COE-835 Controle adaptativo

Trabalho 8

Grupo: Guilherme Pires Sales de Carvalho
Matheus Ferreira dos Reis
Renan Salles de Freitas

Algoritmo: Adaptive Backstepping Control - Reduced Order Observer

Caso: $n = 2$ (ordem da planta)
$n^* = 2$ (grau relativo)
$n_p = 3$ (# de parâmetros)

Conteúdo

1 Backstepping - Observador de ordem reduzida

Este trabalho visa complementar o trabalho 7, modificando o observador completo por um observador de ordem reduzida, também chamado de observador de Luenberger. A formulação teórica passa pela ideia geral de um observador de ordem reduzida, exemplifica para o caso do sistema de segunda ordem deste trabalho e, por último, desenvolvemos o algoritmo backstepping para este observador e caso $n = 2$, $n^* = 2$.

Considere uma planta descrita pelo seguinte sistema em espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1}$$

Suponha que os primeiros m estados podem ser obtidos diretamente pela medida da saída do sistema, ou seja, o sistema pode ser paticioando:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \\ y &= C_1x_1 \end{aligned} \tag{2}$$

e $x_1 = C_1^{-1}y$. Um observador de ordem reduzida pode ser usado para estimar os $x_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ estados faltantes. Define-se:

$$\chi = x_2 + Ny \tag{3}$$

Pode-se demonstrar que a dinâmica de χ é descrita como:

$$\begin{aligned} \chi &= Q\chi + Ry + Su \\ Q &= A_{22} + NC_1A_{12} \\ R &= -QN + (A_{21} + NC_1A_{11})C_1^{-1} \\ S &= B_2 + NC_1B_1 \end{aligned} \tag{4}$$

Derivando a equação 3, obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \dot{x}_2 + NC_1\dot{x}_1 \\ &= (A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u) + NC_1(A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u) \\ &= (A_{22} + NC_1A_{12})x_2 + (A_{21} + NC_1A_{11})x_1 + (B_2 + NC_1B_1)u \\ &= (A_{22} + NC_1A_{12})x_2 + (A_{22} + NC_1A_{12})Ny - (A_{22} + NC_1A_{12})Ny + (A_{21} + NC_1A_{11})x_1 + (B_2 + NC_1B_1)u \\ &= (A_{22} + NC_1A_{12})(x_2 + Ny) - (A_{22} + NC_1A_{12})Ny + (A_{21} + NC_1A_{11})C_1^{-1}y + (B_2 + NC_1B_1)u \\ &= Q\chi + \left[-QN + (A_{21} + NC_1A_{11})C_1^{-1}\right] y + Su \\ &= Q\chi + Ry + Su \end{aligned} \tag{5}$$

Neste trabalho, consideramos o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - a_1y \\ \dot{x}_2 &= k_p\,u - a_0y \end{aligned} \tag{6}$$

onde os parâmetros a_1, a_0 e k_p são desconehcidos. Para esta formulação apenas a saída do sistema y está disponível, portanto x_2 não é conhecido e deve ser estimado. Podemos reescrever o sistema 6:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax - F(y,u)^{\intercal}\theta \\
A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F(y,u)^{\intercal} = \begin{bmatrix} B(u) & \Phi(y) \end{bmatrix}, \Phi(y) = \begin{bmatrix} -y & 0 \\ 0 & -y \end{bmatrix}, B(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} k_p \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \\
y &= e_1^{\intercal} x \\
e_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

No trabalho 7, para estimar os estados, utilizamos os filtros abaixo:

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi} &= A_0\xi + ky \qquad (8) \\
\dot{\Omega}^{\intercal} &= A_0\Omega^{\intercal} + F^{\intercal} \\
k &= \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}, A_0 = A - ke_1^{\intercal} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Os valores de k devem ser escolhidos de forma que A_0 seja Hurwitz. E, dessa forma, o estado estimado pode ser escrito como:

$$
\hat{x} = \xi + \Omega^{\intercal}\theta \tag{9}
$$

Como no trabalho 7, verifica-se que a dinâmica do estimador é igual à dinâmica da planta 6.

Para o caso do observador de ordem reduzida, define-se:

$$
\chi = x_2 + Ny \tag{10}
$$

E derivando, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\dot{\chi} &= (-a_0y + k_pu) + N(x_2 - a_1y) \qquad (11) \\
&= Nx_2 - (a_0 + Na_1)y + k_pu \\
&= N(\chi - Ny) - (a_0 + a_1)y + k_pu \\
&= N\chi - N^2y + F^{\intercal}\theta \\
F^{\intercal} &= [u \quad -Ny \quad -y], \theta = [k_p \quad a_1 \quad a_0]^{\intercal}
\end{aligned}
$$

Para o sistema de ordem reduzida, os filtros são:

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi} &= N\xi - N^2y \qquad (12) \\
\dot{\Omega}^{\intercal} &= N\Omega^{\intercal} + F^{\intercal} \\
N &< 0
\end{aligned}
$$

E o estado estimado será:

$$\begin{aligned}
\hat{\chi} &= \xi + \Omega^\intercal\theta && (13)\\
\dot{\hat{\chi}} &= \dot{\xi} + \Omega^\intercal\theta && (14)\\
&= (N\xi - N^2 y) + (N\Omega^\intercal + F^\intercal)\theta\\
&= N(\xi + \Omega^\intercal\theta) - N^2 y + F^\intercal\theta\\
\dot{\hat{\chi}} &= N\hat{\chi} - N^2 y + F^\intercal\theta && (15)
\end{aligned}$$

Porém, Ω é uma matriz e opta-se pela redução das ordens dos filtros. Observe que $\Omega^\intercal = [v_0 \quad | \quad \Xi]$ e, pela equação 12, temos que:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_0 &= N v_0 + u && (16)\\
\dot{\Xi} &= N\Xi + \begin{bmatrix}-N & -1\end{bmatrix} y && (17)
\end{aligned}$$

Introduzem-se dois novos filtros, para substituir os filtros da equação 12:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= N\lambda + u && (18)\\
\dot{\eta} &= N\eta + y && (19)
\end{aligned}$$

É fácil verificar que, para esta planta de segunda ordem sem zeros ($m = 0$), $v_0 = \lambda$.

