

# **Relatório EP1 – Machine Learning**

## **MAP3121**

Nome: Renan Ikeda Fernandes

Nusp: 10439892

Nome: Vinicius de Barros Silva

Nusp: 10335913

Turma: 01

Professor: Alexandre Roma

## Primeira tarefa

Na primeira parte da primeira tarefa foi feito somente duas funções, uma nomeada `escalonamento()` e outra `solve()`, a primeira faz sucessivas rotações de Givens tanto na matriz  $W$  quanto na matriz  $b$  de forma que toda posição com  $i < j$  seja 0, a rotina das funções seguiu conforme foi dado no enunciado. A segunda função faz a solução  $x$  do sistema escalonado, os resultados dos testes  $a$  e  $b$  se encontram abaixo.

a)  $n = m = 64$ ,  $W_{i,i} = 2$ ,  $i = 1, n$ ,  $W_{i,j} = 1$ , se  $|i - j| = 1$  e  $W_{i,j} = 0$ , se  $|i - j| > 1$ . Use  $b(i) = 1$ ,  $i = 1, n$ .

Os resultados obtidos seguem na Figura 1.

```
Vetor b escalonado
1.341641 0.956183 1.073490 -0.984732 -1.031860 -0.992278 -1.017769 -0.995345 -1.011328 -0.996890 -1.007850 -0.997775 -1.005760 -0.998330 -1.004406 -0.998700 -1.003480
-0.998960 -1.002817 -0.999149 -1.002328 -0.999291 -1.001956 -0.999400 -1.001666 -0.999485 -1.001436 -0.999554 -1.001251 -0.999610 -1.001009 -0.999655 -1.000974 -0.9996
94 -1.000869 -0.999726 -1.000779 -0.999753 -1.000703 -0.999777 -1.000638 -0.999797 -1.000581 -0.999815 -1.000532 -0.999830 -1.000488 -0.999844 -1.000450 -0.999856 -1.0
00416 -0.999866 -1.000386 -0.999876 -1.000359 -0.999885 -1.000335 -0.999892 -1.000313 -0.999899 -1.000293 -0.999905 -1.000275 0.107000

Vetor X das solucoes
0.492308 0.015384 0.476923 0.030769 0.461539 0.046153 0.446154 0.061538 0.430770 0.076922 0.415385 0.002307 0.400001 0.107691 0.384615 0.123076 0.369232 0.138460 0.353
847 0.153845 0.338462 0.169230 0.323078 0.184615 0.307693 0.199999 0.292308 0.215384 0.276924 0.230768 0.261539 0.246153 0.246155 0.261538 0.230770 0.276922 0.215385 0
.292307 0.200001 0.307692 0.184616 0.323076 0.169231 0.338461 0.153846 0.353846 0.138462 0.369231 0.123077 0.384615 0.107692 0.400000 0.092307 0.415385 0.076923 0.4307
70 0.061538 0.446154 0.046154 0.461539 0.030769 0.476923 0.015385 0.492308

Process returned 0 (0x0)   execution time : 1.112 s
Press any key to continue.
```

Figura 1: Tarefa 1, teste a.

Obs: Para uma melhor visualização do processo de escalonamento segue um teste equivalente ao anterior, mas com  $n=m=5$ , na Figura 2.

```
Matriz W
2.000000 1.000000 0.000000 0.000000 0.000000
1.000000 2.000000 1.000000 0.000000 0.000000
0.000000 1.000000 2.000000 1.000000 0.000000
0.000000 0.000000 1.000000 2.000000 1.000000
0.000000 0.000000 0.000000 1.000000 2.000000

Vetor b
1.000000 1.000000 1.000000 1.000000 1.000000

Matriz W escalonada
2.236068 1.788854 0.447214 0.000000 0.000000
0.000000 1.673320 1.912366 0.597614 0.000000
0.000000 0.000000 1.463850 1.951800 0.683130
0.000000 0.000000 -0.000000 -1.354006 -1.969464
0.000000 0.000000 0.000000 -0.000000 -0.809040

Vetor b escalonado
1.341641 0.956183 1.073490 -0.984732 -0.404520

Vetor X das solucoes
0.500000 -0.000000 0.500000 -0.000000 0.500000

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.036 s
Press any key to continue.
```

Figura 2: Tarefa 1, teste a com  $n=m=5$ .

