



Redes neurais aplicado na previsão de índice Sharpe:

Evidência em componentes do Ibovespa

Renan Delgado Camurça Lima

14 de julho de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

CAMPUS ITABIRA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Visão Geral

- **Objetivo:** Aplicar redes neurais na previsão do índice Sharpe para seleção de carteiras de investimento.
- **Originalidade:** Seleção de carteiras de investimento com o uso de redes neurais após otimização baseada no índice Sharpe.
- **Método:** Estudo empírico com dados históricos de ativos financeiros e dados econômicos aplicados em otimização de carteiras e redes neurais.
- **Principais descobertas:** As redes neurais, embora não superem as carteiras, demonstram desempenho superior ao Ibovespa. A estrutura de rede de *LSTM*+Atenção de Bahdanau obteve o melhor desempenho.
- **Implicação teórica e prática:** Contribui para o avanço do conhecimento na área de finanças e destaca o potencial das redes neurais na seleção de carteiras de investimento. Além disso, as peças de códigos geradas permitem a aplicação em outros estudos.
- **Palavras-chave:** Redes neurais, Índice Sharpe, Otimização de Carteiras.

Agenda

Introdução

Fundamentação Teórica

Metodologia

Resultados

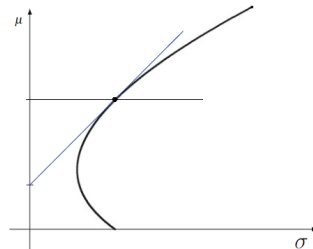
Conclusão

Teoria Moderna de Portfólio e Índice Sharpe

Teoria moderna de portfólio [1].

- Gestão de investimentos [2].
- Risco e retorno [3].
- Diversificação e preferência [4].
- Prêmio por unidade de risco [5].

Figura 1: Fronteira eficiente e Linha de Mercado



Fonte: adaptado Mansini, Ogryczak e Speranza[6].

Séries Temporais e Redes Neurais

Otimização de Carteiras de Investimentos

Modelos Tradicionais [7]

- Métodos estatísticos.
- Séries temporais lineares.
- *ARIMA*.

Novos Estudos

- Aprendizado de máquina.
- Séries temporais não lineares.
- Redes neurais.
- *LSTM*.

Otimização e Redes Neurais

Otimização de Carteiras de Investimentos com Índice Sharpe

Combinação de redes neurais e otimização:

- Vukovic et al.[8](2020): Perceptron multicamada para predição de ETF com melhor Índice Sharpe.
- Sun et al.[9](2022): Redes Convolucionais com Atenção para otimização de carteiras por reforço com índice Sharpe.
- Cao, Cao e Nguyen[10](2020): Redes Recorrentes com Atenção para otimização de carteiras por reforço com índice Sharpe.

Objetivos

Avaliação da aplicação de redes neurais para previsão de índice Sharpe para seleção de carteiras de investimentos

- Revisão sistemática.
- Ferramenta para coleta de dados.
- Modelo de alocação incluindo parâmetros reais.
- Estruturas de redes neurais.
- Analisar o desempenho da seleção.

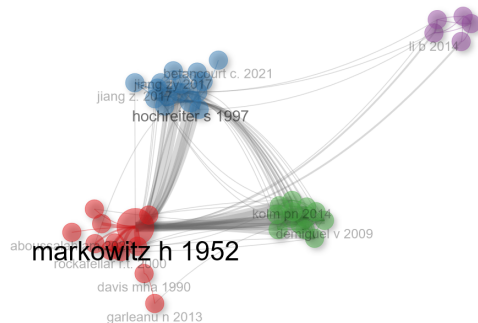
Análise de Revisão Sistemática

Quadro 1: Referências mais citadas pelos documentos selecionados

Referência citada	Citações	Visão Geral
Markowitz[1] 1952	31	Teoria Moderna de Portfólio.
Almahdi e Yang[11]2017	8	Alocação de carteira utilizando aprendizagem por reforço recorrente com máximo <i>drawdown</i> .
Hochreiter e Schmidhuber[12]1997	8	Redes neurais recorrentes LSTM.
Kolm, Tütüncü e Fabozzi[13]2014	8	Revisão de 60 anos da teoria de otimização de portfólio.
DeMiguel, Garlappi e Uppal[14]2009	7	Comparação de portfólio ótimo com modelo uniforme $1/N$.
Fischer e Krauss[15]2018	7	Previsão de movimento de mercado com LSTM aplicado a grande dimensionalidade.
Sharpe[5]1994	7	Índice de Sharpe.
Chen et al.[16]2021	6	Combina método de predição de aprendizagem de máquina XGBoost com modelo de média-variância para seleção de carteiras.
Heaton, Polson e Witte[17]2017	6	Revisão sobre o arcabouço de otimização de portfólio utilizando aprendizagem profunda.
Moody et al.[18]1998	6	Aprendizagem por reforço com aplicação do índice Sharpe com custos de transação para construção de carteiras.