Agora vamos demonstrar que:

$$\Xi = -\left[N\eta \quad \eta\right] \qquad (20)$$

Derivando 20, temos:

$$\begin{aligned}
\dot{\Xi} &= -\left[N\dot{\eta} \quad \dot{\eta}\right]\\
&= -\left[N^2\eta + Ny \quad N\eta + y\right]\\
&= -N\left[N\eta \quad \eta\right] + \left[-N \quad -1\right] y\\
&= N\Xi + \left[-N \quad -1\right] y
\end{aligned}$$

E assim chegamos na equação 17. Também temos a relação:

$$\xi = -N^2\eta \qquad (21)$$

Derivando a equação 21, obtemos:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= -N^2(N\eta + y)\\
&= N(-N^2\eta - y) = N\xi - N^2 y
\end{aligned}$$

E assim chegamos na equação 12. O projeto backstepping agora segue como no trabalho anterior. Primeiro, fazemos a mudança de coordenadas em $\mathbf{z}$:

$$\begin{aligned}
z_1 &= y - y_r && (22)\\
z_2 &= v_0 - \alpha_1 - \hat{\rho}\dot{y}_r
\end{aligned}$$

onde ρ é estimativa de $\frac{1}{k_p}$. O controle virtual α_1, a lei de controle u e as leis de adaptação $\dot{\theta}$ e $\dot{\rho}$ são obtidas pelo método de Lyapunov. Derivando z_1, obtemos:

$$\dot{z}_1 = k_p\alpha_1 + \xi + \bar{\omega}^\intercal\theta + \epsilon - k_p\tilde{\rho}\dot{y}_r + k_p z_2 - Ny \tag{23}$$
$$\alpha_1 = \hat{\rho}\bar{\alpha}_1 \tag{24}$$
$$\dot{z}_1 = \bar{\alpha}_1 + \xi_2 + \bar{\omega}^\intercal\theta + \epsilon_2 - k_p(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)\tilde{\rho} + k_p z_2 - Ny \tag{25}$$

E escolhemos a primeira função estabilizante:

$$\bar{\alpha}_1 = -c_1 z_1 - d_1 z_1 - \xi_2 - \bar{\omega}^\intercal\hat{\theta} + Ny \tag{26}$$

A dinâmica de z_1 pode ser reescrita como:

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 - d_1 z_1 + \epsilon_2 + [\omega - \hat{\rho}(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)e_1]^\intercal\,\tilde{\theta} - k_p(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)\tilde{\rho} + \hat{k}_p z_2 \tag{27}$$

Escolhe-se a função de Lyapunov:

$$2V_1 = z_1^2 + \tilde{\theta}^\intercal\Gamma^{-1}\tilde{\theta} + |k_p|\gamma^{-1}\tilde{\rho}^2 + \frac{1}{2d_1}\epsilon^\intercal P\epsilon \tag{28}$$

Nessas condições, é possível que a atualização de $\hat{\rho}$ é dada pela equação:

$$\hat{\rho} = -\gamma z_1 \text{sign}(k_p)(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1) \tag{29}$$

Derivando z_2, obtemos:

$$\dot{z}_2 = \dot{v} - \hat{\rho}\ddot{y}_r - \dot{\hat{\rho}}\dot{y}_r - \dot{\alpha}_1 \tag{30}$$
$$= Nv + u - \hat{\rho}\ddot{y}_r - \beta - \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}(\omega^\intercal\tilde{\theta} + \epsilon_2) - \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} \tag{31}$$
$$\beta = \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}(\xi + \omega^\intercal\hat{\theta} - Ny) + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\eta}(N\eta + y) + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\dot{y}_r}\dot{y}_r + (\dot{y}_r + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\rho}})\dot{\hat{\rho}} \tag{32}$$

Escolhe-se a função de Lyapunov:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{4d_2}\epsilon^\intercal P\epsilon \tag{33}$$

É possível mostrar que a atualização de parâmetros e a lei de controle são:

$$\hat{\theta} = \Gamma\tau_2 \tag{34}$$
$$\tau_1 = (\omega - \hat{\rho}(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)e_1)z_1 \tag{35}$$
$$\tau_2 = \tau_1 - z_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\omega \tag{36}$$
$$u = -Nv - c_2 z_2 + \beta + \hat{\rho}\ddot{y}_r + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\hat{\theta} - d_2 z_2\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\right)^2 - \hat{k}_p z_1 \tag{37}$$

2 Implementação

Para a implementação, só é preciso computar os filtros:

$$\dot{\lambda} = N\lambda + u \tag{38}$$
$$\dot{\eta} = N\eta + y \tag{39}$$

Temos ainda que $\alpha = \hat{\rho}(-c_1 z_1 - d_1 d_1 - \xi - \bar{\omega}^\intercal \hat{\theta})$. Logo:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = -\hat{\rho}(c_1 + d_1) + \hat{\rho} e_2^\intercal \hat{\theta} + \hat{\rho} N \tag{40}$$
$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \hat{\rho}\left(N^2 \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + \begin{bmatrix} 0 & N\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} \hat{\theta}\right) \tag{41}$$
$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} = \hat{\rho}(c_1 + d_1) \tag{42}$$
$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} = -\hat{\rho}\bar{\omega} \tag{43}$$
$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\rho}} = -(c_1 + d_1)(y - y_r) + N^2\eta - \bar{\omega}^\intercal \hat{\theta} + Ny \tag{44}$$

```
%-----------------------------------------------------------------------
%
%  COE-835  Controle adaptativo
%
%  Script para simular o trabalho 8
%
%  Backstepping  :  n   = 2     Second and third order plant
%                   n*  = 2     Relative degree
%                   np  = 3     Adaptive parameters
% Caso com observador de ordem reduzida
%-----------------------------------------------------------------------

function dx = backstepping_red(t,x)

global A B thetas N c1 c2 d1 d2 Gamma gamma kp a w e1;

y           = x(1:2);
theta       = x(3:5);
lambda      = x(6);
eta         = x(7);
rho         = x(8);

%% Input
yr = a(1) * sin(w(1)*t) + a(2) * sin(w(2)*t);
dyr = a(1) * w(1) * cos(w(1)*t) + a(2) * w(2) * cos(w(2)*t);
ddyr = -a(1) * w(1)^2 * sin(w(1)*t) - a(2) * w(2)^2 * sin(w(2)*t);

Phi = [-y(1) 0;0 -y(1)];

%% Variables 1
xi = -N^2 * eta;
Xi = -[N*eta eta];
v1 = lambda(1);
omega_bar = [0, (Xi - y(1)*e1')]';
omega = [v1, (Xi - y(1)*e1')]';
```

```

%% Z
z1 = y(1) - yr;
alpha_bar = -c1*z1 - d1*z1 - xi - omega_bar'*theta + N*y(1);
alpha_1 = rho * alpha_bar;
z2 = v1 - rho*dyr - alpha_1;

%% Filtro eta
deta = N*eta + y(1);

%% dalpha/dt
dady = rho * (- c1 - d1 + [0,e1']*theta + N);
dadeta_deta = rho * (N^2 * deta + [0, N*deta, deta]*theta);
dadyr = rho*(c1 + d1);
dadtheta = - rho * omega_bar';
dadrho = -(c1 + d1)*(y(1) - yr) - xi - omega_bar'*theta + N*y(1);


%% Variables 2
tau_1 = (omega - rho*(dyr + alpha_bar)*[e1',0]')*z1;
tau_2 = tau_1 - z2 * (dady * omega);

%% Atualização dos parâmetros
dtheta = Gamma * tau_2;
drho = - gamma * z1 * sign(kp) * (dyr + alpha_bar);
beta = dady * (xi + omega'*theta - N*y(1)) + ...
    dadeta_deta + dadyr * dyr + (dyr + dadrho) * drho;
u = -N*v1 -c2*z2 + beta + rho*ddyr + dadtheta*dtheta - d2*z2*(dady)^2 - ...
    theta(1)*z1;

%% Filtros
dlambda = N*lambda + u;


%% Planta
F = [[0 1]'*u Phi];
dy = A*y + F*thetas;

%% Translation
dx = [dy' dtheta' dlambda' deta' drho]';
```

