VJEROVATNOĆA (Vježbe 2009/10)

Renata Turkeš

29. siječnja 2013.

Sadržaj

Urađeni zadaci u sljedećem materijalu prate predavanja koja iz predmeta Vjerovatnoća drži dr.sci. Arif Zolić, docent, na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Tuzli, pa je stoga prvenstveno namijenjen studentima/cama koji pohađaju navedeni kurs. U njima se nalaze zadaci rađeni na auditornim, kao i laboratorijskim vježbama tokom školske 2009/10. godine, te neki dodatni zadaci za vježbu. Skripta je dostupna svima za download na http://webmail.untz.ba/ renata.turkes/Vjerovatnoca.html.

Literatura korištena za pripremu ovog materijala je uglavnom sljedeća:

1. A. Zolić, *Predavanja 2007/2008*
2. H. Parks, G. Musser, R. Burton, W. Siebler, *Mathematics in Life, Society, and the World*
3. G. Woodbury, *Introduction to Statistics*
4. S. Suljagić, *Vjerojatnost i statistika*

kao i vježbe na kursu Vjerovatnoća kod asistentice Sandre Milić, asistenta Fatiha Destovića, te raniji ispitni rokovi. Rješenja istih u najvećem broju rad su autorice ovih vježbi, kao i sve greške u materijalu. Molim sve koji/e te greške uoče da ih pošalju na renata.turkes@untz.ba, kao i bilo koje druge primjedbe, sugestije ili pitanja. Unaprijed se zahvaljujem.

Studentima se preporučuje i česta posjeta web stranici

http://onlinestatbook.com/

(Online Statistics: An Interactive Multimedia Course of Study), koja sadrži mnoštvo zanimljivih kvizova, simulacija i vježbi iz Vjerovatnoće, kao i Statistike. Svima želim ugodan rad.

Život je škola vjerovatnoće.
(Walter Bagehot)

Podsjetnik iz kombinatorike

Cilj ovog uvodnog dijela jeste podsjetiti se kako izračunati na koliko različitih načina se nešto može dogoditi, jer će nam ta znanja biti neophodna tokom kursa Vjerovatnoća.

Nekada je taj broj načina jako mali, pa ih je moguće sve navesti. Tada nam nisu potrebne nikakve dodatne metode, osim najjednostavnijeg prebrojavanja.

ZADATAK 0.0.1. *Ako istovremeno bacamo dvije kocke, na koliko različitih načina možemo dobiti par?*

Rješenje: Kako bacamo samo dvije kocke, jednostavno možemo navesti sve moguće ishode:

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

Lako je uočiti, tj. prebrojati da par možemo dobiti na 6 različitih načina. ▲

ZADATAK 0.0.2. *Ako istovremeno bacamo dvije kocke, na koliko različitih načina možemo dobiti zbir tačkica na gornjim stranama*

a. *koji nije veći od* 10?

b. *između* 3 *i* 10 *(uključujući i* 3 *i* 10*)?*

Rješenje: Kako bacanje dvije kocke kao rezultat ima sljedeće mogućnosti

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6), \end{matrix}$$

zbir tačkica na gornjim stranama tada možemo predstaviti odgovarajućom shemom

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12. \end{matrix}$$

Onda je lako uočiti, tj. prebrojati da

a. zbir tačkica na gornjima stranama koji nije veći od 10 možemo dobiti na 33 načina.

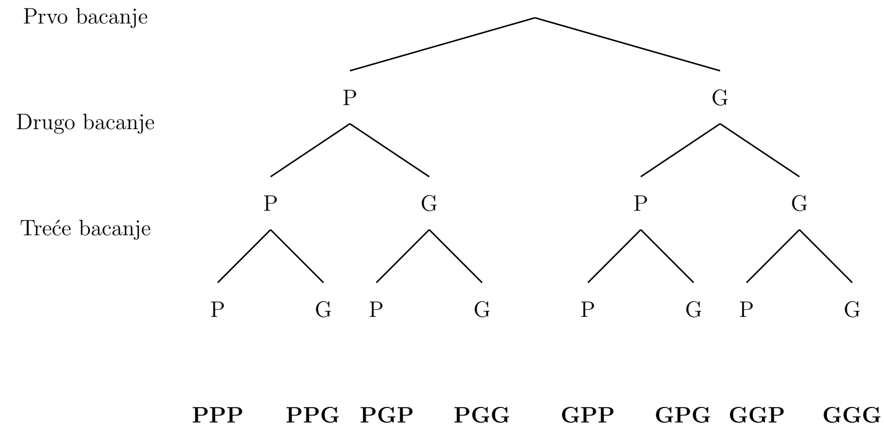
b. zbir tačkica na gornjim stranama između 3 i 10 (uključujući i 3 i 10) možemo dobiti na 32 načina.

▲

Jako koristan metod koji nam također često može biti od koristi je dijagram grananja. To je sistematičan, grafički prikaz svih mogućih ishoda. Svaki sljedeći nivo, odnosno korak u problemu rezultirati će sljedećim nivoom grananja. Pokazati ćemo kako primjenjujemo ovaj metod kroz sljedećih nekoliko primjera.

ZADATAK 0.0.3. *Ako se novčić baci tri puta, na koliko različitih načina će barem dva puta pasti pismo?*

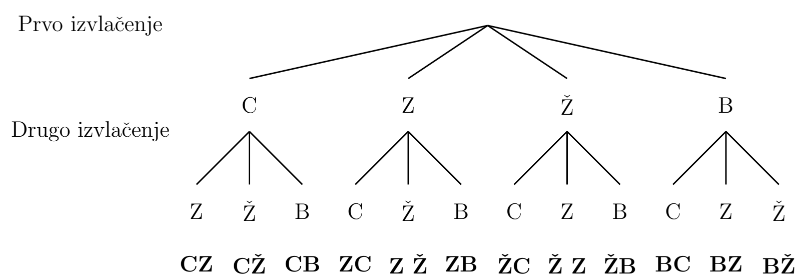
Rješenje: Dijagram grananja za bacanje novčića tri puta prikazan je na sljedećoj slici.



Sada je jasno da će pismo pasti barem dva puta u četiri različita slučaja. ▲

> **ZADATAK 0.0.4.** *U posudi se nalaze po jedna crvena, zelena, žuta i bijela kuglica. Na koliko različitih načina se iz posude mogu izvući dvije kuglice, jedna za drugom?*

Rješenje: Dijagram grananja za izvlačenje dvije kuglice prikazan je na sljedećoj slici.



Sada je jasno da dvije kuglice možemo izvući na 12 različitih načina. ▲

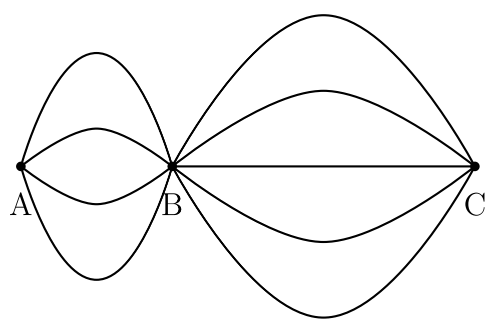
Dijagrami grananja nam navode sve moguće ishode nekog procesa, no ti nam detalji uglavnom nisu potrebni. Naime, kao što je navedeno u samom uvodu, nama je najčěsće bitno samo odrediti broj načina na koji se određeni događaj može realizirati. Za nalaženje tog broja postoji mnogo brži način, poznat od ranije i intuitivno veoma jasan, tzv. princip množenja. Pokažimo ga na prethodnom primjeru.

ZADATAK 0.0.5. *U posudi se nalaze po jedna crvena, zelena, žuta i bijela kuglica. Na koliko različitih načina se iz posude mogu izvući dvije kuglice?*

Rješenje: Prva kuglica se može izvući na četiri različita načina. Međutim, za svaki taj način, druga kuglica se može izvući na tri načina (jer je jedna kuglica već izvučena, pa su u posudi ostale samo tri). Stoga je traženi broj $4 \cdot 3 = 12$. ▲

ZADATAK 0.0.6. *Iz grada A u grad B vode 4 različita puta, a iz B u C vodi 5 puteva. Na koliko različitih načina se može iz grada A otići u grad C, preko grada B?*

Rješenje: Iz grada A u grad B se može stići na 4 različita načina. Međutim, za svaki od tih načina, put dalje možemo nastaviti do grada C na 5 načina, pa je traženi broj $4 \cdot 5 = 20$.



▲

Međutim, često je broj mogućih ishoda jako velik, pa je prebrojavanje zamorno, a i dijagram grananja bi bilo mukotrpno crtati. Također, uslovi zadatka mogu biti nešto kompliciraniji, pa bi bilo teško osloniti se i samo na princip množenja. Tada pribjegavamo nekim drugim metodama, poznatim ranije iz kombinatorike.

Definicija 0.0.1 (KOMBINACIJA BEZ PONAVLJANJA)**.** *Neka je dat skup $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Kombinacija bez ponavljanja klase k od n elemenata $(1 \leq k \leq n)$ je podskup od k elemenata skupa A. Broj svih mogućih* *takvih kombinacija označamo sa* C_n^k, *i vrijedi*

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

Definicija 0.0.2 (VARIJACIJA BEZ PONAVLJANJA). *Neka je dat skup* $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. *Varijacija bez ponavljanja klase* k *od* n *elemenata* ($1 \leq k \leq n$) *je uređeni podskup od* k *elemenata skupa* A, *tj. uredjena* k*-torka. Broj svih mogućih takvih varijacija označamo sa* V_n^k, *i vrijedi*

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1).$$

Definicija 0.0.3 (PERMUTACIJA BEZ PONAVLJANJA). *Neka je dat skup* $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. *Permutacija bez ponavljanja od* n *elemenata je svaki linearni raspored* n *elemenata skupa* A. *Broj svih mogućih takvih permutacija označamo sa* P_n, *i vrijedi*

$$P_n = n!.$$

Definicija 0.0.4 (KOMBINACIJA SA PONAVLJANJEM). *Neka je dat skup* $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. *Kombinacija sa ponavljanjem klase* k *od* n *elemenata je kolekcija od* k *elemenata skupa* A, *ne obavezno različitih. Broj svih mogućih takvih kombinacija označamo sa* $\overline{C}_n^k$, *i vrijedi*

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Definicija 0.0.5 (VARIJACIJA SA PONAVLJANJEM). *Neka je dat skup* $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. *Varijacija sa ponavljanjem klase* k *od* n *elemenata je uređena kolekcija od* k *elemenata skupa* A, *ne obavezno različitih. Broj svih mogućih takvih varijacija označamo sa* $\overline{V}_n^k$, *i vrijedi*

$$\overline{V}_n^k = n^k$$

Definicija 0.0.6 (PERMUTACIJA SA PONAVLJANJEM). *Permutacija sa ponavljanjem klase* m *od* n *različitih vrsta elemenata, pri čemu se* i*-ta vrsta elemenata javlja* k_i *puta* ($i = 1, 2, ..., n; k_1 + k_2 + ... + k_n = m,$) *je uređenje čitavog skupa od ukupno* m *elemenata, u kome se elementi istog tipa ne razlikuju. Broj svih mogućih takvih permutacija označamo sa* $P_n^{k_1,k_2,...,k_n}$, *i vrijedi*

$$P_n^{k_1,k_2,...,k_n} = \frac{(k_1+k_2+...+k_n)!}{k_1!k_2!...k_n!}.$$

ZADATAK 0.0.7. *Neka je* $A = \{x_1, x_2, x_3\}$. *Navesti sve:*

a. *kombinacije bez ponavljanja klase* 2

b. *varijacije bez ponavljanja klase* 2

c. *permutacije bez ponavljanja*

d. *kombinacije sa ponavljanjem klase* 2

e. *varijacije sa ponavljanjem klase* 2

Rješenje:

a. $\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}$.

b. $(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_1, x_3), (x_3, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_2)$.

c. $x_1x_2x_3, x_1x_3x_2, x_2x_1x_3, x_2x_3x_1, x_3x_1x_2, x_3x_2x_1$.

d. $x_1x_1, x_2x_2, x_3x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3$.

e. $x_1x_1, x_2x_2, x_3x_3, x_1x_2, x_2x_1, x_1x_3, x_3x_1, x_2x_3, x_3x_2$.

Provjerimo formule iz prethodnih definicija:

$$
\begin{aligned}
&C_3^2 = \tbinom{3}{2} = \tfrac{3\cdot 2}{2!} = 3\\
&V_3^2 = 3 \cdot 2 = 6\\
&P_3 = 3! = 6\\
&\overline{C}_3^2 = \tbinom{3+2-1}{2} = \tbinom{4}{2} = \tfrac{4\cdot 3}{2!} = 6\\
&\overline{V}_3^2 = 3^2 = 9
\end{aligned}
$$

▲

Dakle, u zadacima je neophodno "samo" utvrditi radi li se o kombinacijima, varijacijama ili permutacijama (određujući da li je bitan raspored elemenata), te da li je ponavljanje dozvoljeno ili ne, kada preostaje samo primjeniti formulu i izračunati željeni podatak.

ZADATAK 0.0.8. *Na koliko načina trener može birati tim od* 5 *igrača između grupe od* 12 *igrača?*

Rješenje: Kako redoslijed nije bitan, a ponavljanje očigledno nije moguće, traženi broj je broj svih kombinacija bez ponavljanja klase 5 od 12 elemenata:

$$C_{12}^5 = \binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11 \cdot 9 \cdot 8}{1} = 792.$$

▲

ZADATAK 0.0.9. *Ako je takmičenju prisustvovalo* 37 *učesnika, na koliko načina mogu biti dodijeljena prva tri mjesta?*

Rješenje: Kako je redoslijed bitan, a ponavljanje očito nije moguće (jer jedna osoba ne može istovremeno osvojiti dva mjesta), traženi broj je broj svih varijacija bez ponavljanja klase 3 od 37 elemenata:

$$V_{37}^3 = 37 \cdot 36 \cdot 35 = 46620.$$

▲

ZADATAK 0.0.10. *Na koliko načina može nastavnik izabrati dva učenika za dodjelu seminarskog rada, ukoliko odjeljenje broji* 27 *učenika?*

Rješenje: Kako redoslijed nije bitan, a ponavljanje se neće desiti (jer nema smisla jednom učeniku dodijeliti oba seminarska rada), traženi broj je broj svih kombinacija bez ponavljanja klase 2 od 27 elemenata:

$$C_{27}^2 = \binom{27}{2} = \frac{27 \cdot 26}{2!} = 351.$$

▲

ZADATAK 0.0.11. *U ravni je zadato n različitih tačaka od kojih nikoje tri nisu kolinearne.*

a. Naći broj pravih određenih ovim tačkama.

b. Naći broj trouglova određenih ovim tačkama.

Rješenje:

a. Tačke A i B određuju istu pravu kao i tačke B i A, pa redoslijed nije bitan. Ponavljanje nije dozvoljeno, jer tačke A i A ne određuju pravu. Stoga je broj pravih određenih sa n tačaka broj kombinacija bez ponavljanja klase 2 (jer dvije tačke određuju pravu) od n elemenata

$$C_n^2 = \binom{n}{2}.$$

b. Tačke A, B i C određuju isti trougao kao i tačke B, C i A, ili C, B i A, pa redoslijed nije bitan. Ponavljanje nije dozvoljeno, jer naprimjer tačke A, A i B ne određuju trougao. Stoga je broj trouglova određenih sa n tačaka broj kombinacija bez ponavljanja klase 3 (jer tri nekolinearne tačke određuju trougao) od n elemenata

$$C_n^2 = \binom{n}{3}.$$

▲

ZADATAK 0.0.12. *Neka je* $n \geq 2$. *Koliko ima permutacija skupa* $\{1, 2, ..., n\}$ *kod kojih*

a. su elementi 1 *i* 2 *susjedni?*

b. između elemenata 1 *i* 2 *ima tačno* k *drugih brojeva* $(k \leq n-2)$?

