Лекция 2

О дуальности (двойственности) схем и уравнений электрических цепей.

В теории электрических цепей важное значение придаётся понятию дуальности схем, уравнений, параметров, физических величин. Подробнее это понятие будет рассмотрено в дальнейшем. Здесь познакомимся с ним на примерах.

Пример 1

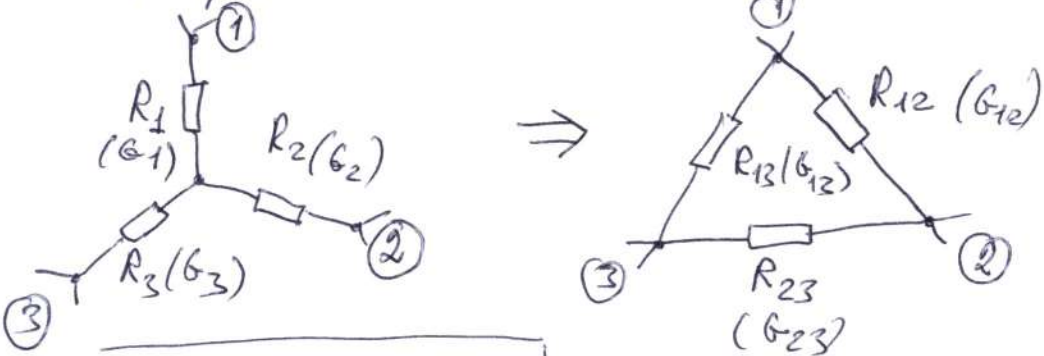
Первый закон Кирхгофа   Второй закон Кирхгофа

$$\sum i_j = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum u_j = 0$$

Заменив узлы и токи на контуры и напряжения перейдём от уравнения 1-го закона ~~на 2-ой~~. к уравнению 2-го закона.

Пример 2

Преобразование $\lambda \to \Delta$



$$(*) \quad \boxed{R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}} ,$$

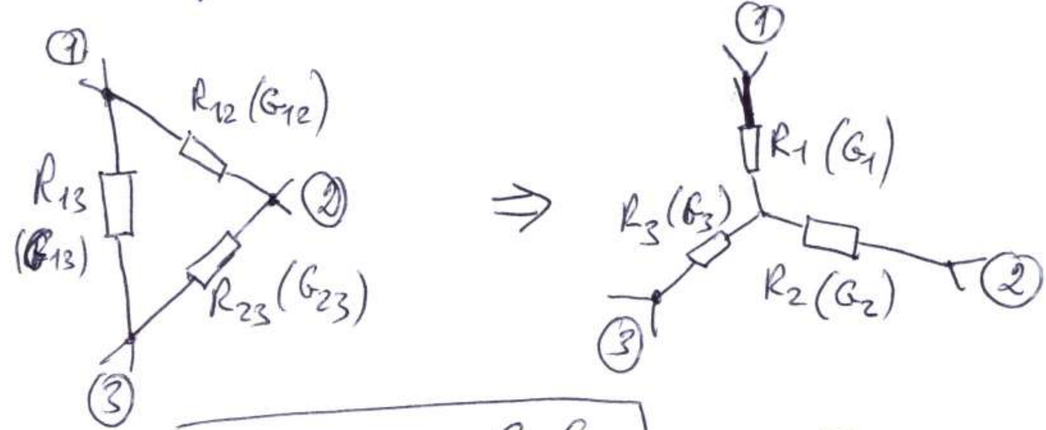
$$(**) \quad \boxed{G_{12} = \frac{G_1 \cdot G_2}{\Delta}}$$

где $\Delta = G_1 + G_2 + G_3$

Выражение для $R_{23}(G_{23})$ и $R_{13}(G_{13})$ получаются из выражений (*) и (**) с помощью круговой перестановки индексов

Замечание. Если $R_1 = R_2 = R_3$, то $R_{12} = R_{23} = R_{13} = 3R$

Преобразование $\Delta \to \curlywedge$



(***) $$\boxed{G_1 = G_{12} + G_{13} + \frac{G_{12} G_{13}}{G_{23}}}$$

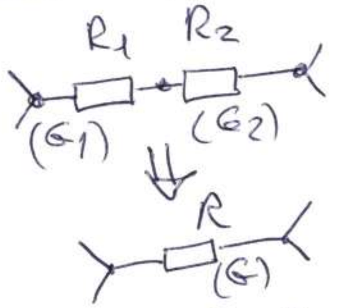
(****) $$\boxed{R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{\Delta}}$$