3 Resultados das simulações

Nas simulações, procuramos avaliar o comportamento do sistema para as seguintes condições: (i) condições iniciais $\theta(0)$ e $y(0)$; (ii) Parâmetros da planta e do modelo; (iii) ganho de adaptação Γ.

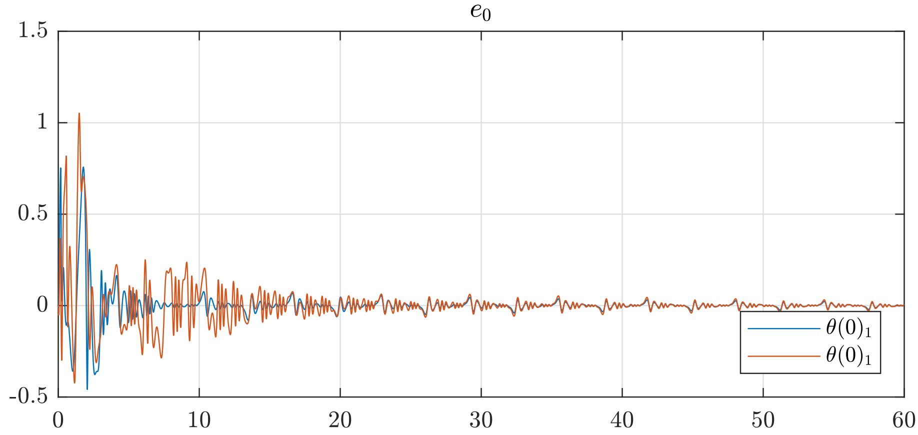
Apresentaremos os resultados obtidos através de simulações no ambiente Matlab/Simulink e os discutiremos na próxima seção. Para todos os casos $N = -1$.

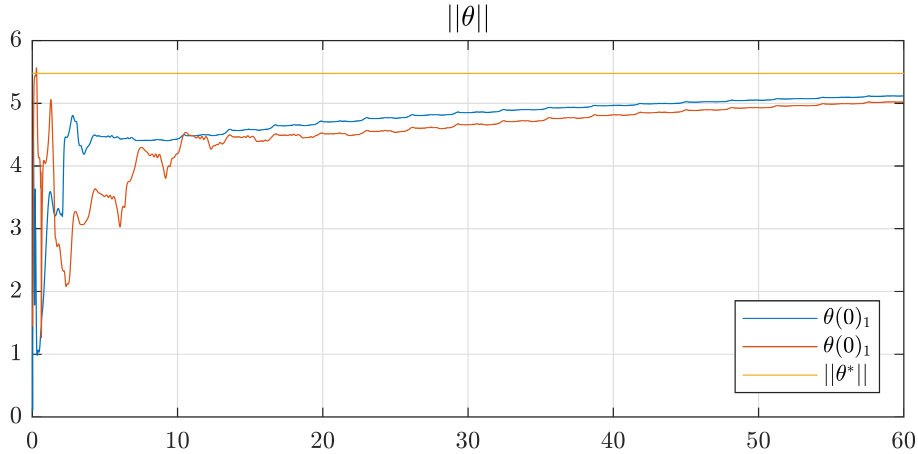
3.1 Simulação #1

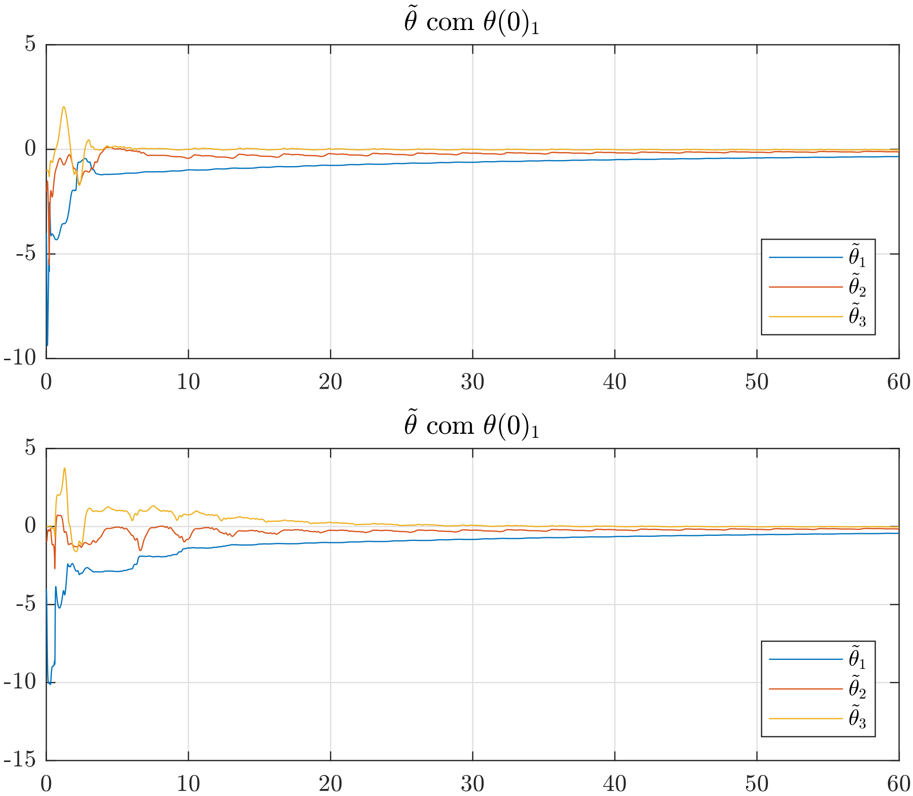
Inicialmente, desejamos verificar o comportamento do sistema para variações nas condições iniciais.