Obs: Nesse caso foi trocado o denominador  $(i+j-1)$  por  $(i+j+1)$ , pelo fato de que no enunciado do EP se considera o início dos vetores/matrizes como 1, mas no caso do C se começa em 0.

```
Matrix W
1.000000 0.500000 0.333333 0.250000 0.200000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.500000 0.333333 0.250000 0.200000 0.166667 0.142857 0.142857 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.333333 0.250000 0.200000 0.166667 0.142857 0.125000 0.111111 0.100000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.250000 0.200000 0.166667 0.142857 0.125000 0.111111 0.100000 0.090909 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.166667 0.142857 0.125000 0.111111 0.100000 0.090909 0.083333 0.076923 0.076923 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.142857 0.125000 0.111111 0.100000 0.090909 0.083333 0.076923 0.076923 0.071429 0.066667 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.111111 0.100000 0.090909 0.083333 0.076923 0.076923 0.071429 0.066667 0.062500 0.058824 0.055556 0.052632 0.050000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.090909 0.083333 0.076923 0.071429 0.066667 0.062500 0.058824 0.055556 0.052632 0.050000 0.047619 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.076923 0.071429 0.066667 0.062500 0.058824 0.055556 0.052632 0.050000 0.047619 0.045455 0.043478 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.066667 0.062500 0.058824 0.055556 0.052632 0.050000 0.047619 0.045455 0.043478 0.041667 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.058824 0.055556 0.052632 0.050000 0.047619 0.045455 0.043478 0.041667 0.040000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.052632 0.050000 0.047619 0.045455 0.043478 0.041667 0.040000 0.038462 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.047619 0.045455 0.043478 0.041667 0.040000 0.038462 0.037037 0.035714 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.043478 0.041667 0.040000 0.038462 0.037037 0.035714 0.034483 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.040000 0.038462 0.037037 0.035714 0.034483 0.033333 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.037037 0.035714 0.034483 0.033333 0.032258 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.034483 0.033333 0.032258 0.031250 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.032258 0.031250 0.030303 0.029412
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.030303 0.029412 0.028571
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.028571 0.027778

Vector b
0.000000 1.000000 2.000000 3.000000 4.000000 5.000000 6.000000 7.000000 8.000000 9.000000 10.000000 11.000000 12.000000 13.000000 14.000000 15.000000 16.000000 17.0000
18.000000 19.000000
```

Segue na Figura 4 a matriz  $W$  e o veto  $b$  escalonados como a solução do sistema.

[illegible]

Figura 4: matriz  $W$  e o veto  $b$  escalonados e solução  $x$ .

A segunda parte dessa tarefa é ampliar as funções da tarefa acima para a solução de vários sistemas simultâneos, nesse caso o  $b$  se torna uma matriz  $n \times m$  e a matriz de solução se torna  $H$   $p \times m$ . As funções seguem a rotina dada pelo enunciado e também se encontram no código. Os resultados obtidos nos testes c e d são encontrados abaixo.

c)  $n = p = 64$ ,  $W_{i,i} = 2$ ,  $i = 1, n$ ,  $W_{i,j} = 1$ , se  $|i-j| = 1$  e  $W_{i,j} = 0$ , se  $|i-j| > 1$ . Defina  $m = 3$ , resolvendo 3 sistemas simultâneos, com  $A(i, 1) = 1$ ,  $A(i, 2) = i$ ,  $A(i, 3) = 2i - 1$ ,  $i = 1, n$ .

Segue nas Figura 5 e 6 a solução do sistema acima, sendo a matriz  $H$  tendo dimensões  $64 \times 3$ , sendo cada coluna a solução do vetor de resposta em relação a mesma coluna da matriz  $A$ .

```
Matriz H resolvida
0.492308 0.000005 -0.492287
0.015384 0.999990 1.984575
0.476923 0.000015 -0.476862
0.030769 1.999980 3.969149
0.461539 0.000024 -0.461437
0.046153 2.999971 5.953724
0.446154 0.000033 -0.446012
0.061538 3.999962 7.938301
0.430770 0.000043 -0.430589
0.076922 4.999953 9.922877
0.415385 0.000051 -0.415164
0.092307 5.999944 11.907451
0.400001 0.000062 -0.399737
0.107691 6.999932 13.892023
0.384616 0.000074 -0.384309
0.123076 7.999921 15.876595
0.369232 0.000084 -0.368880
0.138460 8.999909 17.861164
0.353847 0.000097 -0.353447
0.153845 9.999897 19.845730
0.338462 0.000109 -0.338014
0.169230 10.999884 21.830301
0.323078 0.000122 -0.322592
0.184615 11.999874 23.814884
0.307693 0.000130 -0.307178
0.199999 12.999867 25.799471
0.292308 0.000136 -0.291769
0.215384 13.999863 27.784069
0.276924 0.000136 -0.276372
0.230768 14.999865 29.768677
0.261539 0.000135 -0.260986
0.246153 15.999866 31.753298
```