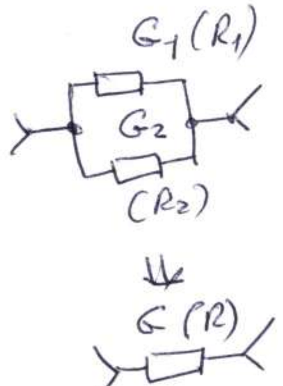
Дуальные выражения (*) и (***), (**) и (****)

где $\Delta = R_{12} + R_{23} + R_{13}$

Замечание. Если $R_{12} = R_{23} = R_{13} = R$, то $R_1 = \frac{R}{3}$

Пример 3





$R = R_1 + R_2$ $\longrightarrow$ $G = G_1 + G_2$

$\left(G = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2}\right)$ $\longrightarrow$ $\left(R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$

Заменив последовательное соединение резистивных элементов на параллельное, а сопротивление на проводимость получим дуальную формулировку преобразования параметров соединений.

! В дальнейшем многие понятия, принципы, свойства теории цепей будут даваться в дуальных (двойственных) формулировках

Мгновенная мощность элементов электрических цепей.

$p = u\cdot i$ – мгновенная мощность. Единица мощности – Ватт. $[P]$ = Вт. Кратная единица: 1 кВт $= 10^3$ Вт

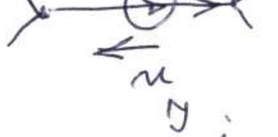
1. Мощность потребления (мощность резистивного элемента)

$p = u\cdot i$

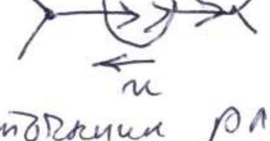
$p = \underbrace{(Ri)}_{u}\cdot i = Ri^2 \geq 0$ $\quad$ $p = u\cdot \underbrace{(Gu)}_{i} = Gu^2 \geq 0$

Дуальные формулировки

2. Мощность генерации



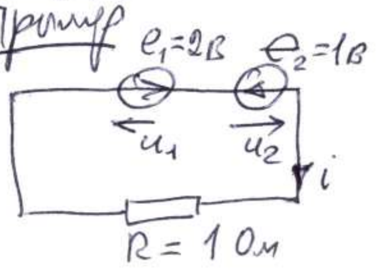
$p = u\cdot i = e\cdot i$ – мощность источника ЭДС



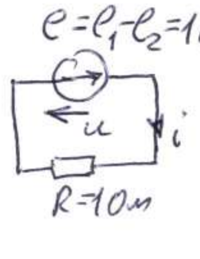
$p = u\cdot i = J\cdot u$ – мощность источника тока

! Источники рассчитаны на выработку энергии ($p>0$), но при неправильном включении они могут и потреблять её (т.е. может быть $p<0$).

Пример



$\Rightarrow$



$i = \frac{u}{R} = \frac{e_1-e_2}{R} = 1$ A

$P_1 = u_1\cdot i = 2$ Вт, $P_1>0$

$P_2 = u_2\cdot i = u_2\cdot(-i) = -1$ Вт

$P_2 < 0$

Если мощность генерации источника отрицательна, то это означает, что он не генерирует, а потребляет энергию.

3. Мощности реактивных элементов

$$p_L = u\cdot i = (\underbrace{L\frac{di}{dt}}_{u})\cdot i \gtreqless 0$$

$$p_C = u\cdot i = u\cdot\left(C\frac{du}{dt}\right) \gtreqless 0$$

При переменных токах и напряжениях ($u = var$, $i = var$) эти мощности могут быть как положительны, так и отрицательны, а могут быть и знакопеременны.

Фундаментальная система уравнений электрической цепи.

Пусть цепь (схема) содержит p – элементов (ветвей) и q – узлов.