Fonte: próprio autor.

Figura 2: Mapa de co-citação dos artigos



Fonte: próprio autor.

Risco e Retorno

$$\text{Retorno} = \frac{P_f - P_i}{P_i} \quad (1)$$

Retorno esperado:

- Média
- Média Móvel
- Média Móvel Exponencial
- Outros

Risco:

- Variância
- Desvio Padrão
- GARCH

Portfólio:

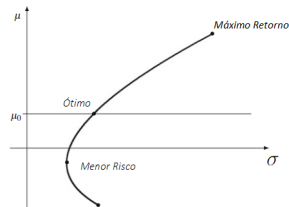
- Média ponderada
- Matriz de Covariância

Otimização de Portfólio

Média e Variância

$$\begin{aligned} &\underset{w}{\text{minimizar}} && w^T \Sigma w \\ &\text{sujeito a} && w^T \mu = \mu_p \\ & && w^T \mathbf{1} = 1 \\ & && w \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Figura 3: Otimização de portfólio utilizando o modelo de média-variância



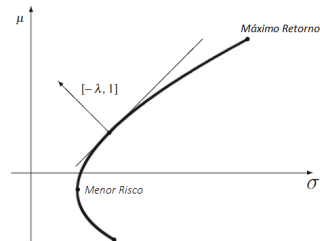
Fonte: adaptado de Mansini, Ogryczak e Speranza[6].

Otimização de Portfólio

Aversão ao Risco

$$\begin{aligned} &\underset{w}{\text{maximizar}} && w^T \mu - \lambda w^T \Sigma w \\ &\text{sujeito a} && \\ &&& w^T \mathbf{1} = 1 \\ &&& w \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Figura 4: Otimização de portfólio utilizando o modelo com o parâmetro λ de aversão ao risco



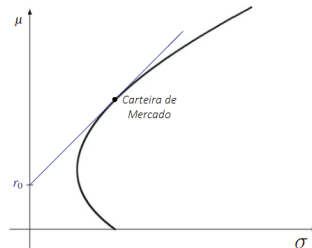
Fonte: adaptado de Mansini, Ogryczak e Speranza[6].

Otimização de Portfólio

Maximização do Índice de Sharpe

$$\begin{aligned} &\underset{w}{\text{maximizar}} && \frac{w^T \mu - r_f}{\sqrt{w^T \Sigma w}} \\ &\text{sujeito a} && \\ & && w^T \mathbf{1} = 1 \\ & && w \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Figura 5: Linha do mercado de capitais



Fonte: adaptado de Mansini, Ogryczak e Speranza[6].

Otimização de Portfólio

Parâmetros Reais

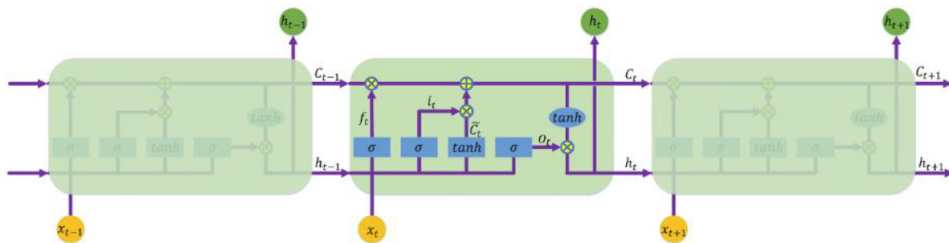
- Restrições de capital de investimento
- Custos de operação
- Cotação e lotes de negociação
- Rebalanceamento
- Cardinealidade
- Aversão ao risco

Problema de otimização não linear inteiro misto, NP-difícil.

Redes Neurais

As Redes Neurais são modelos computacionais inspirados no funcionamento do cérebro humano, capazes de aprender e realizar tarefas complexas de processamento de informações.

Figura 6: Célula LSTM.



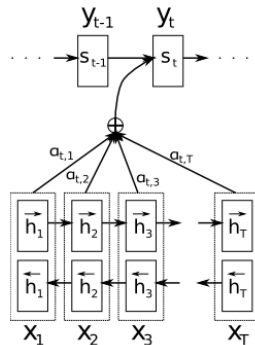
Fonte: Ta, Liu e Tadesse[19].

