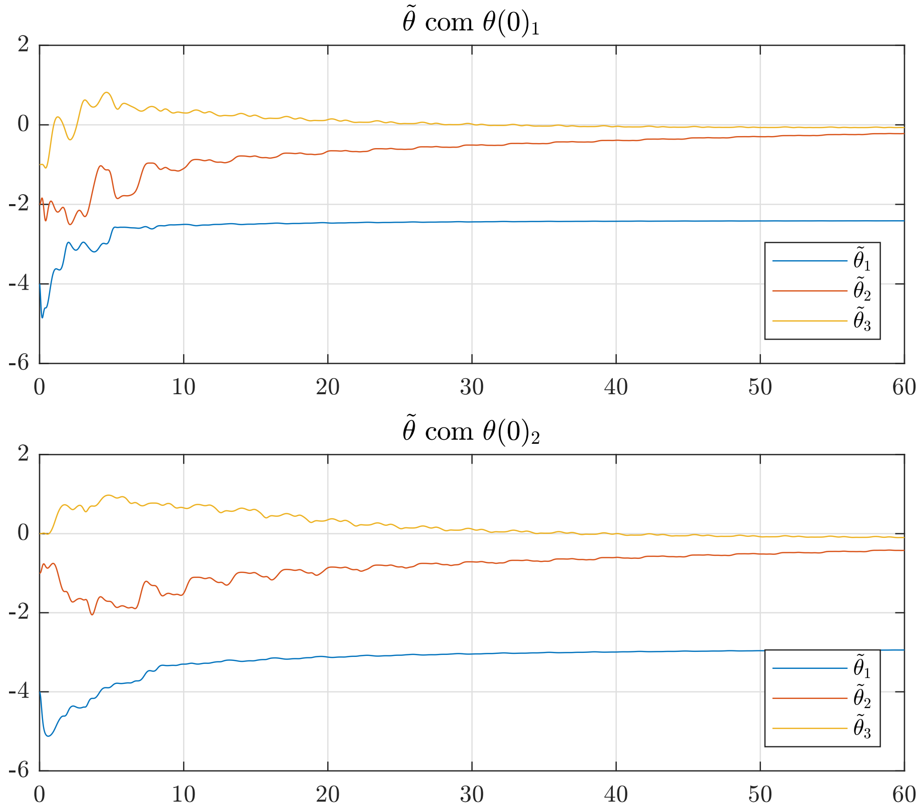
Inicialmente, desejamos verificar o comportamento do sistema para variações nas condições iniciais.

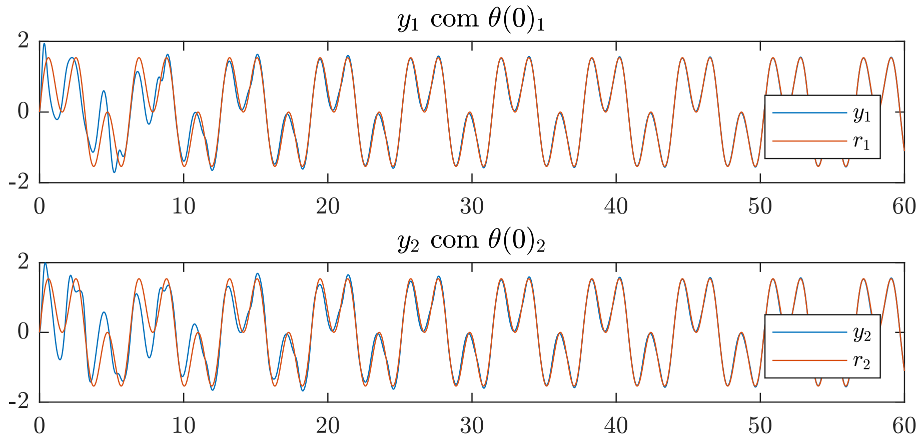
Simulação 1.1: $\theta(0)$

$$y = \frac{5}{s^2+2s+1}u\,, \qquad \theta(0) = 0 \text{ e } 1\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad \Gamma = 1\,\mathbf{I}_3\,,$$
$$y_r = \sin(t) + \sin(3t)\,.$$





