COE-835 Controle adaptativo

Trabalho 8

Grupo: Guilherme Pires Sales de Carvalho
Matheus Ferreira dos Reis
Renan Salles de Freitas

Algoritmo: Indirect Adaptive Backstepping Control (Reduced Order Observer)

Caso: $n = 2$ (ordem da planta)
$n^* = 2$ (grau relativo)
$n_p = 3$ (# de parâmetros)

Conteúdo

1 Backstepping - Observador de ordem reduzida

Este trabalho visa complementar o trabalho 7, modificando o observador completo por um observador de ordem reduzida, também chamado de *observador de Luenberger*. A formulação teórica passa pela ideia geral de um observador de ordem reduzida, exemplifica para o caso do sistema de segunda ordem deste trabalho ($n = 2$, $n^* = 2$) e, por último, desenvolvemos o algoritmo backstepping para este observador.

Considere uma planta descrita pelo seguinte sistema em espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1}$$

Suponha que os primeiros m estados podem ser obtidos diretamente pela medida da saída do sistema, ou seja, o sistema pode ser paticionado em:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \\ y &= C_1x_1 \, , \end{aligned} \tag{2}$$

com $x_1 = C_1^{-1}y$, $x_1 \in \mathbb{R}^m$. Um observador de ordem reduzida pode ser usado para estimar os estados $x_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ faltantes. Define-se:

$$\chi = x_2 + Ny \tag{3}$$

Pode-se demonstrar que a dinâmica de χ é descrita como:

$$\begin{aligned} \chi &= Q\chi + Ry + Su \\ Q &= A_{22} + NC_1A_{12} \\ R &= -QN + (A_{21} + NC_1A_{11})C_1^{-1} \\ S &= B_2 + NC_1B_1 \end{aligned} \tag{4}$$

Para verificar, derivamos a equação (3) e obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} =& \dot{x}_2 + NC_1\dot{x}_1 \\ =& (A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u) + NC_1(A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u) \\ =& (A_{22} + NC_1A_{12})x_2 + (A_{21} + NC_1A_{11})x_1 + (B_2 + NC_1B_1)u \\ =& (A_{22} + NC_1A_{12})x_2 + (A_{22} + NC_1A_{12})Ny - (A_{22} + NC_1A_{12})Ny + (A_{21} + NC_1A_{11})x_1 + \cdots \\ & \cdots + (B_2 + NC_1B_1)u \\ =& (A_{22} + NC_1A_{12})(x_2 + Ny) - (A_{22} + NC_1A_{12})Ny + (A_{21} + NC_1A_{11})C_1^{-1}y + (B_2 + NC_1B_1)u \\ =& Q\chi + \left[-QN + (A_{21} + NC_1A_{11})C_1^{-1}\right] y + Su \\ =& Q\chi + Ry + Su \end{aligned} \tag{5}$$

■

Neste trabalho, consideramos o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - a_1y \\ \dot{x}_2 &= k_p\,u - a_0y \end{aligned} \tag{6}$$

onde o vetor de parâmetros $\theta^\intercal = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & k_p \end{bmatrix}$ é desconhecido. Para esta formulação apenas a saída do sistema y está disponível, logo x_2 não é conhecido e deve ser estimado. Podemos reescrever o sistema (6):

$$\dot{x} = Ax + F(y,u)^\intercal\theta \tag{7}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \;\; F(y,u)^\intercal = \begin{bmatrix} B(u) & \Phi(y) \end{bmatrix}, \;\; \Phi(y) = \begin{bmatrix} -y & 0 \\ 0 & -y \end{bmatrix}, \;\; B(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}, \;\; \theta = \begin{bmatrix} k_p \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}, \;\; y = e_1^\intercal x,$$

em que $e_1^\intercal = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$. No trabalho 7, para estimar os estados, utilizamos os filtros abaixo:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A_0\xi + ky \\ \dot{\Omega}^\intercal &= A_0\Omega^\intercal + F^\intercal\end{aligned} \tag{8}$$

$$k^\intercal = \begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix} \qquad A_0 = A - ke_1^\intercal = \begin{bmatrix}-k_1 & 1 \\ -k_2 & 0\end{bmatrix}$$

Os valores de k devem ser escolhidos de forma que A_0 seja Hurwitz. E, dessa forma, o estado estimado é escrito como:

$$\hat{x} = \xi + \Omega^\intercal\theta\,, \tag{9}$$

e como no trabalho 7, verifica-se que a dinâmica do estimador é igual à dinâmica da planta (6).

Para o caso do observador de ordem reduzida, define-se:

$$\chi = x_2 + Ny \tag{10}$$

E derivando, obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{\chi} &= (-a_0y + k_pu) + N(x_2 - a_1y) \\ &= Nx_2 - (a_0 + Na_1)y + k_pu \\ &= N(\chi - Ny) - (a_0 + Na_1)y + k_pu \\ &= N\chi - N^2y + F^\intercal\theta\,,\end{aligned} \tag{11}$$

$$F^\intercal = [u \quad -Ny \quad -y]$$

Para o sistema de ordem reduzida, os filtros são:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= N\xi - N^2y \\ \dot{\Omega}^\intercal &= N\Omega^\intercal + F^\intercal \\ N &< 0\end{aligned} \tag{12}$$