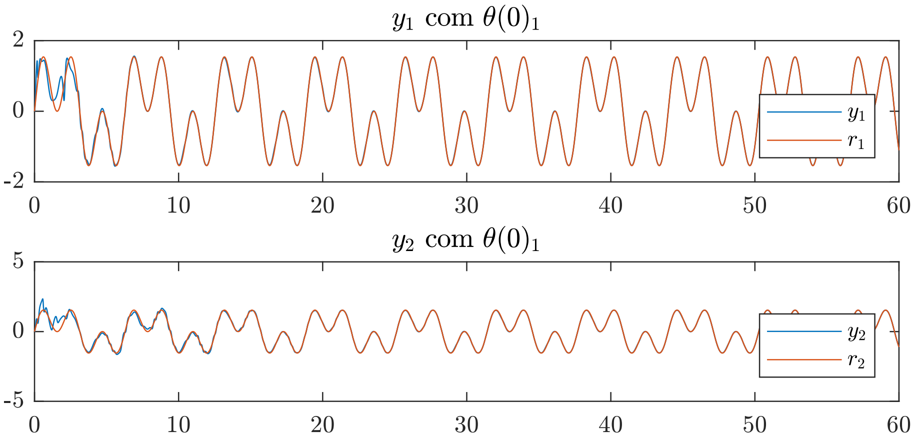
Simulação 1.1: $\theta(0)$

$$y = \frac{5}{s^2+2s+1}u\,, \qquad \theta(0) = 0 \text{ e } 1\,, \qquad y(0)=0\,, \qquad \Gamma = 10\,\mathbf{I}_3\,,$$
$$y_r = \sin(t) + \sin(3t)\,.$$





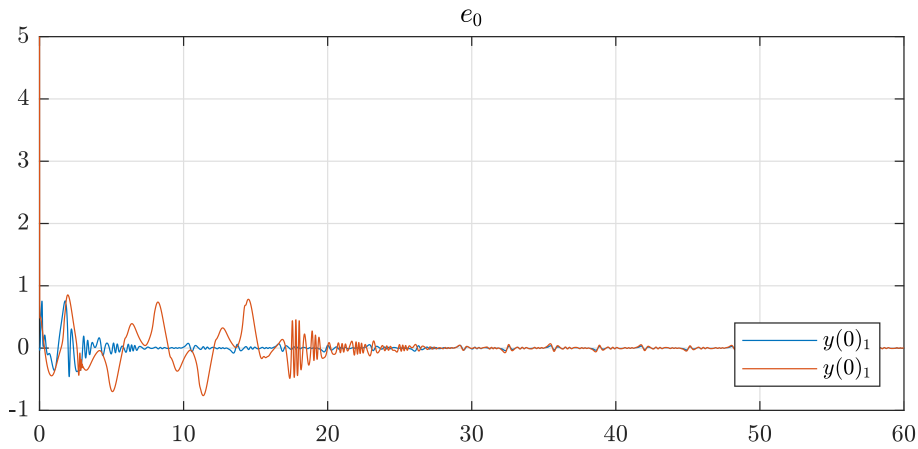




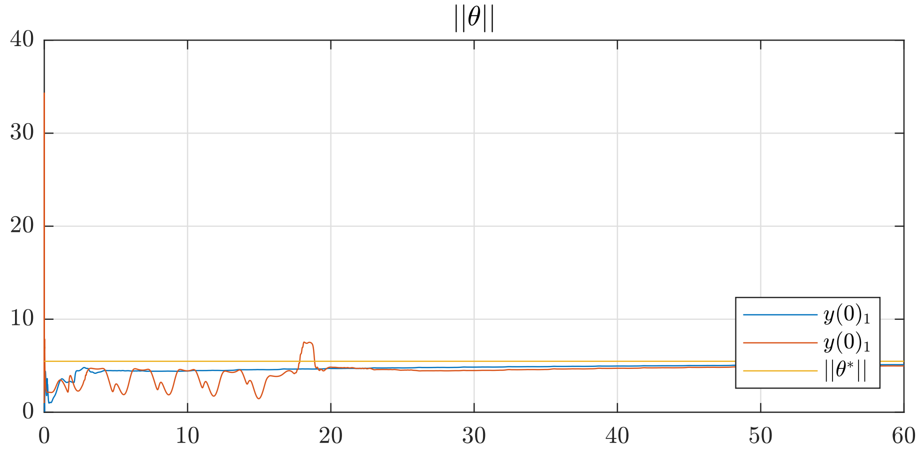
Simulação 1.2: $y(0)$

$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1} u \,, \qquad \theta(0) = 0 \,, \qquad y(0) = 0 \text{ e } 5 \,, \qquad \Gamma = 10\,\mathbf{I}_3 \,,$$