Figura 5: As primeiras 32 linhas da matriz  $H$ .

```
0.246155 0.000131 -0.245610
0.261538 16.999872 33.737926
0.230770 0.000124 -0.230245
0.276922 17.999878 35.722565
0.215385 0.000117 -0.214888
0.292307 18.999886 37.707211
0.200001 0.000110 -0.199535
0.307692 19.999895 39.691856
0.184616 0.000099 -0.184175
0.323076 20.999907 41.676495
0.169231 0.000088 -0.168812
0.338461 21.999918 43.661137
0.153846 0.000074 -0.153467
0.353846 22.999933 45.645794
0.138462 0.000063 -0.138124
0.369231 23.999941 47.630451
0.123077 0.000052 -0.122786
0.384615 24.999956 49.615120
0.107692 0.000037 -0.107451
0.400000 25.999969 51.599781
0.092307 0.000022 -0.092109
0.415385 26.999985 53.584438
0.076923 0.000011 -0.076766
0.430770 27.999990 55.569096
0.061538 0.000007 -0.061425
0.446154 28.999992 57.553753
0.046154 0.000007 -0.046075
0.461539 29.999994 59.538395
0.030769 0.000004 -0.030719
0.476923 30.999996 61.523041
0.015385 0.000004 -0.015360
0.492308 31.999998 63.507679
```

Figura 6: As últimas 32 linhas da matriz  $H$ .

Obs: Para uma melhor visualização do processo segue na Figura 7 o mesmo teste anterior mas com  $n=p=5$ .

```

Matriz W
2.000000 1.000000 0.000000 0.000000 0.000000
1.000000 2.000000 1.000000 0.000000 0.000000
0.000000 1.000000 2.000000 1.000000 0.000000
0.000000 0.000000 1.000000 2.000000 1.000000
0.000000 0.000000 0.000000 1.000000 2.000000

Matriz A
1.000000 1.000000 1.000000
1.000000 2.000000 3.000000
1.000000 3.000000 5.000000
1.000000 4.000000 7.000000
1.000000 5.000000 9.000000

Matriz H
0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000

Matriz W rotacionada
2.236068 1.788854 0.447214 0.000000 0.000000
0.000000 1.673320 1.912366 0.597614 0.000000
0.000000 0.000000 1.463850 1.951800 0.683130
0.000000 0.000000 -0.000000 -1.354006 -1.969464
0.000000 0.000000 0.000000 -0.000000 -0.809040

Matriz A rotacionada
1.341641 1.788854 2.236068
0.956183 2.868549 4.780915
1.073490 3.903600 6.733711
-0.984732 -4.923659 -8.862587
-0.404520 -2.022599 -3.640679

Matriz H resolvida
0.500000 0.500000 0.500000
-0.000000 0.000000 0.000000
0.500000 1.500000 2.500000
-0.000000 -0.000000 -0.000000
0.500000 2.500000 4.500000

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.113 s

```

Figura 7: Teste c, com  $n=p=5$

d)  $n = 20$ ,  $p = 17$ ,  $W_{i,j} = 1/(i + j - 1)$ , se  $|i - j| \leq 4$  e  $W_{i,j} = 0$ , se  $|i - j| > 4$ . Defina  $m = 3$ , resolvendo 3 sistemas simultâneos, com  $A(i, 1) = 1$ ,  $A(i, 2) = i$ ,  $A(i, 3) = 2i - 1$ ,  $i = 1, n$ .



Novamente nesse caso foi alterado o denominador  $(i+j-1)$  por  $(i+j+1)$  pelos mesmos motivos citados no teste b. Os resultados seguem nas Figuras 8, 9 e 10.

