



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA

**Criterios de Selección de Personal mediante el uso del
proceso de análisis jerárquico. Aplicación en la selección
de personal para la Empresa Exotic Foods S.A.C**

CAPÍTULO IV. PROCESO DE ANÁLISIS JERÁRQUICO (A.H.P)

MONOGRAFÍA

Para optar el Título de Licenciado en Investigación Operativa

AUTOR

Diego Edher Maurtua Ollaguez

LIMA – PERÚ
2006

CAPÍTULO IV

PROCESO DE ANÁLISIS JERÁRQUICO (A.H.P.)

4.1. PROCESO DE ANÁLISIS JERÁRQUICO

El Proceso de Análisis Jerárquico o método A.H.P. (Analytic Hierarchy Process) es una herramienta de soporte en los procesos de toma de decisiones de tipo multicriterio discreto, ésta se basa en la construcción de un modelo de jerarquías, el cual permite organizar la información de un problema complejo de forma gráfica y eficiente, de modo tal que se pueda descomponer y analizar por partes.

El método A.H.P. fue desarrollado por el Doctor en Ciencias Matemáticas Thomas Saaty a fines de la década de los ochenta, para resolver el tratado de reducción de armamento estratégico entre Estados Unidos y la Unión Soviética.

Según el creador de éste método: “El A.H.P. desmenuza un problema en sub-problemas y luego une todas las soluciones de estos en una conclusión”¹.

El propósito del método es el de permitir que el decisor pueda estructurar un problema multicriterio de forma visual, mediante la construcción de un modelo jerárquico, que básicamente contiene tres niveles: meta u objetivo, criterios y alternativas.

Una vez construido el modelo jerárquico, se realizan las comparaciones por pares entre dichos elementos (criterios, sub-criterios y alternativas) y se

¹Saaty Thomas, “Método de Análise Hierárquica”, Mc. Graw-Hill, Sau Paulo 1991.

atribuyen valores numéricos a las preferencias señaladas por los decisores, entregando una síntesis de las mismas mediante la agregación de esos juicios parciales.

El fundamento del proceso de Saaty descansa en el hecho que permite dar valores numéricos a los juicios dados por los decisores, logrando medir cómo contribuye cada elemento de la jerarquía al nivel inmediatamente superior del cual se desprende, llegando a obtener una síntesis como resultado final, que da una noción al decisor de la alternativa que debería de elegir, como también un análisis de la sensibilidad de los datos, para prever una posible variación en los juicios dados por los decisores.

4.2. BASE MATEMÁTICA DEL A.H.P.

El A.H.P. se basa en las propiedades de las matrices para la asignación de ponderaciones a los juicios establecidos por los decisores y para la normalización de las matrices de comparaciones por pares.

Para establecer las ponderaciones, el A.H.P. solicita al decisor asignar un peso de la comparación entre dos alternativas, en función a un determinado criterio, ésta comparación es mas conocida como comparación por pares.

Así mismo se hace uso del proceso matemático de síntesis para la obtención de resultados.

Saaty elaboró una tabla de escala de preferencias, que es usada para ponderar los juicios de los decisores entre dos criterios y/o alternativas:

Sean “i” y “j” los criterios y/o alternativas respectivamente:

Escala Numérica	Escala Verbal	Explicación
1	“i” es igualmente importante que “j”	Ambos elementos contribuyen con la propiedad en igual forma.
3	“i” es moderadamente importante que “j”.	La experiencia y el juicio favorece a un elemento sobre el otro.
5	“i” es fuertemente o esencialmente importante que “j”.	Un elemento es fuertemente favorecido.
7	“i” es muy fuertemente importante que “j”.	Un elemento es muy fuertemente dominante.
9	“i” es extremadamente importante que “j”.	Un elemento es favorecido, por lo menos con un orden de magnitud de diferencia.
2, 4, 6, 8	Valores intermedios entre dos juicios adyacentes.	Usados como valores de consenso entre dos juicios.

(Tabla N° 4.1.: Escala de preferencias de Saaty)

una vez obtenidas las ponderaciones, se elabora la matriz de comparaciones por pares.

MATRIZ DE COMPARACIÓN POR PARES

Es una matriz que posee las siguientes características:

- Sea A una matriz, de dimensiones $n \times n$ (“n” filas y “n” columnas), es decir, una matriz cuadrada, donde $n \in \mathbb{Z}^+$.