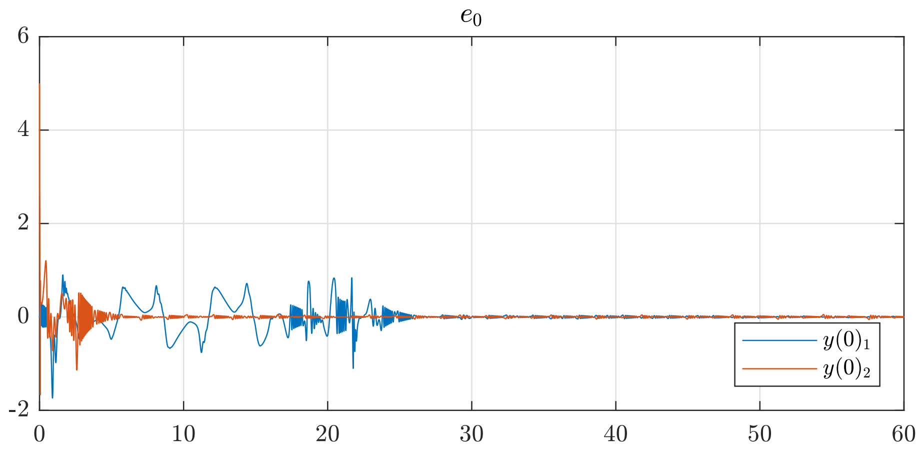


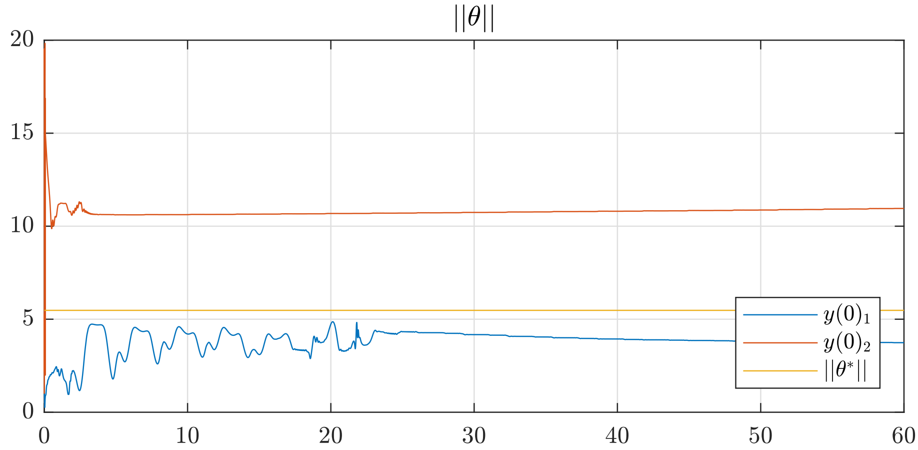


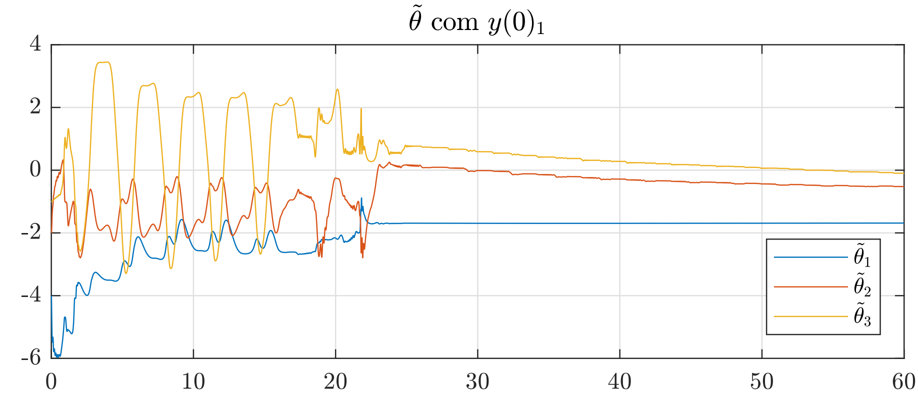
Simulação 1.2: $y(0)$

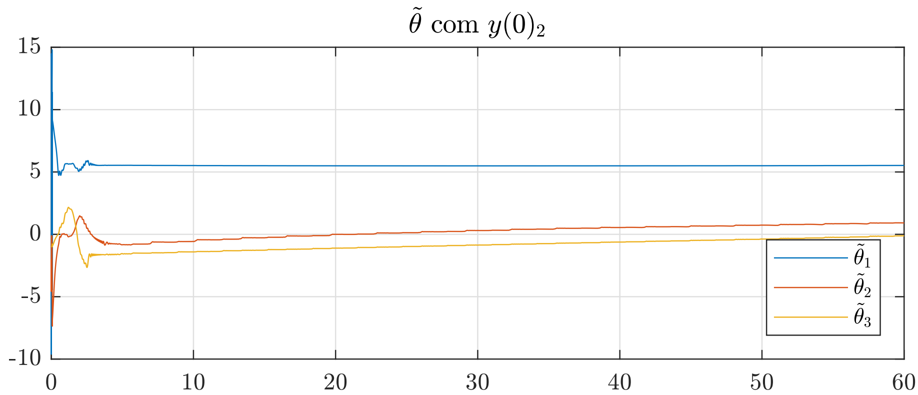
$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1} u\,, \qquad \theta(0) = 0\,, \qquad y(0) = 0 \text{ e } 5\,, \qquad \Gamma = 1\,\mathbf{I}_3\,,$$