Com isso, o estado estimado será:

$$\hat{\chi} = \xi + \Omega^\intercal\theta \tag{13}$$

Para verificar, obtemos a derivada de $\hat{\chi}$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\chi}} &= \dot{\xi} + \dot{\Omega}^\intercal\theta \\ &= (N\xi - N^2y) + (N\Omega^\intercal + F^\intercal)\theta \\ &= N(\xi + \Omega^\intercal\theta) - N^2y + F^\intercal\theta\end{aligned}$$

$$\dot{\hat{\chi}} = N\hat{\chi} - N^2y + F^\intercal\theta \tag{14}$$

Porém, Ω é uma matriz e opta-se pela redução das ordens dos filtros. Observe que $\Omega^\intercal = \begin{bmatrix}v_0 & | & \Xi\end{bmatrix}$ e, pela equação (12), temos que:

$$\dot{v}_0 = Nv_0 + u \tag{15}$$

$$\dot{\Xi} = N\Xi + \begin{bmatrix}-N & -1\end{bmatrix} y \tag{16}$$

Introduzem-se dois novos filtros, para substituir os filtros da equação (12):

$$\dot{\lambda} = N\lambda + u \tag{17}$$

$$\dot{\eta} = N\eta + y \tag{18}$$

É fácil verificar que, para esta planta de segunda ordem sem zeros ($m = 0$), $v_0 = \lambda$. Agora, vamos demonstrar que:

$$\Xi = -\begin{bmatrix} N\eta & \eta \end{bmatrix} \tag{19}$$

Derivando (19), temos:

$$\begin{aligned}
\dot{\Xi} &= -\begin{bmatrix} N\dot{\eta} & \dot{\eta} \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} N^2\eta + Ny & N\eta + y \end{bmatrix} \\
&= -N\begin{bmatrix} N\eta & \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -N & -1 \end{bmatrix} y \\
&= N\Xi + \begin{bmatrix} -N & -1 \end{bmatrix} y \,,
\end{aligned}$$

e assim chegamos na equação (16). Também temos a relação:

$$\xi = -N^2\eta \tag{20}$$

Derivando a equação (20), obtemos:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= -N^2(N\eta + y) \\
&= N(-N^2\eta - y) = N\xi - N^2 y \,,
\end{aligned}$$

e assim chegamos na equação (12). O projeto backstepping agora segue como no trabalho anterior. Primeiro, fazemos a mudança de coordenadas em $\mathbf{z}$:

$$\begin{aligned}
z_1 &= y - y_r \\
z_2 &= v_0 - \alpha_1 - \hat{\rho}\dot{y}_r \,,
\end{aligned} \tag{21}$$

onde ρ é estimativa de $\frac{1}{k_p}$. O controle virtual α_1, a lei de controle u e as leis de adaptação $\dot{\theta}$ e $\dot{\rho}$ são obtidas pelo método de Lyapunov. Note que os estados são:

$$\begin{aligned}
x_1 &= y \\
x_2 &= \chi - Ny
\end{aligned}$$

Pelo modelo da planta em (2), temos:

$$\dot{y} = \chi - Ny - e_1^\intercal a y \,.$$

Definindo $\epsilon = \chi - \hat{\chi}$ e aplicando (13), encontramos:

$$\dot{y} = \xi + \Omega^\intercal\theta + \epsilon - Ny - e_1^\intercal a y \,.$$

Agora, expandindo $\Omega^\intercal = \begin{bmatrix} v_0 & | & \Xi \end{bmatrix}$ e definindo $\omega^\intercal = \begin{bmatrix} v_0 & (\Xi - y e_1^\intercal) \end{bmatrix}$ e $\bar{\omega}^\intercal = \begin{bmatrix} 0 & (\Xi - y e_1^\intercal) \end{bmatrix}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \xi + \omega^\intercal\theta + \epsilon \text{ -Ny} \,, \\
\dot{y} &= \xi + \bar{\omega}^\intercal\theta + \epsilon \text{ -Ny} + k_p v_0 \,.
\end{aligned}$$

Note a presença do termo $-Ny$, que não aparecia no observador de ordem completa. Do mesmo modo que no método com observador completo, derivando $z_1 = y - y_r$, tem-se:

$$\dot{z}_1 = k_p\alpha_1 + \xi + \bar{\omega}^\intercal\theta + \epsilon - k_p\tilde{\rho}\dot{y}_r + k_p z_2 - Ny \tag{22}$$

$$\alpha_1 = \hat{\rho}\bar{\alpha}_1 \tag{23}$$

$$\dot{z}_1 = \bar{\alpha}_1 + \xi + \bar{\omega}^\intercal\theta + \epsilon - k_p(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)\tilde{\rho} + k_p z_2 \text{ -Ny} \tag{24}$$

E escolhemos a primeira função estabilizante:

$$\bar{\alpha}_1 = -c_1 z_1 - d_1 z_1 - \xi - \bar{\omega}^\intercal \hat{\theta} \ \text{+Ny} \tag{25}$$

A dinâmica de z_1 pode ser reescrita como:

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 - d_1 z_1 + \epsilon + [\omega - \hat{\rho}(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)e_1]^\intercal \tilde{\theta} - k_p(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)\tilde{\rho} + \hat{k}_p z_2 \tag{26}$$

Escolhe-se a função de Lyapunov:

$$2V_1 = z_1^2 + \tilde{\theta}^\intercal \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + |k_p|\gamma^{-1}\tilde{\rho}^2 + \frac{1}{2d_1}\epsilon^\intercal P \epsilon \tag{27}$$

Nessas condições, é possível escolher a atualização de $\hat{\rho}$ segundo:

$$\dot{\hat{\rho}} = -\gamma z_1 \text{sign}(k_p)(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1) \tag{28}$$

Derivando z_2, obtemos:

$$\dot{z}_2 = \dot{v}_0 - \hat{\rho}\ddot{y}_r - \dot{\hat{\rho}}\dot{y}_r - \dot{\alpha}_1 \tag{29}$$

$$= u - \hat{\rho}\ddot{y}_r - \beta - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}(\omega^\intercal \tilde{\theta} + \epsilon) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} \tag{30}$$

$$\beta = -N v_0 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}(\xi + \omega^\intercal \hat{\theta} - Ny) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta}(N\eta + y) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r}\dot{y}_r + (\dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\rho}})\dot{\hat{\rho}} \tag{31}$$

Escolhe-se a função de Lyapunov:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{4d_2}\epsilon^\intercal P \epsilon \tag{32}$$