Redes Neurais Recorrentes e Atenção

Mecanismo de atenção é capaz de capturar dependências de longo alcance entre origem e destino. Modelos:

- Atenção Aditiva (Bahdanau, Cho e Bengio[20])
- Auto Atenção (Vaswani et al.[21])

Figura 7: Mecanismo de atenção.



Fonte: Bahdanau, Cho e Bengio[20].

Etapas

A metodologia está dividida em algumas etapas:

1. Coleta de dados
2. Pré-processamento
3. Modelagem de dados
4. Otimização de portfólio
5. Treinamento de redes neurais
6. Validação de modelos

Coleta de dados

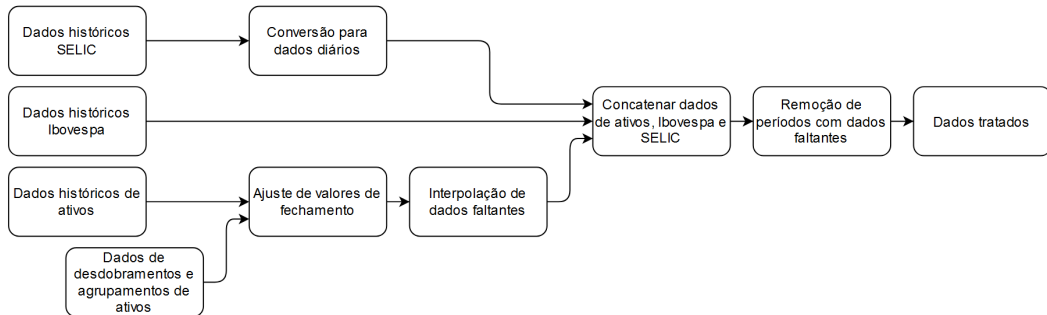
Quadro 2: Dados coletados

Dados	Fonte	Descrição
Preços de ativos	B3	Preços diário de ativos financeiros negociados na B3
Índice Bovespa	B3	Índice de mercado diário calculado pela B3
Componentes do Ibovespa	B3	Lista de ativos financeiros componentes do Ibovespa
Informações cadastrais de ativos	B3	Informações cadastrais no dia dos ativos financeiros listados na B3
Taxa SELIC	Banco Central	Taxa de juros anual por dia pelo Banco Central
Taxas de corretagem	Corretora	Taxas de corretagem cobradas pelas corretoras
Taxas de custódia	Corretora	Taxas de custódia cobradas pela B3
Imposto de renda	Receita Federal	Tabela de alíquotas de imposto de renda por tipo de ativo
Desdobramentos e grupamentos	<i>Yahoo Finance</i>	Desdobramentos e grupamentos de ativos financeiros

Fonte: próprio autor.

Pré-processamento

Figura 8: Fluxo de pré-processamento de dados



Fonte: próprio autor.

Modelagem

Desenvolvido módulo onde são preparadas as seguintes combinações.

- Intervalos de tempo: diários, semanais e mensais
- Métodos de cálculo de retorno: média simples, médias móveis, médias móveis exponenciais e ARIMA(0,1,1)
- Métodos de cálculo de risco: desvio padrão e GARCH(1,1)

Como exemplo, filtra-se dados de início de semana a partir de 2018 por 60 semanas. Os dados são agrupados por semana, ou seja, o primeiro dia da semana será a referência para o filtro dos dados. Em seguida, são selecionados os valores das datas obtidas, e calcula-se o retorno médio e o desvio padrão dos retornos.

Otimização de Portfólio

Modelo proposto a aplicação das seguintes restrições: capital de investimento, custos de operação, cotação e lotes de negociação, rebalanceamento, aversão ao risco e somente posições de compra.

Este modelo permite responder as seguintes perguntas: quanto dinheiro tem, e quanto aceita perder no intervalo de investimento para obter o máximo retorno?

κ_j é a variável de decisão, δ_j e z_j são as variáveis auxiliares. A descrição segue:

$\kappa_j \geq 0 \in \mathbb{Z} \quad j = 1, \dots, n,$ quantidade de lotes

$\delta_j \geq 0 \in \mathbb{Z} \quad j = 1, \dots, n,$ quantidade de rebalanceamento no lote

$z_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n,$ 1 se o ativo alterar quantidade