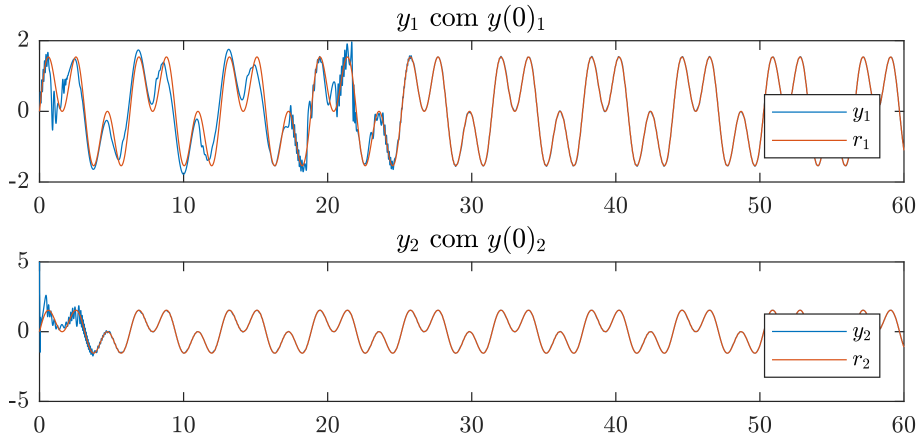
$$y_r = \sin(t) + \sin(3t)\,.$$


e_0
$y(0)_1$
$y(0)_2$


$||\theta||$
$y(0)_1$
$y(0)_2$
$||\theta^*||$


$\tilde{\theta}$ com $y(0)_1$
$\tilde{\theta}_1$
$\tilde{\theta}_2$
$\tilde{\theta}_3$


$\tilde{\theta}$ com $y(0)_2$
$\tilde{\theta}_1$
$\tilde{\theta}_2$
$\tilde{\theta}_3$