É possível mostrar que a atualização de parâmetros e a lei de controle são:

$$\dot{\hat{\rho}} = -\gamma z_1 \text{sign}(k_p)(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1) \tag{33}$$

$$\tau_1 = (\omega - \hat{\rho}(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)\begin{bmatrix} e_1^\intercal & 0 \end{bmatrix}^\intercal) z_1 \tag{34}$$

$$\tau_2 = \tau_1 - z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\omega \tag{35}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_2 \tag{36}$$

$$u = -c_2 z_2 + \beta + \hat{\rho}\ddot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}}\Gamma \tau_2 - d_2 z_2 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right)^2 - \hat{k}_p z_1 \tag{37}$$

2 Implementação

Para a implementação, só é preciso computar os filtros:

$$\dot{\lambda} = N\lambda + u \tag{38}$$

$$\dot{\eta} = N\eta + y \tag{39}$$

Temos ainda que $\alpha = \hat{\rho}(-c_1 z_1 - d_1 z_1 - \xi - \bar{\omega}^\intercal \hat{\theta} + Ny)$. Logo:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = -\hat{\rho}(c_1 + d_1 + \begin{bmatrix} 0 & -e_1^\intercal \end{bmatrix} \hat{\theta} - N) \tag{40}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta} = \hat{\rho} \left(N^2 + \begin{bmatrix} 0 & N & 1 \end{bmatrix} \hat{\theta} \right) \tag{41}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} = \hat{\rho}(c_1 + d_1) \tag{42}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} = -\hat{\rho}\bar{\omega}^\intercal \tag{43}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\rho}} = -(c_1 + d_1)(y - y_r) + N^2 \eta - \bar{\omega}^\intercal \hat{\theta} + Ny \tag{44}$$

```
%------------------------------------------------------------------------
%
%   COE-835   Controle adaptativo
%
%   Script para simular o trabalho 8
%
%   Backstepping  :  n  = 2     Second and third order plant
%                    n* = 2     Relative degree
%                    np = 3     Adaptive parameters
% Caso com observador de ordem reduzida
%------------------------------------------------------------------------

function dx = backstepping_red(t,x)

global A B thetas N c1 c2 d1 d2 Gamma gamma kp a w e1;

y           = x(1:2);
theta       = x(3:5);
lambda      = x(6);
eta         = x(7);
rho         = x(8);

%% Input
yr = a(1) * sin(w(1)*t) + a(2) * sin(w(2)*t);
dyr = a(1) * w(1) * cos(w(1)*t) + a(2) * w(2) * cos(w(2)*t);
ddyr = -a(1) * w(1)^2 * sin(w(1)*t) - a(2) * w(2)^2 * sin(w(2)*t);

Phi = [-y(1) 0;0 -y(1)];

%% Variables 1
xi = -N^2 * eta;
Xi = -[N*eta eta];
v1 = lambda(1);
omega_bar = [0, (Xi - y(1)*e1')]';
omega = [v1, (Xi - y(1)*e1')]';

%% Z
z1 = y(1) - yr;
alpha_bar = -c1*z1 - d1*z1 - xi - omega_bar'*theta + N*y(1);
alpha_1 = rho * alpha_bar;
z2 = v1 - rho*dyr - alpha_1;

%% Filtro eta
deta = N*eta + y(1);

```

```
%% dalpha/dt
dady = rho * (- c1 - d1 + [0,e1']*theta + N);
dadeta_deta = rho * (N^2 * deta + [0, N*deta, deta]*theta);
dadyr = rho*(c1 + d1);
dadtheta = - rho * omega_bar';
dadrho = -(c1 + d1)*(y(1) - yr) - xi - omega_bar'*theta + N*y(1);


%% Variables 2
tau_1 = (omega - rho*(dyr + alpha_bar)*[e1',0]')*z1;
tau_2 = tau_1 - z2 * (dady * omega);

%% Atualização dos parâmetros
dtheta = Gamma * tau_2;
drho = - gamma * z1 * sign(kp) * (dyr + alpha_bar);
beta = dady * (xi + omega'*theta - N*y(1)) + ...
    dadeta_deta + dadyr * dyr + (dyr + dadrho) * drho;
u = -N*v1 -c2*z2 + beta + rho*ddyr + dadtheta*dtheta - d2*z2*(dady)^2 - ...
    theta(1)*z1;

%% Filtros
dlambda = N*lambda + u;


%% Planta
F = [[0 1]'*u Phi];
dy = A*y + F*thetas;

%% Translation
dx = [dy' dtheta' dlambda' deta' drho]';
```

3 Resultados das simulações

Nas simulações, procuramos avaliar o comportamento do sistema para as seguintes condições: (i) condições iniciais $\theta(0)$ e $y(0)$; (ii) Parâmetros da planta e do modelo; (iii) ganho de adaptação Γ.

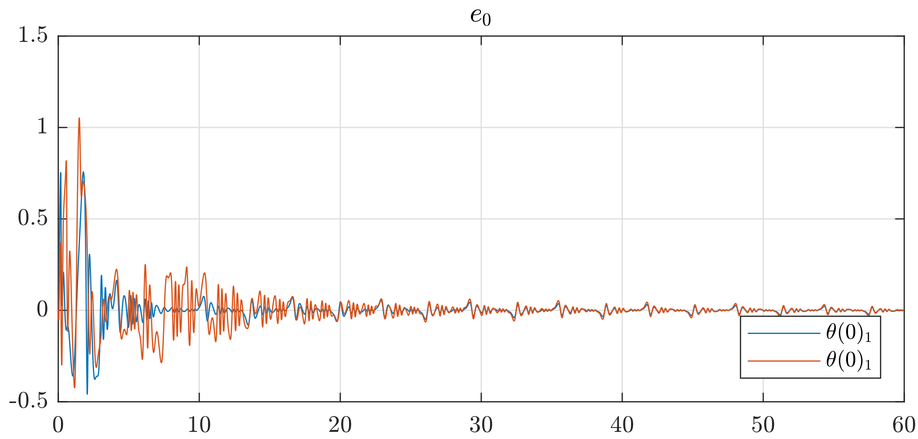
Apresentaremos os resultados obtidos através de simulações no ambiente `Matlab/Simulink` e os discutiremos na próxima seção. Para todos os casos $N = -1$.

