מטלה 4

כל הנחיות המטלות הקודמות תקפות גם כאן, פרט לתאריך ההגשה המופיע בתיבת ההגשה עצמה.

1. נתונות השפות הבאות:

$L_1 = \{a^{2n}b^{3n} | n \geq 1\}, \quad L_2 = \{ww^R ww^R | w \in \{a,b\}^*\},$
$L_3 = \{a^n b^m c^m d^l \,|\, 0 \leq n \leq l, m \geq 1\}$
$L_4 = \{a^n b^{2n} \cup a^{2n} b^n | 1 \leq n\}$

א. (10 נקודות) הראו כי L_1 חסרת הקשר ע"י בניית דח"ה.

פתרון מוצע:

א. נבנה דח"ה לשפה L_1

$G = \{(a,b),(S),S,P\}$ כאשר כללי הגזירה מוגדרים כך:
$S \to aaSbbb | aabbb$

ב. (10 נקודות) הראו כי L_2 אינה חסרת הקשר ע"י למת הניפוח לשפות חסרות הקשר.

פתרון מוצע:

נניח בשלילה כי L_2 שפה ח"ה ויהי n הקבוע המובטח מהלמה. תהי $z = a^n b^n b^n a^n a^n b^n b^n a^n$.
$z \in L$ וגם $|z| = 8n \geq n$ ולכן קיים פירוק $z = uvwxy$ המקיים את תנאי הלמה.

היכן נמצא vwx?

$$a_1^{n^9} b_2^{n^{10}} b_3^{n^{11}} a_4^{n^{12}} a_5^{n^{13}} b_6^{n^{14}} b_7^{n^{15}} a_8^{n}$$

עבור מקרה 1: נבחר $i = 2$ ונקבל $z^i = a^{n+|vx|} b^n b^n a^n b^n a^n a^n b^n \notin L_2$.

מקרים 2,3,4,5,6,7,8 זהים (עד כדי החלפת המיקום והאות).

עבור מקרה 9: נבחר $i = 0$ ונקבל

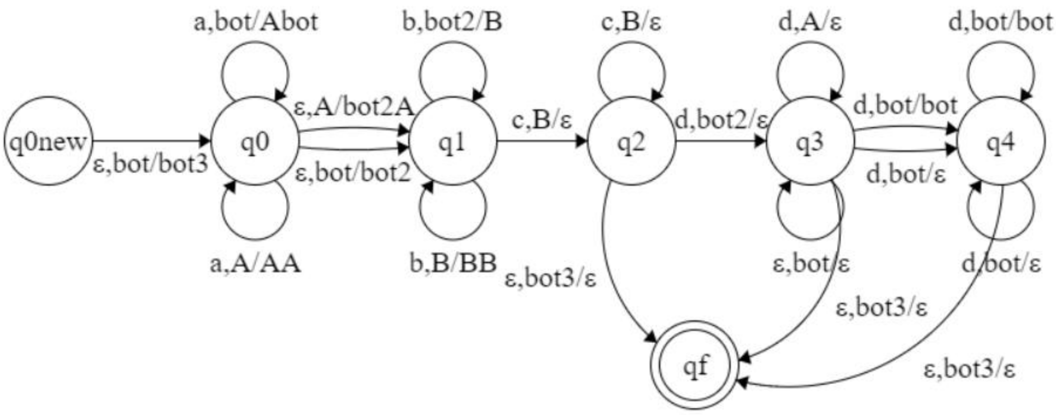
$$z^0 = a^l b^k b^n a^n b^n a^n a^n b^n \notin L_2$$

עבור $l < n$ ו/או $k < n$ (שכן $|vx| \geq 1$).

מקרים 10,11,12,13,14,15 זהים (עד כדי החלפת המיקום).

ג. (5 נקודות) הראו כי L_3 חסרת הקשר ע"י בניית אוטומט מחסנית המקבל ע"י מצב מקבל.