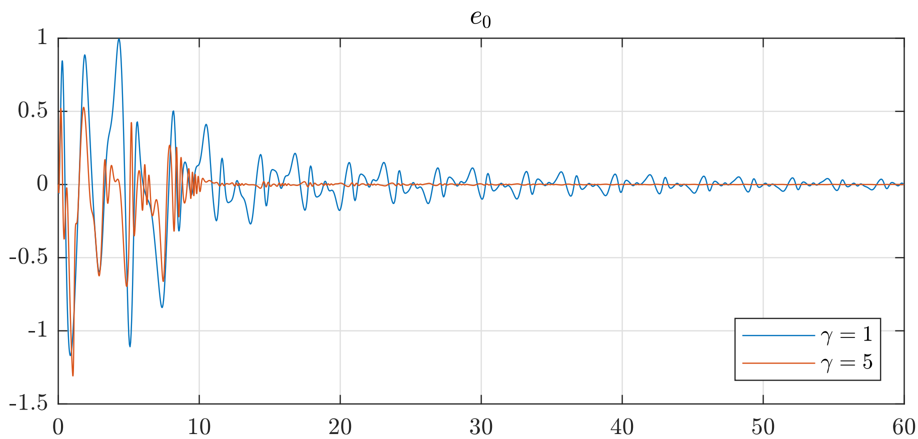


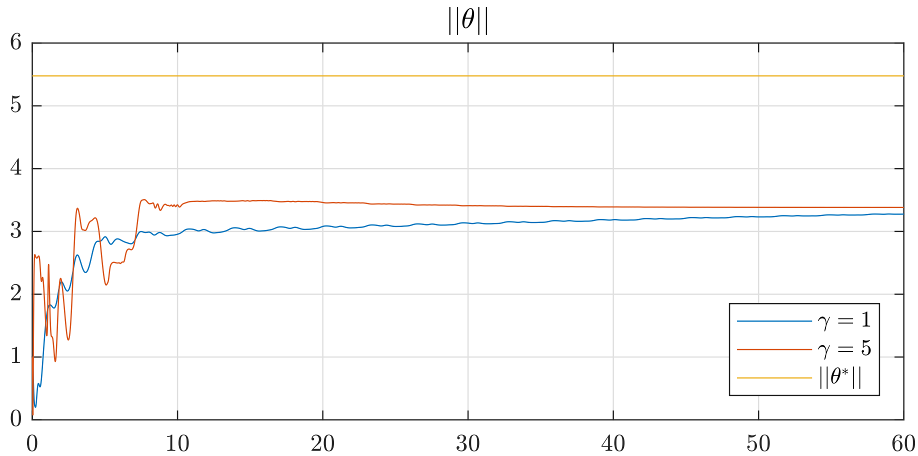
4.2 Simulação #2

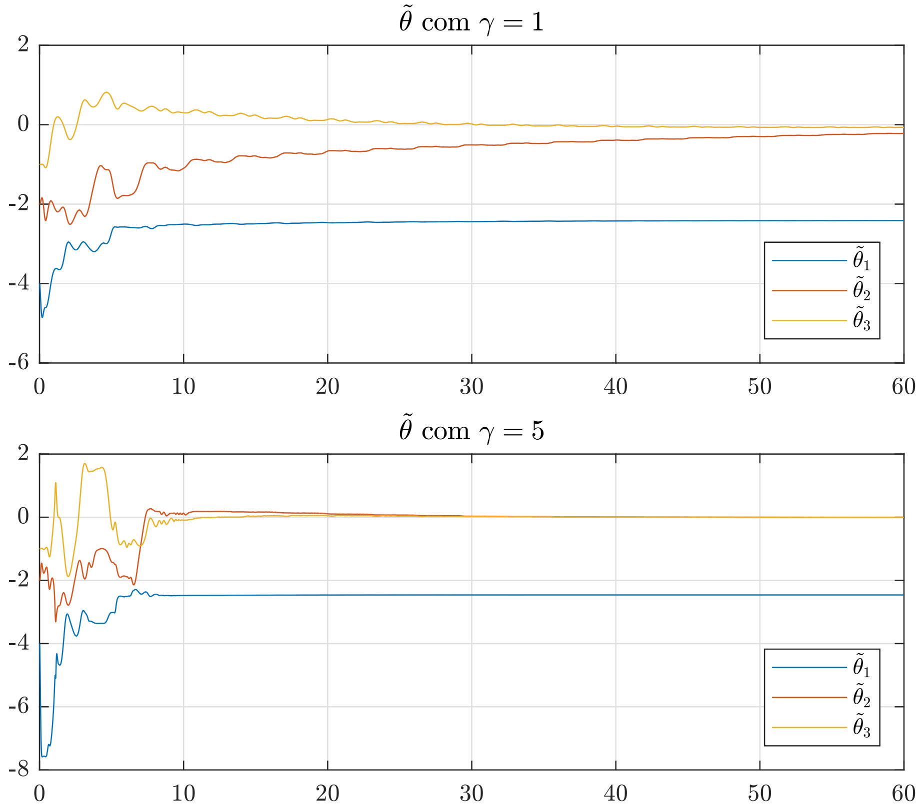
Verificamos o comportamento do sistema para variações no parâmetro de adaptação Γ.