- Sea a_{ij} un elemento de la matriz A (donde $i = 1,2,3,\dots,n$ y $j = 1,2,3,\dots,n$); que representa la preferencia de un criterio y/o alternativa “i” (fila) sobre otro criterio y/o alternativa “j” (columna).
- Cuando $i = j$, el valor de $a_{ij} = 1$, debido a que se están comparando dos criterios y/o alternativas iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- El producto de $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$, lo cual está sustentado en los siguientes axiomas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- **Axioma N° 1:** referente a la condición de juicios recíprocos; la intensidad de preferencia de a_i/a_j es inversa a la preferencia de a_j/a_i .
- **Axioma N° 2:** referente a la condición de homogeneidad de los elementos; los elementos que se comparan son del mismo orden de magnitud.
- **Axioma N° 3:** referente a la condición de estructura jerárquica o estructura dependiente de reaprovechamiento; dependencia en los elementos de dos niveles consecutivos en la jerarquía y dentro de un mismo nivel.

- **Axioma N° 4:** referente a la condición de expectativas de orden de rango; las expectativas deben estar representadas en la estructura en términos de criterios y alternativas.

Una vez obtenidas las matrices de comparación por pares, se procede a calcular las prioridades de cada criterio y/o alternativa comparada.

El proceso matemático de calcular las prioridades es llamada síntesis, dicho proceso implica el cálculo de valores y vectores característicos.

La manera de sintetizar juicios es la siguiente:

- Primero sumamos todos los valores en cada columna de la matriz de comparación por pares.
- Luego dividimos cada valor de la matriz entre la sumatoria resultante obtenida en cada columna correspondiente a dicho valor. El resultado de esta división produce la llamada matriz de comparación por pares normalizada.
- Por último, calculamos el promedio aritmético con los valores presentes de cada fila de la matriz normalizada.

De esa manera se obtiene una matriz con las prioridades de cada criterio y/o alternativa.

MATRIZ DE PRIORIDADES

Es una matriz que expresa las prioridades de cada criterio en función a la meta global.

$$\begin{array}{c}
 \text{Meta} \\
 \text{Global} \\
 \begin{array}{c}
 \text{Criterio 1} \\
 \text{Criterio 2} \\
 \dots \\
 \text{Criterio } m
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 P'_1 \\
 P'_2 \\
 \dots \\
 P'_m
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Donde:

m : número de criterios.

P'_m : Prioridad del criterio “i” respecto a la meta global

($\forall i = 1,2,3,\dots,m$ criterios)

La matriz de prioridades también expresa las prioridades de cada alternativa, en función a cada criterio.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{Alternativa 1} \\
 \text{Alternativa 2} \\
 \dots \\
 \text{Alternativa } n
 \end{array}
 \begin{array}{ccccc}
 \text{Criterio 1} & \text{Criterio 2} & \dots & \text{Criterio } m \\
 \begin{pmatrix}
 P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1m} \\
 P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2m} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nm}
 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Donde:

P_{ij} : prioridad de la alternativa “i”, respecto al criterio “j”.

($\forall i = 1,2,3,\dots,n$ alternativas y $\forall j = 1,2,3,\dots,m$

criterios)

Ya obtenidas las matrices de prioridad de los criterios respecto a la meta global y de las alternativas respecto a los criterios, se procede a calcular la matriz de prioridad global:

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ \dots \\ P'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Pg_1 \\ Pg_2 \\ \dots \\ Pg_n \end{pmatrix}$$

Donde:

Pg_n : Prioridad global respecto a la meta global de la alternativa i .

($\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ alternativas)

Para darle confiabilidad a los resultados brindados por la síntesis, se procede a verificar la consistencia de las matrices de comparación por pares.

CONSISTENCIA DE UNA MATRIZ

La consistencia de una matriz de comparación por pares expresa el correcto juicio del decisor al momento de construir la matriz, ya que en el caso de que la matriz resulte inconsistente, el decisor deberá de replantear sus juicios.

Matemáticamente, una matriz $A_{n \times n}$ es consistente si $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$ ($\forall i, j, k = 1, 2, 3, \dots, n$); lo cual es indispensable que la matriz sea linealmente dependiente.

En el caso general, se conoce que si la matriz $A_{n \times n}$ es consistente, entonces genera una matriz $N_{n \times n}$ la cual está normalizada (conmuta con su traspuesta)² de elementos w_j ($\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$) de modo tal que todas las columnas son idénticas.

$$N = \begin{pmatrix} w_1 & w_1 & \dots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \dots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n & w_n & \dots & w_n \end{pmatrix}$$

Ahora, se puede determinar la matriz A en función de N , de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Dividiendo los elementos de la columna i entre w_i .