Тогда по 1-му закону Кирхгофа можно составить $(q-1)$ – независимые уравнение, а по второму закону Кирхгофа $p-(q-1) = p-q+1$ независимое уравнение

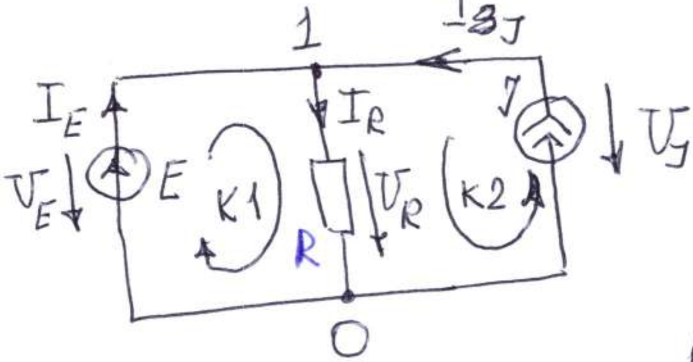
Т.е. всего по законам Кирхгофа можно составить p независимых уравнений

Для p элементов (ветвей) можно составить p компонентных уравнений.

Т.о. по ~~законам~~ уравнениям Кирхгофа и компонентным уравнениям можно составить систему из $2p$ ~~незав~~ уравнений для определения $2p$ неизвестных токов и напряжений ветвей схемы.

Полученную систему уравнений называют фундаментальной системой уравнений электрической цепи (схемы).

Пример.



В схеме два узла (0 и 1) → q = 2 и три ветви с токами I_E, I_R, I_J, т.е. $p = 3$. Неизвестными являются шесть величин — три тока I_E, I_R, I_J и три напряжения ~~и три н.~~ V_E, V_R и V_J. Известными считаются параметры E, R, J.

По первому закону Кирхгофа можно составить $q-1=1$ уравнение (1)

$$I_R - I_E - I_J$$

(составлено для узла 1), а по второму закону Кирхгофа $p-q+1 = 2$ уравнения (2)

$$V_R - V_E = 0 \quad и \quad V_J - V_R = 0$$

(составлены для контуров K1 и K2). Для $p=3$ компонентов (элементов можно составить) ~~р комп~~ $p=3$ компонентных уравнения (3)

$$V_E = E, \quad I_J = J, \quad V_R = R I_R$$

Система из 6 уравнений (1), (2), (3) есть фундаментальная система уравнений рассматриваемой схемы. Её решение даёт все 6 неизвестных токов и напряжений.

Цепи постоянного тока.

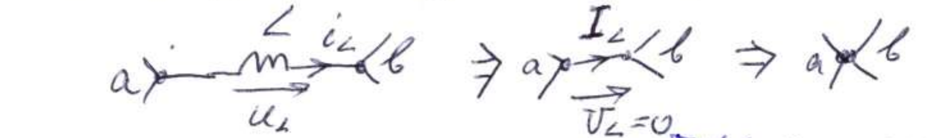
Цепи с постоянными (не изменяющимися во времени) токами, напряжениями, ЭДС называют цепями постоянного тока. Соответствующие физические величины обозначаются в них большими буквами

$$i = I = const, \quad u = U = const, \quad e = E = const$$

При $i_L = const$ напряжение индуктивного элемента

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = L\frac{dI_L}{dt} = 0$$

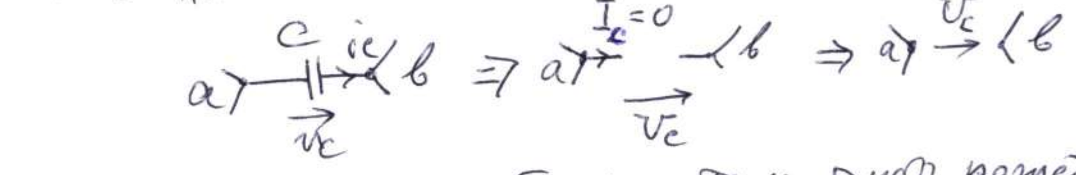
и в схеме он заменяется закороченной ветвью



При $u_C = const$ ~~напряжение~~ ток ёмкостного элемента

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = C\frac{dU_C}{dt} = 0$$

и в схеме он представляется разрывом ветви



Т.о. схема цепи постоянного тока чисто резистивная, т.е. состоящая только из идеальных источников и резистивных элементов.