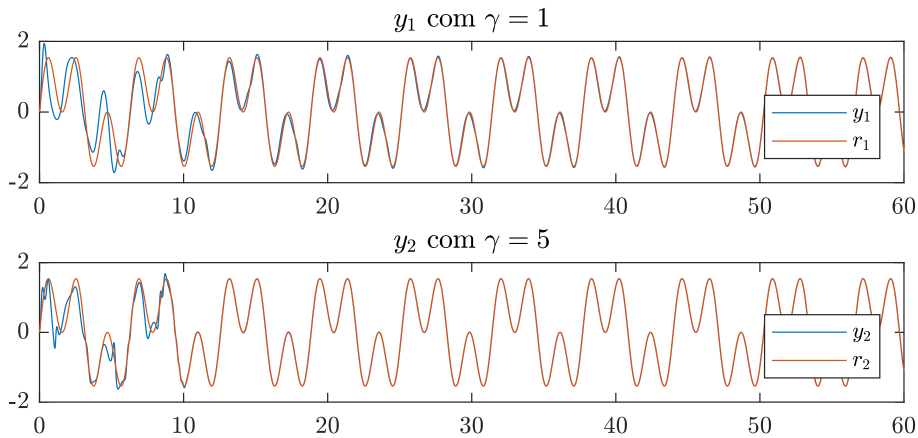
$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1} u \,, \qquad \theta(0) = 0 \,, \qquad y(0) = 0 \,, \qquad \Gamma = 1 \text{ e } 5 \, \mathbf{I}_3 \,,$$