Otimização de Portfólio

Função objetivo, variáveis dependentes, cotação e lotes de negociação:

$$\underset{\kappa}{\text{maximizar}} \quad \frac{r_p(\kappa) - \frac{r_f}{(1+c_{r_f})C_p(\kappa)}}{\sigma_p(\kappa)} \quad (5a)$$

sujeito a

$$r_p(\kappa) = \sum_{j=1}^n \kappa_j q_j \mu_j - \sum_{j=1}^n K_j \quad (5b)$$

$$\sigma_p(\kappa) = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \kappa_j \kappa_i q_j q_i \sigma_j \sigma_i \rho_{ij}} \quad (5c)$$

$$C_p(\kappa) = \sum_{j=1}^n q_j \kappa_j + K_j \quad (5d)$$

r_p : retorno da carteira

σ_p : risco da carteira

r_f : retorno livre de risco

C_p : capital da carteira

c_{r_f} : taxa de imposto para ativo livre de risco

q_j : cotação do lote padrão

K_j : custo de transação do ativo

Otimização de Portfólio

Restrições de capital, custos de operação e rebalanceamento:

$$K_j = \sum_{j=1}^n c_j q_j \delta_j + \sum_{j=1}^n f_j z_j \quad (6a)$$

$$C_0 = \sum_{i=1}^n q_i \kappa_i^0 + B \quad (6b)$$

$$C_0 \geq C_p \quad (6c)$$

$$q_j \kappa_j \leq z_j C_0 \quad j = 1, \dots, n, \quad (6d)$$

$$\delta_j \geq \left(\kappa_j - \kappa_j^0 \right) \quad j = 1, \dots, n \quad (6e)$$

$$\delta_j \geq - \left(\kappa_j - \kappa_j^0 \right) \quad j = 1, \dots, n \quad (6f)$$

$$\delta_j \leq \gamma_j z_j \quad j = 1, \dots, n \quad (6g)$$

f_j : taxa de transação do ativo

c_j : custo de transação do ativo

κ_j^0 : quantidade inicial de lotes do ativo

γ_j : quantidade máxima de lotes do ativo

Otimização de Portfólio

Restrições de aversão ao risco:

$$r_{inv} - \sigma_{inv} Z_{\beta} \geq VaR \quad (7a)$$

$$\sigma_{inv} = \sigma_p \frac{C_p}{C_0} \quad (7b)$$

$$r_{inv} = \frac{C_0 - C_p}{C_0} \frac{r_f}{(1 + c_{r_f})} + \frac{C_p}{C_0} r_p \quad (7c)$$

r_{inv} : retorno do investimento

σ_{inv} : risco do investimento

VaR : valor monetário aceitável de perda

Z_{β} : quantil da distribuição normal padrão
ao nível de confiança β .

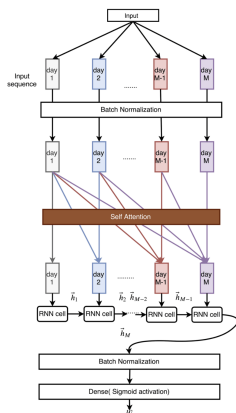
Otimização de Portfólio

Métodos para otimização:

- Otimização de portfólio sem restrições reais: SLSQP (Kraft[22])
- Otimização de portfólio com restrições: APOPT (Hedengren et al.[23]).
- Inicialização do otimizador: Distribuição Dirichlet [24].
- Matheurística: Busca no núcleo (Angelelli, Mansini e Speranza[25]).

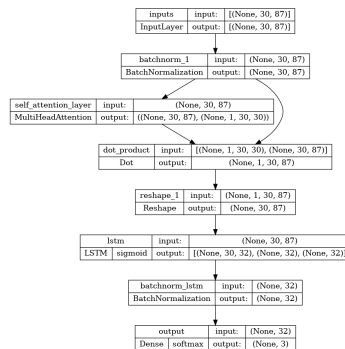
Treinamento de redes neurais

Figura 9: Fluxograma de redes neurais de RNN com auto atenção.



Fonte: adaptado de Cao, Cao e Nguyen[10].

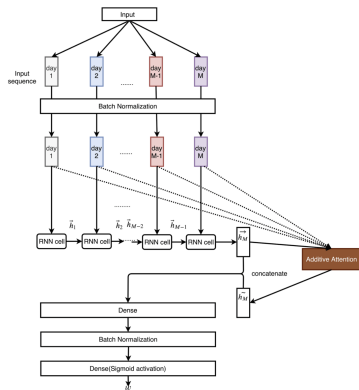
Figura 10: Estrutura de rede neural LSTM com auto atenção.



Fonte: próprio autor.