Баланс мощностей в цепи постоянного тока

$$\boxed{\sum P_{ген} = \sum P_{потр}}$$

Суммарная мощность генерации источников равна суммарной мощности потребления в резистивных элементах.

Доказательство будет дано ниже.

Принципы теории цепей постоянного тока

1. Принцип наложения.

Ток в любой ветви h (напряжение между двумя любыми узлами i и j) цепи равен (равно) сумме токов (напряжений), обусловленных действием каждого из источников ЭДС $E_1, E_2, \dots, E_m$ и токов $J_1, J_2, \dots, J_n$ в отдельности

$$I_h = \sum_{k=1}^{m} G_{hk} \cdot E_k + \sum_{k=1}^{n} K^{I}_{hk} \cdot J_k ,$$

$$\left(U_{ij} = \sum_{k=1}^{m} K^{U}_{ijk} E_k + \sum_{k=1}^{n} R_{ij\,k} \cdot J_k \right)$$

где

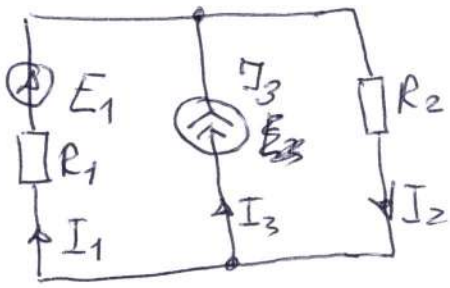
$$G_{hk} = \begin{cases} \text{входная проводимость ветви } h, \text{ при } k=h; \\ \text{взаимная проводимость ветвей } h \text{ и } k, \text{ при } k \neq h. \end{cases}$$

K^{I}_{hk} – коэффициент передачи по току между ветвями h и k

$$\left(R_{ij\,k} = \begin{cases} \text{входное сопротивление ветви } h, \text{ если } i \text{ и } j \text{ её узлы;} \\ \text{взаимное сопротивление между узлами } i \text{ и } j \text{ и ветвью } k, \\ \text{если ветвь } k \text{ не соединяет узлы } i \text{ и } j. \end{cases} \right.$$

$K^{U}_{ij\,k}$ – коэффициент передачи ~~между узлами~~ по напряжению между узлами i, j и ветвью k).

Пример



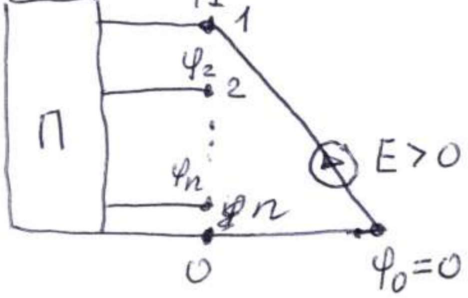
$$I_1 = I^{E_1} + I^{J_3},$$

где I^{E_1} – ток обусловленный действием только источника ЭДС ($J_3 = 0$), а I^{J_3} – ток обусловленный действием только источника тока ($E_1 = 0$).

$$I_1 = G_{11} E_1 + K^I_{13} J_3,$$

где $G_{11} = \frac{E_1}{R_1 + R_2}$ – входная проводимость ветви 1, а $K^I_{13} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2}$ – коэффициент передачи по току между ветвями 1 и 3.

② Принцип неусиления



П – цепь без источников

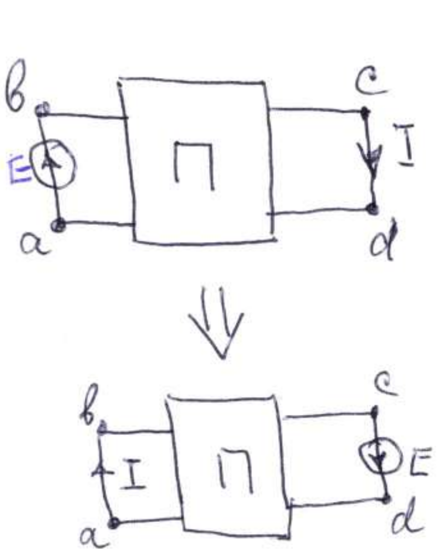
Если $\varphi_1 = E > 0$, а $\varphi_0 = 0$, то

$$0 < \varphi_j < E, \quad j = 2, 3, \dots, n$$

Доказательство. Пусть $\varphi_j > \varphi_1$ и потенциал узла j самый большой. Тогда токи во всех ветвях связанных с узлом j будут направлены от него, что невозможно, т.к. при этом будет нарушаться первый закон Кирхгофа.