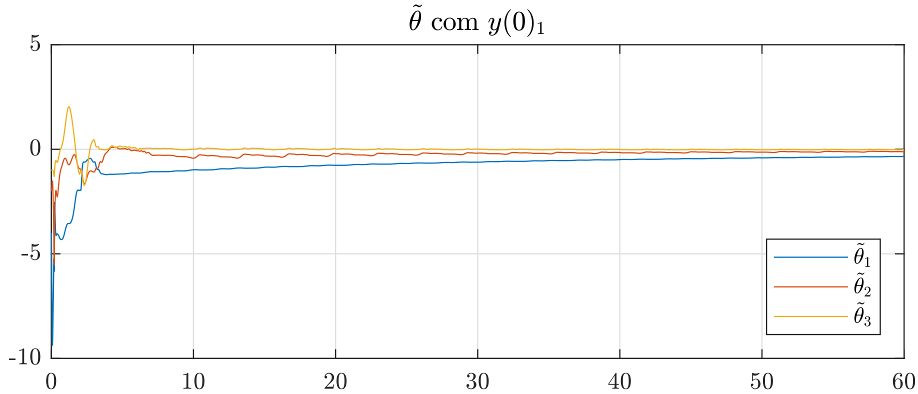
$$y_r = \sin(t) + \sin(3t) \,.$$



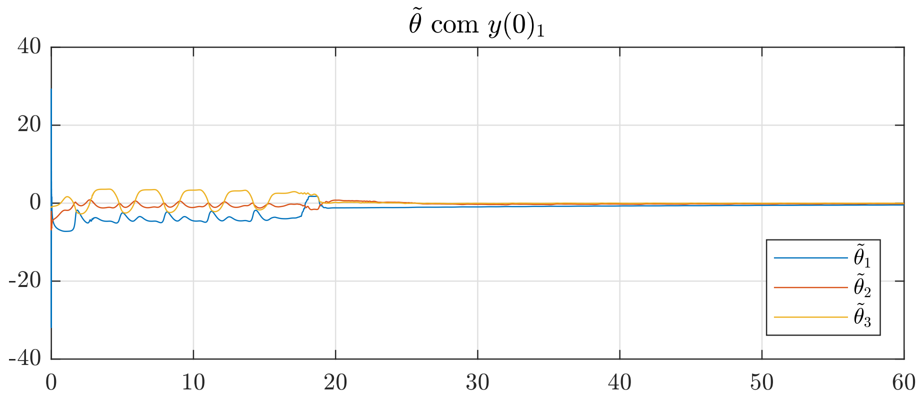
e_0
5
4
3
2
1
0
-1
0
10
20
30
40
50
60
$y(0)_1$
$y(0)_1$



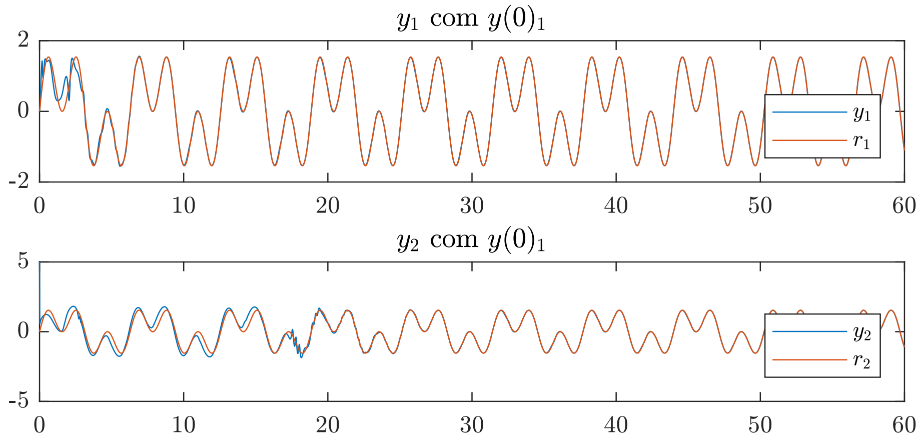
$||\theta||$
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
50
60
$y(0)_1$
$y(0)_1$
$||\theta^*||$



$\tilde{\theta}$ com $y(0)_1$
5
0
-5
-10
0
10
20
30
40
50
60
$\tilde{\theta}_1$
$\tilde{\theta}_2$
$\tilde{\theta}_3$



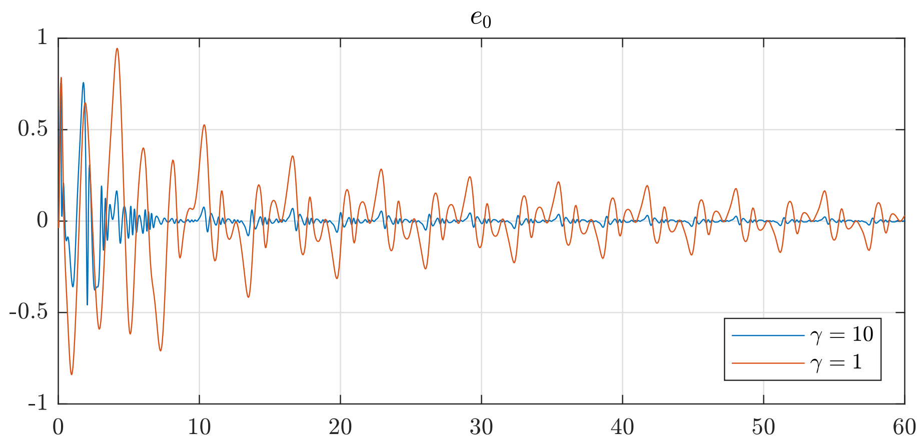
$\tilde{\theta}$ com $y(0)_1$
40
20
0
-20
-40
0
10
20
30
40
50
60
$\tilde{\theta}_1$
$\tilde{\theta}_2$
$\tilde{\theta}_3$