Rješenje:

a. Kako želimo da elementi 1 i 2 budu susjedni, posmatrati ćemo sve permutacije skupa $\{1, 2, ..., n\}$, pri čemu ćemo 12, odnosno 21 posmatrati kao jedan element. U prvom slučaju dakle posmatramo sve permutacije skupa od $n-1$ elemenata (element 12, te ostalih $n-2$ elemenata), a poznato je da ih ima $(n-1)!$. Analogno, u drugom slučaju posmatramo sve permutacije skupa od $n-1$ elemenata (element 21, te ostalih $n-2$ elemenata), a poznato je da ih ima $(n-1)!$. Stoga je traženi broj

$$(n-1)! + (n-1)! = 2(n-1)!.$$

b. Ako je 1 na prvom mjestu permutacije, onda je 2 na $k+2$-om mjestu, a ostalih $n-2$ elemenata mogu mijenjati svoja mjesta, pa takvih permutacija ima ukupno $(n-2)!$. Dalje, ako je 1 na drugom mjestu permutacije, onda je 2 na $k+3$-om mjestu, a ostalih $n-2$ elemenata mogu mijenjati svoja mjesta, pa takvih permutacija ima ukupno $(n-2)!$. Mogli bi nastaviti ovaj postupak sve dok ne dođemo do permutacije u kojoj je 1 na $n-k-1$-tom mjestu, a 2 na posljednjem, odnosno n-tom mjestu. Tako je ukupan broj ovih permutacija $(n-k-1)(n-2)!$. Međutim, potpuno smo analogno mogli posmatrati sve slučajeve ukoliko je 2 ispred 1, pa je traženi broj

$$(n-k-1)(n-2)! + (n-k-1)(n-2)! = 2(n-k-1)(n-2)!.$$

▲

ZADATAK 0.0.13. *Iz grupe od* 7 *žena i* 4 *muškarca treba izabrati delegaciju. Na koliko se načina može izabrati delegacija tako da se ona sastoji od:*

a. 5 *osoba, i to* 3 *žene i* 2 *muškarca.*

b. bilo kojeg broja osoba, ali tako da je jednak broj muškaraca i žena.

c. 5 *osoba, od kojih su barem* 2 *žene.*

d. 5 *osoba, s tim da nijedno od njih nije unaprijed zadata žena.*

e. 6 *osoba, i to* 3 *žene i* 3 *muškarca, s tim da nijedno od njih nije po jedan/na unaprijed određen/a žena/muškarac.*

Rješenje: Možemo odmah zaključiti da u svim slučajevima redoslijed nije bitan, kao i da ponavljanje nije dozvoljeno, pa ćemo uvijek uzimati u obzir kombinacije bez ponavljanja. Dalje je jednostavno zaključiti da su traženi brojevi:

a. $\binom{7}{3}\binom{4}{2} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}\cdot\frac{4\cdot 3}{2!} = 35\cdot 6 = 210$

b. $\binom{7}{1}\binom{4}{1} + \binom{7}{2}\binom{4}{2} + \binom{7}{3}\binom{4}{3} + \binom{7}{4}\binom{4}{4} = 7\cdot 4 + \frac{7\cdot 6}{2!}\cdot\frac{4\cdot 3}{2!} + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!} + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4!}\cdot 1 = 28 + 21\cdot 6 + 35\cdot 4 + 35 = 329$

c. $\binom{7}{2}\binom{4}{3} + \binom{7}{3}\binom{4}{2} + \binom{7}{4}\binom{4}{1} + \binom{7}{5}\binom{4}{0} = \frac{7\cdot 6}{2!}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!} + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}\cdot \frac{4\cdot 3}{2!} + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4!}\cdot 4 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{5!}\cdot 1 = 21\cdot 4 + 35\cdot 6 + 35\cdot 4 + 21 = 455$

d. $\binom{6}{0}\binom{4}{5}+\binom{6}{1}\binom{4}{4}+\binom{6}{2}\binom{4}{3}+\binom{6}{3}\binom{4}{2}+\binom{6}{4}\binom{4}{1}+\binom{6}{5}\binom{4}{0}=$
$1\cdot 0+6\cdot 1+\frac{6\cdot 5}{2!}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!}+\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}\cdot\frac{4\cdot 3}{2!}+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4!}\cdot 4+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{5!}\cdot 1=$
$6+15\cdot 4+20\cdot 6+15\cdot 4+6=252$,
ili jednostavno
$\binom{10}{5}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5!}=252.$

e. $\binom{6}{3}\binom{3}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}\cdot 1=20.$

▲

ZADATAK 0.0.14. *Koliko se znakova može formirati od osnovnih znakova "$\cdot$" i "$-$," ako se zna da se jedan znak sastoji od najviše četiri osnovna znaka?*

Rješenje: Raspored je svakako bitan, jer različit redoslijed osnovnih znakova dovodi do različitih znakova. Također, jasno je da je ponavljanje moguće, pa ćemo ovdje uzeti u obzir varijacije sa ponavljanjem. Znakova koji se sastoje samo od jednog osnovnog znaka ima $\overline{V}_2^1$, onih koji se sastoje od dva osnovna znaka ima $\overline{V}_2^2$, znakova koji se sastoje od tri osnovna znaka ima $\overline{V}_2^3$, te konačno onih koji se sastoje od četiri osnovna znaka ima $\overline{V}_2^4$. Tako je traženi broj

$$\overline{V}_2^1+\overline{V}_2^2+\overline{V}_2^3+\overline{V}_2^4=2^1+2^2+2^3+2^4=30.$$

▲

ZADATAK 0.0.15. 5 *crvenih,* 2 *bijele i* 3 *plave kuglice treba poredati u niz. Na koliko načina to možemo uraditi, ako kuglice razlikujemo samo po boji?*

Rješenje: Iz uslova zadatka jasno je da se ovdje radi o permutacijama sa ponavljanjem klase 10 od 3 različite vrste elemenata (pri čemu se prva vrsta javlja 5, druga 2, i treća 3 puta), pa je traženi broj

$$P_3^{5,2,3}=\frac{(5+2+3)!}{5!2!3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{2}=2520.$$

▲

ZADATAK 0.0.16. *Koliko ima trocifrenih brojeva*

a. *koji se mogu obrazovati od cifara* $0, 1, 2, 3, 4, 5$?

b. *sa različitim ciframa koji se mogu obrazovati od cifara* $0, 1, 2, 3, 4, 5$?

Rješenje:

a. Raspored je svakako bitan, jer broj 123 nije jednak broju 321, niti 132. Ponavljanje je dozvoljeno, jer možemo posmatrati brojeve poput 333, ili 255. Tako je jasno da ćemo u obzir uzimati varijacije sa ponavljanjem klase 3. Treba uočiti da traženi broj nije broj svih varijacija sa ponavljanjem klase 3 od 6 elemenata jer trocifreni broj ne može počinjati sa 0. Stoga je od tog broja $\overline{V}_6^3$ potrebno oduzeti sve moguće varijacije koje baš imaju element 0 na prvom mjestu, a jasno je da njih ima $\overline{V}_6^2$ (prvi element 0 je fiksiran, a na drugom i trećem mjestu mogu biti bilo koji od elemenata $0, 1, 2, 3, 4, 5$). Dakle, traženi broj je
$$\overline{V}_6^3 - \overline{V}_6^2 = 6^3 - 6^2 = 180.$$

b. U ovom slučaju razmatramo samo trocifrene brojeve sa različitim ciframa, pa za razliku od slučaja a., ponavljanje neće biti dozvoljeno. Analogno kao ranije, treba primjetiti da traženi broj nije broj svih varijacija bez ponavljanja klase 3 od 6 elemenata jer trocifreni broj ne može počinjati sa 0. Tako je od tog broja V_6^3 potrebno oduzeti sve varijacije koje imaju element 0 na prvom mjestu, a jasno je da njih ima V_5^2 (prvi element 0 je fiksiran, a na drugom i trećem mjestu mogu biti bilo koji od elemenata $1, 2, 3, 4, 5$). Dakle, traženi broj je
$$V_6^3 - V_5^2 = 6 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 120 - 20 = 100.$$

▲

ZADATAK 0.0.17. *Na koliko načina* n *osoba može sjesti za okrugli sto ako su:*

a. *rasporedi isti ako jedan iz drugog možemo dobiti rotacijom?*

b. *stolice numerisane pa je važno ko sjedi na kojoj stolici?*

Rješenje:

a. Označimo posmatranih n osoba brojevima $1, 2, ..., n$. Broj svih mogućih rasporeda ovih osoba je $n!$. Međutim, po pretpostavci zadatka raspored $2, 3, 1, 5, ..., 4, n$ isti je kao raspored $3, 1, 5, ..., 4, n, 2$ ili raspored $5, ..., 4, n, 2, 3, 1$, pa je navedeni broj $n!$ potrebno podijeliti sa n (jer za svaki redoslijed brojeva, njih n rasporeda se jedan iz drugog mogu dobiti rotacijom). Dakle, traženi broj je

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

b. U ovom slučaju radi se ustvari o permutacijama od n elemenata, pa je traženi broj $n!$.

▲

ZADATAK 0.0.18. *Koliko se registarskih tablica može pojaviti u BiH? (Registarska tablica ima oblik $BBBSBBB$, pri čemu je $B \in \{0, 1, 2, ..., 9\}, S \in \{A, E, J, K, M, T\}$)*

Rješenje: Raspored 6 cifara od 10 cifara se jasno može navesti na $\overline{V}_{10}^{6}$ različitih načina. Međutim, svaki od tih rasporeda dati će drugačiju registarsku tablicu ukoliko je uz njega navedeno drugo slovo, pa je traženi broj

$$\overline{V}_{10}^{6} \cdot 6 = 6000000.$$

▲

ZADATAK 0.0.19. *Rezultate fudbalske utakmice zapisujemo sa*

0 - *neriješeno*
1 - *pobjeda domaćina*
2 - *pobjeda gosta*

Na listiću se nalazi 12 *parova u određenom poretku.*

a. *Koliko najmanje listića treba uplatiti da bi sigurno imali sve utakmice pogođene?*

b. *Koliko najmanje listića treba uplatiti da bi sigurno imali sve utakmice pogođene, ako se zna da je bilo* 7 *pobjeda domaćina,* 3 *neriješene utakmice, i* 2 *pobjede gostiju?*

Rješenje:

a. Uplaćeni listić predstavlja niz od 12 cifara iz skupa $\{0, 1, 2\}$, naprimjer jedan listić je 110200120120. Kako je redoslijed bitan, a cifre $0, 1, 2$ se mogu ponavljati, ovdje se radi o varijacijama sa ponavljanjem klase 12 od 3 elementa. Dakle, da bi sigurno imali pobjednički listić treba uplatiti najmanje
$$\overline{V}_3^{12} = 531441$$
listića.

b. Svaki popunjeni listić sastoji se od 7 jedinica, 3 nule i 2 dvojke u nekom poretku (koji nam je bitan!), pa se dakle radi o permutacijama sa ponavljanjem klase 12 od 3 različite vrste elemenata (pri čemu se prva vrsta javlja 3, druga 7, i treća 2 puta), tj. potrebno je uplatiti
$$P_3^{3,7,2} = \frac{(3 + 7 + 2)!}{3!7!2!} = 7920$$
listića.

▲

ZADATAK 0.0.20. *Svih* 32 *zuba se svrstavaju u određenom poretku. Stanje određenog zuba je* 0 *ako je izvađen, a* 1 *ako nije izvađen. Da li moraju postojati dva čovjeka na svijetu sa istim stanjem zuba?*

Rješenje: Iz uslova zadatka sasvim je jasno da je raspored bitan, i da je ponavljanje dozvoljeno, pa se radi o varijacijama sa ponavljanjem. Dakle, broj svih mogućih rasporeda zuba je

$$\overline{V}_2^{32} = 2^{32} = 4294967296.$$

Kako na svijetu ima preko 6 milijardi stanovnika, zaključujemo da moraju postojati barem dva čovjeka sa istim stanjem zuba. ▲

ZADATAK 0.0.21. *U autobusu se nalazi* 10 *ljudi. Autobus staje na* 5 *stanica. Na koliko načina ljudi mogu izaći na tim stanicama, u zavisnosti samo od broja njih koji izlaze na različitim stanicama?*

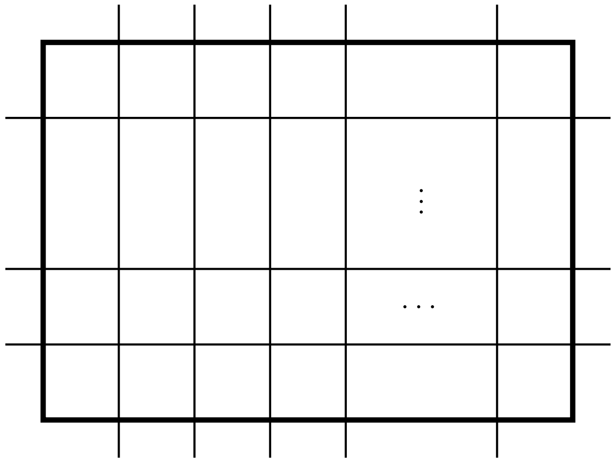
Rješenje: Svakog od 10 putnika označimo sa jednim brojem iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ u skladu sa rednim brojem stanice na koju su izašli. Tako dobijamo nizove dužine 10 sa elementima $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, naprimjer 112223444. Kako se elementi mogu ponavljati, a po uslovu zadatka poredak nije bitan, traženi broj je

$$\overline{C}_5^{10} = \binom{5+10-1}{10} = \binom{14}{10} = 1001.$$

▲

ZADATAK 0.0.22. *Pravougaonik je presječen sa dva skupa pravih paralelenih njegovim stranicama. Svaki skup se sastoji od po n pravih. Koliko se na ovaj način dobije pravougaonika?*

Rješenje: Radi jednostavnijeg zaključivanja, uočimo sljedeću sliku.



Jasno je da sada ukupno imamo $n+2$ "horizontalnih" i $n+2$ "vertikalnih" pravih koje će obrazovati odredjeni broj pravuogaonika. Izaberimo prizvoljne dvije "horizontalne" prave, i fiksirajmo ih. Sada je jasno da, izaberemo li bilo koje dvije različite "vertikalne" prave dobijamo jedan pravougaonik, pa takvih ima $C_{n+2}^2 = \binom{n+2}{2}$. Međutim, ovaj proces smo započeli sa dvije fiksirane "horizontalne" prave, a njih smo mogli izabrati takodjer na $C_{n+2}^2 = \binom{n+2}{2}$ načina. Tako je traženi broj

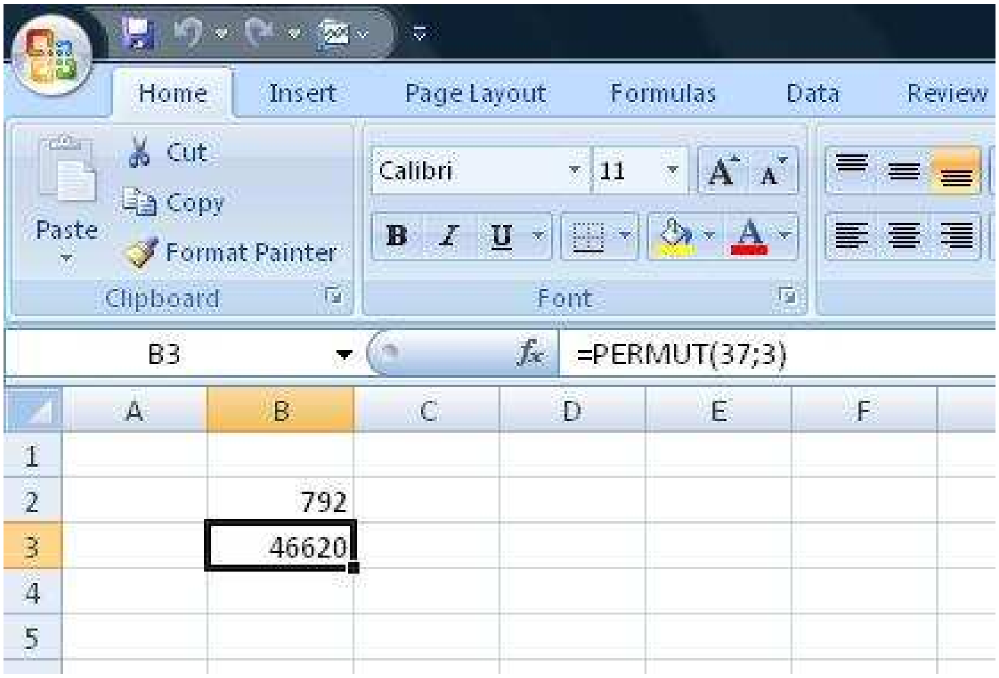
$$C_{n+2}^2 \cdot C_{n+2}^2 = (\binom{n+2}{2})^2 = \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4}.$$

▲

`MICROSOFT EXCEL` Pomoću funkcija

$$\begin{aligned} &= COMBIN(n;k) \\ &= PERMUT(n;k) \\ &= PERMUT(n;n) \end{aligned}$$

jednostavno izračunavamo broj kombinacija, varijacija i permutacija bez ponavljanja. (Primjetite da je permutacija od n elemenata ustvari varijacija klase n od n elemenata.) Međutim, kao što smo mogli uvidjeti, najteži dio bio je upravo odrediti koju funkciju je neophodno koristiti u određenom zadatku, pa nam ovdje Microsoft Excel nije od neke pomoći, osim što ga možemo koristiti kao obični kalkulator. Provjerimo stoga pomoću Excel-a računski dio u nekim zadacima iz ovog poglavlja, naprimjer zadaci 0.0.8 i 0.0.9.



□

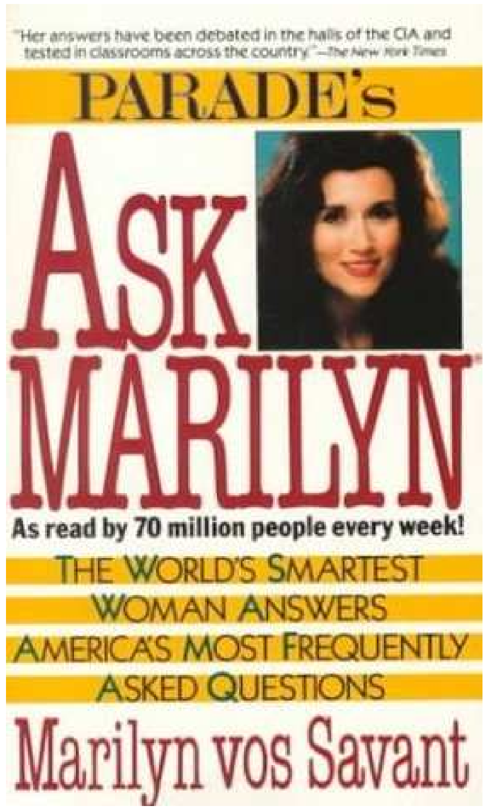
Poglavlje 1

Prostor vjerovatnoća

U ovom poglavlju studenti se trebaju upoznati sa osnovnim pojmovima teorije vjerovatnoće (eksperiment, elementarni događaj, prostor elementarnih događaja i događaj), različitim prilazima definiranju vjerovatnoće, pa tako i izračunavanjem vjerovatnoće različitih događaja jednostavnih, ali i složenijih eksperimenata. U posljednoj sekciji uvodi se i bitan pojam uslovne vjerovatnoće koji nam omogućava rješavanje nešto zahtjevnijih problema, a koji se oslanjaju na dva najvažnija rezultata iz ovog dijela - formulu potpune vjerovatnoće i Bayes-ovu formulu. Neophodno je dobro razumijevanje pojmova isključivi i nezavisni događaji, jer bez toga ne možemo ni prići rješavanju najvećeg broja zadataka.

Kroz ovo poglavlje navedeni su i neki od najpoznatijih matematičkih problema iz teorije vjerovatnoće, nama izuzetno zanimljivi zbog svoje kontraintutivnosti. To su Monty Hall problem, problem sa istim rođendanima, kao i problem pouzdanosti medicinskih testova.