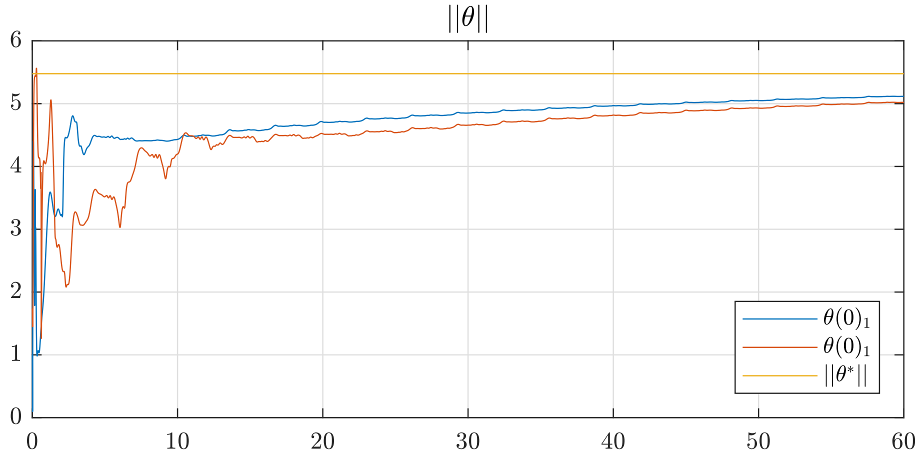
3.1 Simulação #1

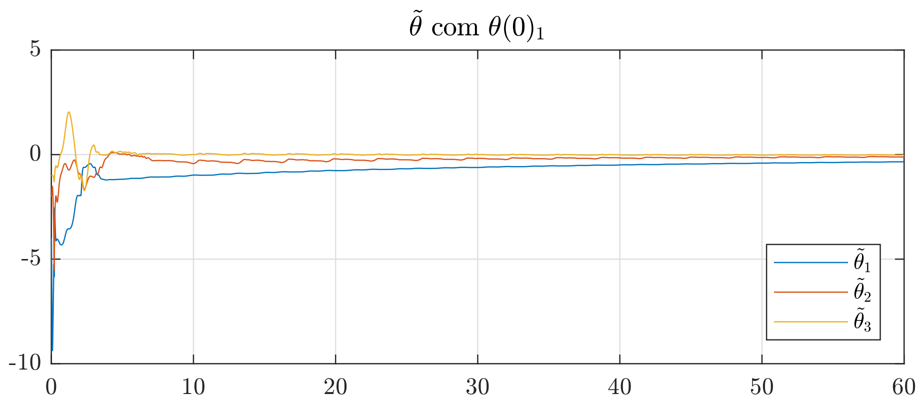
Inicialmente, desejamos verificar o comportamento do sistema para variações nas condições iniciais.

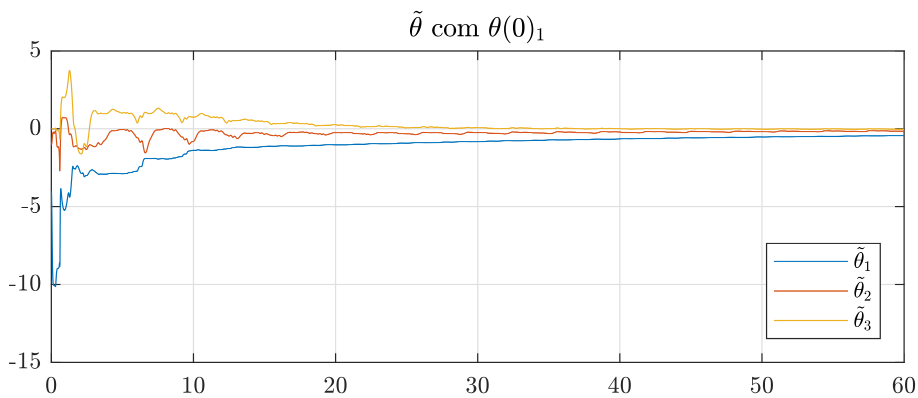
Simulação 1.1: $\theta(0)$

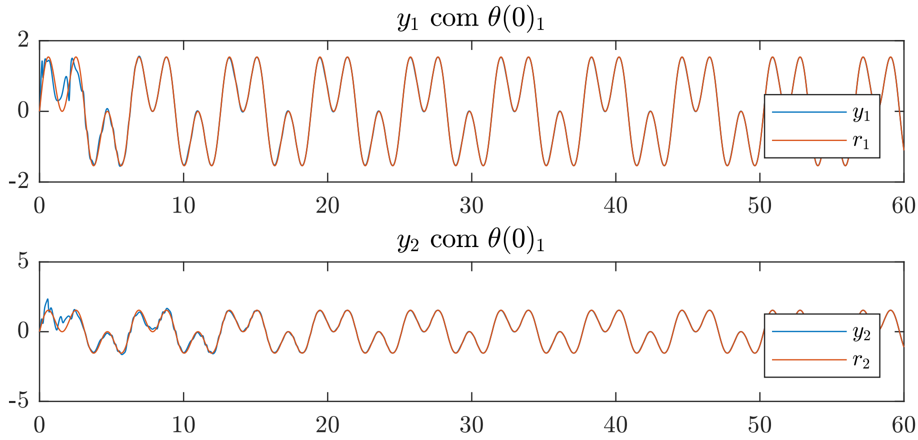
$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1}u\,, \qquad \theta(0) = 0 \text{ e } 1\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad \Gamma = 10\,\mathbf{I}_3\,,$$
$$y_r = \sin(t) + \sin(3t)\,.$$


e_0
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
10
20
30
40
50
60
$\theta(0)_1$
$\theta(0)_1$