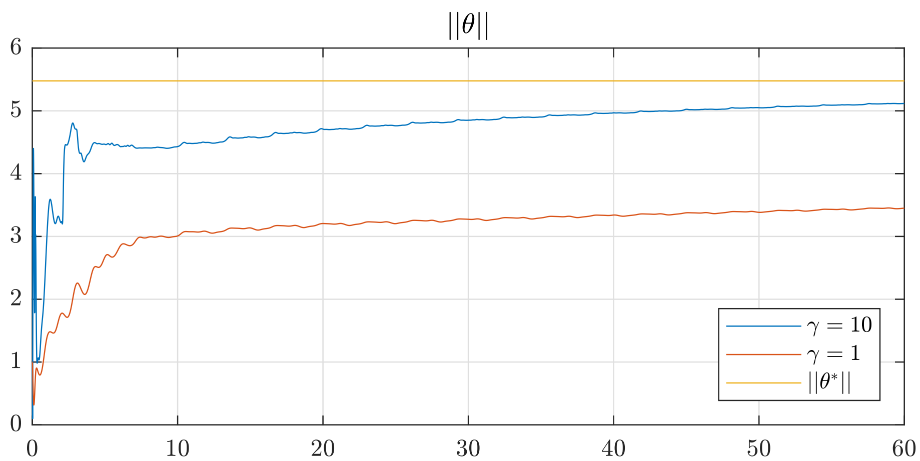


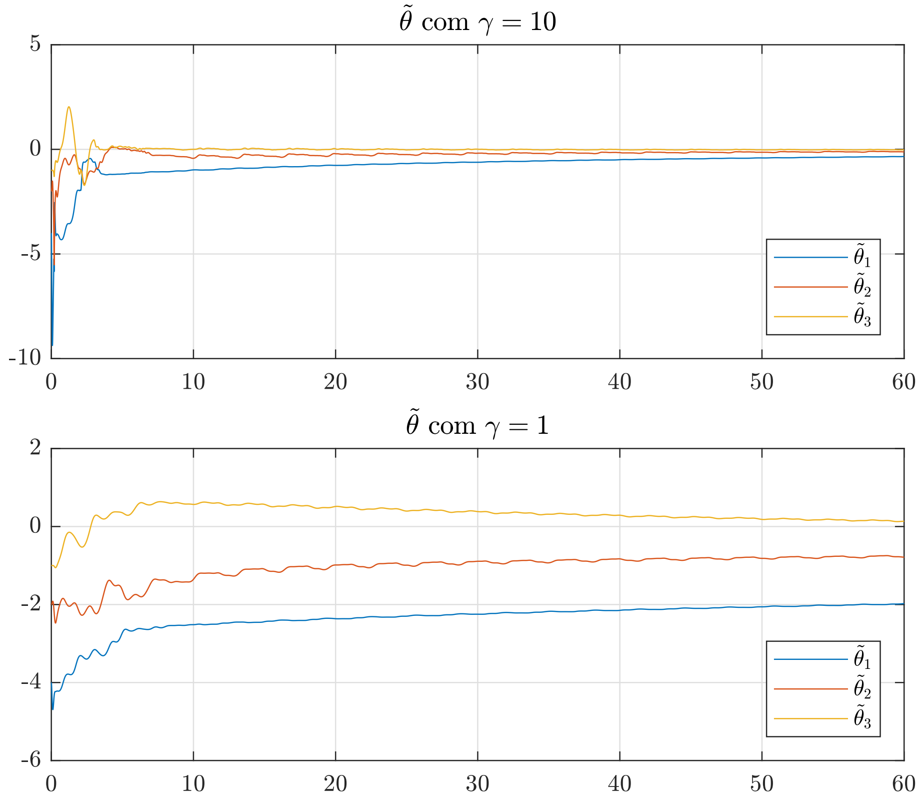
3.2 Simulação #2

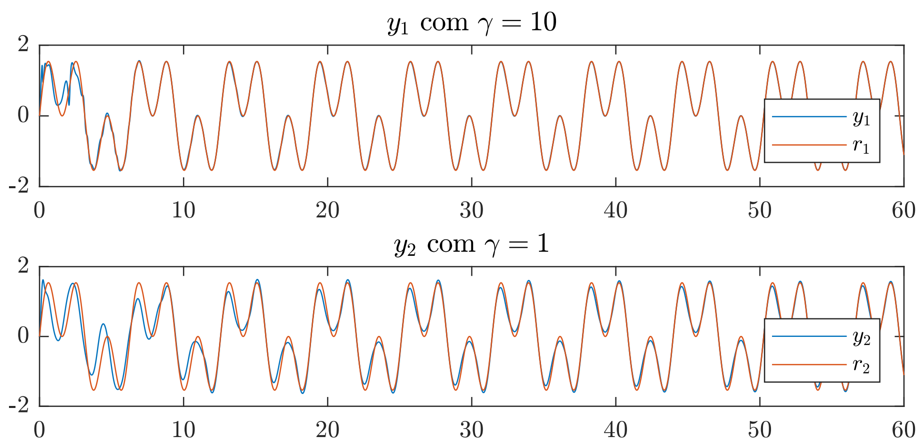
Verificamos o comportamento do sistema para variações no parâmetro de adaptação Γ.

$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1} u\,, \qquad \theta(0) = 0\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad \Gamma = 1 \text{ e } 10\; \mathbf{I}_3\,,$$
$$y_r = \sin(t) + \sin(3t)\,.$$