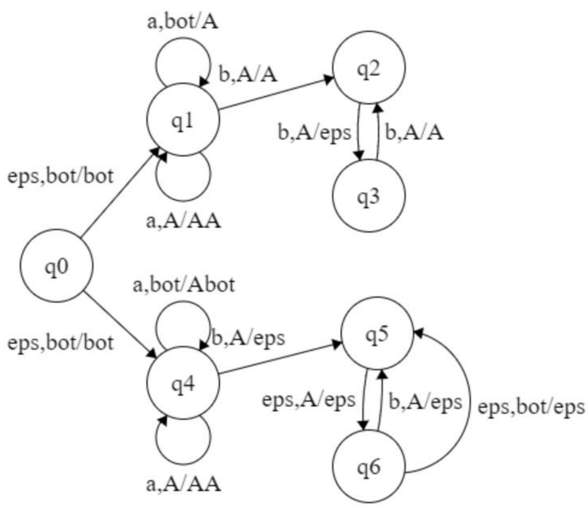
ניקח את האוטומט שבנינו בהרצאה לשפה המקבלת על ידי ריקון, ניצור מצב q_0 חדש שמכניס תחתית נוספת (bot3). השקילות ביקשה שמכל מצב נמתח מסע ϵ שמרוקן את bot3 ומוביל למצב מקבל, אך אנחנו יודעים שרק ממצבים q_2 והלאה יש סיכוי שהמחסנית תתרוקן, ולכן נמתח מסעי ϵ רק מהם (זו לא טעות למתוח מכולם, פשוט שיפור קטן):



ד. (5 נקודות) הראו כי L_4 חסרת הקשר ע"י בניית אוטומט מחסנית המקבל ע"י ריקון.

פתרון מוצע:

תחילה נבצע מסע ϵ כדי לבחור בצורה אי-דטרמיניסטית לאיזה כיוון הולכים באוטומט. למעלה נטפל ב $a^n b^{2n}$: על כל שני b מוציאים מהמחסנית A אחד (ניתן גם להכניס שני A בכל פעם ואז להוציא על כל b). למטה נטפל ב $a^{2n} b^n$. החץ האחרון $eps, bot/eps$ מוודא כי מרוקנים את המחסנית דווקא ב q_6 ולא ב q_5, ולכן לכל b אכן נרוקן שני a.



2. (15 נקודות) בנו דח"ה (G) לשפה הבאה:

$$L = \{w \in \{a,b\}^* | |w| \equiv 1 \ (mod\ 3) \wedge w = w^R\}$$

פתרון מוצע:

נבנה ל L_1 דח"ה:

$$G = \{(S,X),(a,b),S,P\}$$

כאשר כללי הגזירה מוגדרים כך:

$S \rightarrow aaaSaaa|aabSbaa|abaSaba|baaSaab|abbSbba|babSbab|bbaSabb|bbbSbbb|X|a|b$
$X \rightarrow aaaa|abba|baab|bbbb$

הסבר קל:

המשתנה S גוזר שישיות המקיימות $w = w^R$, ולבסוף גוזר אות בודדת כדי להגיע ל $1\ (mod\ 3)$. אבל פרט ל $1\ (mod\ 6)$ אפשר גם לעצור ב $4\ (mod\ 6)$ ולכן צריך את המשתנה X שיגזור ארבע אותיות. ואז אנחנו נוחתים ב $4\ (mod\ 6\ ) \equiv 1\ (mod\ 3)$ כנדרש. כמו כן, ל S יש אפשרות לעצור באות בודדת (מילה באורך 1).

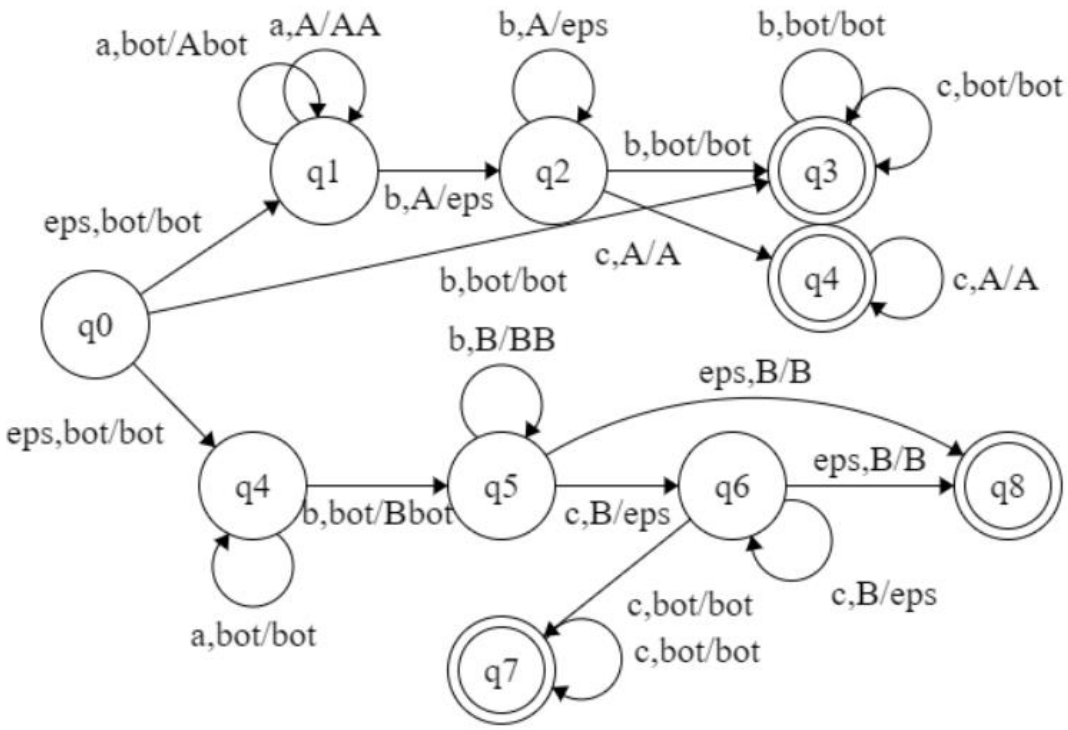
3. יהיו שתי השפות הבאות:

$$L_4 = \{a^i b^j c^k | i \neq j\ Or\ j \neq k\}$$
$$L_5 = \{a^n b^m | 0 < n \leq m \leq 3n\}$$

א. (15 נקודות) בנו לאחת מהן דח"ה.

פתרון מוצע:

נבנה א"מ ל L_4: (מקבל $L_f(M)$)



הסבר קצר:

הצעד הראשון יבחר בצורה א"ד בין $i \neq j$ (החצי העליון) לבין $j \neq k$ (החצי התחתון).

בכל חלק כזה יש (בה"כ) $i < j$ או $i > j$, והאוטומט מטפל בהם בהתאם.

נבנה דח"ה ל L_4:

$G = (\{S, M, N, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$ כאשר כללי הדקדוק הם:

$$S \to MC|AN$$
$$M \to aMb|aA|bB$$
$$N \to bNc|bB|cC$$
$$A \to aA|\epsilon$$
$$B \to bB|\epsilon$$
$$C \to cC|\epsilon$$

הסבר קצר:

נבחר בהתחלה בצורה האם הולכים לכיוון של $i \neq j$ או לכיוון של $j \neq k$. המשתנים MC גורמים לאי-שיוויון בין i, j. המשתנים AN גורמים לאי-שיוויון בין j, k.

ב. (10 נקודות) בנו לשנייה מהן אוטומט מחסנית.
$(L_5 = \{a^n b^m | 0 < n \leq m \leq 3n\})$

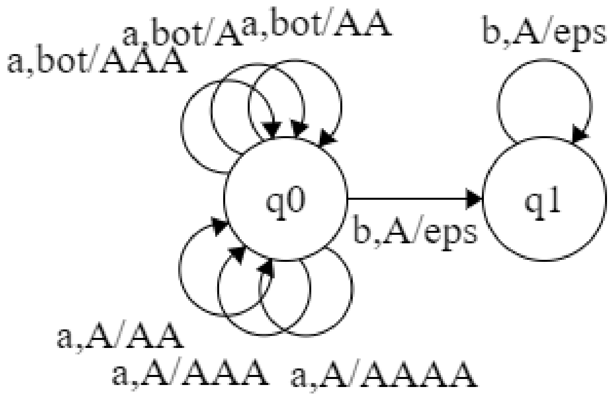
פתרון מוצע:

נבנה דח"ה לשפה L_5:

$$G_5 = \{(S), (a, b), S, P\}$$
$$S \to aSb|aSbb|aSbbb|ab|abb|abbb$$

הסבר: על כל a יש לגזור b בודד או שני b או שלושה b.

נבנה א"מ לשפה L_5, המקבל לפי ריקון ($L_\epsilon(F)$):



הסבר: בכל צעד בוחרים בצורה אי-דטרמיניסטית האם להכניס A או AA או AAA, ועל כל b מוציאים A בודד. כשהמחסנית ריקה, יש השוואה בין הכמויות.

4. נגדיר מודל חדש: $\widetilde{M} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F, \Gamma_1, \Gamma_2, \bot_1, \bot_2)$ (כלומר, אוטומט מחסנית עם שתי מחסניות). קבלה ע"י מצב מקבל כרגיל, או ע"י ריקון שתי המחסניות.
א. (10 נקודות) בנו אוטומט ממודל זה עבור השפה L_2 משאלה 1.
ב. (10 נקודות) בנו אוטומט ממודל זה עבור השפה
$L_6 = \{a^n b^n c^n d^n e^{2n} | n \geq 1\}$
מסקנה: מודל זה חזק יותר מאוטומט מחסנית רגיל.