ZADATAK 1.0.23 (POČETNI PROBLEM). *Marilyn von Savant (koja je, po nekim izvorima, osoba sa najvećim zabilježenim IQ) piše kolumnu za časopis Parade, pod nazivom "Ask Marilyn" ("Pitaj Marilyn").*



U septembru 1990. *godine , u toj se kolumni pojavilo pitanje:*

> *Zamislite da ste na kvizu, i data Vam je mogućnost izbora između troja vrata; iza jednih vrata je auto, a iza druga dvoja koze. Izaberete jedna vrata, naprimjer prva, i voditelj kviza, koji zna šta je iza kojih vrata, otvori neka druga vrata, naprimjer treća, iza kojih je koza. On Vas onda pita "Da li želite izbarati druga vrata?". Da li je u Vašoj prednost da promijenite svoj izbor? (Craig F. Whitaker, Columbia, Md.)*

Odgovor koji je Marilyn napisala bio je "Treba promijeniti izbor. Ukoliko se izbor ne promijeni, vjerovatnoća dobitka auta je $\frac{1}{3}$*, dok je vjerovatnoća dobitka auta ukoliko se izbor promijeni* $\frac{2}{3}$*". Sasvim očekivano, ovakav je odgovor lansirao ogromni broj reakcija, preko* 10000. *Neki od ovih odgovora nisu bili baš pristojni ("Ti si koza"), a mnogi su bili od profesionalnih matematičara i statističara ("Potpuno si u krivu", "Koliko je iznerviranih matematiăra neophodno kako bi ti promijenila svoje mišljenje?"). Svi su ju pokušavali ubijediti da su vjerovatnoće dobitka i auta i koze* $\frac{1}{2}$*. Međutim, Marilyn von Savant nije bila u krivu, i objasnila je svoj odgovor u sljedećoj kolumni. Rješenje početnog problema možete naći na kraju ovog poglavlja.*

1.1 Osnovni pojmovi teorije vjerovatnoće

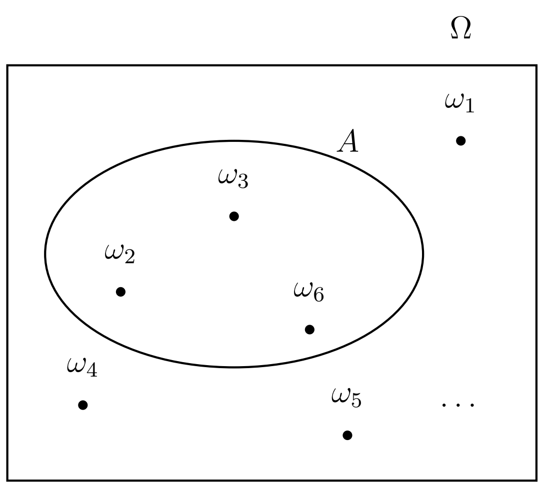
Prvobitno ćemo navesti kratka objašnjenja najbitnijih pojmova koje ćemo koristiti kroz cijeli kurs.

Definicija 1.1.1 (EKSPERIMENT). *Eksperiment je proces koji nam omogućava opažanje.*

Definicija 1.1.2 (ELEMENTARNI DOGAĐAJ). *Elementarni događaj eksperimenta, u oznaci* ω, *je određeni ishod eksperimenta.*

Definicija 1.1.3 (PROSTOR ELEMENTARNIH DOGAĐAJA). *Prostor elementarnih događaja eksperimenta, u oznaci* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, *je skup svih mogućih elementarnih događaja tog eksperimenta.*

Definicija 1.1.4 (DOGAĐAJ). *Događaj je bilo koji podskup prostora elementarnih događaja eksperimenta.*



$\diamond$ **Historija** Iako začeci teorije vjerovatnoće kao matematičke discipline datiraju još iz 17. stoljeća (Blaise Pascal), pojam prostora elementarnih događaja nije bio uveden sve do prošlog stoljeća (Richard von Mises). Inače, von Mises je postavio i poznati Birthday Problem, koji je naveden nešto kasnije u ovom poglavlju. $\diamond$

ZADATAK 1.1.1. *Eksperiment je bacanje kockice, pri čemu se registruje broj sa gornje strane. Opisati prostor elementarnih događaja, i sljedeće događaje*

a. A : *Pao je paran broj.*

b. B : *Pao je broj veći od* 5.

c. C : *Pala je* 8.

Rješenje: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a. $A = \{2, 4, 6\}$

b. $B = \{6\}$

c. $C = \emptyset$

▲

ZADATAK 1.1.2. *Eksperiment je bacanje dva novčića, pri čemu se registruje*

a. gornja strana novčića.

b. koliko je puta pao grb.

Ako je događaj A : *"Palo je barem jedno pismo", i* B : *"Novčići su pali na različitim stranama," eksplicitno navesti prostor elementarnih događaja, te* A *i* B.

Rješenje:

a. $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$, $A = \{PP, PG, GP\}$, $B = \{PG, GP\}$.

b. $\Omega = \{0, 1, 2\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{1\}$.

▲

ZADATAK 1.1.3. *Navesti eksplicitno prostor svih elementarnih događaja i dati događaj, ako je*

a. *eksperiment bacanje kocke, a registruje se broj tačkica na gornjoj strani. Događaj A je dobijanje neparnog broja.*

b. *eksperiment bacanje dvije kocke, a registruje se broj tačkica na gornjim stranama obje kocke. Događaj A je dobijanje istog broja na objema kockama.*

c. *eksperiment bacanje novčića tri puta, a registruju se redom gornje strane novčića. Događaj A je dobijanje barem dva pisma.*

Sa koliko ukupno raličitih događaja se mogu realizirati navedeni eksperimenti?

Rješenje:

a. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$. Kako je događaj proizvoljan podskup od Ω, dati eksperiment može se realizirati sa ukupno $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^6 = 64$ različitih događaja.

b. $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5)$ $(2,6),(3,1),...,(6,6)\}$, $A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$. Kako je događaj proizvoljan podskup od Ω, dati eksperiment može se realizirati sa ukupno $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{36}$ različitih događaja.

c. $\Omega = \{PPP, PPG, PGP, PGG, GPP, GPG, GGP, GGG\}$, $A = \{PPP,$ $PPG, PGP, GPP\}$. Kako je događaj proizvoljan podskup od Ω, dati eksperiment može se realizirati sa ukupno $|\mathcal{P}(A)| = 2^8 = 256$ različitih događaja.

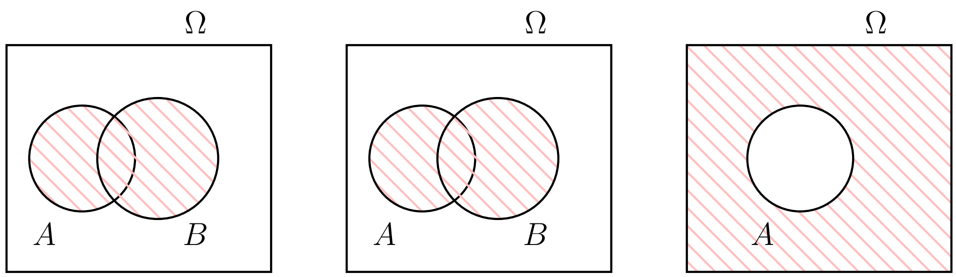
▲

Od ranije su nam poznate definicije pojedinih skupovnih operacija, te neke osnovne skupovne jednakosti. Kako je svaki događaj ustvari skup, jasno je da možemo posmatrati analogne operacije i jednakosti nad događajima. Tako imamo sljedeće definicije.

Definicija 1.1.5 (UNIJA DOGAĐAJA)**.** *Neka su A, B proizvoljni događaji. Unija događaja A i B, u oznaci $A \cup B$, je događaj koji se realizuje kada se realizuje barem jedan od događaja A, B.*

Definicija 1.1.6 (PRESJEK DOGAĐAJA)**.** *Neka su A, B proizvoljni događaji. Presjek događaja A i B, u oznaci $A \cap B$, je događaj koji se realizuje kada se realizuju oba događaja A, B.*

Definicija 1.1.7 (KOMPLEMENT DOGAĐAJA)**.** *Neka je A proizvoljan događaj. Komplement događaja A, u oznaci A^C, je događaj koji se realizuje kada se ne realizuje događaj A.*



$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$? $\qquad$ A^C

ZADATAK 1.1.4. *Neka su A, B, C tri proizvoljna događaja. Izraziti sljedeće događaje:*

a. realizovao se samo događaj A

b. realizovali su se događaji A i B, a događaj C nije

c. realizovala su se sva tri događaja

d. realizovao se barem jedan događaj

e. realizovala su se barem dva događaja

f. realizovao se samo jedan događaj

g. realizovala su se samo dva događaja

h. nije se realizovao nijedan događaj

i. realizovala su se najviše dva događaja

Rješenje:

a. $A \cap B^C \cap C^C$

b. $A \cap B \cap C^C$

c. $A \cap B \cap C$

d. $(A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C) \cup (A \cap B \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) = \Omega \backslash (A^C \cap B^C \cap C^C)$

e. $(A \cap B \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

f. $(A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C)$

g. $(A \cap B \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C)$

h. $A^C \cap B^C \cap C^C$

i. $(A^C \cap B^C \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C) \cup (A \cap B \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C) = \Omega \backslash (A \cap B \cap C)$

▲

ZADATAK 1.1.5. *Odrediti A^C ako je A*

a. pojava dva grba prilikom bacanja dva novčića

b. pojava bijele kuglice prilikom izvlačenja jedne kuglice iz kutije u kojoj se nalaze 2 bijele, 3 crne i 4 crvene kuglice

c. tri pogotka u tri gađanja

d. barem jedan pogodak u pet gađanja

e. ne više od dva pogotka u pet gađanja

Rješenje:

a. A^C : Pojava barem jednog pisma.

b. A^C : Pojava crne ili crvene kuglice.

c. A^C : Barem jedan promašaj u tri gađanja.

d. A^C : Pet promašaja u pet gađanja.

e. A^C : Više od dva pogotka u pet gađanja.

▲

ZADATAK 1.1.6. *Ako je događaj A : "Amra je kupila knjigu", a događaj B : "Nadin je kupio knjigu", simbolički zapisati sljedeće rečenice: "Sigurno nije tačno da ni Amra ni Nadin nisu kupili tu knjigu", te "Amra ili Nadin su kupili tu knjigu". Kakva je veza izmedju ovih rečenica, i koji zakon tu vezu objašnjava?*

Rješenje: Prvu rečenicu ćemo simbolički zapisati kao

$$(A^C \cap B^C)^C,$$

a drugu kao

$$A \cup B.$$

Jasno je da su ove rečenice ustvari ekvivalentne, na osnovu De Morgan-ovog zakona. ▲

Zadatak vjerovatnoće je svakom događaju pridružiti broj. Pogledajmo kako se to može uraditi na više načina.

1.2 Statistička definicija vjerovatnoće

Kada bacamo kocku, pretpostavljamo da su jednake šanse pojavljivanja brojeva $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Međutim, ako sumnjamo da se bacanjem neke konkretne kocke različiti brojevi pojavljuju podjednako često, onda eksperimentom možemo utvrditi da li je naša sumnja opravdana - bacimo tu kocku određeni broj puta, te registrujemo koliko se puta svaki od brojeva pojavio.

Definicija 1.2.1 (VJEROVATNOĆA)**.** *Neka se eksperiment ponavlja n puta, i neka događaj $A \subseteq \Omega$ nastupi n_A puta. Vjerovatnoća događaja A je*

$$P(A) = \frac{n_A}{n}.$$

ZADATAK 1.2.1. *U 1000 bacanja kocke dobijena je sljedeća tablica frekvencija*

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
n_i	*184*	*174*	*146*	*168*	*168*	*160*

Naći statističke vjerovatnoće pojavljivanja redom brojeva $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Rješenje: Iz date tablice lako zaključujemo da su tražene statističke vjerovatnoće

$$p_1 = \frac{184}{1000} = 0.184,$$
$$p_2 = \frac{174}{1000} = 0.174,$$
$$p_3 = \frac{146}{1000} = 0.146,$$
$$p_4 = \frac{168}{1000} = 0.168,$$
$$p_5 = \frac{168}{1000} = 0.168,$$
$$p_6 = \frac{160}{1000} = 0.160.$$

▲

◇ **Historija** Francuski prirodnjak Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707-1788) bacio je novčić 4040 puta, dobivši 2048 puta glavu, tj. statistička vjerovatnoća pojavljivanja glave bila je 0.5069. Oko 1900. godine, engleski statističar Karl Pearson bacio je novčić 24000 puta, dobivši 12012 puta glavu, tj. statistička vjerovatnoća pojavljivanja glave bila je 0.5005. Dok je bio u njemačkom zatvoru tokom II svjetskog rata, engleski matematičar John Kerrich bacio je novčić 10000 puta, dobiši glavu 5067 puta, tj. statistička vjerovatnoća pojavljivanja glave bila je 0.5067. ◇

1.3 Klasična definicija vjerovatnoće

U ovom kursu ćemo ipak najčesće koristiti klasičnu definiciju vjerovatnoće, pa ćemo se ovdje zadržati i na nekim osnovnim osobinama vjerovatnoće, te nešto većem broju zadataka.

Definicija 1.3.1 (VJEROVATNOĆA). *Pretpostavimo da su svi elementarni događaji jednakovjerovatni, te neka je $A \subseteq \Omega$ proizvoljan događaj. Tada je vjerovatnoća događaja A*

$$P(A) = \frac{\text{Broj elementarnih događaja u } A}{\text{Broj elementarnih događaja u } \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Prvobitno ćemo se još jednom pozvati na zadatak 1.1.2, gdje smo već ustanovili šta su Ω, A i B, a sada želimo i izračunati vjerovatnoće datih događaja:

ZADATAK 1.3.1. *Eksperiment je bacanje dva novčića, registruje se*

a. gornja strana novčića.

b. koliko je puta pao grb.

Ako je događaj A : "Palo je barem jedno pismo", i B : "Novčići su pali na različitim stranama," izračunati vjerovatnoće događaja A i B.

Rješenje:

a. $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$, $A = \{PP, PG, GP\}$, $B = \{PG, GP\}$. Na osnovu klasične definicije vjerovatnoće, dobijamo da je

$$P(A) = \frac{3}{4} = 0.75,$$
$$P(B) = \frac{2}{4} = 0.5$$

b. $\Omega = \{0, 1, 2\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{1\}$. Na osnovu klasične definicije vjerovatnoće, dobijamo da je

$$P(A) = \frac{2}{3} \approx 0.66,$$
$$P(B) = \frac{1}{3} \approx 0.33.$$

Međutim, događaji A i B su isti u oba slučaja, kao i eksperiment, no dobili smo različite vjerovatnoće. Gdje je greška? Jako je bitno primjetiti uslov jednakovjerovatnosti elementarnih događaja iz klasične definicije vjerovatnoće! Taj uslov zadovoljen je u slučaju pod a. jer

$$P(\{PP\}) = P(\{PG\}) = P(\{GP\}) = P(\{GG\}) = \frac{1}{4},$$

dok isto nije zadovoljeno pod b.:

$$P(\{0\}) = P(\{2\}) = \frac{1}{4}, \text{ ali } P(\{1\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, klasična definicija vjerovatnoće pravilno je iskorištena samo u slučaju pod a., pa vrijedi

$$P(A) = \frac{3}{4} = 0.75,$$
$$P(B) = \frac{2}{4} = 0.5.$$

▲

Teorem 1.3.1 (OSOBINE VJEROVATNOĆE). *Neka je Ω prostor elementarnih događaja. Tada vrijedi*

(i) $(\forall A \subseteq \Omega): \quad 0 \leq P(A) \leq 1.$

(ii) $P(\emptyset) = 0$

(iii) $P(\Omega) = 1$

(iv) $(\forall A, B \subseteq \Omega): \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Definicija 1.3.2 (ISKLJUČIVI DOGAĐAJI). *Neka su $A, B \subseteq \Omega$ proizvoljni događaji. Kažemo da su A i B međusobno isključivi ako su disjunktni, tj. ako vrijedi $A \cap B = \emptyset$.*

Primjedba 1.3.1. *Na osnovu posljednjeg teorema, jednostavno možemo doći i do drugih korisnih zaključaka. Naime, ako su A i B međusobno isključivi, tj. ako vrijedi $A \cap B = \emptyset$, jasno je da onda*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Iz istog razloga vrijedi i $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$, pa imamo

$$P(A) = 1 - P(A^C).$$

Primjedba 1.3.2. *Sada je još jasnija pretpostavka o jednakovjerovatnosti elementarnih događaja iz definicije vjerovatnoće. Naime, ako je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, i pretpostavka o jednakovjerovatnosti je zadovoljena, imamo*

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \cdots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}.$$

Tako naprimjer, ako je $A = \{\omega_2, \omega_3, \omega_6\} = \{\omega_2\} \cup \{\omega_3\} \cup \{\omega_6\}$, na osnovu prethodne primjedbe vrijedi

$$P(A) = P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) + P(\{\omega_6\}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

ZADATAK 1.3.2. *Pretpostavimo da bacamo dvije kocke, i registrujemo zbir tačkica na gornjim stranama. Ako je događaj A dobijanje 7 tačkica, B dobijanje 8 tačkica i C dobijanje barem 4 tačkice, izračunati njihove vjerovatnoće.*

Rješenje: Rezultate bacanja dvije kocke možemo predstaviti sljedećom shemom:

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6),
\end{array}.$$

Prostor elementarnih dogadjaja Ω čine svi elementi iz navedene sheme. (Primjetite i ovdje da kao prostor elementarnih dogadjaja nismo mogli uzeti skup $\{2,3,4,5,...,12\}$ jer tada elementarni dogadjaji nisu jednakovjerovatni!) Navedeni dogadjaji tada su

$$A = \{(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6)\},$$

$$B = \{(6,2),(5,3),(4,4),(3,5),(2,6)\},$$

$C = \{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),$ $(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),$ $(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\},$
pa je

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
$$P(B) = \frac{5}{36}$$
$$P(C) = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}.$$

Vjerovatnoću dogadjaja C mogli smo izračunati na brži način, uočivši $C^C = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$, jer onda imamo

$$P(C) = 1 - P(C^C) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}.$$

▲

ZADATAK 1.3.3. *Neka se bacaju tri novčića. Izračunati vjerovatnoću da je pao barem jedan grb.*

Rješenje: Prostor elementarnih događaja za bacanje tri novčića je

$$\Omega = \{PPP, PPG, PGP, PGG, GPP, GPG, GGP, GGG\},$$

a događaj A : ”Pao je barem jedan grb” je onda

$$A = \{PPG, PGP, PGG, GPP, GPG, GGP, GGG\}.$$

Stoga imamo

$$P(A) = \frac{7}{8}.$$

Primjetite da je ovdje također jednostavnije bilo uočiti da je A^C : ”Nije pao niti jedan grb”, $A^C = \{PPP\}$, iz čega slijedi

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

▲

ZADATAK 1.3.4. *Naći vjerovatnoću da slučajno izabran dvocifren broj bude djeljiv*

a. sa 2 *i sa* 5

b. sa 2 *ili sa* 5

Rješenje: Eksperiment je biranje jednog dvocifrenog broja, pa je prostor elementarnih događaja

$$\Omega = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ..., 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Ako su događaji

$$\begin{aligned} P &: \text{ Izabrani broj je djeljiv sa 2,} \\ Q &: \text{ Izabrani broj je djeljiv sa 5,} \end{aligned}$$

jasno je da je

$$\begin{aligned} P &= \{10, 12, 14, 16, ..., 96, 98\}, \\ Q &= \{10, 15, ..., 95\}. \end{aligned}$$

a. Ako je A : ”Izabrani broj je djeljiv sa 2 i sa 5”, onda je jasno da $A = P \cap Q$, pa imamo

$$P(A) = P(P \cap Q) = P(\{10, 20, 30, ..., 90\}) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}.$$

b. Ako je B : ”Izabrani broj je djeljiv sa 2 ili sa 5”, onda je jasno da $B = P \cup Q$, pa imamo

$$P(A) = P(P \cup Q) = P(P) + P(Q) - P(P \cap Q) = \frac{45}{90} + \frac{18}{90} - \frac{9}{90} = \frac{54}{90} = \frac{3}{5}.$$

▲

ZADATAK 1.3.5. *Ako na slučajan način biramo jednu kartu iz standardnog špila od 52 karte, izračunati vjerovatnoću da je izvučena karta pik ili desetka.*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

A : Izvučena karta je pik,
B : Izvučena karta je desetka.