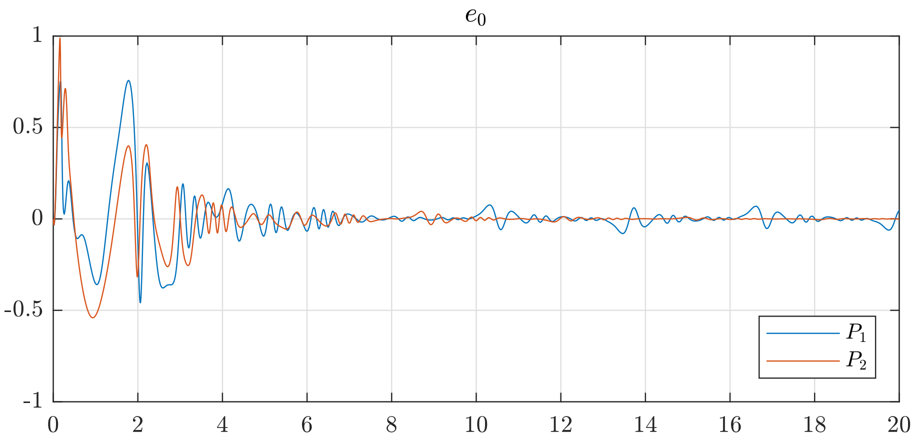


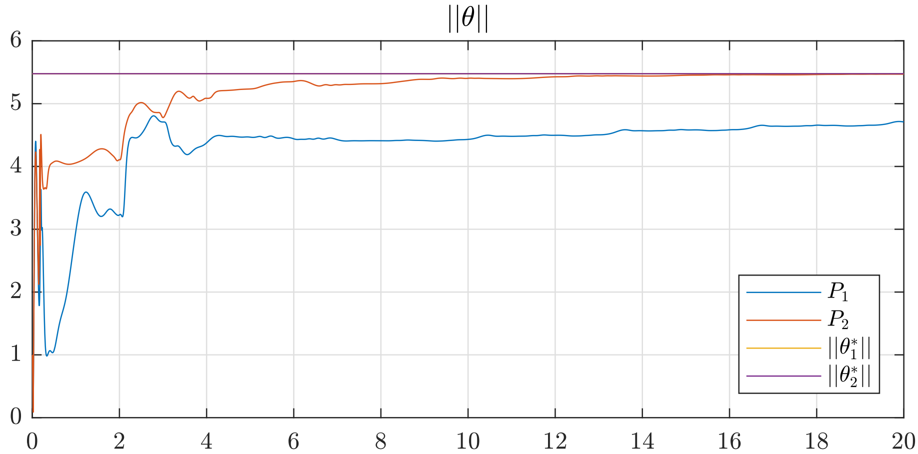
3.3 Simulação #3

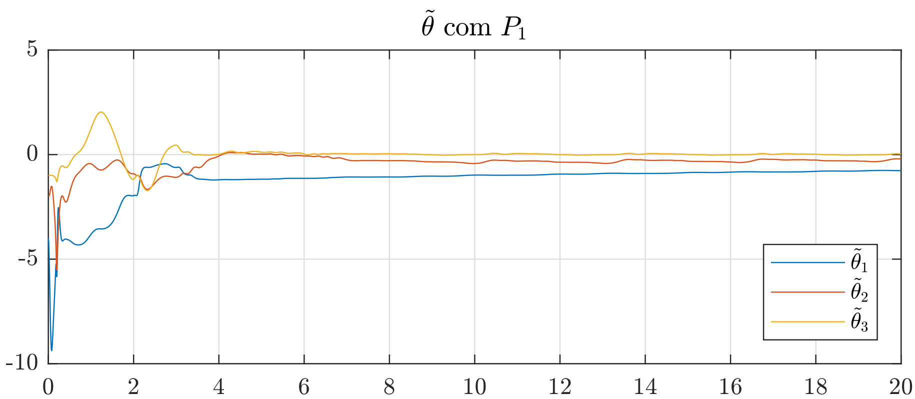
Verificamos o comportamento do sistema para variações na planta e modelo.

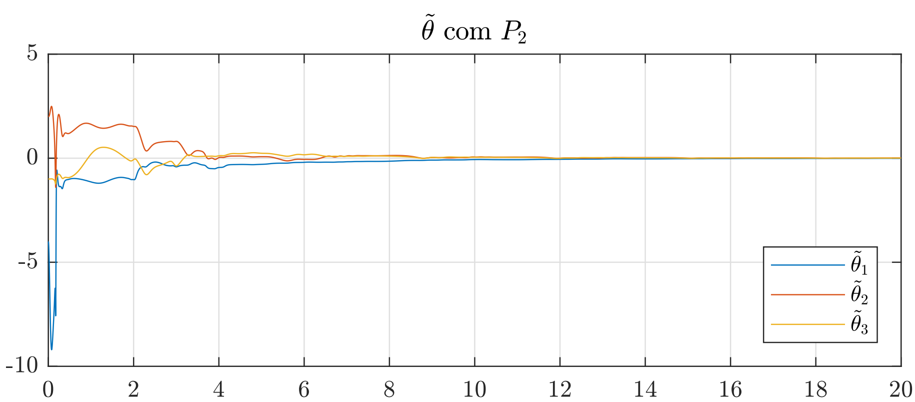
Simulação 3.1: planta

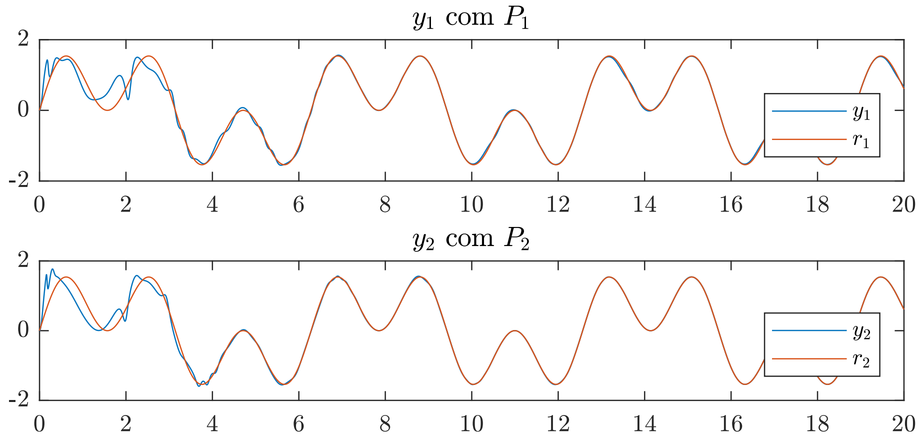
$$y = \frac{5}{s^2+2s+1} u \text{ e } \frac{5}{s^2-2s+1} u, \qquad \theta(0) = 0\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad \Gamma = 10\,\mathbf{I}_3\,,$$
$$y_r = \sin(t) + \sin(3t)\,.$$


e_0
P_1
P_2


$||\theta||$
P_1
P_2
$||\theta_1^*||$
$||\theta_2^*||$


$\tilde{\theta}$ com P_1
$\tilde{\theta}_1$
$\tilde{\theta}_2$
$\tilde{\theta}_3$

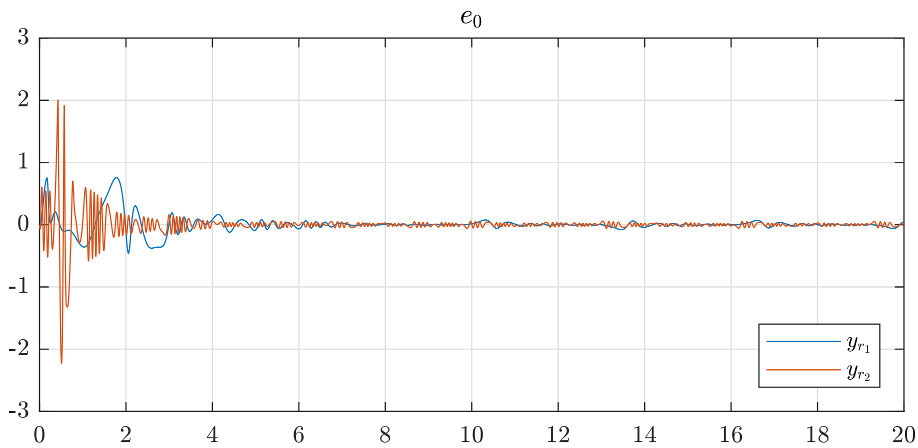

$\tilde{\theta}$ com P_2
$\tilde{\theta}_1$
$\tilde{\theta}_2$
$\tilde{\theta}_3$

