Exercício 02

Renan Salles de Freitas
CPE 723 - Otimização Natural

15 de março de 2018

Exercício 1.a. Temos que a distribuição de probabilidade de $X(1)$ é:

$$\mathbf{p}_1 = M\mathbf{p}_0$$

E ainda:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2 &= M\mathbf{p}_1 = M^2\mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_n &= M^n\mathbf{p}_0 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_3 &= M^3\mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_3 &= \begin{bmatrix} 0.3328 \\ 0.3344 \\ 0.3328 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exercício 1.b. Supondo que estamos no estado $X(t)$, construímos uma lista com os possíveis próximos estados, considerando a distribuição de probabilidade, conforme a matriz de transição de estados M: $X(t+1) = [X(t) \quad 0 \quad 1 \quad 2]$. Sorteamos um índice de zero a quatro com o MatLab e atualizamos $X(t+1)$. Observe que, dessa forma, a transsição para o estado o estado atual sempre possui probabilidade 0.5 e os outros estados possuem probabilidade 0.25.

$$\begin{aligned} X(0) &= 1 \\ \text{list} &= [0 \quad 1 \quad 2 \quad 1] \\ r &= \text{randi}(4) = 3 \\ X(1) &= \text{list}(r) = 2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} X(1) &= 2 \\ \text{list} &= [0 \quad 1 \quad 2 \quad 2] \\ r &= \text{randi}(4) = 3 \\ X(2) &= \text{list}(r) = 2 \end{aligned} \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
X(2) &= 2 \\
\text{list} &= [0 \quad 1 \quad 2 \quad 2] \\
r &= \text{randi}(4) = 4 \\
X(3) &= \text{list}(r) = 2
\end{aligned} \tag{3}
$$

Exercício 1.c. Código MatLab abaixo:

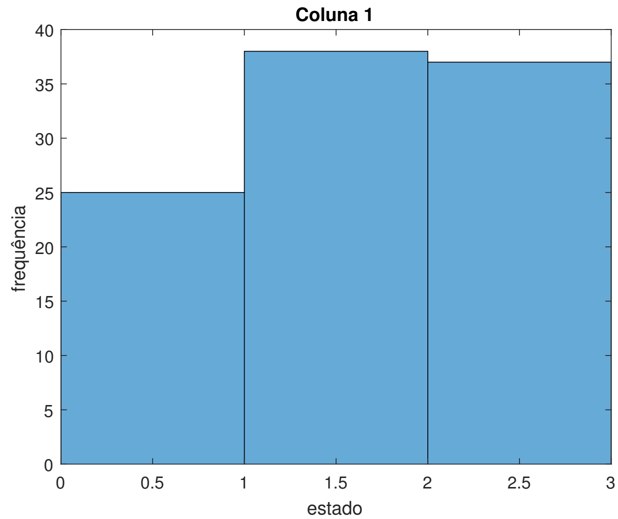
```
clear all
clc

init = [0 1 2];
n = 100;
x = zeros(n,4);
for i = 1:n
    x(i,1) = init(randi(3));
    for j = 2:4
        list = [0 1 2 x(i,j-1)];
        r = randi(4);
        x(i,j) = list(r);
    end
end
```

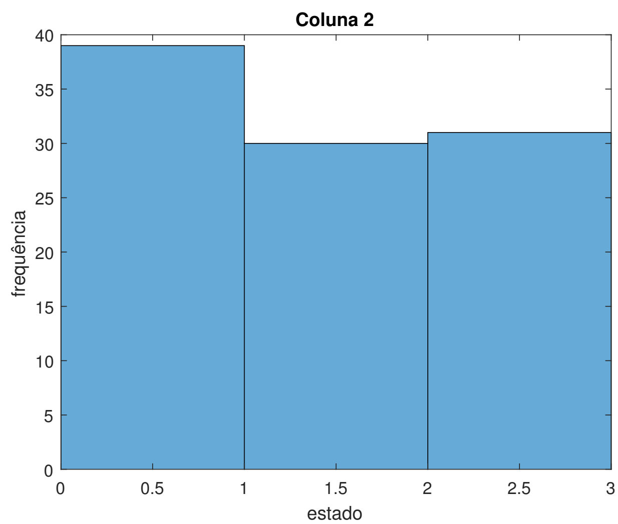
X(0)	**X(1)**	**X(2)**	**X(3)**
2	2	2	1
2	2	0	0
2	0	0	2
2	0	2	0
1	1	1	1
1	1	2	0
2	2	2	2
0	1	0	0
0	0	1	1
1	2	2	2
1	0	0	0
2	1	1	1
2	2	1	2
1	0	2	0
1	0	2	0
2	0	0	2
0	2	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1
1	1	1	2
0	0	1	2