פתרון מוצע:

תחילה נגדיר כיצד מתקדמים באוטומט מחסנית כזה:

$$\delta: (Q \times \Sigma \times \Gamma \times \Gamma) -> 2^{Q \times \Gamma^* \times \Gamma^*}$$

נבנה אוטומט מהמודל החדש לשפה $L_2 = \{ww^R ww^R | w \in a, b^*\}$.

בשלל השורות הבאות מתקיים $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \{a, b\}$.

$$\delta(q_0, \sigma, \bot_1, \bot_2) = (q_0, \sigma\ \bot_1, \bot_2)$$
$$\delta(q_0, \sigma_1, \sigma_2, \bot_2) = (q_0, \sigma_1 \sigma_2, \bot_2)$$
$$\delta(q_0, \epsilon, \sigma, \bot_2) = (q_1, \sigma, \bot_2)$$

$$\delta(q_1,\sigma_1,\sigma_1,\perp_2)=(q_1,\epsilon,\sigma_1\perp_2)$$
$$\delta(q_1,\sigma_1,\sigma_1,\sigma_2)=(q_1,\epsilon,\sigma_1\sigma_2)$$
$$\delta(q_1,\epsilon,\perp_1,\sigma)=(q_2,\perp_1,\sigma)$$
$$\delta(q_2,\sigma_1,\perp_1,\sigma_1)=(q_2,\sigma_1,\epsilon)$$
$$\delta(q_2,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_1)=(q_2,\sigma_1\sigma_2,\epsilon)$$
$$\delta(q_2,\epsilon,\sigma,\perp_2)=(q_3,\sigma,\perp_2)$$
$$\delta(q_3,\sigma_1,\sigma_1,\perp_2)=(q_3,\epsilon,\perp_2)$$
$$\delta(q_3,\epsilon,\perp_1,\perp_2)=(q_4,\epsilon,\epsilon)$$

הסבר: במצב q_0 נכניס את w למחסנית הראשונה. עם סיום המילה, בצורה אי-דטרמיניסיטית, נעבור למצב q_1. במצב q_1 נוודא כי המשך המילה הוא אכן w^R ע"י השוואה עם תוכן המחסנית, ובמקביל נכניס את w^R למחסנית השנייה. עם סיום $w^\wedge R$ נעבור במסע אפסילון למצב q_2. במצב זה נקרא את w- נוודא שזהו אכן w^R ע"י השוואה מול המחסנית השנייה, וגם נכניס למחסנית הראשונה. עם סיום w נעבור במסע אפסילון למצב q_3 שבו נוודא שהחלק האחרון הוא אכן w^R ע"י השוואה מול המחסנית הראשונה.

לבסוף נעבור במסע אפסילון שירוקן את שתי התחתיות למצב q_4 (אפשר להגדיר אותו כמצב מקבל, ואז לא צריך לרוקן את שתי התחתיות, ואפשר לא להגדיר מצב מקבל אלא פשוט לסיים ע"י ריקון שתי התחתיות).

$$M'=(\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\},\{a,b\},q_0,\delta,\{a,b\},\perp_1,\perp_2)$$

ב. (10 נקודות) בנו אוטומט ממודל זה עבור השפה
$$L_6=\{a^nb^nc^nd^ne^{2n}|n\geq 1\}$$

פתרון מוצע:

כל שצריך לוודא כאן הוא השוואת הכמויות, ולכן יספיק להשתמש בסוג אחד של אותיות למחסנית.

$$\delta(q_0,a,\perp_1,\perp_2)=(q_0,\perp_1A,\perp_2)$$
$$\delta(q_0,a,A,\perp_2)=(q_0,AA,\perp_2)$$
$$\delta(q_0,b,A,\perp_2)=(q_1,\epsilon,A\perp_2)$$
$$\delta(q_1,b,A,A)=(q_1,\epsilon,AA)$$
$$\delta(q_1,c,\perp_1,A)=(q_2,A,\epsilon)$$
$$\delta(q_2,c,A,A)=(q_2,AA,\epsilon)$$
$$\delta(q_2,d,A,\perp_2)=(q_3,\epsilon,AA)$$
$$\delta(q_3,d,A,A)=(q_3,\epsilon,AAA)$$
$$\delta(q_3,e,\perp_1,A)=(q_4,\perp_1,\epsilon)$$
$$\delta(q_4,\perp_1,A)=(q_4,\perp_1,\epsilon)$$
$$\delta(q_4,\perp_1,\perp_2)=(q4,\epsilon,\epsilon)$$

הסבר קצר: בכל מצב ממלאים מחסנית אחת ומרוקנים את השנייה. כאשר מגיעים לאות d, מכניסים כמות כפולה בכל הפעלת של δ, שכן צריך להשוות מול e^{2n}.