Tražena vjerovatnoća je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

▲

Primjedba 1.3.3. *Posljednjih par zadataka imaju za cilj podsjećanje da u općem slučaju vrijedi samo*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

a ne

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

što je česta greška. Naime, posljednja jednakost zadovoljena je samo ako su događaji A i B međusobno isključivi, odnosno disjunktni.

ZADATAK 1.3.6. *U kutiji se nalaze 4 bijele i 6 crnih kuglica. Na slučajan način se izvlače 3 kuglice. Kolika je vjerovatnoća da se među njima nađe barem jedna crna?*

Rješenje: Kako prostor elementarnih događaja u ovom slučaju sadrži velik broj elemenata, nećemo ga navoditi, već ćemo samo uočiti ono što nam je neophodno:

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120.$$

Nas zanima događaj A : "Izvučena je barem jedna crna kuglica," a kako je on unija međusobno isključivih događaja

A_1 : Izvučena je jedna crna kuglica,
A_2 : Izvučene su dvije crne kuglice,
A_3 : Izvučene su tri crne kuglice,

imamo

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \\
&= \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{0}}{\binom{10}{3}} \\
&= \frac{6 \cdot \frac{4\cdot 3}{2}}{120} + \frac{\frac{6\cdot 5}{2} \cdot 4}{120} + \frac{\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} \cdot 1}{120} \\
&= \frac{36}{120} + \frac{60}{120} + \frac{20}{120} \\
&= \frac{116}{120} \\
&= \frac{29}{30}.
\end{aligned}$$

I ovdje smo traženu vjerovatnoću mogli izračunati znatno jednostavnije. Naime, oučimo li da je A^C : "Izvučene su sve bijele kuglice", imamo

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2}}{120} = 1 - \frac{4}{120} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}.$$

▲

ZADATAK 1.3.7. *Posuda sadrži* 3 *kuglice,* 2 *crvene i* 1 *žutu. Izvučemo li* 2 *kuglice, kolika je vjerovatnoća da su obje kuglice crvene?*

Rješenje: Kako redoslijed kuglica nije bitan, a jasno je da ponavljanje nije dozvoljeno, ovdje izvučene kuglice predstavljaju kombinacije bez ponavljanja, pa imamo

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{\frac{3\cdot 2}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Nakon izračunavanja tražene vjerovatnoće, uvijek je korisno razmisliti da li dobijena vrijednost ima smisla, posebice ako je prostor elementarnih događaja male kardinalnosti. Mogući događaji ovdje su da je izvučena jedna crvena i žuta kuglica, druga crvena i žuta kuglica, te dvije crvene kuglice, pa je $P(A) = \frac{1}{3}$ time opravdano. ▲

ZADATAK 1.3.8. *U kutiji ima a bijelih i b crnih kuglica, $a \geq 2, b \geq 3$. Odjednom se izvlači* 5 *kuglica. Naći vjerovatnoću da su izvučene* 2 *bijele i* 3 *crne kuglice.*

Rješenje: Kako redoslijed kuglica nije bitan, a jasno je da ponavljanje nije dozvoljeno, ovdje izvučene kuglice predstavljaju kombinacije bez ponavljanja, pa je tražena vjerovatnoća

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{a}{2}\binom{b}{3}}{\binom{a+b}{5}}.$$

▲

ZADATAK 1.3.9. *Posuda sadrži četiri kuglice: jednu crvenu, jednu zelenu, jednu žutu, i jednu bijelu. Ako izvadimo dvije kuglice iz posude, jednu za drugom, izračunati vjerovatnoće sljedećih događaja:*

a. A : *Jedna kuglica je crvena.*

b. B : *Prva kuglica je crvena ili žuta.*

c. C : *Kuglice su iste boje.*

d. D : *Prva kuglica nije bijela.*

e. E : *Nijedna kuglica nije plava.*

Rješenje:

a. Da bi se desio događaj A, potrebno je da jedna izvučena kuglica bude crvena, bez obzira na drugu. Posmatrati ćemo sljedeće događaje:

$$\begin{aligned} A_1 &: \text{ Izvučena je jedna crvena, i jedna zelena kuglica,} \\ A_2 &: \text{ Izvučena je jedna crvena, i jedna žuta kuglica,} \\ A_3 &: \text{ Izvučena je jedna crvena, i jedna bijela kuglica.} \end{aligned}$$

Jasno je da su događaji A_1, A_2 i A_3 međusobno disjunktni, odnosno isključivi, i da vrijedi $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Onda imamo

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &= \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} + \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} + \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Svakako, traženu smo vjerovatnoću mogli izračunati i na drugi način, navodeći eksplicitno Ω i A. Kako je $\Omega = \{$CZ, CŽ, CB, ZŽ, ZB, ŽB$\}$, i $A = \{$CZ, CŽ, CB$\}$, imamo

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

b. Prvobitno je neophodno primjetiti da nam je ovdje, za razliku od slučaja pod a., redoslijed bitan. Naime, ako bismo izvukli naprimjer prvo zelenu, a zatim crvenu kuglicu, to ne bi bio povoljan događaj za B. Prvu kuglicu možemo izvući na četiri različita načina, a za svaki od njih drugu kuglicu možemo izvući na tri preostala načina, pa po principu množenja zaključujemo da je

$$|\Omega| = V_4^2 = 4 \cdot 3 = 12.$$

(Ovdje bi nam od koristi bilo skicirati dijagram grananja). Trebamo još odrediti broj povoljnih događaja za B. U tu svrhu posmatrajmo događaje

B_1 : Prva izvučena kuglica je crvena,
B_2 : Prva izvučena kuglica je žuta .

Ako je prva kuglica crvena, druga kuglica može biti zelena, žuta ili bijela, pa B_1 ima tri povoljna slučaja, odnosno vrijedi $P(B_1) = \frac{3}{12}$. Analogno bismo imali $P(B_2) = \frac{3}{12}$. Jasno je da su događaji B_1 i B_2 disjunktni, odnosno isključivi, kao i to da vrijedi $B = B_1 \cup B_2$, pa imamo

$$P(B) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{3}{12} + \frac{3}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

I ovdje smo vjerovatnoću mogli računati navodeći eksplicitno Ω i B, posebice jer se ne radi o eksperimentima koji imaju veliki broj ishoda. Kako je $\Omega = \{$CZ, CŽ, CB, ZC, ZŽ, ZB, ŽC, ŽZ, ŽB, BC, BZ, BŽ$\}$, i $B = \{$CZ, CŽ, CB, ŽC, ŽZ, ŽB$\}$, imamo

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

c. $P(C) = O$, jer je C nemoguć događaj, kako postoji samo po jedna kuglica od svih navedenih boja.

d. Prvu kuglicu možemo izvući na 4 različita načina, od kojih na 3 načina izvlačimo kuglicu koja nije bijela. Dakle,

$$P(D) = \frac{3}{4}.$$

I ovdje smo vjerovatnoću mogli računati navodeći eksplicitno Ω i D, posebice jer se ne radi o eksperimentima koji imaju veliki broj ishoda. Kako je $\Omega = \{$CZ, CŽ, CB, ZC, ZŽ, ZB, ŽC, ŽZ, ŽB, BC, BZ, BŽ$\}$, i $D = \{$CZ, CŽ, CB, ZC, ZŽ, ZB, ŽC, ŽZ, ŽB$\}$, imamo

$$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

e. $P(E) = 1$, jer je E siguran događaj, kako u posudi nema plavih kuglica.

▲

ZADATAK 1.3.10. *Posuda sadrži* 3 *plave i* 2 *zelene kuglice. Izvodimo eksperiment u dvije faze. Prvobitno, bacamo nočić i ako padne glava, plava loptica se dodaje u posudu, a ako padne pismo zelena loptica se dodaje u posudu. Zatim se iz posude izvlači jedna kuglica. Kolika je vjerovatnoća da je izvučena plava kuglica?*

Rješenje: Dobijemo li u prvoj fazi eksperimenta glavu ili pismo, u drugoj fazi eksperimenta izvlačiti ćemo jednu kuglicu iz posude u kojoj se nalazi 6 kuglica. Po principu množenja zaključujemo da je broj svih mogućih ishoda $2 \cdot 6 = 12$. Potrebno je još odrediti broj svih povoljnih ishoda za događaj A, pri čemu je A : "Izvučena je plava kuglica." Ako prvobitno padne glava, broj povoljnih slučajeva je 4, a ako padne pismo imamo nova 3 povoljna slučaja, pa je

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7}{12}.$$

Ovdje bi također bilo jako korisno skicirati dijagram grananja. ▲

ZADATAK 1.3.11. *Ako iz novčanika u kojem imamo tačno* 8 *novčića po* 20 *pfeninga,* 7 *novčića po* 10 *pfeninga i* 6 *novčića po* 5 *pfeninga na slučajan način uzmemo* 6 *novčića, izračunati vjerovatnoću da je zbir vrijednosti najviše jednak* 100 *pfeninga.*

Rješenje: Kao i u nekoliko ranijih zadataka, i ovdje će nam biti znatno lakše računati vjerovatnoću događaja A : "Zbir vrijednosti je najviše jednak 100", kao $P(A) = 1 - P(A^C)$, pri čemu je očigledno A^C : "Zbir vrijednosti je veći od 100". Događaj A^C desiti će se ukoliko izvučemo svih 6 novčića po 20 pfeninga, ili 5 novčića po 20 pfeninga (pri čemu je preostali novčić proizvoljan), pa možemo pisati

$$A^C = P \cup Q \cup R,$$

pri čemu je

P : "Izvučeno je 6 novčića po 20 pfeninga"
Q : "Izvučeno je 5 novčića po 20 pfeninga, i 1 novčić po 10 pfeninga"
R : "Izvučeno je 5 novčića po 20 pfeninga, i 1 novčić po 5 pfeninga".

Jasno je da su navedeni događaji P, Q i R međusobno disjunktni, odnosno isključivi, pa imamo

$$\begin{aligned} P(A^C) &= P(P \cup Q \cup R) \\ &= P(P) + P(Q) + P(R) \\ &= \frac{\binom{8}{6}}{\binom{21}{6}} + \frac{\binom{8}{5}\binom{7}{1}}{\binom{21}{6}} + \frac{\binom{8}{5}\binom{6}{1}}{\binom{21}{6}} \\ &= \frac{\binom{8}{2}}{\frac{21\cdot20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}} + \frac{\binom{8}{3}\cdot 7}{\frac{21\cdot20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}} + \frac{\binom{8}{3}\cdot 6}{\frac{21\cdot20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}} \\ &= \frac{\frac{8\cdot7}{2}}{54264} + \frac{\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}\cdot 7}{54264} + \frac{\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}\cdot 6}{54264} \\ &= \frac{28}{54264} + \frac{392}{54264} + \frac{336}{54264} \\ &= \frac{756}{54264}. \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{756}{54264} = \frac{}{54264} \approx 0.9861.$$

▲

ZADATAK 1.3.12. *U jednoj zgradi stanuje pet porodica sa po* 1 *djetetom, tri porodice sa po* 3 *djece i dvije porodice sa po* 5 *djece. Na slučajan način se biraju tri porodice. Izračunati vjerovatnoću da*

a. barem dvije izabrane porodice imaju isti broj djece

b. tri izabrane porodice imaju 7 *djece*

Rješenje:

a. Kao i već mnogo puta ranije, i ovdje nam je znatno jednostavnije računati traženu vjerovatnoću kao $P(A) = 1 - P(A^C)$, pri čemu je očito A^C : "Sve ti izabrane porodice imaju različit broj djece." Tako imamo

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{30}{120} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

b. Da bi se realizovao događaj B : "Tri izabrane porodice imaju 7 djece", treba nastupiti neki od sljedećih dogadjaja

B_1 : "Jedna izabrana porodica ima 5 djece, i dvije porodice imaju po 1 dijete",
B_2 : "Dvije porodice imaju po 3 djece, i jedna porodica ima 1 dijete".

Dakle, imamo $B = B_1 \cup B_2$. Događaji B_1 i B_2 su isključivi, jer ne mogu istovremeno porodice biti birane i na način povoljan za B_1 i na način povoljan za B_2. Tako imamo

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B_1 \cup B_2) \\ &= P(B_1) + P(B_2) \\ &= \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} \\ &= \frac{20}{120} + \frac{15}{120} \\ &= \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

▲

Na kraju, navesti ćemo još jedan zadatak u ovoj sekciji isključivo zbog njegove kontraintuitivnosti (kao i početni problem) i samim time zanimljivosti. Upravo iz tih je razloga ovaj primjer nezaobilazan dio svakog materijala iz Vjerovatnoće.

ZADATAK 1.3.13. *Zamislite da ste u prostoriji sa još* 22 *osobe. Da li bi bilo pametnije kladiti se da među vama postoje barem dvije rođene na isti datum, ili u suprotnu tvrdnju?*

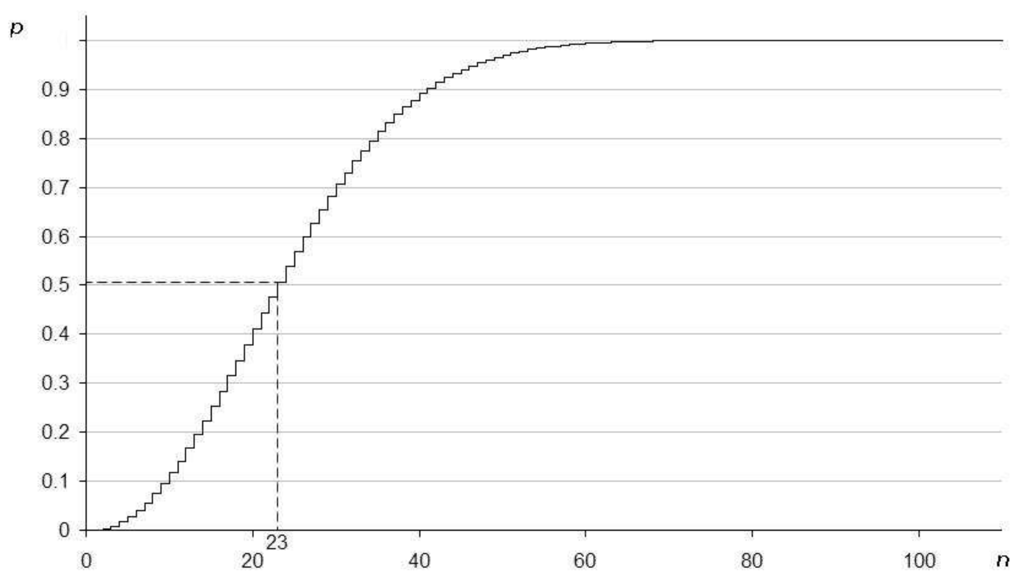
Rješenje: Neka je A : "Barem dvije osobe u prostoriji rođene su na isti dan". Traženu vjerovatnoću ćemo, kao u nekoliko ranijih zadataka, računati preko $P(A) = 1 - P(A^C)$, pri čemu je očigledno A^C : "Sve osobe u prostoriji rođene su na različit datum.” Jednostavnosti radi, zamislimo kao da smo zapisali datume rođenja svih 23 osobe. Prvi datum jedan je od mogućih 365 dana u godini, drugi datum ponovno je bilo koji od 365 dana u godini, te tako možemo nastaviti i do 23. datuma. Dakle, ukupan broj svih mogućih ovakvih nizova datuma je

$$|\Omega| = 365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365 = 365^{23}.$$

S druge strane, računamo li broj povoljnih događaja za A^C, jasno je da će on biti $365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - 23 + 1)$. Naime, prvi datum ponovno je jedan od mogućih 365 dana u godini, ali je sada drugi datum jedan od preostalih 364 dana u godini (jer je A^C : ”Sve osobe u prostoriji rođene su na različit datum”), te tako možemo nastaviti do 23. datuma koji može biti jedan od preostalih $365 - 23 + 1$ dana u godini. Dakle, imamo

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}} = 0.5073,$$

pa zaključujemo da bi bilo pametnije kladiti se da postoje barem dvije osobe u prostoriji koje su rođene na isti datum. Zanimljivo je da već za 57 osoba vjerovatnoća da barem dvije osobe imaju rođendan na isti datum premašuje 0.99. Grafik koji prikazuje navedenu vjerovatnoću za različit broj osoba prikazan je na sljedećoj slici.