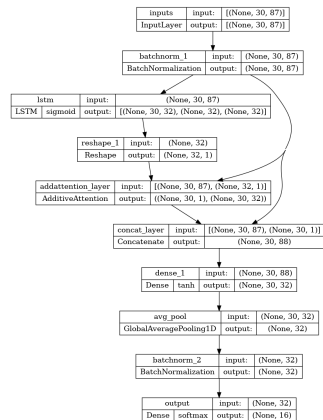
Treinamento de redes neurais

Figura 11: Fluxograma de redes neurais de RNN com atenção de Bahdanau.



Fonte: adaptado de Cao, Cao e Nguyen[10].

Figura 12: Estrutura de rede neural LSTM com atenção de Bahdanau.



Fonte: próprio autor.

Treinamento de redes neurais

Período de análise: 09/2018 - 01/2023

Hiperparâmetros: Hyperband Tuning,

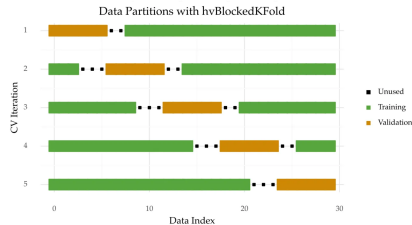
- Taxa de aprendizagem: 0.0001 a 1 distribuídos em função logarítmica reversa.
- Regularização L_2 : 0.0001 a 1 distribuídos em função logarítmica reversa.
- Épocas: 30.

Validação cruzada: 10 *folds* com lacunas de duas partes anteriores e uma parte posterior.

Função de perda: entropia cruzada categórica.

Métrica: acurácia.

Figura 13: Validação cruzada com lacunas.



Fonte: Cerqueira[26].

Validação de redes neurais

Período de análise: 09/2018 - 07/2023

Dados de entrada: bloco dos últimos 30 dias de preços de fechamento ajustado de 87 ativos do Ibovespa.

Divisão dos dados:

- 90% para treinamento (validação cruzada), 1078 amostras.
- 10% para teste, 120 amostras.

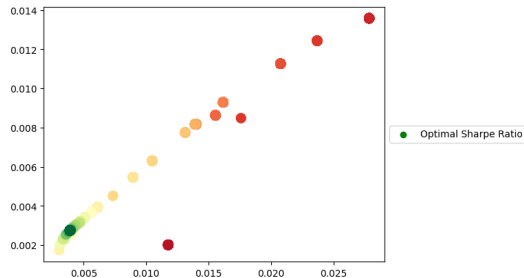
Atributos alvo: melhor carteira no próximo período dentre 3 carteiras otimizadas pelo índice Sharpe.

- Parâmetros de modelagem: média simples e desvio padrão.
- Intervalo de tempo para retorno: últimos 15, 30 e 60 dias.
- Intervalo de ajuste da otimização: diário.

Otimização com Parâmetros Reais

No cálculo foram considerados média e desvio padrão dos últimos 30 dias e risco igual a taxa SELIC para o último dia de junho de 2023.

Figura 14: Evolução da convergência de otimização da carteira



Fonte: próprio autor.

Otimização com Parâmetros Reais

Comparação de modelos:

- Carteira ótima sem restrições reais;
- Carteira ótima com restrições reais e início aleatório;
- Carteira ótima com restrições reais e heurística.

Cenários: média e desvio padrão dos últimos 15, 30 e 60 dias nos componentes do Ibovespa.

Dados: conforme quadro 2 de coleta de dados.

Quadro 3: Parâmetros de mercado e investimento

Parâmetro	Valor
Capital de Investimento	R\$ 20.000,00
Valor Monetário Aceitável de Perda Diária	R\$ 100,00
Quantil da Distribuição Normal Padrão ao Nível de Confiança	95%
Quantidade Inicial de Lotes do Ativo	0

Fonte: próprio autor.

Otimização com Parâmetros Reais

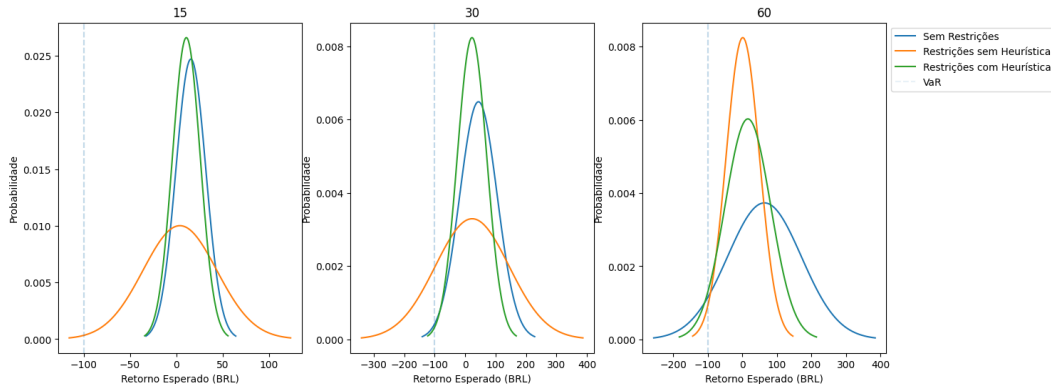
Tabela 1: Resultados da otimização para os três cenários