En base a la definición se A , se desglosa:

$$\begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$AW = nW$$

Donde W es el vector columna de pesos relativos w_j que se aproxima con los n elementos de las filas en la matriz normalizada N .

²Sea B una matriz normal, entonces se cumple que $B \cdot B^T = B^T \cdot B$.
Las matrices simétricas, antisimétricas y ortogonales son normales.

Haciendo \bar{W} el estimado calculado, se puede notar que:

$$A \bar{W} = n_{\max} \bar{W}$$

Donde $n_{\max} \geq n$, es decir, mientras más próximo este n_{\max} a n , la matriz de comparación por pares A , será más consistente.

Como resultado, el A.H.P. calcula la razón de consistencia (RC), que se expresa como el cociente entre índice de consistencia de la matriz A y el índice de consistencia aleatorio (IA).

$$RC = \frac{IC}{IA}$$

Donde IC es el índice de consistencia de la matriz A , calculándose de la siguiente manera:

$$IC = \frac{n_{\max} - n}{n - 1}$$

El valor de n_{\max} se calcula de $A \bar{W} = n_{\max} \bar{W}$, notando que la i -ésima ecuación es:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{w}_j = n_{\max} \bar{w}_i$$

Dado que, $\sum_{i=1}^n \bar{w}_i = 1$ se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{w}_j \right) = n_{\max} \sum_{i=1}^n \bar{w}_i$$

Es decir, el valor de n_{\max} se determina al calcular primero el vector columna de la matriz A y luego sumando sus elementos.

El índice de consistencia aleatoria (IA) es el índice de consistencia de una matriz de comparación por pares, generada de forma aleatoria.

La tabla de índice de consistencia aleatoria es la siguiente:

Nº elementos comparados	Índice Aleatorio (IA)
3	0.58
4	0.89
5	1.11
6	1.24
7	1.32
8	1.40
9	1.45
10	1.49

(Tabla Nº 4.2.: Índice Aleatorio)

Algunos autores sugieren el uso de la siguiente fórmula para la estimación del IA:

$$IA = \frac{1.98 (n-2)}{n}$$

Una vez obtenidos el índice de consistencia y el índice de consistencia aleatorio, ya se puede determinar la consistencia de una matriz, mediante el cálculo de la razón de consistencia (RC).

Si la razón de consistencia resulta menor o igual a 0.10, entonces la matriz de comparación por pares es consistente.

Si la razón de consistencia resulta estrictamente mayor que 0.10, entonces la matriz de comparación por pares es inconsistente, lo que llama a la reflexión del decisor, para que replantee sus juicios en base a las comparaciones de los criterios y/o alternativas que había hecho.

Un caso excepcional se da cuando la matriz de comparación por pares es de 2x2, ya que al momento de calcular la razón de consistencia, resulta un valor indeterminado (en la mayoría de textos relacionados con este tema, indican que cuando el N° de elementos comparados es igual a 2, el $IA=0$, por consiguiente la RC resulta indeterminada).

Entonces para solucionar este problema, sólo en este caso, la consistencia de la matriz se basa en la dependencia lineal, por lo que resulta que toda matriz de comparación por pares de 2x2 es consistente.

4.3. PREPARACIÓN PARA LA APLICACIÓN DEL A.H.P.

Para llevar a cabo la aplicación del A.H.P., en cualquier tipo de problema de decisión multicriterio discreto, se debe de tener en cuenta como puntos de partida los siguientes ítems:

4.3.1. DEFINICIÓN DE PARTICIPANTES

Los participantes para la aplicación del A.H.P. son todos los personajes que están directamente involucrados con el proceso de toma de decisión.

Para detectar de manera rápida a los participantes, deben de hacerse preguntas tales como: ¿quiénes participan en el proceso?, ¿quién supervisa el proceso? , ¿qué tanto conocen acerca del proceso?, a manera que justifiquen el porque están siendo considerados como parte del grupo decisor.

4.3.2. INFORMACIÓN REQUERIDA

La información es un elemento fundamental para el proceso de toma de decisión, para ello se requiere disponer de la información mas necesaria para poder definir de manera correcta los criterios de decisión.

Ésta información puede ser de tipo científica, práctica y experimental.

4.3.3. RECURSOS ASOCIADOS CON EL PROCESO

Los principales recursos asociados al Proceso de Análisis Jerárquico son: tiempo, espacio, humano y económico.