$||\theta||$
6
5
4
3
2
1
0
0
10
20
30
40
50
60
$\theta(0)_1$
$\theta(0)_1$
$||\theta^*||$


$\tilde{\theta}$ com $\theta(0)_1$
5
0
-5
-10
0
10
20
30
40
50
60
$\tilde{\theta}_1$
$\tilde{\theta}_2$
$\tilde{\theta}_3$

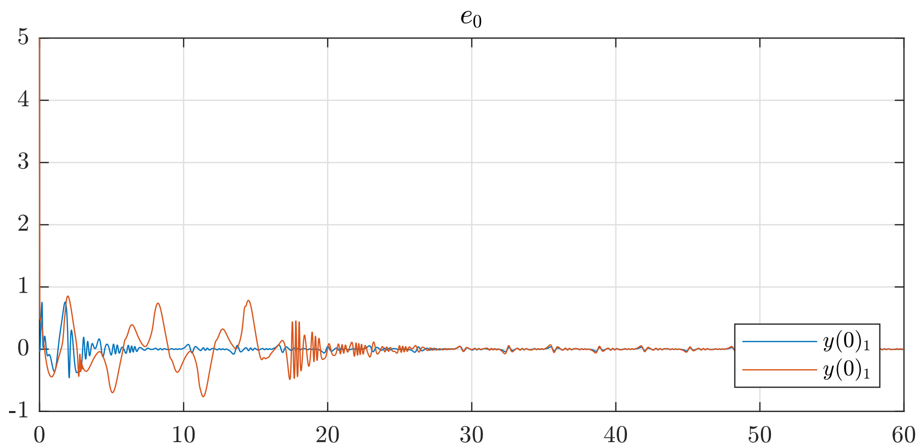

$\tilde{\theta}$ com $\theta(0)_1$
5
0
-5
-10
-15
0
10
20
30
40
50
60
$\tilde{\theta}_1$
$\tilde{\theta}_2$
$\tilde{\theta}_3$