Carteira	Método	Retorno	Risco	Sharpe do Otimizador	Tempo (s)
15	Sem Restrições	15.80	16.14	0.9791	0.42
15	Restrições e Aleatório	3.96	39.83	-0.0849	3.81
15	Restrições com Heurística	10.90	14.99	0.0751	3.70
30	Sem Restrições	43.98	61.49	0.7152	0.20
30	Restrições e Aleatório	23.37	121.18	0.1191	3.92
30	Restrições com Heurística	22.80	48.41	0.2321	3.88
60	Sem Restrições	64.01	106.91	0.5987	0.18
60	Restrições e Aleatório	1.15	48.36	-0.1146	3.21
60	Restrições com Heurística	15.99	66.19	-0.1700	10.13

Fonte: próprio autor.

Otimização com Parâmetros Reais

Figura 15: Densidade de probabilidade das carteiras.



Fonte: próprio autor.

Otimização com Parâmetros Reais

Tabela 2: Alocação da carteira de 30 dias

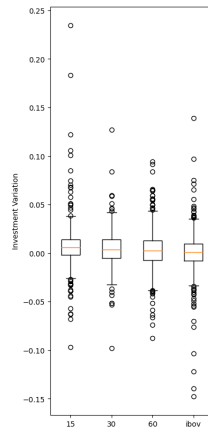
	Sem Restrições	Restrições com Heurística
BRKM5	480	-
ENBR3	15620	18912
EQTL3	1400	-
GOLL4	80	-
IRBR3	820	-
JBSS3	520	-
PRI03	540	-
RAIZ4	480	-
SLCE3	40	-
Livre de Risco	-	1088

Fonte: próprio autor.

Redes Neurais

Após a otimização das carteiras com atualização diária, é realizada a comparação dos retornos gerados pelas carteiras selecionadas no período de análise.

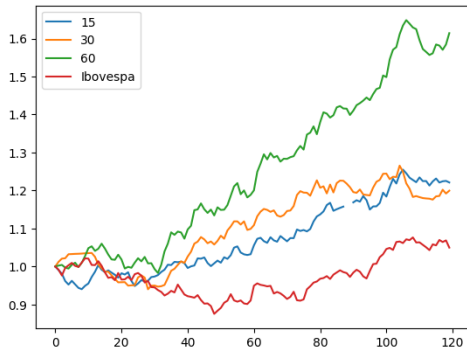
Figura 16: Retornos gerados pelas carteiras.



Fonte: próprio autor.

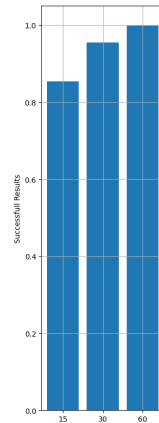
Redes Neurais

Figura 17: Retorno acumulado das carteiras.



Fonte: próprio autor.

Figura 18: Porcentagem de sucesso na otimização das carteiras.



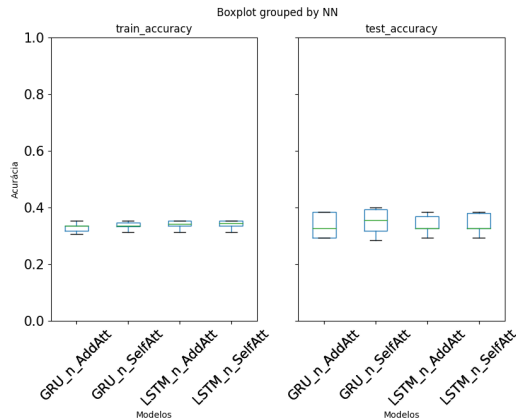
Fonte: próprio autor.