Detaljnija ili zanimljivija objašnjenja i analize možete naći na

http://betterexplained.com/articles/understanding-the-birthday-paradox/, ili
http://www.youtube.com/watch?v=1FzRHk8c6C0.

Spomenimo još da je ovaj problem 1939. godine postavio Richard von Mises, koji je prvi uveo i pojam prostora elementarnih događaja, kao što je to ranije navedeno. ▲

1.4 Geometrijska definicija vjerovatnoće

Klasična definicija vjerovatnoće omogućila nam je izračunavanje vjerovatnoće bilo kojeg događaja, ukoliko je prostor elementarnih događaja Ω konačan. Međutim, ukoliko to nije slučaj, navedena definicija nam nije od koristi. Jedan od alternativnih načina definiranja vjerovatnoće uzima geometrijski pristup.

Definicija 1.4.1 (VJEROVATNOĆA). *Neka je Ω ograničen skup na pravoj, u ravni ili u prostoru, i $A \subseteq \Omega$. Vjerovatnoća događaja A je*

$$P(A) = \frac{mesA}{mes\Omega},$$

pri čemu je $mesX$ mjera skupa X, odnosno njegova dužina, površina ili zapremina.

ZADATAK 1.4.1. *Ako na slučajan način biramo broj iz intervala* $[3, 5]$, *izračunati vjerovatnoću da izabrani broj pripada intervalu* $(\frac{23}{7}, 4]$.

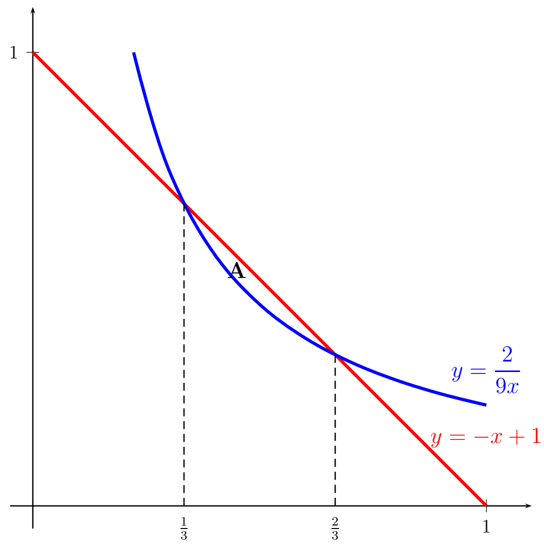
Rješenje: Neka je A : "Izabrani broj pripada intervalu $(\frac{23}{7}, 4]$". Tražena vjerovatnoća je

$$P(A) = \frac{mesA}{mes\Omega} = \frac{4 - \frac{23}{7}}{5-3} = \frac{\frac{5}{7}}{2} = \frac{5}{14}.$$

▲

ZADATAK 1.4.2. *Na slučajan način se biraju dva broja iz* $[0, 1]$. *Kolika je vjerovatnoća da je njihov zbir manji od* 1, *a proizvod veći od* $\frac{2}{9}$?

Rješenje: Neka su $x, y \in [0, 1]$ birani brojevi. Nejednačina $x + y < 1$ ekvivalentna je sa $y < -x + 1$, pa da bi bio prvi uslov zadovoljen oblast A mora se nalaziti ispod prave $y = -x + 1$. Da bi bio zadovoljen i drugi uslov zadatka, mora vrijediti $xy > \frac{2}{9}$, odnosno $y > \frac{2}{9x}$, pa se oblast A nalazi iznad grafika funkcije $y = \frac{2}{9x}$.



Kako bi mogli odrediti površinu oblasti A, prvo je neophodno da nadjemo presječne tačke dva grafika sa slike, tj. da riješimo sistem

$$
\begin{aligned}
y &= -x + 1 \\
y &= \tfrac{2}{9x}.
\end{aligned}
$$

Metodom supstitucije dobijamo

$$
\begin{aligned}
& -x + 1 = \tfrac{2}{9x} \\
\Leftrightarrow\ & (-x + 1) \cdot 9x = 2 \\
\Leftrightarrow\ & -9x^2 + 9x - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x_1 = \tfrac{1}{3}, \quad x_2 = \tfrac{2}{3},
\end{aligned}
$$

pa je

$$
\begin{aligned}
mesA &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (-x + 1)dx - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{2}{9x}dx \\
&= -\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} xdx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} dx - \frac{2}{9}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{x}dx \\
&= -\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} + x\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}\ln x\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{-1}{2}[(\frac{2}{3})^2 - (\frac{1}{3})^2] + [\frac{2}{3} - \frac{1}{3}] - \frac{2}{9}[\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{3}] \\
&= \frac{-1}{2}[\frac{4}{9} - \frac{1}{9}] + \frac{1}{3} - \frac{2}{9}\ln 2 \\
&\approx \frac{-1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} \cdot 0.69314718 \\
&\approx -0.166666667 + 0.333333333 - 0.154032706 \\
&\approx 0.0126.
\end{aligned}
$$

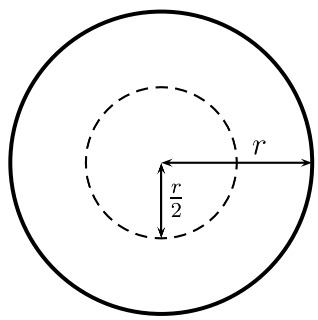
Kako je $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, onda $mes\Omega = 1$, pa je tražena vjerovatnoća

$$P(A) = \frac{mesA}{mes\Omega} = \frac{0.0126}{1} = 0.0126.$$

▲

ZADATAK 1.4.3. *U krugu poluprečnika r bira se na slučajan način jedna tačka. Odrediti vjerovatnoću da je izabrana tačka bliža kružnoj liniji nego centru kruga.*

Rješenje: Neka je A : "Izabrana tačka je bliža kružnoj liniji nego centru kruga".



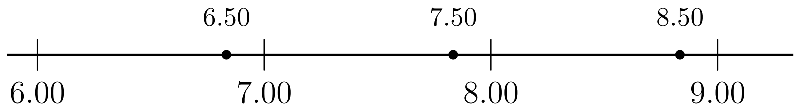
Na osnovu geometrijske definicije vjerovatnoće, imamo

$$P(A) = \frac{mesA}{mes\Omega} = \frac{r^2\pi - (\frac{r}{2})^2\pi}{r^2\pi} = \frac{\frac{3r^2\pi}{4}}{r^2\pi} = \frac{3}{4}.$$

▲

ZADATAK 1.4.4. *Student stanuje u predgrađu. Pored njegove kuće prolaze dvije autobuske linije. Svakog punog sata prolazi autobus kojim on ide na fakultet, a svakog 50-og minuta u satu prolazi drugi autobus kojim on odlazi u omiljeni kafić. Student je odlučio da svaki dan kad izadje iz kuće sačeka prvi autobus koji naiđe i ode ili na fakultet ili u kafić. Da li student češće ide na fakultet ili u kafić?*

Rješenje: Neka je A : "Student odlazi na fakultet".



Na osnovu pretpostavki zadatka, imamo

$$P(A) = \frac{mesA}{mes\Omega} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6},$$

pa student mnogo češće ide u kafić. ▲

ZADATAK 1.4.5. *Davor i Miloš su se dogovorili da se sretnu na određenom mjestu izmedju* 12 *i* 13*h. Osoba koja prva dodje čeka* 20 *minuta, i poslije toga odlazi. Izračunati vjerovatnoću da će do susreta doći ako je dolazak na mjesto susreta obje osobe slučajan i može se dogoditi u svakom trenutku predviđenog vremena, a ne zavisi od dolaska druge osobe.*

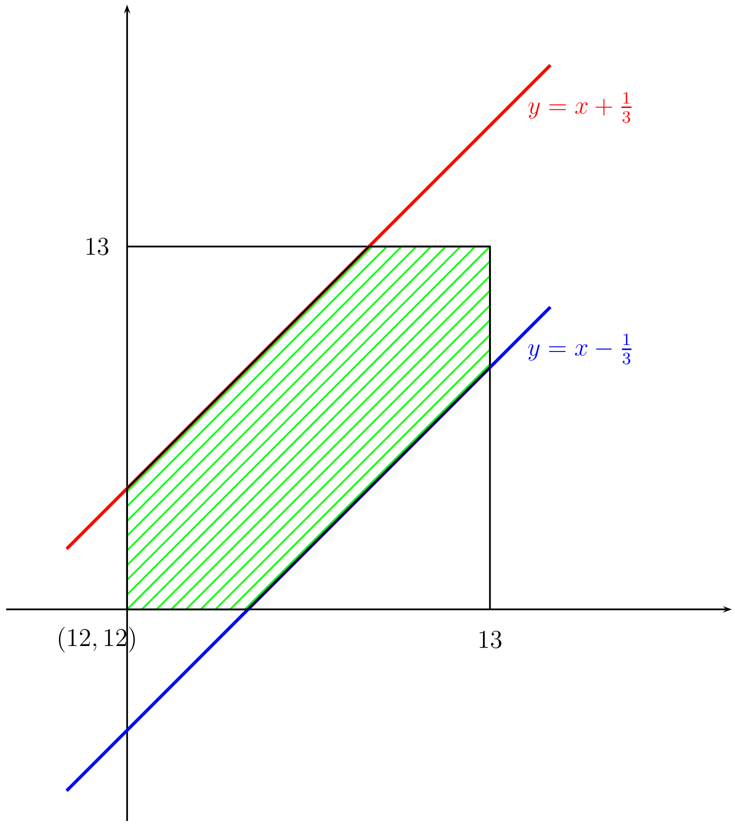
Rješenje: Neka je A : "Došlo je do susreta". Neka je dalje x vrijeme u koje je Davor došao na dogovoreno mjesto, i y vrijeme u koje je Miloš došao (vrijeme u h). Na osnovu pretpostavke zadatka, tj. njihovog dogovora, imamo

$$12 \leq x \leq 13,$$
$$12 \leq y \leq 13.$$

Ako je do susreta došlo, onda vrijedi i (kako je 20 minuta $\frac{1}{3}$ sata)

$$\begin{aligned} |x-y| \leq \frac{1}{3} \quad & \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x-y \leq \frac{1}{3} \\ & \Leftrightarrow y \leq x+\frac{1}{3} \quad \wedge \quad y \geq x-\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

tj. povoljni ishodi su svi oni ispod prave $y = x + \frac{1}{3}$ i iznad prave $y = x - \frac{1}{3}$.



Da bi izračunali površinu lika označenog na slici, najlakše je to uraditi tako što od površine cijelog kvadrata 1×1 oduzmemo dvije površine malih neoznačenih trouglova, koje zajedno čine površinu jednog manjeg kvadrata $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$. Dakle, tražena vjerovatnoća je

$$P(A) = \frac{mesA}{mes\Omega} = \frac{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{1} = \frac{5}{9}.$$

▲

ZADATAK 1.4.6. *U prostoru je na slučajan način izabrana tačka* (x, y, z) *takva da* $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$, $(a > 0)$. *Izračunati vjerovatnoću da ta tačka pripada unutrašnjosti sfere*

$$(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{a}{2})^2 + (z - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Rješenje: Neka je A : "Izabrana tačka pripada unutrašnjosti date sfere".

Tačke se po pretpostavci biraju iz kocke stranice a, a povoljni ishodi su oni za koje je izabrana tačka unutar sfere poluprečnika $\frac{a}{2}$. Na osnovu geometrijske definicije vjerovatnoće, jasno je da je tražena vjerovatnoća

$$P(A) = \frac{mesA}{mes\Omega} = \frac{\frac{4\pi(\frac{a}{2})^3}{3}}{a^3} = \frac{\frac{4\pi a^3}{8\cdot 3}}{a^3} = \frac{\pi}{6}.$$

▲

1.5 Uslovna vjerovatnoća

ZADATAK 1.5.1. *U jednoj osnovnoj školi među učenicima je sprovedeno istraživanje o njima najdražem voću. Rezultati su predstavljeni u sljedećoj tabeli*

	Jabuka	*Banana*	*Lubenica*	*Drugo*	*UKUPNO*
Dječaci	*15*	*18*	*35*	*15*	*83*
Djevojčice	*35*	*12*	*10*	*10*	*67*
UKUPNO	*50*	*30*	*45*	*25*	*150*

a. *Ako je na slučajan način izabran jedan učenik, naći vjerovatnoću da je to dječak.*

b. *Ako je na slučajan način izabran jedan učenik, naći vjerovatnoću da je njegovo omiljeno voće jabuka.*

c. *Ako je na slučajan način izabran jedan učenik, naći vjerovatnoću da je to dječak čije je omiljeno voće jabuka.*

d. *Ako je na slučajan način izabran jedan učenik, naći vjerovatnoću da je to dječak ili da mu je omiljeno voće jabuka.*

e. *Ako je na slučajan način izabran jedan dječak, naći vjerovatnoću da mu je omiljeno voće jabuka.*

Rješenje: Jednostavno zaključujemo da su tražene vjerovatnoće

a. $P(A) = \frac{83}{150}$,

b. $P(B) = \frac{50}{150}$,

c. $P(C) = \frac{15}{150}$,

d. $P(D) = \frac{83}{150} + \frac{50}{150} - \frac{15}{150} = \frac{118}{150}$,

e. $P(E) = \frac{15}{83}$.

Primjetite da je u primjerima a.-d. $|\Omega| = 150$, dok jedino u primjeru e. ne posmatramo sve učenike, jer nam je unaprijed dato da je to dječak. Tada kao prostor elementarnih događaja posmatramo $\Omega' \subseteq \Omega$, gdje je $|\Omega'| = 83$. Uslovna vjerovatnoća javlja se kada nam dati uslov ograničava prostor elementarnih događaja Ω. ▲

Uzmemo li u obzir prethodni primjer, potpuno je opravdana sljedeća definicija.

Definicija 1.5.1 (USLOVNA VJEROVATNOĆA)**.** *Neka su $A, B \subseteq \Omega$, i $P(B) \neq 0$. Uslovna vjerovatnoća događaja A, ako je poznato da se događaj B realizirao, je*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

ZADATAK 1.5.2. *Ako se zna da je pri bacanju tri novčića palo barem jedno pismo, odrediti vjerovatnoću da su pala tri pisma.*

Rješenje: Neka je A : "Pala su tri pisma", i B : "Palo je barem jedno pismo". Jasno je da vrijedi

$$A = \{PPP\},$$
$$B = \{PPP, PPG, PGP, PGG, GPP, GPG, GGP\}.$$

Razmišljajući kao u prvom zadatku, možemo prostor elementarnih događaja bacanja tri novčića

$$\Omega = \{PPP, PPG, PGP, PGG, GPP, GPG, GGP, GGG\}$$

zbog datog uslova ograničiti na

$$\Omega' = B = \{PPP, PPG, PGP, PGG, GPP, GPG, GGP\},$$

pa ćemo tada imati

$$P(A|B) = \frac{|A \cap \Omega'|}{|\Omega'|} = \frac{1}{7}.$$

Ipak, bolje je odmah početi upotrebljavati navedenu definiciju uslovne vjerovatnoće (ne razmišljajući o Ω'), na osnovu koje imamo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{7}.$$

▲

ZADATAK 1.5.3. *Ako se zna da je pri bacanju dvije kocke za igru zbir tačkica na gornjim stranama veći od* 9, *izračunati vjerovatnoću da je zbir* 11.

Rješenje: Bacanje dvije kocke kao rezultat ima sljedeće mogućnosti

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6).
\end{array}$$

Neka je A : "Zbir tačkica je 11", B : "Zbir tačkica je veći od 9". Na osnovu definicije uslovne vjerovatnoće, imamo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

▲

Teorem 1.5.1 (OSOBINE USLOVNE VJEROVATNOĆE). *Neka je* Ω *prostor elementarnih događaja. Tada vrijedi*

(i) $(\forall A, B \subseteq \Omega): \quad 0 \leq P(A|B) \leq 1.$

(ii) $P(A|A) = 1$

(iii) $(\forall A_1, A_2, ..., A_n, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j; B \subseteq \Omega): \quad P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \cdots + P(A_n|B)$

Primjedba 1.5.1. *Na osnovu posljednjeg teorema, možemo doći i do još nekih korisnih zaključaka. Naprimjer, na osnovu (iii) imamo*

$$1 = \frac{P(B)}{P(B)} = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = P(\Omega|B) = P(A \cup A^C|B) = P(A|B) + P(A^C|B,)$$

pa vrijedi

$$P(A^C|B) = 1 - P(A|B),$$

pri čemu su A i B proizvoljni događaji.

Ako A ne zavisi od B, tj. nema nikakvog utjecaja da li se B realizira ili ne, jasno je da onda $P(A|B) = P(A)$. Također, jednostavno možemo uočiti da tada vrijedi i $P(B|A) = P(B)$, tj. da B ne zavisi od A. Naime, ako je $P(A|B) = P(A)$, na osnovu definicije uslovne vjerovatnoće imamo

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A),$$

pa je

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

odnosno zaista vrijedi $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B)$. Na osnovu svega navedenog ima smisla sljedeća definicija.

Definicija 1.5.2 (NEZAVISNOST DOGAĐAJA)**.** *Događaji A i B su nezavisni ako vrijedi*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ovo formula ustvari predstavlja jedan od oblika ranije navedenog principa množenja, koji nam je bio od koristi kada smo željeli izračunati broj načina na koji su se mogli realizirati događaji A i B, tj. događaj $A \cap B$.
Navesti ćemo prvo nekoliko primjera koji imaju za cilj utvrđivanje razlike između pojmova zavisni i nezavisni događaji.

ZADATAK 1.5.4. *Vjerovatnoća da učenik položi finalni test iz matematike je* 0.8, *vjerovatnoća da učenik dobije pohvalu nastavnog vijeća je* 0.4, *a vjerovatnoća da učenik položi test iz matematike i dobije pohvalu nastavnog vijeća je* 0.25. *Da li su događaji A : "Učenik polaže finalni test iz matematike" i B : "Učenik dobija pohvalu nastavnog vijeća" međusobno nezavisni?*

Rješenje: Kako imamo

$$0.25 = P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = 0.8 \cdot 0.4 = 0.32,$$

događaji A i B su zavisni. ▲

ZADATAK 1.5.5. *Bacaju se dva novčića i posmatraju sljedeći događaji*

$$\begin{aligned}
A &: \ \textit{Pojava grba na prvom novčiću}\\
B &: \ \textit{Pojava barem jednog grba}\\
C &: \ \textit{Pojava barem jednog pisma}\\
D &: \ \textit{Pojava grba na drugom novčiću}
\end{aligned}$$

Ispitati nezavisnost događaja A i C, A i D, B i C, B i D.