Факт $\varphi_j < 0$ доказывается аналогично.

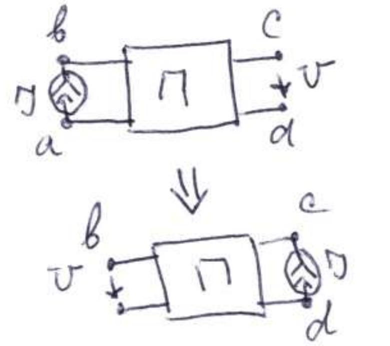
③ Принцип взаимности.



Если источник ЭДС, включённый в одну ветвь, вызовет в другой ветви ток I, то этот же источник E, включённый во вторую ветвь вызовет в первой ветви такой же ток I (при согласованных направлениях включения ЭДС и тока).

Доказательство м.б. основано на симметрии ~~контурно~~ матрицы контурных сопротивлений (см. ниже).

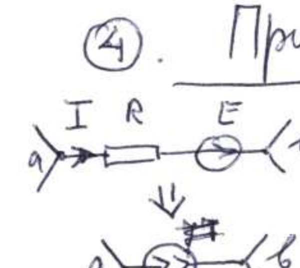
Возможна и дуальная формулировка



Если источник тока J включённый между узлами a и b, вызовет между узлами c и d напряжение U, то источник тока J, включённый между узлами c и d, вызовет между узлами a и b напряжение U.

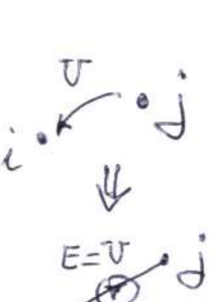
Доказательство м.б. основано на симметрии матрицы узловых проводимостей (см. ниже)

④. Принцип (теорема) компенсации.



Если ток I в некоторой ветви цепи известен, то эту ветвь можно заменить ветвью с источником тока J = I. Токи и напряжения в остальных ветвях при этом не изменятся

Другая (дуальная) формулировка принципа: если напряжение U между узлами i и j цепи известно, то между этими узлами можно включить источник ЭДС E = U (см. рис.). Токи и напряжения в остальной части цепи не изменятся.



Доказательство основывается на неизменности уравнений, описывающих остальную часть цепи

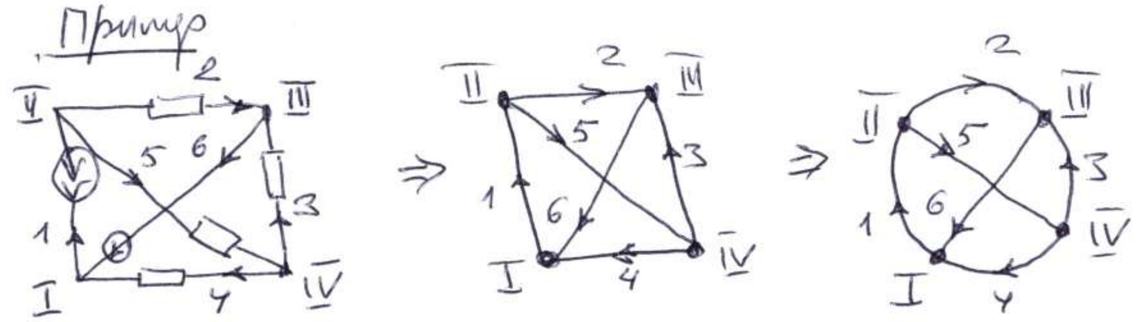
Топологические понятия и матрицы

Граф – математическая конструкция, состоящая из двух множеств – множества узлов (вершин) и множества ветвей (рёбер). При этом каждой ветви ~~...~~ инцидентны (принадлежат) два узла.