Redes Neurais

Estruturas:

- LSTM + Atenção de Bahdanau
- LSTM + Auto Atenção
- GRU + Atenção de Bahdanau
- GRU + Auto Atenção

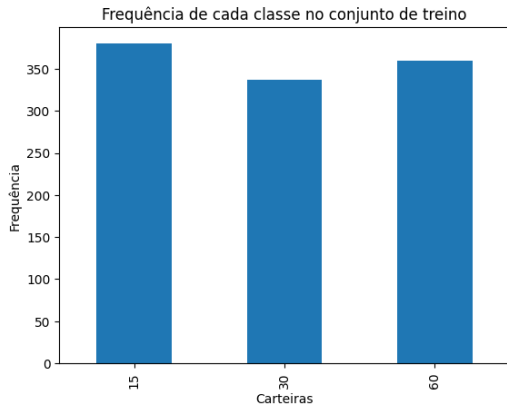
Figura 19: Acurácia para as redes avaliadas.



Fonte: próprio autor.

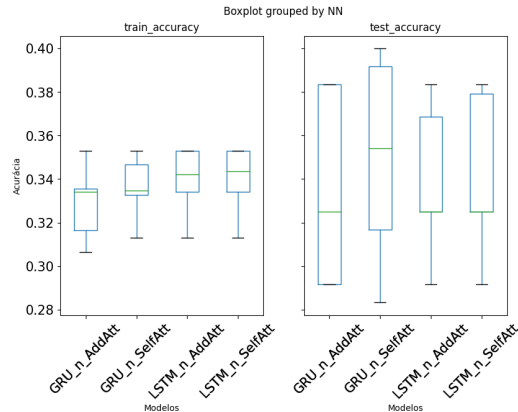
Redes Neurais

Figura 20: Frequência dos atributos alvos do teste.



Fonte: próprio autor.

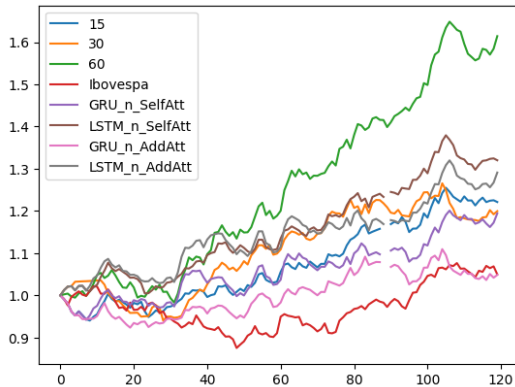
Figura 21: Acurácia para as redes avaliadas, ampliado.



Fonte: próprio autor.

Redes Neurais

Figura 22: Séries temporais de retorno acumulado geradas pelas predições das redes neurais.



Fonte: próprio autor.

Redes Neurais

Tabela 3: Índice Sharpe para as redes avaliadas e as carteiras.

	Média	Desvio Padrão	Índice Sharpe
GRU_n_SelfAtt	0.0016	0.0119	0.13
LSTM_n_SelfAtt	0.0024	0.0095	0.25
GRU_n_AddAtt	0.0005	0.0105	0.04
LSTM_n_AddAtt	0.0022	0.0114	0.19
15	0.0017	0.0101	0.17
30	0.0016	0.0108	0.15
60	0.0041	0.0131	0.31

Fonte: próprio autor.

Conclusão

O modelo sem restrições obteve melhor desempenho em tempo de otimização e índice Sharpe, enquanto o modelo com restrições e heurísticas teve desempenho inferior, exceto o modelo com início aleatório.

As redes neurais não superaram o desempenho das carteiras de investimento, mas superaram o índice Ibovespa. A rede neural LSTM+Atenção de Bahdanau teve o melhor desempenho, embora abaixo da carteira de 60 dias. A rede neural GRU+Atenção de Bahdanau teve o pior desempenho, ficando abaixo do índice Ibovespa em alguns momentos.

Conclusão

Aplicou-se redes neurais na previsão do índice Sharpe para seleção de carteiras de investimento. Identificado referências relevantes e as técnicas utilizadas. Elaborado modelo de processamento de dados históricos e econômicos. Construídos modelos de otimização e de previsão com redes neurais. Avaliado o desempenho dos modelos.

Essas descobertas contribuem para o avanço do conhecimento na área de finanças e destacam o potencial das abordagens baseadas em redes neurais na seleção de carteiras de investimento.

Como sugestões para trabalhos futuros, pode-se a aplicação de dados financeiros de análise técnica no treinamento de redes neurais e também a aplicação de redes neurais em outros modelos de otimização, como o CVaR.