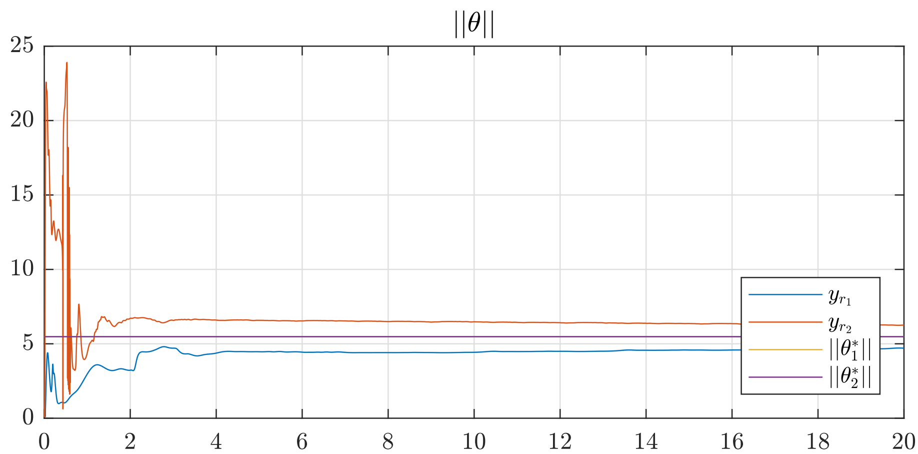


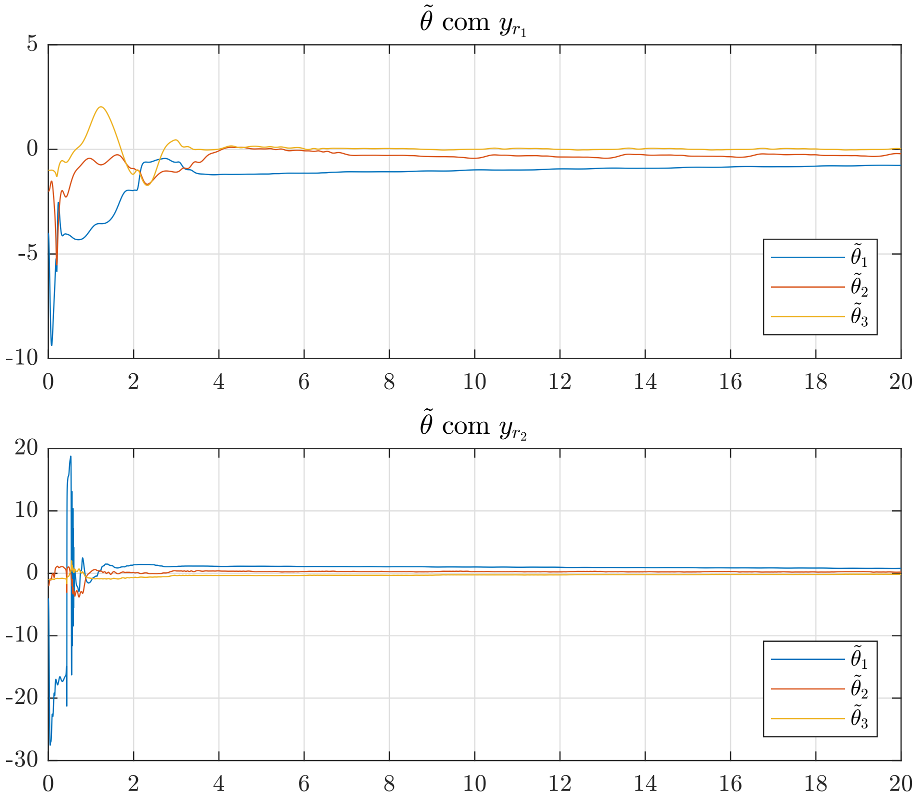
Simulação 3.2: modelo

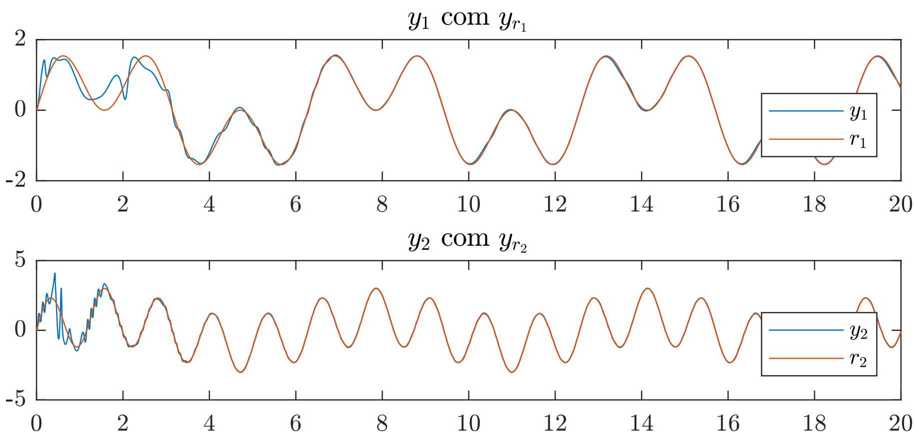
$$y = \frac{5}{s^2 + 2s + 1} u \qquad \theta(0) = 0\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad \Gamma = 10\,\mathbf{I}_3\,,$$

$y_r = \sin(t) + \sin(3t)$ e $\sin(t) + 2\sin(5t)$.






$\tilde{\theta}$ com y_{r_1}
$\tilde{\theta}_1$
$\tilde{\theta}_2$
$\tilde{\theta}_3$
$\tilde{\theta}$ com y_{r_2}
$\tilde{\theta}_1$
$\tilde{\theta}_2$
$\tilde{\theta}_3$


y_1 com y_{r_1}
y_1
r_1
y_2 com y_{r_2}
y_2
r_2

4 Discussão

A **simulação #1** mostra o comportamento do sistema para variações nas condições iniciais. A rapidez da convergência depende de quão próximo os parâmetros estimados estão dos parâmetros reais. A simulação mostrou um comportamento semelhante para ambos os casos. Quando deslocamos o $y(0)$, na simulação 1.2, os sistemas também apresentam comportamento semelhante, pois a variável de controle u é alterada e não apresenta saturação, compensando a condição inicial.

A **simulação #2** mostra o comportamento do sistema para variações no ganho de adaptação Γ. Podemos verificar convergência mais rápida quando o Γ é maior, porém também observamos maiores oscilações e picos de erro.

A **simulação #3** mostra o comportamento do sistema para variações na planta. Escolhemnos plantas instáveis e estáveis. Podemos observar que, em ambos os casos, o sinal de controle foi capaz de corrigir o erro, sem muitas dificuldades. O comportamento dos sistemas é semelhante. A alteração do modelo, na simulação 3.2, mostrou que modelos mais complexos, com frequências mais altas e maiores amplitudes, demoram mais para convergir.