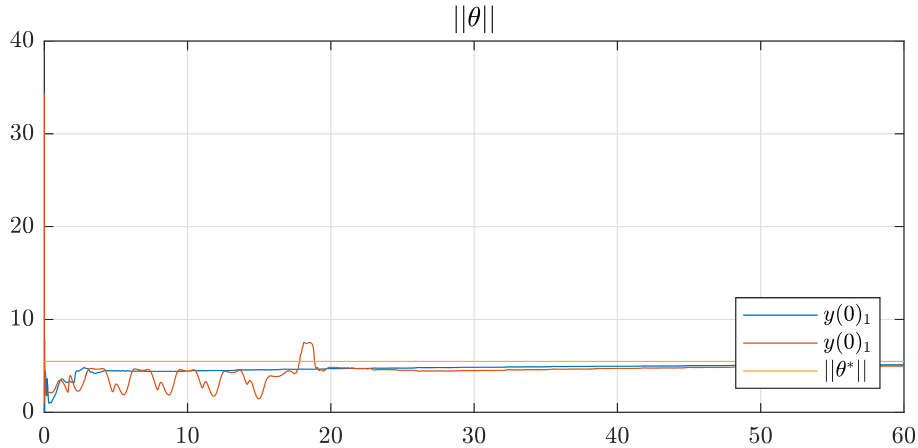


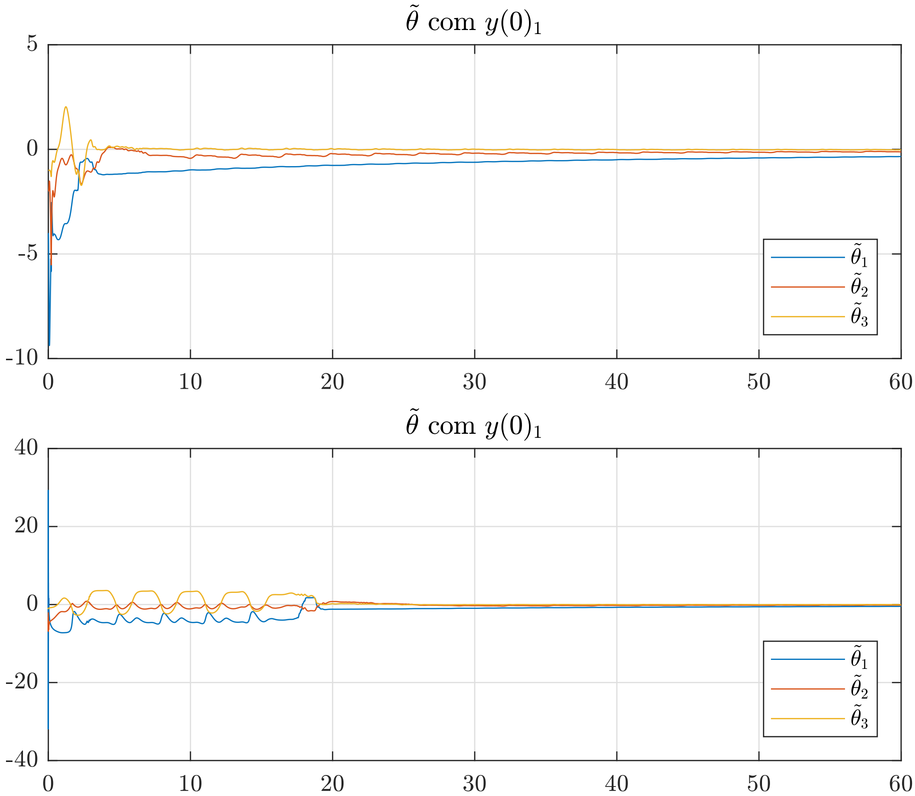
Simulação 1.2: $y(0)$

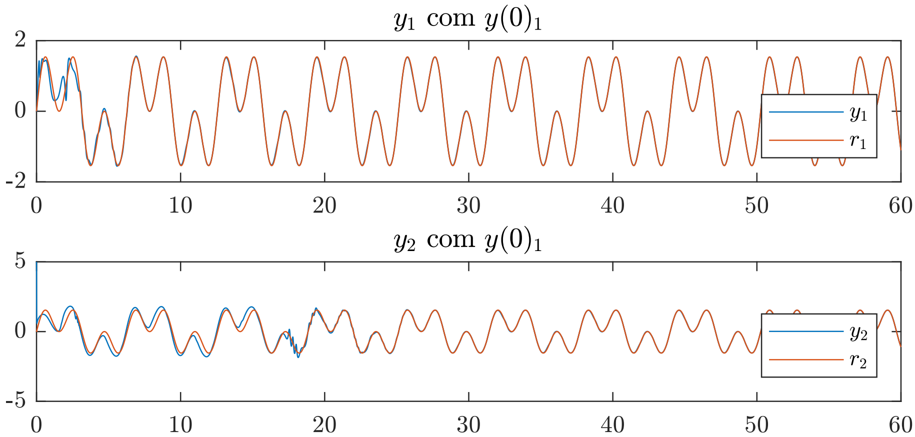
$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1} u \,, \qquad \theta(0) = 0 \,, \qquad y(0) = 0 \text{ e } 5 \,, \qquad \Gamma = 10\,\mathbf{I}_3 \,,$$

$$y_r = \sin(t) + \sin(3t) \,.$$









3.2 Simulação #2

Verificamos o comportamento do sistema para variações no parâmetro de adaptação Γ.

$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1} u \,, \qquad \theta(0) = 0 \,, \qquad y(0) = 0 \,, \qquad \Gamma = 1 \text{ e } 10 \, \mathbf{I}_3 \,,$$
$$y_r = \sin(t) + \sin(3t) \,.$$

figs/e0/sim0_gamma10gamma1-eps-converted-to.pdf

figs/modtheta/sim0_gamma10gamma1-eps-converted-to.pdf figs/tiltheta/sim0_gamma10gamma1-eps-converted-to.pdf

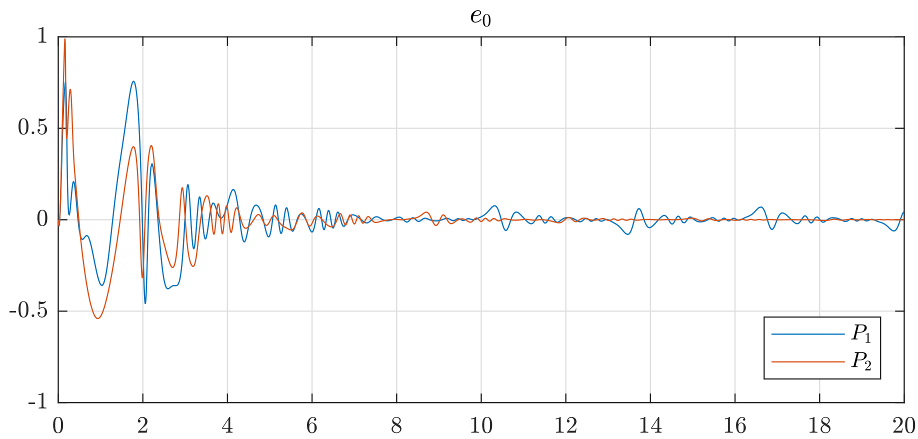
figs/y/sim0_gamma10gamma1-eps-converted-to.pdf

