Lista de Exercícios sobre Técnicas de Demonstração

Professor: Diogo Nunes Brandao

Aluno: Nicolas Vycas Nery

1) Defina um conjunto Xrecursivamente da seguinte forma.

B. 2 pertence a X.

R. Se x pertence a X, então $x + 10$ também pertence.

Use indução para provar que todo elemento de X é par.

Resposta:

$f: \mathbb{N} : X$ $\qquad f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 0; \\ f(x-1)+10; & \end{cases}$

$n > 0$

$f(n) = f(n-1) + 10;$

$\overset{(n-1)>0}{f(n-1)} = f(n-1) + 10$

$\vdots$

$f(n) = \{f(n-2)+10\} + 10 = f(n-2) + 2 \cdot 10$

$\vdots$

$f(n) = f(n-k) + 10 \cdot k$

$f(0) = 2, \; x - k = 0 \rightarrow x = k$

$f(x) = f(0) + 10 \cdot x$

$f(x) = 2 + 10 \cdot x = \underline{2}(1+5x)$

<u>Logo f(x) sempre será múltiplo de 2</u>

2) Use a Técnica de Indução para demonstrar as seguintes afirmações:

a) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ é divisível por 7, $\forall n \geq 0$.

Resposta:

7 divisor de $3^{2n+1} + 2^{n+2}$; $n \geqslant 0$

Caso $n=0$: $3^{2\cdot 0+1} + 2^{0+2} = 7$ Certo ; Caso $n=1$: $3^{2\cdot 1+1} + 2^{1+2} = 35$ Certo

Caso $n=k$: $3^{2\cdot k+1} + 2^{k+2}$; Caso $n=k+1$: $3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2}$

$3^{2k+3} + 2^{k+3}$

Se um numero é divisivel por 7 ele pode ser reescrito com $X \cdot 7$ então se $3^{2k+3} + 2^{k+3}$ é divisivel por 7 ele é igual a $7X$ onde X é inteiro

$7X = 3^{2k+3} + 2^{k+3}$; $7K = a$

$a = 3^2 \cdot 3^{2k+1} + 2^1 \cdot 2^{k+2} \to a = 9 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k+2}$

$a = 2 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k+2} + 7 \cdot 3^{2k+1} \to a = 2(3^{2k+1} + 2^{k+2}) + 7 \cdot 3^{2k+1}$

Já que $X7 = 3^{2k+1} + 3^{k+2}$ então: $a = 2(7X) + 7 \cdot 3^{2k+2}$

$a = 14X + 3^{2k+2} \to a = 7(2X + 3^{2k+2})$

a expressão toda é multiplicado por 7 logo a é divisivel por 7

b) $\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}$, *para todo* $n \in N$ *e todo* $c \in \mathbb{C} - \{0,1\}$.

Resposta:

$\sum_{i=0}^{n} C^i = \frac{C^{n+1}-1}{C-1}$, Para todo $n \in N$ e todo $c \in \mathbb{C} - \{0,1\}$

Caso $n=0$: $C^0 = \frac{C^{0+1}-1}{C-1} = \frac{C-1}{C-1} = 1$ Certo

Caso $n=1$: $1+C = \frac{C^2-1^2}{C-1} = \frac{(C+1)\cancel{(C-1)}}{\cancel{(C-1)}} = C+1$ Certo

Caso $n=2$: $1+C+C^2 = \frac{C^3-1}{C-1} = \frac{\cancel{(C-1)}(C^2+C+1)}{\cancel{(C-1)}} = C^2+C+1$ Certo

$1+C^1+C^2+C^3+\dots C^{n-1}+C^n = \frac{C^{n+1}-1}{C-1} = g(n)$

$1+C+C^2\dots+C^n+C^{n+1} = \frac{C^{n+2}-1}{C-1} = g(n+1) \therefore g + C^{n+1}$

$g(n+1) = \frac{C^{n+1}-1}{C-1} + C^{n+1}$ | $g(n+1) = \frac{C^{n+1}-1+(C-1)C^{n+1}}{C-1}$

$\frac{(\cancel{C^{n+1}}) + C^{n+2} \cancel{(-C^{n+1})} - 1}{C-1}$

$S(n+1) = \frac{C^{n+2}-1}{C-1}$

Valido

c) $\sum_{i=0}^{n} i2^{i} = 2^{n+1}(n-1) + 2,\ \forall n \in N$

Resposta:

d) O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela função:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & se\ n < 2 \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1 & se\ n \geq 2 \end{cases}$$