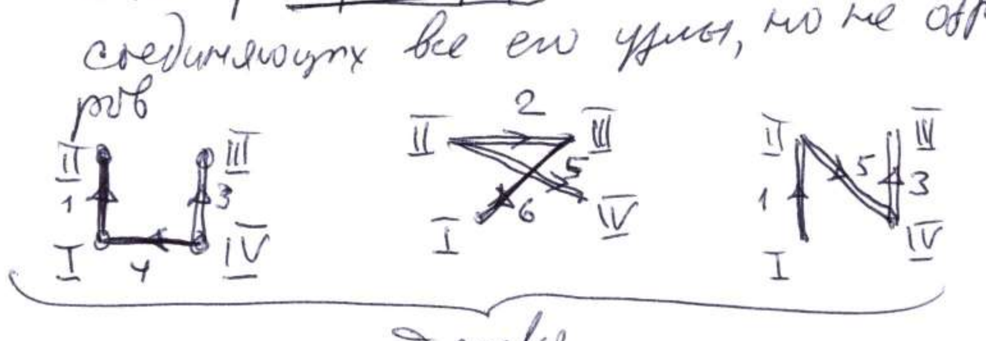
Если у ветви задано направление (от одного её узла к другому), то граф называется ориентированным (направленным), а если каждой ветви соответствует некоторое число (вес), то он взвешенный.

Каждой схеме цепи м.б. сопоставлен граф.

Пример



~~Ветви гр~~ Дерево графа – совокупность ветвей графа, соединяющих все его узлы, но не образующая контуров



Ветви дерева принято изображать жирными или двойными линиями.

Ветви графа не вошедшие в дерево называют хордами или связями.

Говорят, что задана топология цепи, если задана её схема или граф. При задании топологии важна и нумерация ветвей и узлов. Обычно узлы нумеруют последовательным рядом 0, 1, 2, .., а ветви рядом 1, 2, 3, ..

Для графов можно ввести три основные матрицы (топологических матриц):

— матрицу соединений (инциденций) $\mathbb{A}$;

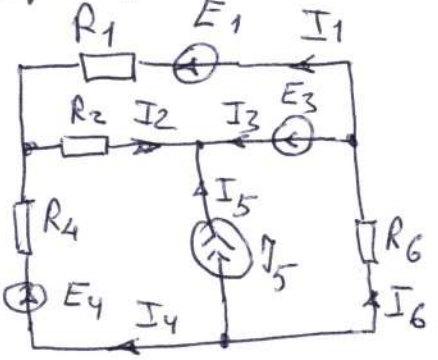
— контурную (цикломатическую) матрицу $\mathbb{B}$;

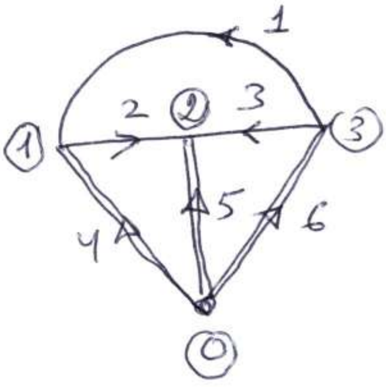
— матрицу разрезов (сечений) $\mathbb{Q}$.

Пусть ~~за~~ ориентированный граф имеет n-ветвей и $m+1$ узел, тогда элемент A_{ij} матрицы $\mathbb{A} = \{A_{ij}\}_{mn}$

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ветвь } j \text{ выходит из узла } i; \\ -1, & \text{если ветвь } j \text{ входит в узел } i; \\ 0, & \text{если ветвь } j \text{ не соединена с узлом } i. \end{cases}$$

Пример





1. Матрица соединений

схема — ветви — граф

$\mathbb{A}$ =

узлы	1	2	3	4	5	6
1	-1	1		-1		
2		-1	-1		-1	
3	1		1			-1

$m = 3$ строк

$n = 6$ столбцов

$\mathbb{A}_x$ (ветви 1–3), $A_д$ (ветви 4–6)

A_x — подматрица хорд, $A_д$ — подматрица деревьев

Если добавить ещё одну строку, соответствующую узлу 0,

0	0	0	-1	-1	-1

, то получится расширенная матрица соединений.