Con respecto al tiempo; se debe de disponer de una cantidad prudente de horas para poder realizar las sesiones de grupo, en las cuales con la información obtenida y el debate de los participantes, se dará por consenso cuales serán los criterios más relevantes, el objetivo de decisión y las alternativas de decisión.

Con respecto al espacio, se debe de contar con un ambiente propicio para poder llevar a cabo las sesiones de trabajo.

Con respecto al recurso humano, se debe de contar con un grupo de participantes, que viene a ser el grupo decisor, además de un coordinador del grupo que también es llamado el facilitador, cuya labor es la de guiar al grupo en todo el proceso de decisión y por consiguiente en la aplicación del método A.H.P.

Cumplir el rol de facilitador no es tarea fácil, debido a que tiene que enfrentarse a situaciones de confrontación de ideas entre los miembros del

grupo decisor, al momento de expresar sus opiniones sobre uno u otro aspecto relacionado con el proceso.

Con respecto al recurso económico, la Empresa debe de costear la adquisición del software Expert Choice, así como el asesoramiento del facilitador al grupo decisor y otros costos que deben de incluirse en el presupuesto del proyecto de implementación del proceso de Análisis Jerárquico a la toma de decisiones.

4.4. METODOLOGÍA DEL A.H.P.

El desarrollo del Proceso de Análisis Jerárquico conlleva a una serie de pasos a seguir, los cuales se detallan a continuación:

4.4.1. ESTRUCTURACIÓN DEL MODELO JERÁRQUICO

El A.H.P. parte de la estructuración jerárquica de un problema de decisión, es la identificar el problema de decisión, así como de tres aspectos fundamentales: meta u objetivo general, criterios y alternativas.

Estos aspectos tienen que ser claramente identificados por el grupo decisor, que a continuación se detallan:

4.4.1.1. IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Es la detección del motivo principal por el cual se quiere tomar una decisión, que va a ser solucionada con el A.H.P. y que por consiguiente mejorará el proceso que este relacionado con ello.

4.4.1.2.DEFINICIÓN DEL OBJETIVO

Es la acción primordial que va a tomar el decisor en base al problema presentado, para que mejore el funcionamiento de un proceso y/o situación presentada.

Para cumplir el objetivo del decisor, el A.H.P. trabaja con criterios que le van a permitir evaluar las alternativas existentes.

4.4.1.3.IDENTIFICACIÓN DE LOS CRITERIOS

Es la detección de las características genéricas más relevantes de las alternativas existentes.

Los criterios influyen de manera directa sobre el objetivo, por ende el decisor o grupo decisor tiene que concertar bien que criterios son los mas importantes, exceptuando aquellos que sean importantes pero a la vez con complejos por su definición y medición.

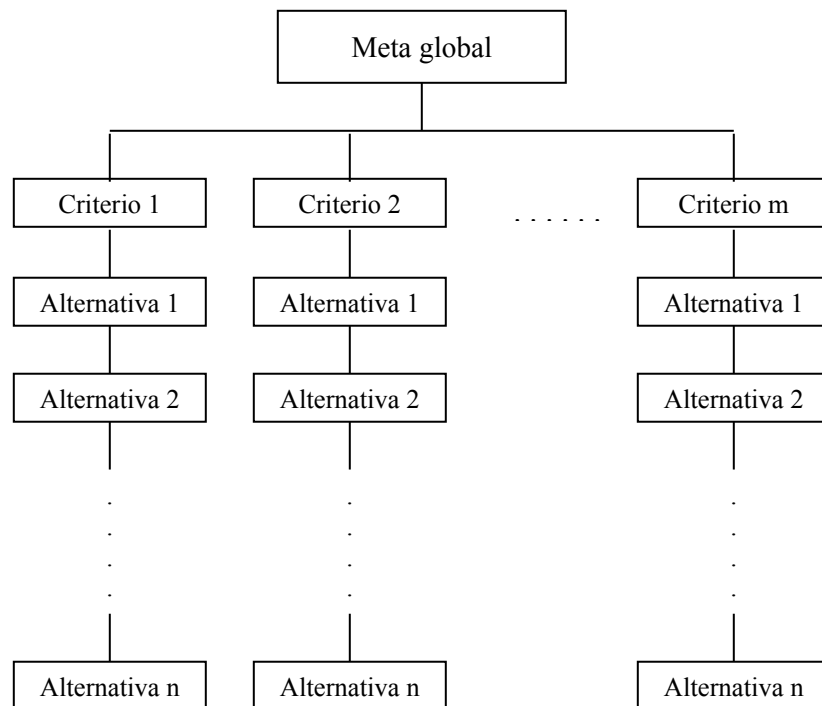
Existen criterios de tipos cualitativos y cuantitativos; los criterios cualitativos están relacionados con las preferencias, experiencias y demás características genéricas de las alternativas, mientras que los criterios cuantitativos están relacionados con los datos históricos, puntuaciones y demás información numérica que posean en común las alternativas.