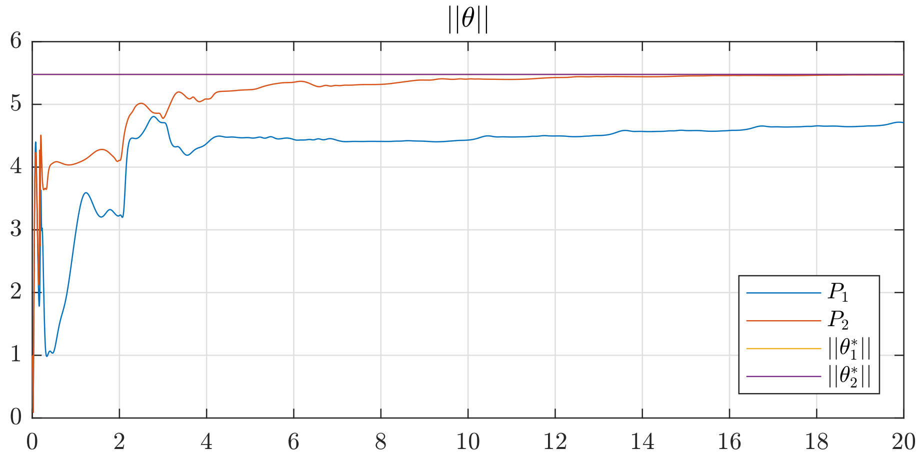
3.3 Simulação #3

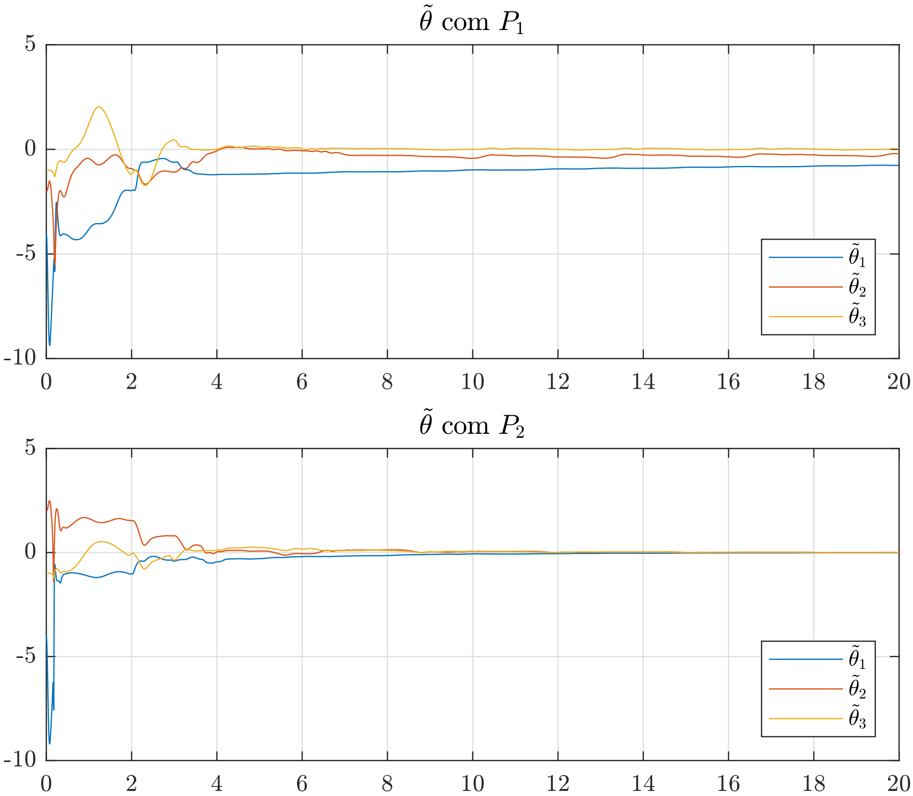
Verificamos o comportamento do sistema para variações na planta e modelo.

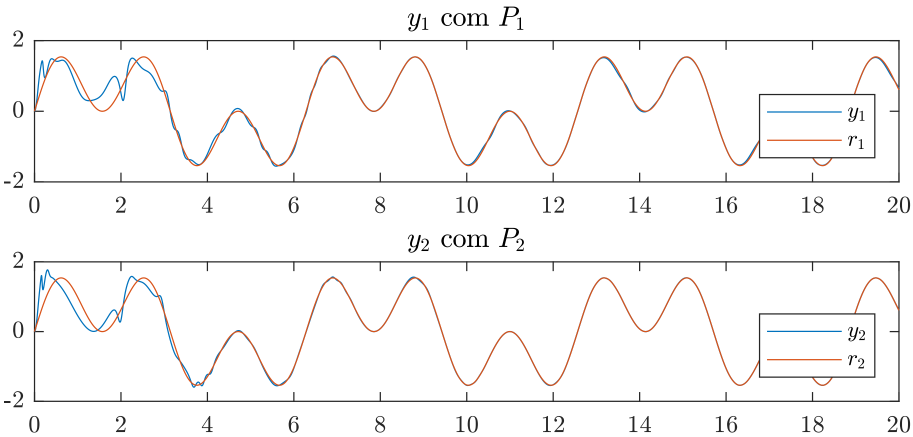
Simulação 3.1: planta

$$y = \frac{5}{s^2+2s+1}u \,\mathrm{e}\, \frac{5}{s^2-2s+1}u, \qquad \theta(0)=0\,, \qquad y(0)=0\,, \qquad \Gamma = 10\,\mathbf{I}_3\,,$$
$$y_r = \sin(t) + \sin(3t)\,.$$