Referências bibliográficas i

- 1 MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, v. 7, p. 77–91, 1952. ISSN 00221082, 15406261.
- 2 SETHI, S. Nobel laureate harry markowitz: Creator of the modern portfolio theory. *Management and Business Review*, v. 1, n. 2, 2021.
- 3 SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, v. 19, p. 425–442, 1964. ISSN 15406261.
- 4 LINTNER, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The Review of Economics and Statistics*, v. 47, 1965. ISSN 00346535.
- 5 SHARPE, W. F. The sharpe ratio. *The Journal of Portfolio Management*, v. 21, 1994. ISSN 0095-4918.
- 6 MANSINI, R.; OGRYCZAK, W.; SPERANZA, M. G. *Linear and mixed integer programming for portfolio optimization*. [S.l.: s.n.], 2015. Gerenal notes
.
- 7 ZHOU, Z. et al. Two-stage portfolio optimization integrating optimal sharp ratio measure and ensemble learning. *IEEE Access*, v. 11, 2023. ISSN 21693536.

Referências bibliográficas ii

- 8 VUKOVIC, D. et al. Neural network forecasting in prediction sharpe ratio: Evidence from eu debt market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 542, p. 123331, 2020. ISSN 03784371.
- 9 SUN, J. et al. Deep portfolio optimization modeling based on conv-transformers with graph attention mechanism. In: . [S.l.: s.n.], 2022. v. 2022-July.
- 10 CAO, H. K.; CAO, H. K.; NGUYEN, B. T. Delafo: An efficient portfolio optimization using deep neural networks. In: LAUW, H. W. et al. (Ed.). [S.l.]: Springer International Publishing, 2020. v. 12084 LNAI, p. 623–635. ISSN 16113349.
- 11 ALMAHDI, S.; YANG, S. Y. An adaptive portfolio trading system: A risk-return portfolio optimization using recurrent reinforcement learning with expected maximum drawdown. *Expert Systems with Applications*, v. 87, 2017. ISSN 09574174.
- 12 HOCHREITER, S.; SCHMIDHUBER, J. Long short term memory. *Neural Computation*, v. 9, 1997. ISSN 21695717.
- 13 KOLM, P. N.; TütüNCü, R.; FABOZZI, F. J. 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, v. 234, 2014. ISSN 03772217.

Referências bibliográficas iii

- 14 DEMIGUEL, V.; GARLAPPI, L.; UPPAL, R. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the $1/n$ portfolio strategy? *Review of Financial Studies*, v. 22, 2009. ISSN 14657368.
- 15 FISCHER, T.; KRAUSS, C. Deep learning with long short-term memory networks for financial market predictions. *European Journal of Operational Research*, v. 270, 2018. ISSN 03772217.
- 16 CHEN, W. et al. Mean–variance portfolio optimization using machine learning-based stock price prediction. *Applied Soft Computing*, Elsevier, v. 100, p. 106943, 3 2021. ISSN 1568-4946.
- 17 HEATON, J. B.; POLSON, N. G.; WITTE, J. H. Deep learning for finance: deep portfolios. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, v. 33, 2017. ISSN 15264025.
- 18 MOODY, J. et al. Performance functions and reinforcement learning for trading systems and portfolios. *Journal of Forecasting*, v. 17, 1998. ISSN 02776693.
- 19 TA, V. D.; LIU, C. M.; TADESSE, D. A. Portfolio optimization-based stock prediction using long-short term memory network in quantitative trading. *Applied Sciences (Switzerland)*, v. 10, 2020. ISSN 20763417.
- 20 BAHDANAU, D.; CHO, K. H.; BENGIO, Y. Neural machine translation by jointly learning to align and translate. In: . [S.l.: s.n.], 2015.
- 21 VASWANI, A. et al. Attention is all you need. In: . [S.l.: s.n.], 2017. v. 2017-December. ISSN 10495258.

Referências bibliográficas iv

- 22 KRAFT, D. A software package for sequential quadratic programming. *Technical Report DFVLR-FB*, v. 88, 1988.
- 23 HEDENGREN, J. D. et al. Nonlinear modeling, estimation and predictive control in apmonitor. *Computers and Chemical Engineering*, v. 70, 2014. ISSN 00981354.
- 24 YANG, H.; PARK, H.; LEE, K. A selective portfolio management algorithm with off-policy reinforcement learning using dirichlet distribution. *Axioms*, v. 11, 2022. ISSN 20751680.
- 25 ANGELELLI, E.; MANSINI, R.; SPERANZA, M. G. Kernel search: A new heuristic framework for portfolio selection. *Computational Optimization and Applications*, v. 51, 2012. ISSN 15732894.
- 26 CERQUEIRA, V. 9 *Techniques for Cross-validating Time Series Data* | by Vitor Cerqueira | Medium. 2023. Disponível em: <<https://vcerq.medium.com/9-techniques-for-cross-validating-time-series-data-7828fc3f781d>>.

Obrigado!
renandcl@unifei.edu.br