5. (10 נקודות) שאלה 59 מחוברת התרגילים של הטכניון (ארבעת האלגוריתמים!) (Exercise Booklet)

פתרון מוצע:

$$S\rightarrow ab\mid BBa$$
$$A\rightarrow CB\mid C$$
$$B\rightarrow CCa\mid A\mid ab$$
$$C\rightarrow Ba\mid A\mid \epsilon$$

הפעלת האלגוריתם לסילוק משתנים שאינם טרמינליים לא משנה, כי כל המשתנים הם טרמינליים.

הפעלת האלגוריתם לסילוק סימנים לא ישיגים גם לא רלוונטי כרגע – לכל הסימנים ניתן להגיע מ-S.

לכן נתחיל מהפעלת <u>האלגוריתם לסילוק כללי ϵ</u>:

המשתנה C אפיס שכן $C \to \epsilon$ הוא אחד מכללי הגזירה.

גם המשתנה A אפיס שכן קיימת סדרת הגזירה $A \to C \to \epsilon$.

גם המשתנה B אפיס שכן קיימת סדרת הגזירה $B \to A \to C \to \epsilon$.

ולכן $N \coloneqq \{A, B, C\}$.

כעת נעבור על כללי הגזירה כשם שלמדנו באלגוריתם:

$S \to BBa$ מוחלף בכללים הבאים: $S \to Ba \mid BBa \mid a$

$A \to CB$ מוחלף בכללים הבאים: $A \to C \mid B \mid CB$

$A \to C$ נשאר (לא יוצרים את הכלל $A \to \epsilon$)

$B \to CCa$ מוחלף ב $B \to CCa \mid Ca \mid a$

$B \to A$ נשאר (לא יוצרים את הכלל $B \to \epsilon$)

$C \to Ba$ מוחלף ל $C \to Ba \mid a$

$C \to A$ נשאר (לא יוצרים את הכלל $C \to \epsilon$)

לכן הדקדוק כרגע מכיל את הכללים הבאים:

$$S \to Ba|BBa|a, \qquad A \to C|B|CB, \qquad B \to CCa|Ca|a|A, \qquad C \to Ba|a|A$$

כעת נפעיל את <u>האלגוריתם לסילוק כללי יחידה</u>.

$$P' \coloneqq \{A \to \alpha | \alpha \neq V^+ \wedge A \to \alpha \in P\} \cup \{A \to \alpha | \alpha \neq V^+ \wedge A \to^+ B \wedge B \to \alpha\}$$

בין כל המשתנים יש מעגלים (פרט ל-S). נבדוק מהם הכללים בהם משתנה גוזר משהו שאינו משתנה:

$$C \to Ba|a, \qquad B \to CCa|Ca|a$$

ולכן נקבל את הכללים הבאים:

$$\begin{aligned} &A \to Ba|a|CCa|Ca|BaCCa|BaCa|Baa|aCCa|aCa|aa \\ &B \to CCa|Ca|a|Ba \\ &C \to Ba|a|CCa|Ca \end{aligned}$$

כללי הגזירה של S נשארו ללא שינוי, שכן אין כלל יחידה מ-S.

לכן כרגע הדקדוק מכיל את הכללים הבאים:

$$\begin{aligned} &A \to Ba|a|CCa|Ca|BaCCa|BaCa|Baa|aCCa|aCa|aa \\ &S \to Ba|BBa|a, \qquad B \to CCa|Ca|a|Ba, \qquad C \to Ba|a|CCa|Ca \end{aligned}$$

נפעיל את <u>האלגוריתם לסילוק סימנים שאינם ישיגים</u>:

$$V = \{S\}, \qquad T = \phi$$

$$V = \{S.B\}, \qquad T = \{a\}$$
$$V = \{S, B, C\}, \qquad T = \{a\}$$
$$V = \{S, B, C\}, \qquad T = \{a\}$$

ולכן האלגוריתם עצר. המשתנה A אינו ישיג, ולכן מוחקים גם את כל כללי הגזירה שלו.

נותרו עם הדקדוק המפושט הבא:

$$G = (\{S, B, C\}, \{a\}, S, P)$$

$$P: \qquad S \to Ba|BBa|a.\ B \to CCa|Ca|a|Ba, \qquad C \to Ba|a|CCa|Ca$$

כל המשתנים טרמינליים, כל הסימנים ישיגים, אין כללי ϵ ואין כללי יחידה.

שימו לב: קיבלנו $B = C$. זה לא מפריע. לא למדנו אלגוריתם שבו נצמצם אותם לכלל יחיד, ולכן זוהי התשובה הסופית.