[illegible]

Figura 8: Inicialização das matrizes  $W$  e  $A$ .

```
Matriz W rotacionada
1.209798 0.688820 0.492014 0.385411 0.317759 0.132975 0.066308 0.032562 0.012717 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.193193 0.186818 0.171496 0.156294 0.202641 0.150937 0.106785 0.073838 0.049297 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.113100 0.103167 0.094365 0.096024 0.088583 0.076380 0.064319 0.053658 0.057789 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
-0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.001240 0.083948 0.079967 0.077085 0.070267 0.062479 0.054966 0.054482 0.052441 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 -0.000000 0.000000 0.077919 0.071904 0.069987 0.065293 0.059569 0.053773 0.051921 0.049726 0.047560 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 -0.000000 -0.000000 0.000000 0.000000 0.007570 0.034785 0.013084 0.003536 -0.001364 0.026944 0.031809 0.030869 0.029707 0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 -0.000000 0.000000 -0.000000 -0.115364 -0.077670 -0.054035 -0.037728 -0.035003 -0.035900 -0.036153 -0.035843 -0.020396 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.100965 0.075263 0.056634 0.044276 0.040834 0.039036 0.037686 0.026369 0.019307 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -0.000000 -0.000000 0.000000 0.000000 -0.007490 -0.067998 -0.052395 -0.046464 -0.043080 -0.040710 -0.030921 -0.023996 -0.018768
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -0.000000 0.000000 0.076896 0.059714 0.052222 0.047687 0.044485 0.035143 0.028105 0.022634
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -0.000000 0.000000 -0.000000 -0.000000 0.046375 0.047486 0.046724 0.045439 0.054570 0.047785 0.039753
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -0.000000 0.000000 0.000000 0.037414 0.036375 0.035256 0.036105 0.035129 0.032781
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -0.000000 -0.000000 0.000000 0.034553 0.033472 0.032967 0.032532 0.031239
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -0.000000 0.000000 -0.000000 0.032279 0.031406 0.031003 0.030073
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.036127 0.024604 0.018854
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -0.000000 0.000000 0.000000 -0.000000 0.000000 0.041029 0.033789
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -0.000000 0.000000 0.028137
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000

Matriz A rotacionada
1.887367 4.132922 6.378476
1.515580 8.076375 14.637169
1.036525 7.072163 13.107801
1.011392 8.031672 15.051951
1.005987 9.031954 17.057920
0.588219 5.143671 9.699121
-0.928738 -9.709501 -18.490265
0.987681 11.448511 21.909340
-1.027019 -12.740993 -24.545969
1.075520 14.001270 26.927021
1.247919 18.188730 35.129547
1.021810 16.234869 31.447929
1.006343 17.069836 33.133327
1.003070 18.041130 35.079189
0.792518 14.567203 28.341888
0.964126 19.053974 37.143822
0.410258 8.396203 16.382153
-0.004857 -1.875058 -3.665257
0.530541 10.969482 21.408426
-0.032963 -0.749369 -1.465775
```

Figura 9: Matrizes  $W$  e  $A$  após o escalonamento.

```

Matriz H resolvida
2.881552 56.357819 109.834084
-1.833766 -45.874870 -89.915970
-1.513990 -43.489044 -85.464012
-1.521905 -48.576569 -95.631248
-0.453799 -30.140158 -59.826603
5.856701 89.812126 173.767548
3.421930 48.713657 94.005402
3.656561 59.239231 114.821907
1.203684 11.446347 21.689009
6.125346 109.162781 212.200165
-2.479716 -72.872780 -143.265793
-1.477932 -54.362965 -107.247826
-1.203902 -51.444420 -101.685013
0.128411 -25.014721 -50.158020
6.501591 98.571884 190.642288
11.491056 218.658905 425.826630
14.580524 298.400208 582.220032

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.232 s
Press any key to continue.

```

Figura 10: Matriz H, solução do sistema.

## Segunda tarefa

De acordo com o enunciado, era pedido a inicialização da matriz A e com isso a decompondo nas matrizes W e H, todas não negativas, conforme a Figura 11, a partir do método dos mínimos quadrados alternados.

$$A = \begin{pmatrix} 3/10 & 3/5 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 4/10 & 4/5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4/5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 11: Decomposição QR.