Rješenje: Kako je $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$, jasno je da

$$\begin{aligned}
A &= \{GP, GG\}\\
B &= \{PG, GP, GG\}\\
C &= \{PP, PG, GP\}\\
D &= \{PG, GG\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \cap C &= \{GP\}\\
A \cap D &= \{GG\}\\
B \cap C &= \{PG, GP\}\\
B \cap D &= \{PG, GG\}.
\end{aligned}$$

Tako imamo

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{3}{4}, P(C) = \frac{3}{4}, P(D) = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4}, P(A \cap D) = \frac{1}{4}, P(B \cap C) = \frac{1}{2}, P(B \cap D) = \frac{1}{2},$$

pa

$$\begin{aligned}
P(A \cap C) &\neq P(A)P(C)\\
P(A \cap D) &= P(A)P(D)\\
P(B \cap C) &\neq P(B)P(C)\\
P(B \cap D) &\neq P(B)P(D).
\end{aligned}$$

Dakle, A i D su nezavisni događaji, dok su ostali dati parovi zavisni, što u potpunosti ima smisla uzmemo li u obzir kako su ustvari definirani događaji A, B, C i D. ▲

Primjedba 1.5.2. *Primjetimo još i da, ukoliko su događaji A i B nezavisni, tada su nezavisni i događaji A^C i B. Ovaj rezultat direktna je posljedica posljednje primjedbe. Naime, ako su A i B nezavisni, odnosno ako vrijedi $P(A|B) = P(A)$, imamo*

$$P(A^C|B) = 1 - P(A|B) = 1 - P(A) = P(A^C),$$

tj. i događaji A^C i B su nezavisni.

ZADATAK 1.5.6. *Strijelci A, B i C gađaju po jednom u cilj, nezavisno jedan od drugog, pogađajući sa vjerovatnoćama 0.6, 0.5 i 0.4 redom. Ustanovljeno je da je cilj pogođen dva puta. Šta je vjerovatnije - da je strijelac C pogodio ili promašio cilj?*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće dogadjaje

$$\begin{aligned} A &: \text{ Strijelac A je pogodio cilj} \\ B &: \text{ Strijelac B je pogodio cilj} \\ C &: \text{ Strijelac C je pogodio cilj.} \end{aligned}$$

Na osnovu pretpostavke zadatka, vrijedi $P(A) = 0.6, P(B) = 0.5, P(C) = 0.4$. Želimo odrediti vjerovatnoću da je strijelac C pogodio cilj, ako je poznato da je cilj pogođen dva puta, pa treba odrediti $P(C|D)$, gdje je

$$D : \text{ Cilj je pogođen dva puta.}$$

Na osnovu definicije

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}.$$

Da bi odredili vjerovatnoće $P(C \cap D)$ i $P(D)$, uočimo da je

$$\begin{aligned} D &= (A \cap B \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C) \\ C \cap D &= (A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Prisjetimo se da za međusobno isključive, tj. disjunktne događaje M i N vrijedi $P(M \cup N) = P(M) + P(N)$. Kako su događaji $A \cap B \cap C^C, A \cap B^C \cap C$ i $A^C \cap B \cap C$ u parovima međusobno isključivi (jer naprimjer $(A \cap B \cap C^C) \cap (A \cap B^C \cap C) = (B \cap B^C) \cap (C \cap C^C) \cap A = \emptyset$), imamo

$$\begin{aligned} P(C \cap D) &= P((A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C)) \\ &= P(A \cap B^C \cap C) + P(A^C \cap B \cap C), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(D) &= P((A \cap B \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C)) \\ &= P(A \cap B \cap C^C) + P(A \cap B^C \cap C) + P(A^C \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Po pretpostavci zadatka, strijelci A, B i C gađaju u cilj nezavisno jedan od drugog, pa dalje imamo

$$\begin{aligned} P(C \cap D) &= P(A)P(B^C)P(C) + P(A^C)P(B)P(C) \\ &= 0.6 \cdot (1 - 0.5) \cdot 0.4 + (1 - 0.6) \cdot 0.5 \cdot 0.4 \\ &= 0.2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(D) &= P(A)P(B)P(C^C) + P(A)P(B^C)P(C) + P(A^C)P(B)P(C)\\ &= 0.6 \cdot 0.5 \cdot (1-0.4) + 0.6 \cdot (1-0.5) \cdot 0.4 + (1-0.6) \cdot 0.5 \cdot 0.4\\ &= 0.38.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.2}{0.38} = 0.53.$$

Kako je $P(C^C|D) = 1 - P(C|D) = 1 - 0.53 = 0.47$, veća je vjerovatnoća da je strijelac C pogodio cilj. ▲

Primjedba 1.5.3. *Objasniti ćemo jednu od čestih grešaka u zadacima iz uslovne vjerovatnoće na prethodnom primjeru. Naime, mnogi bi često pretpostavili da je $P(D) = 1$, jer je poznato da se događaj D : "Cilj je pogođen dva puta" realizirao, pa je to siguran događaj. Međutim, to naravno nije tačno, a čak smo i izračunali da je $P(D) = 0.38$. Naime, eksperiment posmatran u prethodnom zadatku jeste tri nezavisna gađanja u cilj, i on može imati različit niz ishoda, a samo u nekima od njih je cilj pogođen dva puta. Preciznije,*

$$\begin{aligned}\Omega = \{\ & A \cap B \cap C, A \cap B \cap C^C, A \cap B^C \cap C, A^C \cap B \cap C, A \cap B^C \cap C^C,\\ & A^C \cap B \cap C^C, A^C \cap B^C \cap C, A^C \cap B^C \cap C^C \quad \}.\end{aligned}$$

Dakle, nema razloga zašto ovaj eksperiment ne bi mogao rezultirati sa samo jednim pogotkom, ili svim promašajima, pa D nije siguran događaj, tj. $P(D) \neq 1$. Međutim, zadatak bismo mogli posmatrati i na taj način, ali samo ukoliko bi se oslanjali na već navedeno objašnjenje da nam dati uslov ograničava prostor elementarnih događaja Ω na neki novi Ω'. Takav postupak je teži za razumijevanje, pa se, kao što je već spomenuto, preporučuje pozivanje na definiciju uslovne vjerovatnoće, tj. na izradu zadataka na način kao što je to urađeno u prethodnom primjeru. (Primjetite također i da Ω nije prostor jednakovjerovatnih elementarnih događaja, no da tu činjenicu nismo nigdje ni koristili u prethodnom primjeru.)

ZADATAK 1.5.7. *Tri strijelca nezavisno jedan od drugoga gađaju jednu metu po jednom, pogađajući je sa vjerovatnoćama $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{2}{3}$ redom. Ako je cilj pogođen jednom, kolika je vjerovatnoća da treći strijelac promaši?*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

A : Prvi strijelac je pogodio metu
B : Drugi strijelac je pogodio metu
C : Treći strijelac je pogodio metu.

Na osnovu pretpostavke zadatka, vrijedi $P(A) = \frac{4}{5}, P(B) = \frac{3}{4}, P(C) = \frac{2}{3}$. Želimo odrediti vjerovatnoću da je treći strijelac promašio, ako je poznato da je cilj pogođen jednom, pa treba odrediti $P(C^C|D)$, gdje je

$$D: \text{ Cilj je pogođen jednom.}$$

Na osnovu definicije

$$P(C^C|D) = \frac{P(C^C \cap D)}{P(D)}.$$

Da bi odredili vjerovatnoće $P(C^C \cap D)$ i $P(D)$, uočimo da je

$$\begin{aligned} D &= (A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C) \\ C^C \cap D &= (A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C). \end{aligned}$$

Prisjetimo se da za međusobno isključive, tj. disjunktne događaje M i N vrijedi $P(M \cup N) = P(M) + P(N)$. Kako su događaji $A \cap B^C \cap C^C, A^C \cap B \cap C^C$ i $A^C \cap B^C \cap C$ u parovima međusobno isključivi (jer naprimjer $(A \cap B^C \cap C^C) \cap (A^C \cap B^C \cap C) = (A \cap A^C) \cap (C \cap C^C) \cap B = \emptyset$), imamo

$$\begin{aligned} P(C^C \cap D) &= P((A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C)) \\ &= P(A \cap B^C \cap C^C) + P(A^C \cap B \cap C^C), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(D) &= P((A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C)) \\ &= P(A \cap B^C \cap C^C) + P(A^C \cap B \cap C^C) + P(A^C \cap B^C \cap C). \end{aligned}$$

Po pretpostavci zadatka, strijelci A, B i C gađaju u cilj nezavisno jedan od drugog, pa dalje imamo

$$\begin{aligned} P(C^C \cap D) &= P(A)P(B^C)P(C^C) + P(A^C)P(B)P(C^C) \\ &= \frac{4}{5} \cdot (1 - \frac{3}{4}) \cdot (1 - \frac{2}{3}) + (1 - \frac{4}{5}) \cdot \frac{3}{4} \cdot (1 - \frac{2}{3}) \\ &= \frac{7}{60}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P(B^C)P(C^C) + P(A^C)P(B)P(C^C) + P(A^C)P(B^C)P(C) \\ &= \frac{4}{5} \cdot (1 - \frac{3}{4}) \cdot (1 - \frac{2}{3}) + (1 - \frac{4}{5}) \cdot \frac{3}{4} \cdot (1 - \frac{2}{3}) + (1 - \frac{4}{5}) \cdot (1 - \frac{3}{4}) \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{3}{20}, \end{aligned}$$

Dakle, tražena vjerovatnoća je

$$P(C^C|D) = \frac{P(C^C \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{7}{60}}{\frac{3}{20}} = \frac{7}{9}.$$

▲

Primjedba 1.5.4. *Dakle, ukoliko su događaji A i B nezavisni, vrijedi*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Međutim, šta ukoliko su događaji A i B zavisni, kako tada izračunati $P(A \cap B)$? Na osnovu definicije uslovne vjerovatnoće, imamo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)},$$

pa je

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Jednu uslovnu vjerovatnoću je obično jednostavno, a drugo teže izračunati (ponekad ju je gotovo nemoguće i pojmiti), pa ćemo naravno koristiti formulu koja nam omogućava brže izračunavanje. Sve ove formule koje nam omogućavaju računanje $P(A \cap B)$, kao što je to i ranije spomenuto, predstavljaju princip množenja na kojeg smo se oslanjali još u uvodnom dijelu. Naime, vjerovatnoću da se realiziraju događaji A i B računamo kao proizvod vjerovatnoće događaja A i vjerovatnoće događaja B, ukoliko je poznato da se događaj A realizirao. Pokažimo to na primjerima.

ZADATAK 1.5.8. *Ako na slučajan način biramo dvije karte iz standardnog špila od 52 karte, izračunati vjerovatnoću da su obje izvučene karte desetke?*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

$$\begin{aligned} A_1 &: \text{ Prva izvučena karta je desetka,} \\ A_2 &: \text{ Druga izvučena karta je desetka.} \end{aligned}$$

Tražena vjerovatnoća je

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{12}{52 \cdot 51} = \frac{1}{221}.$$

▲

Primjetite da smo, kao što je to navedeno u posljednjoj primjedbi, u prethodnom primjeru traženu vjerovatnoću presjeka mogli računati na dva načina

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1|A_2).$$

Sada možemo bolje uočiti zašto je jedna od uslovnih vjerovatnoća jednostavna za računanje, pri čemu druga uslovna vjerovatnoća može biti jako teška uopće za pojmiti. Naime, $P(A_2|A_1)$ je vjerovatnoća da je druga izvučena karta desetka, ako je poznato da je prva izvučena karta desetka, pa odmah zaključujemo da je $P(A_2|A_1) = \frac{3}{51}$. Međutim, $P(A_1|A_2)$ predstavlja vjerovatnoću da je prva izvučena karta desetka, ako je poznato da je druga izvučena karta desetka, što je samo po sebi potpuno zbunjujuće.

ZADATAK 1.5.9. *Ako na slučajan način izvlačimo tri kuglice jednu iza druge iz posude koja sadrži* 7 *crvenih i* 3 *bijele kuglice, izračunati vjerojatnoću da su prve dvije kuglice crvene, a treća bijela.*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

C_1 : Prva izvučena kuglica je crvena,
C_2 : Druga izvučena kuglica je crvena,
B_3 : Treća izvučena kuglica je bijela.

Tražena vjerovatnoća je

$$P(C_1 \cap C_2 \cap B_3) = P(C_1) \cdot P(C_2|C_1) \cdot P(B_3|C_1 \cap C_2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = 0.175.$$

▲

ZADATAK 1.5.10. *U jednom istraživanju,* 40% *ispitanika izjasnili su se kao demokrati. Ako je osoba demokrat, vjerovatnoća da je ta osoba glasala za demokratskog kandidata je* 0.9. *Naći vjerovatnoću da je osoba demokrat i da je glasala za demokratskog kandidata.*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

D : Osoba je izjasnila kao demokrat,
G : Osoba je glasala za demokratskog kandidata.

Tražena vjerovatnoća je

$$P(D \cap G) = P(D)P(G|D) = 0.4 \cdot 0.9 = 0.36.$$

▲

ZADATAK 1.5.11. *Posuda sadrži tri kuglice, dvije crvene i jednu žutu. Izvučemo li jednu kuglicu i registrujemo njenu boju, te je vratimo u posudu, a zatim ponovno izvučemo kuglicu i registrujemo njenu boju, kolika je vjerovatnoća da su obje kuglice crvene?*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

C_1 : Prva izvučena kuglica je crvena,
C_2 : Druga izvučena kuglica je crvena.

Tražena vjerovatnoća je

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2|C_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Ovdje smo koristili opću formulu za računanje vjerovatnoće presjeka dva događaja ne razmišljajući o njihovoj (ne)zavisnosti. Naravno, mogli smo odmah zaključiti da su događaji C_1 i C_2 nezavisni (jer vraćamo kuglicu, pa to što prva izvučena kuglica jeste ili nije crvena nema nikakvog utjecaja na izvlačenje druge kuglice), te koristiti formulu $P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2)$. ▲

ZADATAK 1.5.12. *Posuda sadrži tri crne i dvije bijele kuglice. Vadimo kuglice iz posude, jednu po jednu, bez vraćanja, sve dok ne izvučemo crnu kuglicu. Naći vjerovatnoću sljedećih događaja:*

a. A : *Samo jedno izvlačenje je potrebno.*

b. B : *Tačno dva izvlačenja su potrebna.*

c. C : *Tačno tri izvlačenja su potrebna.*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

C_1 : Prva izvučena kuglica je crna,
C_2 : Druga izvučena kuglica je crna,
C_3 : Treća izvučena kuglica je crna.

Tražene vjerovatnoće su

a. $P(A) = P(C_1) = \frac{3}{5}.$

b. $P(B) = P(C_1^C \cap C_2) = P(C_1^C) \cdot P(C_2|C_1^C) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{10}$.

c. $P(C) = P(C_1^C \cap C_2^C \cap C_3) = P(C_1^C) \cdot P(C_2^C|C_1^C) \cdot P(C_3|C_1^C \cap C_2^C) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{3} = \dfrac{1}{10}$.

▲

ZADATAK 1.5.13. *Dolazite kući kasno uveče, a vanjsko svjetlo ne radi. Kako ne možete raspoznati ključ od kuće, nasumice probate ključeve od njih sedam sa svog privjeska sve dok ne otvorite vrata. Dva od sedam ključeva sa privjeska mogu otvoriti vrata. Naći vjerovatnoću otvaranja vrata sa prvim ili drugim ključem.*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

A_1 : Vrata su otvorena sa prvim izabranim ključem,
A_2 : Vrata su otvorena sa drugim izabranim ključem,
A : Vrata su otvorena sa prvim ili drugim izabranim ključem.

Ako su vrata otvorena sa prvim ili drugim izabranim ključem, to znači da su otvorena sa prvim izabranim ključem, ili drugim izabranim ključem (što znači da je prvi izabrani ključ bio pogrešan, inače bi već tada stali sa probom), pa je

$$A = A_1 \cup (A_1^C \cap A_2).$$

Jasno je da su događaji A_1 i $A_1^C \cap A_2$ disjunktni, odnosno isključivi, te da vrijedi $A = A_1 \cup (A_1^C \cap A_2)$. Stoga imamo

$$P(A) = P(A_1 \cup (A_1^C \cap A_2)) = P(A_1) + P(A_1^C \cap A_2) = P(A_1) + P(A_1^C)P(A_2|A_1^C).$$

Kako dva ključa od njih sedam mogu otključati vrata, vrijedi

$$P(A) = \frac{2}{7} + \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{24}{49}.$$

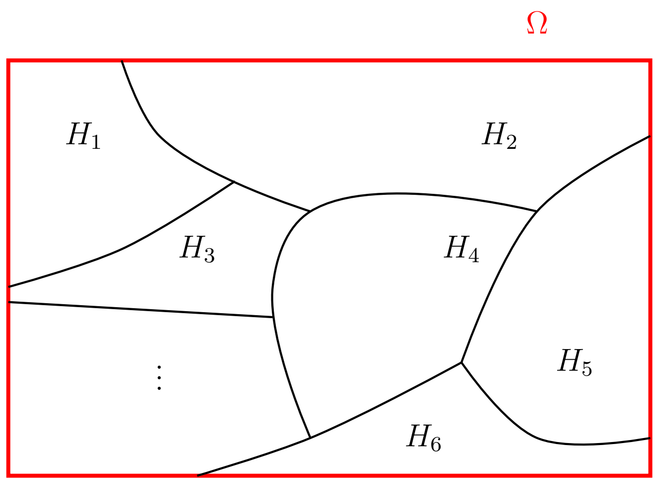
▲

Nakon posljednjih nekoliko primjera, postaje jasno da smo uslovnu vjerovatnoću i pojam nezavisnosti događaja koristili i u ranijim sekcijama, dok još te pojmove nismo ni uveli (naprimjer, problem sa istim rođendanima). To je bilo moguće jer su navedeni pojmovi intuitivno veoma jasni, posebice u jednostavnijim primjerima, iako bi svakako bilo mnogo bolje te primjere navesti tek ovdje.