4.4.1.4. IDENTIFICACIÓN DE LAS ALTERNATIVAS

Es la detección de las opciones que tiene el decisor para cumplir su objetivo, las cuales deben de pertenecer a un mismo rubro, para poder considerar características en común.

4.4.1.5. ÁRBOL DE JERARQUÍAS

Es un tipo de grafo, que permite tener una visión panorámica del modelo jerárquico, es decir, poder apreciar la meta global u objetivo, criterios, sub-criterios en caso existan, y alternativas.



(Gráfico N° 4.1.: Árbol de Jerarquías)

4.4.2. EVALUACIÓN DEL MODELO

Es la fase del A.H.P. en que se hace uso de la información obtenida, que ha sido proporcionada al grupo decisor para que emitan la opinión más consistente posible y así establecer las prioridades entre los criterios y/o alternativas.

Ya establecidas las prioridades se hacen los juicios y evaluaciones, lo que en detalle se ve a continuación:

4.4.2.1. ESTABLECIMIENTO DE LAS PRIORIDADES

Para establecer prioridades entre los criterios y/o alternativas de decisión, el A.H.P. hace uso de las comparaciones por pares, es decir se construye una matriz (dependiendo del número de criterios y/o alternativas, se establecerá la dimensión de la matriz) para luego hacer la comparación de un criterio y/o alternativa de la fila, con otro de la columna.

4.4.2.2. EMISIÓN DE JUICIOS Y EVALUACIONES

La emisión de los juicios depende fundamentalmente del grupo decisor, empleando como soporte sus experiencias, conocimientos y demás información de su utilidad.

Todo ese conjunto de opiniones son resumidas en un juicio, el cual expresa un valor entre la comparación por pares de criterios y/o alternativas.

Dicho valor es hallado de la tabla de preferencias que el propio Saaty creo (ver tabla N° 4.1).

Una vez completada la matriz de comparación por pares con los juicios del grupo decisor, se procede a calcular el vector propio, asociado al mayor valor de la matriz mencionada.

En el caso que se tengan más de diez alternativas hasta cientos y miles de ellas se aplica la medida absoluta, es decir, el modelo debe tener su objetivo, sus criterios y sub-criterios; en lugar de tener alternativas visibles en el modelo, se crean escalas debajo de los criterios y sub-criterios, contra las cuales las alternativas serán evaluadas.

Igual que en la medida relativa, los elementos del modelo se comparan de a pares y se mide su preferencia; la diferencia radica en que en la medida absoluta, éste procedimiento se hace solo para los criterios y sub-criterios. Las alternativas no se comparan porque no aparecen en el modelo; en su lugar, se comparan y se miden las preferencias de las escalas creadas que desprenden de los criterios y los sub-criterios.

4.4.3. RESULTADO FINAL

El resultado final se deduce una vez que se hallan producido todas las comparaciones por pares con sus respectivos juicios existentes, para luego hacer la síntesis del modelo jerárquico y en caso de existencia de variaciones en los juicios del decisor el análisis de sensibilidad.

4.4.3.1.SÍNTESIS

Es la combinación de todos los juicios emitidos por el grupo decisor, llegando a obtener como resultado un ranking de las alternativas que ellos mismos presentaron.

El A.H.P. a través del software Expert Choice, presenta dos modos de síntesis:

SÍNTESIS DE MODO DISTRIBUTIVO

Es recomendable cuando el proceso de toma de decisiones está orientado al planeamiento, asignación de recursos y cuando se tengan alternativas con valores únicos para la mayoría de los criterios.

SÍNTESIS DE MODO IDEAL

Es recomendable cuando el proceso de toma de decisiones tenga alternativas con valores iguales en la mayoría de los criterios.

Cabe mencionar que en el 90% de los casos, los resultados de éstas dos síntesis, son muy similares.

4.4.3.2. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El análisis de sensibilidad se utiliza para investigar la sensibilidad de la prioridad de las alternativas a cambios en la importancia de los criterios, lo que convierte al A.H.P. en un modelo dinámico lo que se refleja en la actualidad, un sistema en constante cambios y que es por cierto de mucha utilidad.