$$y_r = \sin(t) + \sin(3t) \,.$$







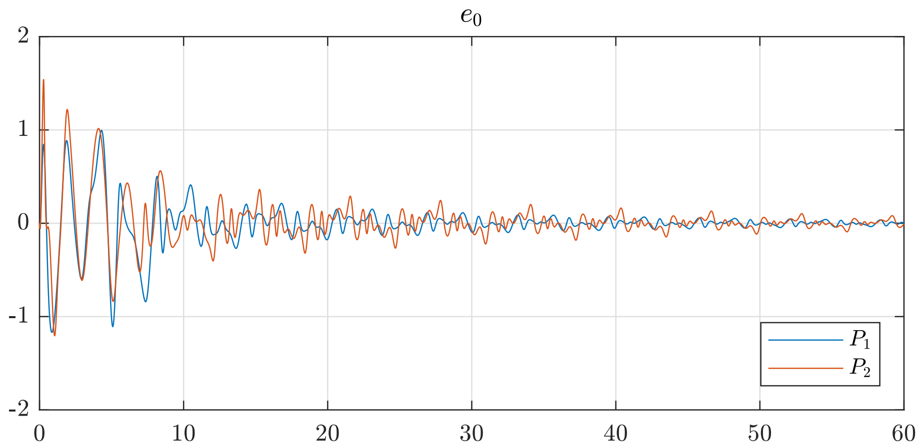


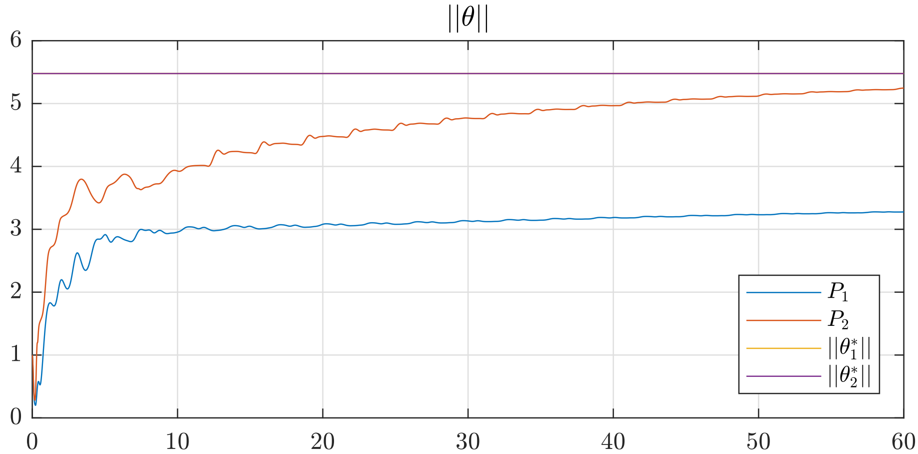
4.3 Simulação #3

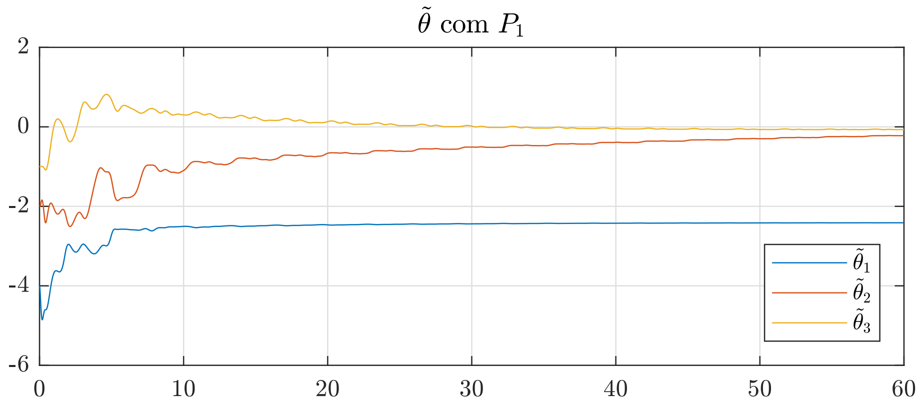
Verificamos o comportamento do sistema para variações na planta e modelo.

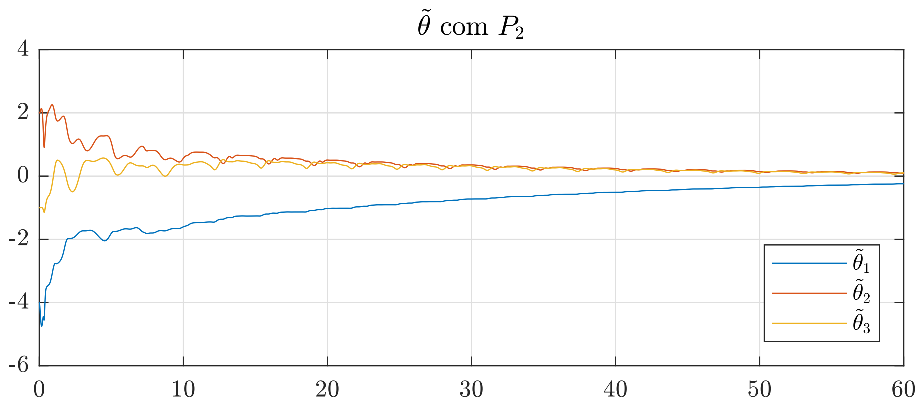
Simulação 3.1: planta

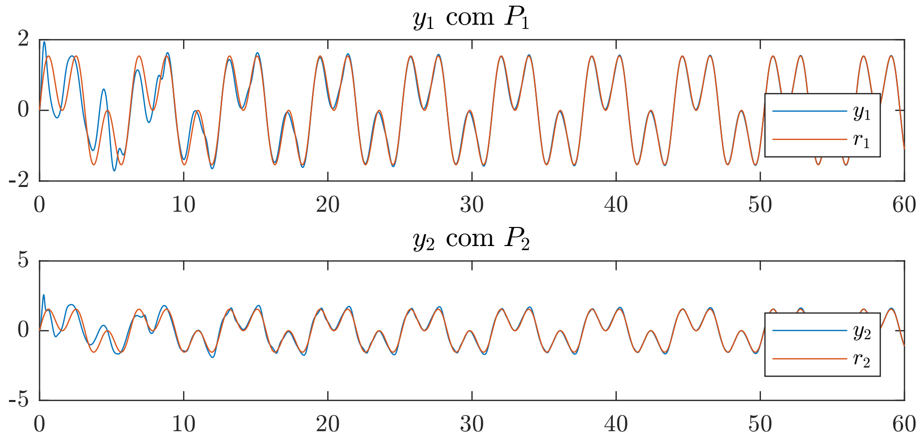
$$y = \frac{5}{s^2+2s+1} u \text{ e } \frac{5}{s^2-2s+1} u, \qquad \theta(0) = 0\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad \Gamma = 1\,\mathbf{I}_3\,,$$
$$y_r = \sin(t) + \sin(3t)\,.$$