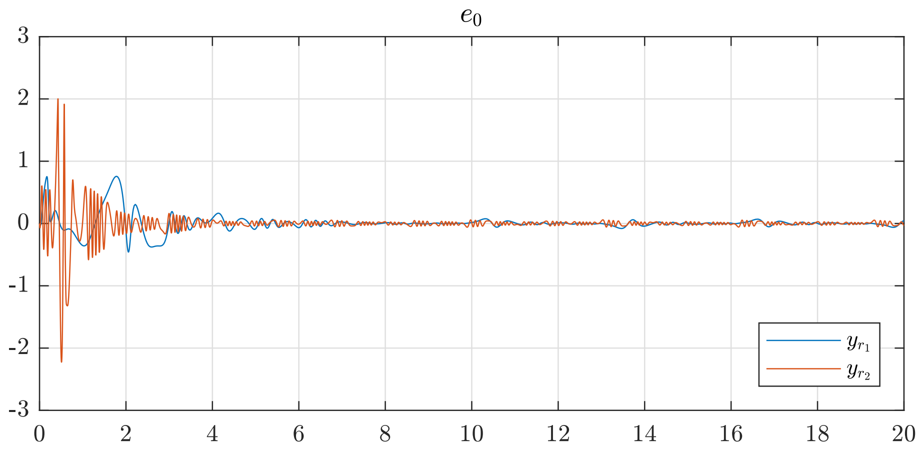


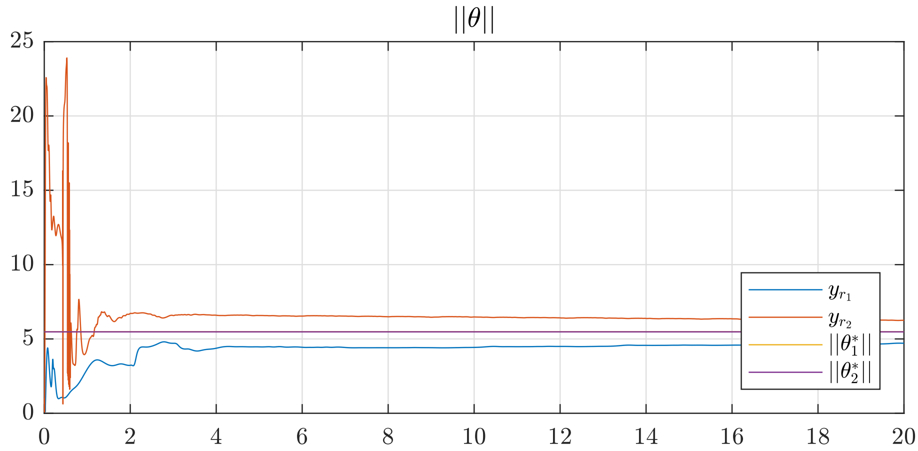


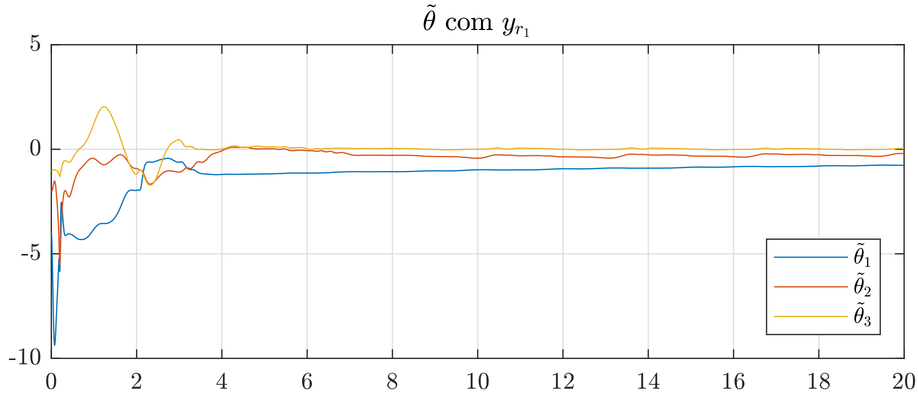
Simulação 3.2: modelo

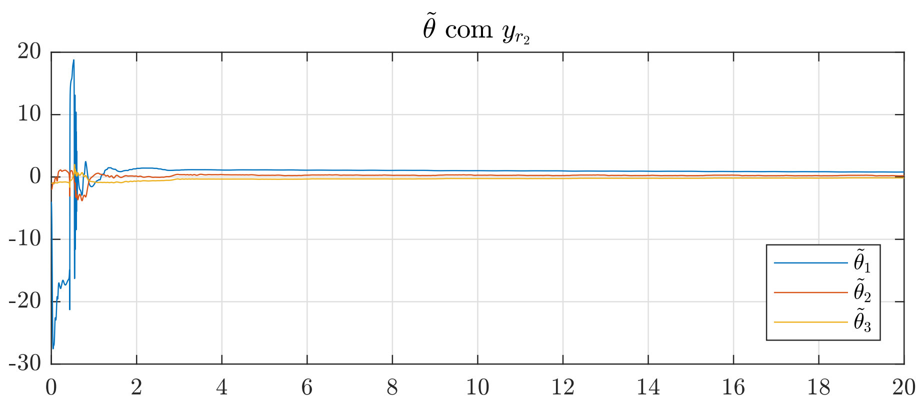
$$y = \frac{5}{s^2+2s+1}u \qquad \theta(0) = 0\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad \Gamma = 10\,\mathbf{I}_3\,,$$

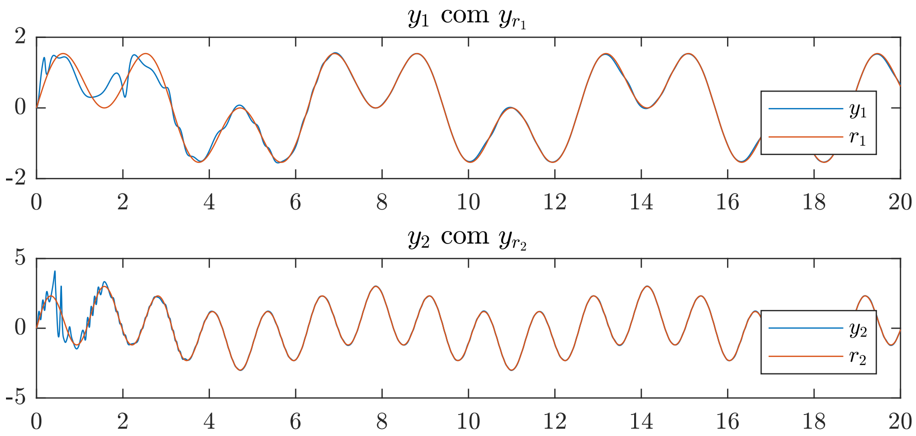
$y_r = \sin(t) + \sin(3t)$ e $\sin(t) + 2\sin(5t)$.


e_0
3
2
1
0
-1
-2
-3
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
y_{r_1}
y_{r_2}


$||\theta||$
25
20
15
10
5
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
y_{r_1}
y_{r_2}
$||\theta_1^*||$
$||\theta_2^*||$


$\tilde{\theta}$ com y_{r_1}
5
0
-5
-10
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
$\tilde{\theta}_1$
$\tilde{\theta}_2$
$\tilde{\theta}_3$


$\tilde{\theta}$ com y_{r_2}
20
10
0
-10
-20
-30
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
$\tilde{\theta}_1$
$\tilde{\theta}_2$
$\tilde{\theta}_3$


y_1 com y_{r_1}
2
0
-2
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
y_1
r_1
y_2 com y_{r_2}
5
0
-5
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
y_2
r_2

4 Discussão

A **simulação #1** mostra o comportamento do sistema para variações nas condições iniciais. A rapidez da convergência depende de quão próximo os parâmetros estimados estão dos parâmetros reais. A simulação mostrou um comportamento semelhante para ambos os casos. Quando deslocamos o $y(0)$, na simulação 1.2, os sistemas também apresentam comportamento semelhante, pois a variável de controle u é alterada e não apresenta saturação, compensando a condição inicial.

A **simulação #2** mostra o comportamento do sistema para variações no ganho de adaptação Γ. Podemos verificar convergência mais rápida quando o Γ é maior, porém também observamos maiores oscilações e picos de erro.

A **simulação #3** mostra o comportamento do sistema para variações na planta. Escolhemnos plantas instáveis e estáveis. Podemos observar que, em ambos os casos, o sinal de controle foi capaz de corrigir o erro, sem muitas dificuldades. O comportamento dos sistemas é semelhante. A alteração do modelo, na simulação 3.2, mostrou que modelos mais complexos, com frequências mais altas e maiores amplitudes, demoram mais para convergir.