Prove que $T(n)^{-} \leq T(n) \leq T^{+}(n)$ para todo $n \in N$, onde T^{+} e T^{-} são as seguintes funções:

$$T^{-}(n) = \begin{cases} 0 & se\ n < 2 \\ 2T^{-}\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1 & se\ n \geq 2 \end{cases}$$

$$T^{+}(n) = \begin{cases} 0 & se\ n < 2 \\ T^{+}\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1 & se\ n \geq 2 \end{cases}$$

Resposta:

3)Utilize demonstração direta para provar que:

a) Para todo número real$x$, se $x > 1$ então $x^2 > 1$

Resposta:

Se $x > 1$

então $x^2 > 1$

$x^2 = |x * x| \geqslant 0$

Seja $f(x) = x^2$

então $f\ \mathbb{R} \to \mathbb{I}$

Seja $x = \alpha$

$\alpha > 1$

elevar ao quadrado nos dois lados

$a^2 > 1^2$

$a^2 > 1$

então se $x > 1$ entõa $x^2 > 1$

b) Para todos os número inteiro a,b e c, se a divide b e a divide c então a divide (b+c)

Resposta:

Sejam $\{a, b, c\} \in \mathbb{Z}$

Se $\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$ e $\frac{c}{a} \in \mathbb{R}$

Sejam $\{a, b, c\} \in \mathbb{Z}$

Se $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$ e $\frac{c}{a} \in \mathbb{Z}$, então, $\frac{b+c}{a} \in \mathbb{Z}$

A sentença anterior pode ser reescrita da seguinte forma

$\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a} \to \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a}$

4)Prove por contraposição que:

a) Suponha que x e y são número reais positivos tais que a média geométrica $\sqrt{xy}$ é diferente da média aritmética $\frac{x+y}{2}$**.**Então $x \neq y$.

Resposta:

$$\sqrt{xy} = \frac{x+y}{2}$$

$$\left(\sqrt{xy}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

$$xy = \frac{(x+y)^2}{4}$$

$$4(xy) = (x+y)^2$$

$$4(xy) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - \cancel{4xy} = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0$$

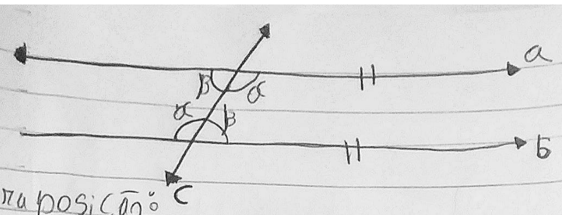
$$(x-y)^2 = 0$$

$$\sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{0}$$

$$x - y = 0 \rightarrow x = y$$

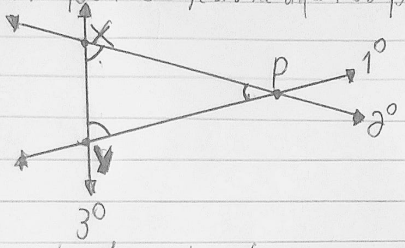
b) Se duas retas são cortadas por uma transversal tal que um par de ângulos internos é suplementar, então as retas são paralelas.

Resposta:



Contraposição:

Sejam 3 retas, onde duas retas são cortadas tran~~ver~~sversalmente pela terceira. As duas primeiras retas não são paralelas. Então essas duas retas se crusão em um ponto P, e a 3° reta forma 2 pontos com a 1° e 2° retas, X e Y



~~Pelo~~. O triangulo fomado pelos pontos XPY tem a soma dos angulos internos sempre igual a 180°, sendo o angulo em P maior que 0° a soma dos angulos em X e Y sempre será menor que 180°, nesse caso X e Y não podem ser suplementares

5) Em geometria euclidiana, demonstre por contradição que: Se duas retas compartilham uma perpendicular em comum, entre as retas são paralelas.

Resposta:

1. Reescrevendo o teorema:

$(\forall x)(\forall y)(C(x,y) \rightarrow P(x,y))$

Onde $C(x,y)$ é x e y possuem uma perpendicular em comum e $P(x,y)$ é x ou y

2. Negação do teorema 1:

$(\exists x)(\exists y)(C(x,y) \land !P(x,y))$

Contradição:

Supondo o contrário

Seja uma reta AB que é perpendicular com outras duas retas, AC e BD, e AC e BD não são paralelas.

Então, pela definição 1, AC e BD cruzam em algum ponto X. e o triângulo ABX tem dois ângulos retângulos e um terceiro ângulo com uma medida diferente de 0, contradizendo o teorema 2