Заметим, что эту строку можем получить просуммировав три строки матрицы A.

Уравнение первого закона Кирхгофа в матричном виде

$$A \cdot I = 0, \quad I = \boxed{I_1 \mid I_2 \mid I_3 \mid I_4 \mid I_5 \mid I_6}^t$$

Это можно представить как

$$\begin{bmatrix} A_x & A_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ \hline I_g \end{bmatrix} = 0, \quad I_x = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}, \quad I_g = \begin{bmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix}.$$

или как

$$A_x I_x = - \cancel{E} A_g I_g = I_g$$ — т.о. токи ветвей дерева I_g выражаются через токи хорд

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & -1 \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}}_{A_x} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}}_{I_x} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix}}_{I_g} \Rightarrow \begin{aligned} I_4 &= -I_1 + I_2; \\ I_5 &= -I_2 - I_3; \\ I_6 &= I_1 + I_3. \end{aligned}$$

(см. схему)

2. Матрица контуров (контурная матрица) $B = \{B_{ij}\}_{n-m,\, n}$

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ветвь } j \text{ входит в контур } i \text{ и её направление совпадает с направлением обхода } i; \\ -1, & \text{если ветвь } j \text{ входит в контур } i, \text{ но её направление противоположено направлению обхода } i; \\ 0, & \text{если ветвь } j \text{ не входит в контур } i \end{cases}$$

контуры

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & -1 & & 1 \\ & 1 & & 1 & -1 & \\ & & 1 & & -1 & 1 \end{array}\right] \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{хорды}} \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{ветви дерева}} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} B_x & B_g \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{B \cdot U^B = 0}, \quad U^B = \boxed{U_1 \mid U_2 \mid U_3 \mid U_4 \mid U_5 \mid U_6}^t.$$

запись второго закона Кирхгофа в матричной форме

Здесь $n-m=3$ – число независимых контуров, т. е. число независимых уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа

$$\cancel{B\cdot U^B = \begin{array}{|c|c|c|}\hline U_1 & -U_4 & +U_6\\ \hline U_2 & +U_4 & -U_5\\ \hline U_3 & & \\ \hline\end{array} \quad U_1-U_4+U_6=}$$

$$B\cdot U^B; \Rightarrow \begin{cases} U_1-U_4+U_6=0; \\ U_2+U_4-U_5=0; \\ U_3-U_5+U_6=0. \end{cases}$$

$$\underbrace{B_x}_{1} U_x = -B_g U_g \Rightarrow \underbrace{U_x = -B_g U_g}$$

зная напряжение ветвей дерева можно найти напряжение хорд.

$$\begin{cases} U_1 = U_4 - U_6; \\ U_2 = -U_4 + U_5; \\ U_3 = U_5 - U_6 \end{cases}$$

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m$ – потенциалы узлов относительно узла 0 (узловые потенциалы).

$\varphi_1 = U_{10}$, $\varphi_2 = U_{20} \dots$ Тогда $\boxed{U^B = A^t \varphi}$, т. е. напряжения всех ветвей можно выразить через потенциалы узлов

Для нашего примера

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}}_{U^B} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \underbrace{\underbrace{\begin{array}{ccc} ① & ② & ③ \\ \hline -1 & & 1 \\ 1 & -1 & \\ & -1 & 1 \\ \hline -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{array}}_{\text{узлы}}}_{A^t} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}}_{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_3 - \varphi_1 \\ \varphi_1 - \varphi_2 \\ \varphi_3 - \varphi_2 \\ -\varphi_1 \\ -\varphi_2 \\ -\varphi_3 \end{bmatrix}$$

Аналогично

$\mathbb{I}^B = \mathbb{B}^t\, \mathbb{I}_x$ — токи всех ветвей выражаются через токи хорд.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}^B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ \hline -1 & 1 & \\ & -1 & -1 \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}^t} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}_x} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ -I_1 + I_2 \\ -I_2 - I_3 \\ I_1 + I_3 \end{bmatrix}$$

Основное свойство топологических матриц

$$\boxed{A \cdot B^t = 0\,, \quad B \cdot A^t = 0}$$