Dessa forma no programa foi inicializada a matriz W de forma aleatória utilizando a função rand(), utilizando anteriormente a função srand(time(NULL)). Assim, a matriz H e o processo de atualização da matriz W foram feitos conforme o enunciado do EP e pode ser vista no código na função minimosquadradosalternados().

Dessa forma a convergência depende das condições iniciais de W, mas em média se demorava 3-6 iterações para a diferença entre as normas do erro fosse menor que 0.00001. Segue na figura 12 o resultado após 4 iterações.

```
%/%/%/TESTE 4 %/%/%/%/%/%/%/%/%/%
Matriz A
0.300000 0.600000 0.000000
0.500000 0.000000 1.000000
0.400000 0.800000 0.000000

Matriz W
0.600119 0.000121
0.000261 1.000259
0.800159 0.000161

Matriz WH
0.299960 0.600020 0.000020
0.499913 0.000044 1.000044
0.399946 0.800027 0.000027

Matriz H final
0.499899 1.000000 0.000000
0.499869 0.000000 1.000000

Numero final de iteracoes 4

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.104 s
Press any key to continue.
```

Figura 12: Decomposição da matriz A nas matrizes W e H.



## Classificação de Dígitos Manuscritos

Os testes feitos foram para  $n_{\text{test}}$  fixo em 10000, variando para  $p=5, 10, 15$ , como  $ndig_{\text{treino}} = 100, 1000, 4000$ . Também se fixou o número de iterações máximo para teste de cada dígito em 100 e a diferença do erro da norma como 0.00001. Para esses testes seguem abaixo as Figuras dos testes feitos.

Acertos 0.882400	Acertos 0.907000	Acertos 0.916900
Acertos digito 0: 0.972449	Acertos digito 0: 0.974490	Acertos digito 0: 0.975510
Acertos digito 1: 0.995595	Acertos digito 1: 0.989427	Acertos digito 1: 0.994714
Acertos digito 2: 0.846899	Acertos digito 2: 0.858527	Acertos digito 2: 0.894380
Acertos digito 3: 0.856436	Acertos digito 3: 0.909901	Acertos digito 3: 0.918812
Acertos digito 4: 0.809572	Acertos digito 4: 0.860489	Acertos digito 4: 0.870672
Acertos digito 5: 0.827354	Acertos digito 5: 0.869955	Acertos digito 5: 0.884529
Acertos digito 6: 0.926931	Acertos digito 6: 0.963466	Acertos digito 6: 0.967641
Acertos digito 7: 0.886187	Acertos digito 7: 0.893969	Acertos digito 7: 0.890078
Acertos digito 8: 0.799795	Acertos digito 8: 0.867556	Acertos digito 8: 0.895277
Acertos digito 9: 0.883053	Acertos digito 9: 0.871160	Acertos digito 9: 0.867195

Figura 13: Testes para  $p=5$ , variando  $ndig_{\text{treino}}$  de 100, 1000 e 4000 respectivamente

Acertos 0.898600	Acertos 0.931300	Acertos 0.933600
Acertos digito 0: 0.976531	Acertos digito 0: 0.984694	Acertos digito 0: 0.983673
Acertos digito 1: 0.993833	Acertos digito 1: 0.993833	Acertos digito 1: 0.995595
Acertos digito 2: 0.902132	Acertos digito 2: 0.906977	Acertos digito 2: 0.917636
Acertos digito 3: 0.854455	Acertos digito 3: 0.918812	Acertos digito 3: 0.934653
Acertos digito 4: 0.860489	Acertos digito 4: 0.932790	Acertos digito 4: 0.943992
Acertos digito 5: 0.853139	Acertos digito 5: 0.899103	Acertos digito 5: 0.903587
Acertos digito 6: 0.956159	Acertos digito 6: 0.961378	Acertos digito 6: 0.962422
Acertos digito 7: 0.917315	Acertos digito 7: 0.915370	Acertos digito 7: 0.915370
Acertos digito 8: 0.792608	Acertos digito 8: 0.883984	Acertos digito 8: 0.874743
Acertos digito 9: 0.862240	Acertos digito 9: 0.906838	Acertos digito 9: 0.894945