e_0
P_1
P_2


$||\theta||$
P_1
P_2
$||\theta_1^*||$
$||\theta_2^*||$

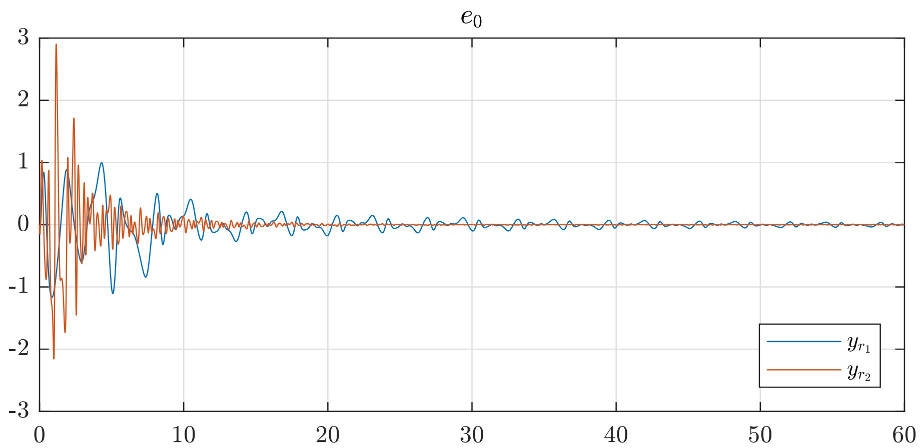

$\tilde{\theta}$ com P_1
$\tilde{\theta}_1$
$\tilde{\theta}_2$
$\tilde{\theta}_3$

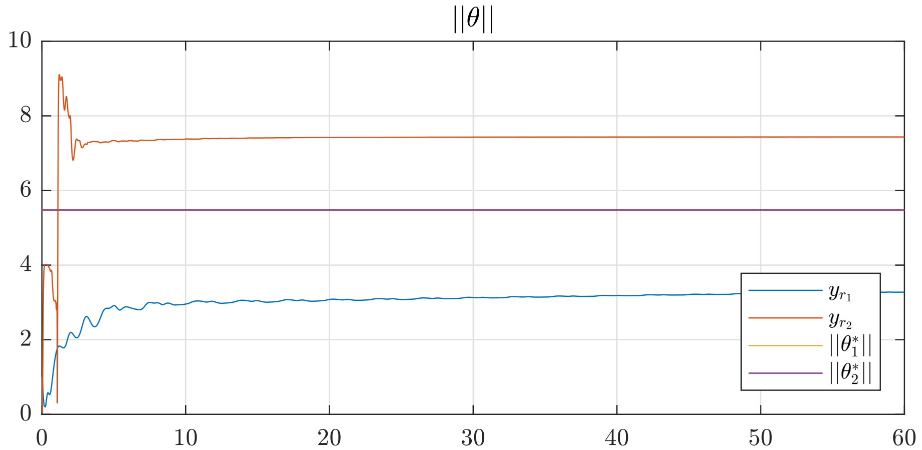

$\tilde{\theta}$ com P_2
$\tilde{\theta}_1$
$\tilde{\theta}_2$
$\tilde{\theta}_3$