Definicija 1.5.3 (POTPUNA GRUPA DOGAĐAJA). *Neka je Ω prostor elementarnih događaja. Događaji $H_1, H_2, ..., H_n$ obrazuju potpunu grupu događaja ako se pri svakoj realizaciji određenog kompleksa uslova obavezno realizuje jedan od njih, a u parovima su međusobno isključivi, tj. ako vrijedi*

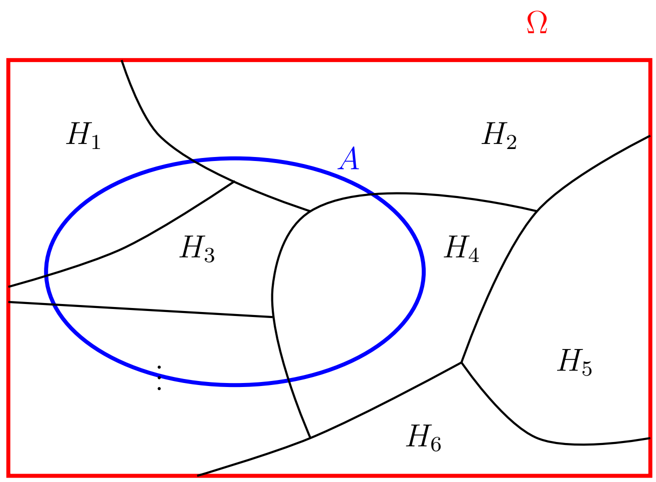
$$H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \Omega,$$

$$H_i \cap H_j = \emptyset \quad (i, j \in \overline{1, n}, i \neq j).$$



Teorem 1.5.2 (FORMULA POTPUNE VJEROVATNOĆE). *Neka je Ω prostor elementarnih događaja, i neka skupovi $H_1, H_2, ..., H_n$ obrazuju potpunu grupu događaja. Za proizvoljan događaj A vrijedi*

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \cdots + P(H_n)P(A|H_n).$$



$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \cdots \cup (A \cap H_n)$$
$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \cdots + P(A \cap H_n)$$
$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \cdots + P(H_n)P(A|H_n)$$

ZADATAK 1.5.14. *U prostoriji se nalaze tri kutije, koje sadrže redom* $10, 12$ *i* 8 *čokolada. Od toga su u prvoj kutiji* 3*, u drugoj* 5 *i u trećoj* 6 *Milka čokolada. Na slučajan način se bira jedna kutija, i iz nje odjednom vade* 3 *čokolade. Kolika je vjerovatnoća da sve budu Milka čokolade?*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

H_1 : Izvučena je prva kutija,
H_2 : Izvučena je druga kutija,
H_3 : Izvučena je treća kutija,
A : Sve tri izvučene čokolade su Milka.

Na osnovu datih podataka, lako zaključujemo da vrijedi

$$P(A|H_1) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}, \quad P(A|H_2) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{10}{220}, \quad P(A|H_3) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{20}{56}.$$

Također, jasno je da vrijedi

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Događaji H_1, H_2 i H_3 čine potpunu grupu događaja jer je njihova unija siguran događaj (mora biti izvučena neka od kutija), i međusobno su isključivi (naprimjer, ne može istovremeno biti izvučena i druga i treća kutija). Stoga, na osnovu formule potpune vjerovatnoće, imamo

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{120} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{22} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{14} \\ &= 0.002777777 + 0.015151515 + 0.119047619 \\ &= 0.136976911. \end{aligned}$$

▲

ZADATAK 1.5.15. *Posuda sadrži tri plave i dvije zelene kuglice. Izvodimo eksperiment u dvije faze. Prvobitno, bacamo nočić i ako padne glava, plava loptica se dodaje u posudu, a ako padne pismo zelena loptica se dodaje u posudu. Zatim se iz posude izvlači jedna kuglica. Kolika je vjerovatnoća da je izvučena plava kuglica?*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

$$\begin{aligned} H_1 &: \text{ Pala je glava,} \\ H_2 &: \text{ Palo je pismo,} \\ A &: \text{ Izvučena je plava kuglica.} \end{aligned}$$

Na osnovu datih podataka, lako zaključujemo da vrijedi

$$P(A|H_1) = \frac{4}{6}, \quad P(A|H_2) = \frac{3}{6}.$$

Također, jasno je da vrijedi

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

Događaji H_1 i H_2 čine potpunu grupu događaja jer je njihova unija siguran događaj (pri bacanju novčića mora pasti ili pismo ili glava), i međusobno su isključivi (ne može istovremeno pasti i pismo i glava). Stoga, na osnovu formule potpune vjerovatnoće, imamo

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} \\ &= \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

▲

ZADATAK 1.5.16. *Kutija sadrži tri novčića; jedan novčić je ispravan, jedan ima dvije glave, i jedan je opterećen tako da je vjerovatnoća pojavljivanja glave* $\frac{1}{3}$. *Iz kutije je na slučajan način izabran jedan novčić i bačen. Izračunati vjerovatnoću da se pojavila glava.*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

$$\begin{aligned} H_1 &: \text{ Izabran je prvi novčić,} \\ H_2 &: \text{ Izabran je drugi novčić,} \\ H_3 &: \text{ Izabran je treći novčić,} \\ A &: \text{ Pojavila se glava.} \end{aligned}$$

Na osnovu datih podataka, lako zaključujemo da vrijedi

$$P(A|H_1) = \frac{1}{2}, \quad P(A|H_2) = 1, \quad P(A|H_3) = \frac{1}{3}.$$

Također, jasno je da vrijedi

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Događaji H_1, H_2 i H_3 čine potpunu grupu događaja jer je njihova unija siguran događaj (mora biti izvučen neki od novčića), i međusobno su isključivi (naprimjer, ne može istovremeno biti izvučen i prvi i drugi novčić). Stoga, na osnovu formule potpune vjerovatnoće, imamo

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \\ &= \tfrac{11}{18}. \end{aligned}$$

▲

ZADATAK 1.5.17. *Magacioneru su vraćene kutije sa neispravnim proizvodima. Kako je u kutiji bilo i ispravnih proizvoda, on ih je razvrstao na sljedeći način: dvije kutije sa po* 3 *proizvoda, od toga po* 1 *neispravan; jednu kutiju sa* 10 *proizvoda, od kojih su svi neispravni; tri kutije sa po* 4 *proizvoda, od toga po* 1 *neispravan. Kontrolor nasumice uzima jednu kutiju i iz nje izvlači proizvod. Kolika je vjerovatnoća da je izvučen ispravan proizvod?*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

H_1 : Izvučena je neka od kutija sa po 3 proizvoda, od kojih je po 1 neispravan,
H_2 : Izvučena je neka od kutija sa po 10 proizvoda, od kojih su svi neispravni,
H_3 : Izvučena je neka od kutija sa po 4 proizvoda, od kojih je po 1 neispravan
A : Izvučen je ispravan proizvod.

Na osnovu datih podataka, lako zaključujemo da vrijedi

$$P(A|H_1) = \frac{2}{3}, \quad P(A|H_2) = \frac{0}{10}, \quad P(A|H_3) = \frac{3}{4}.$$

Također, jasno je da vrijedi

$$P(H_1) = \frac{2}{6}, \quad P(H_2) = \frac{1}{6}, \quad P(H_3) = \frac{3}{6}.$$

Događaji H_1, H_2 i H_3 čine potpunu grupu događaja jer je njihova unija siguran događaj (mora biti izvučena neka od kutija), i međusobno su isključivi (naprimjer, ne može istovremeno biti izvučena kutija i prvog i drugog tipa). Stoga, na osnovu formule potpune vjerovatnoće, imamo

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{2}{9} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{43}{72}. \end{aligned}$$

▲

ZADATAK 1.5.18. *Na jednom planinskom putu u susret jedan drugom kreću se dva vozila. Vjerovatnoća da će se bezbjedno mimoići je* 0.999 *ako su oba vozača trijezna,* 0.7 *ako je jedan vozač pripit,* 0.4 *ako su oba vozača pripita. Odrediti vjerovatnoću bezbjednog mimoilaženja ako se zna da je svaki deseti vozač pripit.*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

H_1 : Oba vozača su trijezna,
H_2 : Jedan vozač je pripit,
H_3 : Oba vozača su pripita,
A : Vozači se bezbjedno mimoiđu.

Po pretpostavci zadatka, imamo

$$P(A|H_1) = 0.999, \quad P(A|H_2) = 0.7, \quad P(A|H_3) = 0.4.$$

H_1, H_2 i H_3 čine potpunu grupu događaja jer je njihova unija siguran događaj (moraju biti oba vozača trijezna, ili oba pripita, ili samo jedan pripit), i međusobno su isključivi (naprimjer, ne mogu istovremeno biti i oba vozača trijezna, a i jedan vozač trijezan i drugi pripit). Stoga, na osnovu formule potpune vjerovatnoće, imamo

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3).$$

Dakle, potrebno je izračunati i vjerovatnoće $P(H_1), P(H_2)$ i $P(H_3)$. U tu svrhu ćemo iskoristiti još jedan dati podatak: svaki deseti vozač koji prođe navedenim planinskim putem je pripit. Činjenica da je jedan vozač pripit ili trijezan ne utiče na to da je drugi vozač pripit ili trijezan, pa vrijedi

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{81}{100}, \\ P(H_2) &= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{100}, \\ P(H_3) &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}. \end{aligned}$$

Konačno možemo i primjeniti formulu potpune vjerovatnoće

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) \\ &= \frac{81}{100} \cdot 0.999 + \frac{9}{100} \cdot 0.7 + \frac{1}{100} \cdot 0.4 \\ &= 0.80919 + 0.063 + 0.004 \\ &= 0.87619. \end{aligned}$$

▲

ZADATAK 1.5.19. *Leteći objekat gađa se sa tri metka. Vjerovatnoća pogotka prvim metkom je* 0.5, *drugim metkom* 0.6, *i trećim* 0.8. *Od jednog pogotka leteći objektat će biti oboren sa vjerovatnoćom* 0.3, *od dva pogotka sa vjerovatnoćom* 0.6, *a od* 3 *sigurno. Kolika je vjerovatnoća da leteći objekat bude oboren?*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

P_1 : Leteći objekat je pogođen prvim metkom,
P_2 : Leteći objekat je pogođen drugim metkom,
P_3 : Leteći objekat je pogođen trećim metkom,
H_1 : Leteći objekat je pogođen jednom,
H_2 : Leteći objekat je pogođen dva puta,
H_3 : Leteći objekat je pogođen tri puta,
A : Leteći objekat je oboren.

Po pretpostavci zadatka, imamo

$$P(P_1) = 0.5, \quad P(P_2) = 0.6, \quad P(P_3) = 0.8,$$

$$P(A|H_1) = 0.3, \quad P(A|H_2) = 0.6, \quad P(A|H_3) = 1.$$

Događaji H_1, H_2 i H_3 ne čine potpunu grupu događaja jer je njihova unija nije siguran događaj, kako se može dogoditi i da leteći objekat nije pogođen niti jednom. Posmatrajmo stoga i događaj

H_0 : Leteći objekat nije pogođen niti jednom.

Sada imamo da H_0, H_1, H_2 i H_3 čine potpunu grupu događaja jer je njihova unija siguran dogođaj (leteći objekat ili nije pogođen niti jednom, ili je pogođen jednom, dva ili tri puta), i međusobno su isključivi (naprimjer, leteći objekat ne može istovremeno biti pogođen i dva i tri puta). Stoga, na osnovu formule potpune vjerovatnoće, imamo

$$P(A) = P(H_0)P(A|H_0)+P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3).$$

Dakle, potrebno je izračunati i vjerovatnoće $P(H_1), P(H_2)$ i $P(H_3)$. (Vjerovatnoću $P(H_0)$ nije potrebno računati jer je vjerovatnoća da je leteći objekat oboren ako nije pogođen niti jednom nula, tj. $P(A|H_0) = 0$.) U tu svrhu uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned}
H_1 &= (P_1 \cap P_2^C \cap P_3^C) \cup (P_1^C \cap P_2 \cap P_3^C) \cup (P_1^C \cap P_2^C \cap P_3) \\
H_2 &= (P_1 \cap P_2 \cap P_3^C) \cup (P_1 \cap P_2^C \cap P_3) \cup (P_1^C \cap P_2 \cap P_3) \\
H_3 &= P_1 \cap P_2 \cap P_3.
\end{aligned}$$

Na osnovu isključivosti, a onda i nezavisnosti odgovarajućih događaja (koje objašnjavamo analogno kao u prethodnim primjerima), imamo

$$\begin{aligned}
P(H_1) &= P((P_1 \cap P_2^C \cap P_3^C) \cup (P_1^C \cap P_2 \cap P_3^C) \cup (P_1^C \cap P_2^C \cap P_3)) \\
&= P(P_1 \cap P_2^C \cap P_3^C) + P(P_1^C \cap P_2 \cap P_3^C) + (P_1^C \cap P_2^C \cap P_3) \\
&= P(P_1) \cdot P(P_2^C) \cdot P(P_3^C) + P(P_1^C) \cdot P(P_2) \cdot P(P_3^C) + P(P_1^C)P(P_2^C)P(P_3) \\
&= 0.5 \cdot (1 - 0.6) \cdot (1 - 0.8) + (1 - 0.5) \cdot 0.6 \cdot (1 - 0.8) + (1 - 0.5) \cdot (1 - 0.6) \cdot 0.8 \\
&= 0.26,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(H_2) &= P((P_1 \cap P_2 \cap P_3^C) \cup (P_1 \cap P_2^C \cap P_3) \cup (P_1^C \cap P_2 \cap P_3)) \\
&= P(P_1 \cap P_2 \cap P_3^C) + P(P_1 \cap P_2^C \cap P_3) + P(P_1^C \cap P_2 \cap P_3) \\
&= P(P_1) \cdot P(P_2) \cdot P(P_3^C) + P(P_1) \cdot P(P_2^C) \cdot P(P_3) + P(P_1^C) \cdot P(P_2) \cdot P(P_3) \\
&= 0.5 \cdot 0.6 \cdot (1 - 0.8) + 0.5 \cdot (1 - 0.6) \cdot 0.8 + (1 - 0.5) \cdot 0.6 \cdot 0.8 \\
&= 0.46.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(H_3) &= P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) \\
&= P(P_1) \cdot P(P_2) \cdot P(P_3) \\
&= 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.8 \\
&= 0.24.
\end{aligned}$$

Konačno možemo i primjeniti formulu potpune vjerovatnoće

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(H_0)P(A|H_0) + P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) \\
&= 0 + 0.26 \cdot 0.3 + 0.46 \cdot 0.6 + 0.24 \cdot 1 \\
&= 0.594.
\end{aligned}$$

▲

Teorem 1.5.3 (BAYES). *Neka je Ω prostor elementarnih događaja, i neka skupovi $H_1, H_2, ..., H_n$ obrazuju potpunu grupu događaja. Tada vrijedi*

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)},$$

odnosno

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \cdots + P(H_n)P(A|H_n)}.$$

ZADATAK 1.5.20. *U jednoj fabrici mašine M_1, M_2 i M_3 proizvode redom $25\%, 35\%$ i 40% svih artikala. Ove mašine proizvode redom $5\%, 4\%$ i 2% neispravnih artikala.*

a. *Ako se na slučajan način iz ukupne proizvodnje uzme jedan artikal, izračunati vjerovatnoću da je on neispravan.*

b. *Ako je izabrani artikal neispravan, izračunati vjerovatnoću da je on proizveden na mašini M_i, $i = 1, 2, 3$.*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

H_1 : Artikal je proizveden na mašini M_1,
H_2 : Artikal je proizveden na mašini M_2,
H_3 : Artikal je proizveden na mašini M_3,
A : Izvučen je neispravan proizvod.

Na osnovu datih podataka, imamo

$$P(H_1) = 0.25, \quad P(H_2) = 0.35, \quad P(H_3) = 0.4$$

$$P(A|H_1) = 0.05, \quad P(A|H_2) = 0.04, \quad P(A|H_3) = 0.02.$$

Događaji H_1, H_2 i H_3 čine potpunu grupu događaja jer je njihova unija siguran događaj (artikal je morao biti proizveden na nekoj od mašina), i međusobno su isključivi (naprimjer, artikal ne može istovremeno proizveden i na prvoj i na drugoj mašini).

a. Na osnovu formule potpune vjerovatnoće, imamo

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) \\ &= 0.25 \cdot 0.05 + 0.35 \cdot 0.04 + 0.4 \cdot 0.02 \\ &= 0.0345. \end{aligned}$$

b. Na osnovu Bayes-ove formule (ili jednostavno, same definicije uslovne vjerovatnoće), imamo

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0.25 \cdot 0.05}{0.0345} = 0.3623,$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0.35 \cdot 0.04}{0.0345} = 0.4058,$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot 0.02}{0.0345} = 0.2319.$$

▲

ZADATAK 1.5.21. *Pretpostavimo da postoji test koji registruje prisutnost virusne infekcije, ali koji nije* 100% *pouzdan. Pretpostavimo dalje da je* $\frac{1}{4}$ *populacije zaraženo ovom virusnom infekcijom, a* $\frac{3}{4}$ *nisu. Poznato je da* 90% *zaraženih dobije pozitivan rezultat na testu, a* 80% *nezaraženih osoba dobije negativan rezultat. Ako osoba dobije pozitivan rezultat, kolika je vjerovatnoća da je osoba zaista zaražena?*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

P : Osoba je dobila pozitivan rezultat,
Z : Osoba je zaražena.