Figura 14: Testes para  $p=10$ , variando  $ndig_{\text{treino}}$  de 100, 1000 e 4000 respectivamente

Acertos 0.909400	Acertos 0.932000	Acertos 0.939800
Acertos digito 0: 0.984694	Acertos digito 0: 0.986735	Acertos digito 0: 0.987755
Acertos digito 1: 0.993833	Acertos digito 1: 0.993833	Acertos digito 1: 0.995595
Acertos digito 2: 0.898256	Acertos digito 2: 0.918605	Acertos digito 2: 0.916667
Acertos digito 3: 0.863366	Acertos digito 3: 0.915842	Acertos digito 3: 0.926733
Acertos digito 4: 0.871690	Acertos digito 4: 0.920570	Acertos digito 4: 0.931772
Acertos digito 5: 0.840807	Acertos digito 5: 0.899103	Acertos digito 5: 0.908072
Acertos digito 6: 0.957203	Acertos digito 6: 0.966597	Acertos digito 6: 0.974948
Acertos digito 7: 0.941634	Acertos digito 7: 0.927043	Acertos digito 7: 0.932879
Acertos digito 8: 0.829569	Acertos digito 8: 0.868583	Acertos digito 8: 0.898357
Acertos digito 9: 0.894945	Acertos digito 9: 0.912785	Acertos digito 9: 0.916749

Figura 15: Testes para  $p=15$ , variando  $ndig_{\text{treino}}$  de 100, 1000 e 4000 respectivamente

A partir desses dados fica evidente que a quantidade de dígitos que se usa para efetuar o treinamento afeta a acurácia do algoritmo, como também a quantidade  $p$ , como é observado as diferenças entre a Figura 15 e a 13.

Foi plotado o gráfico da Figura 16 em Python para analisar o treino em função do número de dígitos e da variável  $p$ , a partir dele é visível que a diferença entre  $p=5$  e  $p=10$  é notável, entretanto a diferença de  $p=10$  para  $p=15$  é pequena, como também os dois tendem a convergir para um valor próximo aumentando-se o `ndig_treino`. Os testes foram feitos para `ndig_treino`=[100, 250, 500, 1000, 2500, 4000].

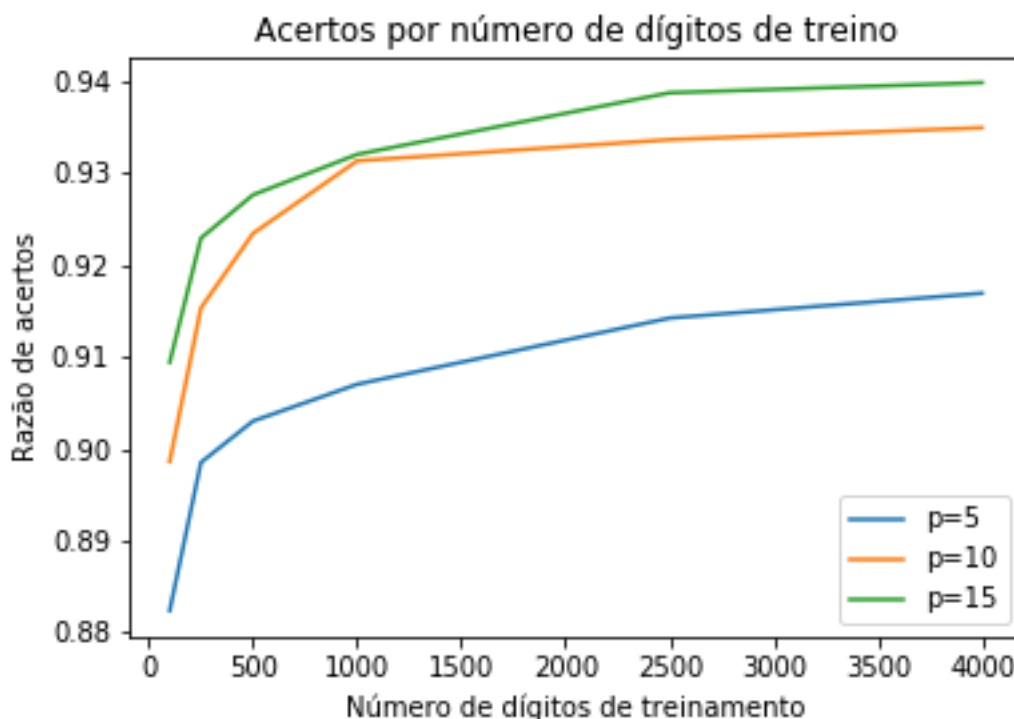


Figura 16: Gráfico de acertos por dígitos de treinamento.