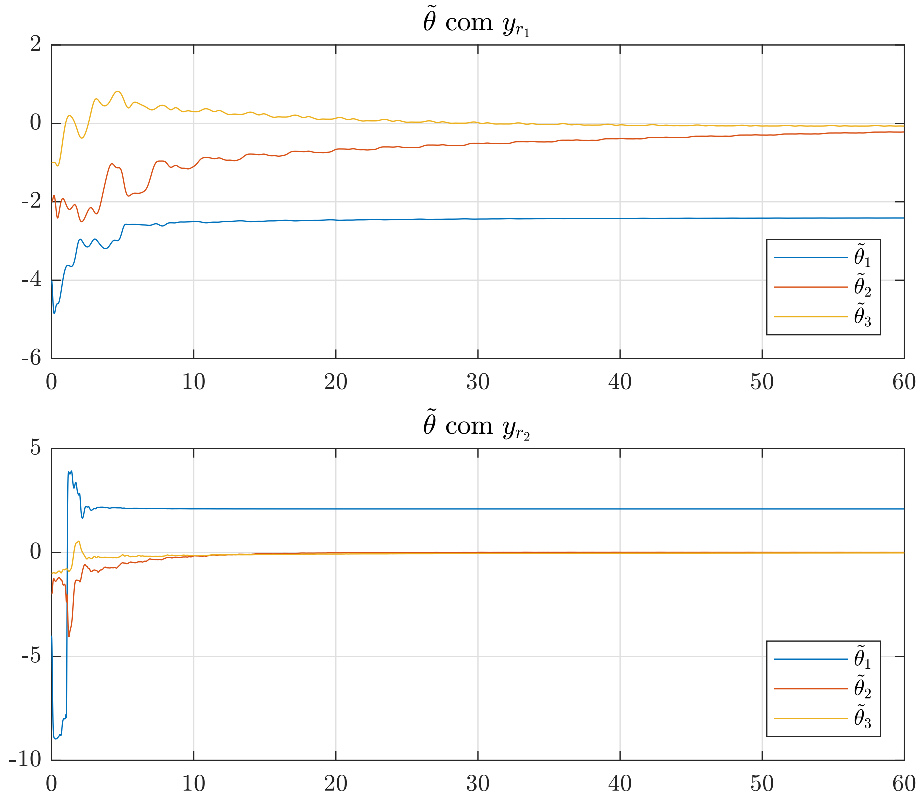


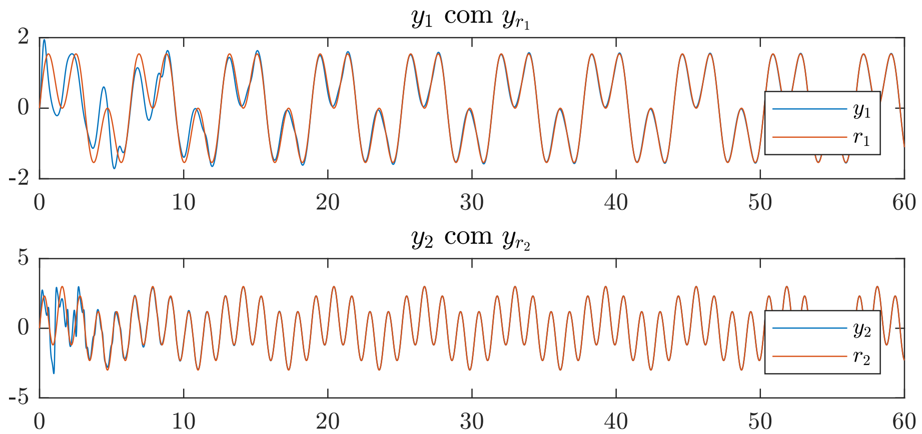
Simulação 3.2: modelo

$$y = \frac{5}{s^2+2s+1}u \qquad \theta(0) = 0\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad \Gamma = 1\,\mathbf{I}_3\,,$$
$$y_r = \sin(t) + \sin(3t)\,\mathrm{e}\,\sin(t) + 2\sin(5t).$$






$\tilde{\theta}$ com y_{r_1}
$\tilde{\theta}_1$
$\tilde{\theta}_2$
$\tilde{\theta}_3$
$\tilde{\theta}$ com y_{r_2}
$\tilde{\theta}_1$
$\tilde{\theta}_2$
$\tilde{\theta}_3$


y_1 com y_{r_1}
y_1
r_1
y_2 com y_{r_2}
y_2
r_2

5 Discussão

A **simulação #1** mostra o comportamento do sistema para variações nas condições iniciais. A rapidez da convergência depende de quão próximo os parâmetros estimados estão dos parâmetros reais. A simulação mostrou um comportamento semelhante para ambos os casos. Quando deslocamos o $y(0)$, na simulação 1.2, os sistemas também apresentam comportamento semelhante, pois a variável de controle u é alterada e não apresenta saturação, compensando a condição inicial.

A **simulação #2** mostra o comportamento do sistema para variações no ganho de adaptação Γ. Podemos verificar convergência mais rápida quando o Γ é maior, porém também observamos maiores oscilações e picos de erro.

A **simulação #3** mostra o comportamento do sistema para variações na planta. Escolhemnos plantas instáveis e estáveis. Podemos observar que, em ambos os casos, o sinal de controle foi capaz de corrigir o erro, sem muitas dificuldades. O comportamento dos sistemas é semelhante. A alteração do modelo, na simulação 3.2, mostrou que modelos mais complexos, com frequências mais altas e maiores amplitudes, demoram mais para convergir.