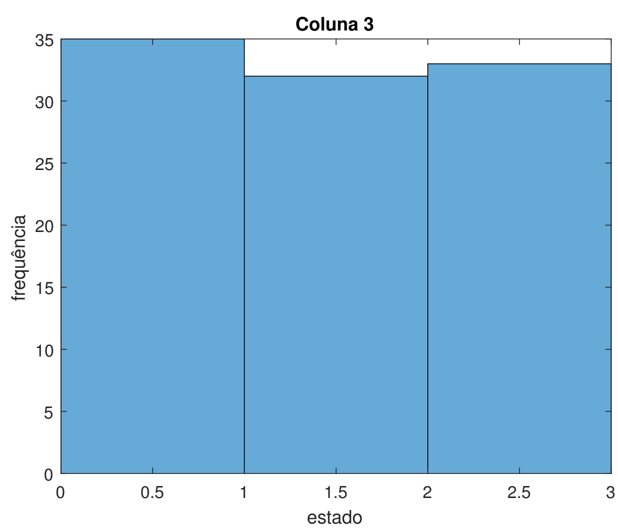
X(0)	**X(1)**	**X(2)**	**X(3)**
2	0	0	2
0	0	0	1
1	1	2	2
0	1	0	2
0	2	2	2
2	1	0	0
1	1	1	2
2	0	1	0
2	2	1	1
2	2	2	0
0	0	0	2
2	2	1	0
0	0	0	1
1	0	2	0
1	2	1	2
1	1	1	0
1	0	2	2
0	1	1	1
1	2	2	1
2	0	2	0
1	0	1	1
2	0	2	2
1	0	1	1
2	0	0	1
2	2	0	2
1	2	0	1
2	1	0	0
1	0	0	1
0	0	0	2
0	1	1	0
2	2	1	2
2	2	2	0
2	2	2	0
2	1	0	0
1	2	1	1
2	0	2	1
1	1	2	1
2	2	2	2
2	1	0	0
2	2	2	2
2	1	0	1
0	2	2	2
2	2	0	1
2	2	0	0

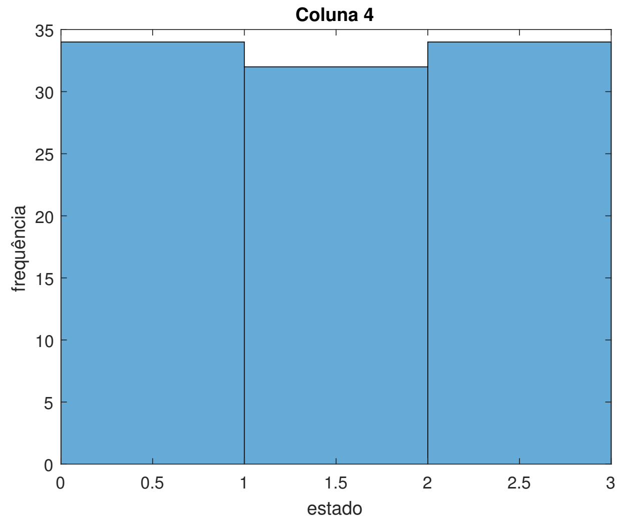
X(0)	**X(1)**	**X(2)**	**X(3)**
1	1	2	0
0	1	1	1
1	1	1	1
0	0	0	1
0	0	0	0
0	2	2	2
2	1	1	1
2	2	2	2
1	0	2	2
0	0	0	2
2	2	2	2
2	0	1	1
1	1	2	1
1	0	0	0
1	1	1	2
0	1	1	0
0	0	1	1
1	1	2	2
0	0	0	0
1	1	0	0
1	2	1	1
0	0	1	2
0	2	2	1
1	1	1	0
0	2	0	0
1	0	2	2
1	1	2	0
1	0	0	0
2	0	0	0
1	2	1	2
1	2	2	2
0	0	0	2
2	0	1	1
2	1	1	1
1	0	0	0

Exercício 1.d. Os hisstogramas estão representados abaixo:


Coluna 1
frequência
estado
0
5
10
15
20
25
30
35
40
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


Coluna 2
frequência
estado
0
5
10
15
20
25
30
35
40
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


Coluna 3
frequência
estado
0
5
10
15
20
25
30
35
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3



O código MatLab para calcualr as proobabilidades está abaixo:

```
M = [ 0.5 0.25 0.25;
      0.25 0.5 0.25;
      0.25 0.25 0.5];

p0 = [sum(x(:,1)==0)/100 sum(x(:,1)==1)/100 sum(x(:,1)==2)/100]';
p1 = [sum(x(:,2)==0)/100 sum(x(:,2)==1)/100 sum(x(:,2)==2)/100]';
p2 = [sum(x(:,3)==0)/100 sum(x(:,3)==1)/100 sum(x(:,3)==2)/100]';
p3 = [sum(x(:,4)==0)/100 sum(x(:,4)==1)/100 sum(x(:,4)==2)/100]';

p0g = [1/3 1/3 1/3]';
p1g = M*p0g;
p2g = M*p1g;
p3g = M*p2g;
```

Sabemos que o estado inicial é equiprovável para os três estados :

$$\mathbf{p}_0 = [0.3333 \quad 0.3333 \quad 0.3333]$$

E ainda:

$$\mathbf{p}_1 = M\mathbf{p}_0 = [0.3333 \quad 0.3333 \quad 0.3333]$$
$$\mathbf{p}_n = M^n\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0 = [0.3333 \quad 0.3333 \quad 0.3333]$$

Calculamos as probabilidades pela frequência do histograma e obtemos:

$$\mathbf{p}_0 = [0.25 \quad 0.38 \quad 0.37]\mathbf{p}_1 \quad = [0.39 \quad 0.30 \quad 0.31]\mathbf{p}_2 = [0.35 \quad 0.32 \quad 0.33]\mathbf{p}_3 \quad = [0.34 \quad 0.32 \quad 0.34]$$

Vale observar que, conforme aumentamos o número de iterações, o estado se aproxima para o estado estacionário $\mathbf{p}_n = [0.333 \quad 0.333 \quad 0.333]$, autovetor da matriz M.

Exercício 4.

Exercício 5.