Também vale ressaltar das Figuras 13 a 15 a recorrência do alto índice de acertos de dígitos como 0,1 e 6, além do menor índice de acertos dos dígitos 5 e 8. Na Figura 17 mostra a relação de acertos dentro do total de aparições do dígito em um teste com  $p=10$ , `ndig_treino`=1000 e `n_test`=1000. Nele se nota que o dígito 1 é o que aparece em maior quantidade dentro a base de teste, aparecendo 1135 vezes, como com o maior acerto total de 1130 vezes, em contraposição o dígito 5 é o que aparece menos, num total de 892 aparições. Entretanto esse não é o único fator que influencia na taxa de acertos de um dígito, pois observando o dígito 6 que tem 958 aparições teve uma taxa de acerto de 96,3%, como o dígito 2 com mais de mil aparições tem uma taxa de acerto próxima a do dígito 5.

```

Acertos 0.925200
Acertos digito 0: 965.000000, dentre: 980.000000, porcentual: 0.984694
Acertos digito 1: 1130.000000, dentre: 1135.000000, porcentual: 0.995595
Acertos digito 2: 926.000000, dentre: 1032.000000, porcentual: 0.897287
Acertos digito 3: 922.000000, dentre: 1010.000000, porcentual: 0.912871
Acertos digito 4: 893.000000, dentre: 982.000000, porcentual: 0.909369
Acertos digito 5: 794.000000, dentre: 892.000000, porcentual: 0.890135
Acertos digito 6: 923.000000, dentre: 958.000000, porcentual: 0.963466
Acertos digito 7: 935.000000, dentre: 1028.000000, porcentual: 0.909533
Acertos digito 8: 859.000000, dentre: 974.000000, porcentual: 0.881930
Acertos digito 9: 905.000000, dentre: 1009.000000, porcentual: 0.896928

```

Figura 17: Relação acertos de total de aparições

Fazendo o levantamento das estimativas erradas dadas pelo algoritmo para os algarismos 8 e 5 fica mais claro entender o motivo dos erros, no caso do dígito 8, ele é principalmente estimado como 0 ou 9, mas também em alguns casos como 3 e outros, o que faz sentido já que na escrita à mão o dígito 8 pode chegar muito próximo de 9 ou até de 3. Já o dígito 5 foi estimado muitas vezes como 3 e 6, que também eles podem ser bem próximos de 5 dependendo da forma como é escrita.

Foi feito um último teste para analisar a tendência da taxa de acerto, utilizando  $p=20$  e  $ndig\_treino=5000$  chegou-se num resultado, não muito superior aos obtidos no gráfico da Figura 16, de 0.9415. Nesse caso vale analisar do crescimento do custo computacional conforme se aumenta as dimensões do teste, nele o tempo aproximado foi de quase uma hora para se ganhar uma porcentagem 0.17% de acertos se comparado ao teste de  $p=15$  e  $ndig\_treino=4000$  que levou por volta de vinte e cinco minutos, sendo assim não há vantagem tão grande já que o ganho com a operação praticamente não é relevante.

Para se aumentar de fato a porcentagem de acertos total o mais aconselhável seria priorizar os treinos dos dígitos com menor acerto, como o dígito 2, 5, 8 e 9, aumentando a base de treino somente para esses dígitos para tentar não aumentar muito o tempo de computação, já que os dígitos como 0, 1 e 6 já estão com taxas de acertos altas portanto não é preciso investir tempo neles.

```

Acertos 0.941500
Acertos digito 0: 0.985714
Acertos digito 1: 0.991189
Acertos digito 2: 0.922481
Acertos digito 3: 0.926733
Acertos digito 4: 0.936864
Acertos digito 5: 0.906951
Acertos digito 6: 0.978079
Acertos digito 7: 0.925097
Acertos digito 8: 0.915811
Acertos digito 9: 0.918731

```

Figura 18: Teste máximo,  $p=20$ ,  $ndig\_treino=5000$ .