Želimo odrediti $P(Z|P)$. Po pretpostavci zadatka, imamo

$$P(Z) = \frac{1}{4}, \quad P(Z^C) = \frac{3}{4}, \quad P(P|Z) = 0.9, \quad P(P^C|Z^C) = 0.8.$$

Kako imamo $P(P|Z)$, a trebamo izračunati $P(Z|P)$, ideja je da koristimo Bayes-ovu formulu

$$P(Z|P) = \frac{P(Z)P(P|Z)}{P(Z)P(P|Z) + P(Z^C)P(P|Z^C)}.$$

Uočite da smo ovu formulu mogli primjeniti jer očigledno Z i Z^C čine potpunu grupu događaja. Odredimo još i $P(P|Z^C)$. Na osnovu neke od ranijih primjedbi, imamo

$$P(P|Z^C) = 1 - P(P^C|Z^C) = 1 - 0.8 = 0.2.$$

Dakle, na osnovu navedene Bayes-ove formule imamo da je tražena vjerovatnoća

$$P(Z|P) = \frac{0.25 \cdot 0.9}{0.25 \cdot 0.9 + 0.75 \cdot 0.2} = \frac{0.225}{0.375} = 0.6.$$

Međutim, Bayes-ova formula se teže pamti, a još je kompliciranije uočiti koju potpunu grupu događaja ćemo izabrati. Stoga je možda bolje zadatak krenuti raditi od samog početka, koristeći definicije i već utvrđena pravila, tj. ustvari dokazati Bayes-ovu formulu kroz rješavanje zadatka. Naime, ovdje je bilo potrebno odrediti $P(Z|P)$, što je na osnovu definicije uslovne vjerovatnoće

$$P(Z|P) = \frac{P(Z \cap P)}{P(P)}.$$

Znamo da vjerovatnoću presjeka možemo odrediti na dva načina, tj. iz definicije uslovne vjerovatnoće imamo

$$P(Z \cap P) = P(Z) \cdot P(P|Z) = P(P) \cdot P(Z|P).$$

Jasno je da ćemo ovu vjerovatnoću računati na prvi navedeni način, jer je to za sada jedino i moguće.

$$P(Z \cap P) = P(Z) \cdot P(P|Z) = \frac{1}{4} \cdot 0.9 = 0.225.$$

S druge strane, ni $P(P)$ nije poznato, ali ga jednostavno možemo odrediti koristeći formulu potpune vjerovatnoće, odnosno ako i nju ovdje ustvari dokažemo, koristiti ćemo činjenicu

$$P = (P \cap Z) \cup (P \cap Z^C).$$

Naime, na osnovu očite isključivosti ovih događaja, imamo

$$P(P) = P(P \cap Z) + P(P \cap Z^C),$$

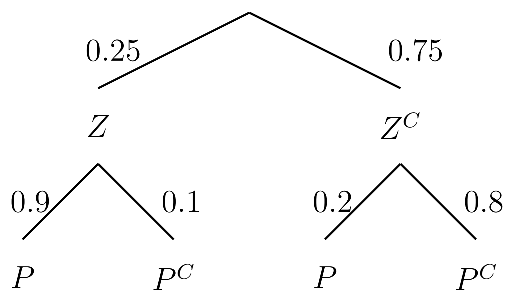
tj. vrijedi

$$P(P) = P(Z)P(P|Z) + P(Z^C)P(P|Z^C).$$

Dakle, imamo

$$P(Z|P) = \frac{P(Z) \cdot P(P|Z)}{P(Z) \cdot P(P|Z) + P(Z^C) \cdot P(P|Z^C)},$$

što upravo predstavlja Bayes-ovu formulu koju smo ranije odmah naveli. Dalje bismo zadatak rješavali analogno kao u prvom načinu. Navedimo i treći, vjerovatno i najjednostavniji način za rješavanje ovog zadatka - dijagram grananja, koji je za ovaj primjer prikazan na slici.



Vjerovatnoću da je osoba zaista zaražena ako je imala pozitivan rezultat računamo kao količnik broja svih "povoljnih" slučajeva (kada je osoba zaista zaražena i imala je pozitivan rezultat) i broja svih slučajeva (kada je osoba imala pozitivan rezultat), tj. tražena vjerovatnoća je

$$P(Z|P) = \frac{0.25 \cdot 0.9}{0.25 \cdot 0.9 + 0.75 \cdot 0.2} = 0.6.$$

Sva tri načina rješavanja zadatka su, naravno, potpuno validni. ▲

Primjetite da, iako test daje tačne rezultate u preko 80% slučajeva, vjerovatnoća da je osoba zaražena ako je imala pozitivan rezultat je samo 0.6. Ovo je prilično uobičajeno, pa se stoga smatra nepotrebnim da se osobe koje nemaju nikakvih simptoma ili razloga za testiranje testiraju na neku rijetku bolest. Naime, kako smo mogli i vidjeti u prethodnom primjeru, jako često osobe koje dobiju pozitivan rezultat na testu uopće nisu zaražene. Ovo je samo jedan u nizu kontraintuitivnih problema, pa treba biti jako oprezan pri čitanju, odnosno tumačenju iznesenih statističkih podataka.

Primjedba 1.5.5. *Napomenimo još jednom neke od najbitnijih relacija iz prvog poglavlja, koje se često zanemaruju. Prvobitno se prisjetimo da, ukoliko želimo izračunati vjerovatnoću unije neka dva događaja, tj.* $P(A \cup B)$, *odgovarajuća formula je*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Ukoliko su događaji A *i* B *isključivi, odnosno disjunktni, jasno je da tada (i samo tada!) imamo*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Stoga, primjenjuje li se posljednja formula, obavezno je objasniti zašto su A *i* B *isključivi događaji. S druge strane, želimo li izračunati vjerovatnoću presjeka neka dva događaja, tj.* $P(A \cap B)$, *koristiti ćemo generalizirani princip množenja*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B),$$

pri čemu je jedan od navedenih načina obično mnogo lakši od drugog. Ukoliko su događaji A *i* B *nezavisni, odnosno* $P(A|B) = P(A)$, *tj.* $P(B|A) = P(B)$, *jasno je da tada (i samo tada!) imamo*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Stoga, primjenjuje li se posljednja formula, obavezno je objasniti zašto su A *i* B *nezavisni događaji.*

Kao što je to već spomenuto, mi smo se oslanjali na pojam nezavisnosti, odnosno formule

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B),$$

i

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

mnogo ranije nego što smo taj isti pojam uveli. Razlog zbog kojeg smo to mogli uraditi jeste što je pojam nezavisnosti intuitivno jasan, no ipak je pravilnije sve takve zadatke raditi tek ovdje - nakon uvođenja pojma uslovne vjerovatnoće. Dakle, na kraju ovog poglavlja navesti ćemo nekoliko primjera koji svoje mjesto obično nađu na samom početku, no bez pravilnog razumijevanja. Ovdje nećemo koristiti uslovnu vjerovatnoću u užem smislu riječi, ali će nam svakako biti važan pojam nezavisnosti, koji se upravo oslanja na uslovnu vjerovatnoću.

ZADATAK 1.5.22. *Vjerovatnoća da student A položi ispit u nekom roku je* 0.6, *student B* 0.8 *i student C* 0.3. *Uspjeh polaganja jednog studenta ne utiče na uspjeh polaganja ostalih studenata. Ako sva tri studenta polažu ispit, izračunati vjerovatnoću da*

a. student A položi, a studenti B i C ne polože ispit.

b. jedan student položi ispit.

c. studenti A i B polože ispit (neovisno od C).

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

$$\begin{aligned} A &: \text{ Student A je položio ispit,} \\ B &: \text{ Student B je položio ispit,} \\ C &: \text{ Student C je položio ispit.} \end{aligned}$$

Po pretpostavci zadatka, imamo

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.8, \quad P(C) = 0.3.$$

a. U ovom slučaju očigledno se radi o događaju $A \cap B^C \cap C^C$, pa zbog njihove međusobne nezavisnosti (po samoj pretpostavci zadatka) imamo

$$P(A \cap B^C \cap C^C) = P(A)P(B^C)P(C^C) = 0.6 \cdot (1-0.8) \cdot (1-0.3) = 0.084.$$

b. U ovom slučaju očigledno se radi o događaju $(A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C)$. Kako su događaji $A \cap B^C \cap C^C, A^C \cap B \cap C^C$ i $A^C \cap B^C \cap C$ međusobno disjunktni, odnosno isključivi (naprimjer $(A^C \cap B \cap C^C) \cap (A^C \cap B^C \cap C) = A^C \cap (B \cap B^C) \cap (C^C \cap C) = \emptyset$), vrijedi

$$\begin{aligned} &P((A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C)) \\ &= P(A \cap B^C \cap C^C) + P(A^C \cap B \cap C^C) + P(A^C \cap B^C \cap C). \end{aligned}$$

Po pretpostavci zadatka, uspjeh polaganja jednog studenta ne utiče na uspjeh polaganja ostalih studenata, pa su događaji A, B i C svi u parovima međusobno nezavisni (komplement nekog događaja ne mijenja njihovu nezavisnost, na osnovu neke od ranijih primjedbi), pa dalje imamo

$$\begin{aligned} &P((A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C)) \\ &= P(A) \cdot P(B^C) \cdot P(C^C) + P(A^C) \cdot P(B) \cdot P(C^C) + P(A^C) \cdot P(B^C) \cdot P(C) \\ &= 0.6 \cdot (1-0.8) \cdot (1-0.3) + (1-0.6) \cdot 0.8 \cdot (1-0.3) + (1-0.6) \cdot (1-0.8) \cdot 0.3 \\ &= 0.332. \end{aligned}$$

c. U ovom slučaju radi se o događaju $A \cap B$, pa zbog njihove nezavisnosti jednostavno imamo

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48.$$

▲

ZADATAK 1.5.23. *Vjerovatnoće da jedna osoba položi test u prvom, drugom i trećem pokušaju su redom* $0.5, 0.7$ *i* 0.8. *Ako su dozvoljena samo tri pokušaja, izračunati vjerovatnoću da će osoba položiti ispit.*

Rješenje: Posmatrajmo sljedeće događaje

A_1 : Osoba je položila ispit u prvom roku,
A_2 : Osoba je položila ispit u drugom roku,
A_3 : Osoba je položila ispit u trećem roku,
A : Osoba je položila ispit.

Po pretpostavci zadatka, imamo

$$P(A_1) = 0.5, \quad P(A_2) = 0.7, \quad P(A_3) = 0.8.$$

Ako osoba položi ispit, to znači da ga je položila u prvom roku, ili da ga je položila u drugom roku (što znači da ta osoba u prvom roku nije položila ispit), ili da je položila u trećem roku (što znači da ta osoba nije položila ispit niti u prvom, niti u drugom roku), pa je

$$A = A_1 \cup (A_1^C \cap A_2) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3).$$

Jasno je da su događaji $A_1, A_1^C \cap A_2$ i $A_1^C \cap A_2^C \cap A_3$ svi u parovima međusobno isključivi (jer naprimjer $(A_1^C \cap A_2) \cap (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C) = (A_2 \cap A_2^C) \cap (A_1^C \cap A_1^C \cap A_3^C = \emptyset \cap (A_1^C \cap A_3^C) = \emptyset$.) Stoga imamo

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup (A_1^C \cap A_2) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3)) \\ &= P(A_1) + P(A_1^C \cap A_2) + P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3). \end{aligned}$$

Dalje, zbog očite nezavisnosti odgovarajućih događaja, imamo

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) + P(A_1^C)P(A_2) + P(A_1^C)P(A_2^C)P(A_3) \\ &= 0.5 + (1 - 0.5) \cdot 0.7 + (1 - 0.5) \cdot (1 - 0.7) \cdot 0.8 \\ &= 0.97. \end{aligned}$$

▲

ZADATAK 1.5.24. *Poznato je da je prolaznost na ispitu* 30%.

a. *Kolika je vjerovatnoća da student položi ispit u trećem roku?*

b. *U kojem roku se može očekivati da će student položiti ispit sa vjerovatnoćom* 0.1029?

Rješenje:

a. Ako student položi ispit u trećem roku, to znači da je na prva dva roka pao ispit, pa je

$$P(A) = (1-0.3)\cdot(1-0.3)\cdot 0.3 = 0.147.$$

b. Neka je student položio ispit u n-tom roku. To znači da je svih $n-1$ prethodnih rokova pao na ispitu, pa imamo

$$P(B) = (1-0.3)^{n-1}\cdot 0.3 = 0.1029,$$

odnosno

$$\begin{aligned} & 0.7^{n-1} = 0.343 \\ \Leftrightarrow\ & \log_{0.7} 0.7^{n-1} = \log_{0.7} 0.343 \\ \Leftrightarrow\ & n-1 = \frac{\log_{10} 0.343}{\log_{10} 0.7} \\ \Leftrightarrow\ & n-1 = \frac{-0.46470688}{-0.15490196} \\ \Leftrightarrow\ & n-1 = 3 \\ \Leftrightarrow\ & n = 4. \end{aligned}$$

Dakle, može se očekivati da će student položiti ispit u četvrtom roku sa vjerovatnoćom 0.1029.

▲

Na kraju ove sekcije navesti ćemo još nekoliko zadataka, u kojima će se javljati tzv. Bernoulli-jeva shema događaja (Ovi zadaci također budu najčešće navedeni već u uvodnom dijelu kursa, no iz iz istih razloga kao maloprije oni ovdje imaju svoje mjesto tek nakon uvođenja uslovne vjerovatnoće i pojma nezavisnosti). Naime, neka ponavljamo neki eksperiment n puta. U svakom od n međusobno nezavisnih izvođenja eksperimenta, zanima nas samo da li će se događaj A realizovati ili ne, tj. da li će se dogoditi A ili A^C. Vjerovatnoća događaja A u svakom ponavljanju eksperimenta je $P(A) = p$, a time je i $P(A^C) = 1 - p$. Tada je jasno da je vjerovatnoća da se u n ponavljanja eksperimenta događaj A realizuje k puta ($k \leq n$)

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Naime, ako se događaj A realizovao k puta, onda se događaj A^C realizovao preostalih $n - k$ puta, stoga imamo proizvod $p^k(1-p)^{n-k}$, jer je svako od izvođenja eksperimenta nezavisno od prethodnih izvođenja. Međutim, tih k puta kada se događaj A realizovao mogli su nastupiti u bilo kojim od n izvođenja eksperimenta. Naprimjer, ukoliko je $n = 7$, $k = 3$, događaj A mogao se realizovati u prvom, drugom i trećem izvođenju eksperimenta; u drugom, petom i šestom izvođenju eksperimenta; u prvom, četvrtom i sedmom izvođenju eksperimenta, itd. Dakle, navedeni proizvod potrebno je još pomonožiti sa brojem načina na koji možemo izabrati k elemenata od n elemenata, tj. $\binom{n}{k}$. Navedena će formula vjerovatno biti i jasnija kroz sljedeće primjere.

ZADATAK 1.5.25. *Za test je pripremljeno* 10 *pitanja i za svako pitanje su ponuđena* 3 *odgovora od kojih je samo jedan tačan. Neki kandidat kod svakog pitanja nasumice zaokružuje odgovor. Kolika je vjerovatnoća da ima barem* 5 *tačnih odgovora?*

Rješenje: Da bi se realizovao događaj A : "Ima barem 5 tačnih odgovora", mora nastupiti neki od sljedećih događaja:

A_1 : "Ima pet tačnih odgovora",
A_2 : "Ima šest tačnih odgovora",
A_3 : "Ima sedam tačnih odgovora",
A_4 : "Ima osam tačnih odgovora",
A_5 : "Ima devet tačnih odgovora",
A_6 : "Ima deset tačnih odgovora".

Ovdje je eksperiment bio nasumično zaokruživanje odgovora na neko pitanje, i ponovljen je 10 puta, pa je $n = 10$. Kako su za svako pitanje ponuđena tri odgovora, od kojih je samo jedan tačan, vjerovatnoća tačnog odgovora u svakom pojedinačnom eksperimentu je $p = \frac{1}{3}$. Neka prvobitno želimo izračunati $P(A_1)$, tj. vjerovatnoću da ima tačno pet tačnih odgovora. Ako se ovaj događaj realizuje, to znači da je kandidat na pet pitanja tačno, a na pet pitanja netačno odgovorio. Međutim, mogao je tačno odgovoriti na bilo koja od pet pitanja, pa je tražena vjerovatnoća

$$P(A_1) = (\frac{1}{3})^5(\frac{2}{3})^5\binom{10}{5}.$$

Analogno bismo računali ostale vjerovatnoće. Kako su navedeni događaji svi u parovima međusobno isključivi, tj. disjunktni (jer naprimjer, ne može na testu biti i 6 i 8 tačnih odgovora) imamo

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) \\ &= (\frac{1}{3})^5(\frac{2}{3})^5\binom{10}{5} + (\frac{1}{3})^6(\frac{2}{3})^4\binom{10}{6} + (\frac{1}{3})^7(\frac{2}{3})^3\binom{10}{7} \\ &+(\frac{1}{3})^8(\frac{2}{3})^2\binom{10}{8} + (\frac{1}{3})^9(\frac{2}{3})^1\binom{10}{9} + (\frac{1}{3})^{10}(\frac{2}{3})^0\binom{10}{0} \\ &= \frac{32 \cdot 252 + 16 \cdot 210 + 8 \cdot 120 + 4 \cdot 45 + 2 \cdot 10 + 1}{3^10} \\ &= \frac{12585}{59049} \\ &\approx 0.213. \end{aligned}$$

▲

ZADATAK 1.5.26. *Kada Milica i Aleks gledaju serije, Aleks prvi zaspi u* 70% *slučajeva. Ako su Milica i Aleks gledali serije* 19 *puta u posljednjih mjesec dana, izračunati vjerovatnoću da je Aleks ranije zaspao tačno* 10 *puta.*

Rješenje: Neka je A : "Aleks je ranije zaspao 10 puta". U svakom od pojedinačnih gledanja serije Aleks prvi zaspi sa vjerovatnoćom $p = 0.7$. Međutim, kako je navedenih 10 puta kada je Aleks prvi zaspao moglo nastupiti u bilo kojem od gledanja serije, imamo

$$P(A) = \binom{19}{10} \cdot 0.7^{10} \cdot 0.3^9 = 92378 \cdot 0.0282475249 \cdot 0.000019683 \approx 0.0514.$$

▲

ZADATAK 1.5.27. *Ako je u proizvodnji određenog artikla* 3% *neispravnih, izračunati vjerovatnoću da u* 50 *slučajno izabranih artikala imaju najviše dva neispravna proizvoda.*

Rješenje: Da bi se realizovao događaj A : "Imaju najviše dva neispravna proizvoda", mora nastupiti neki od sljedećih događaja:

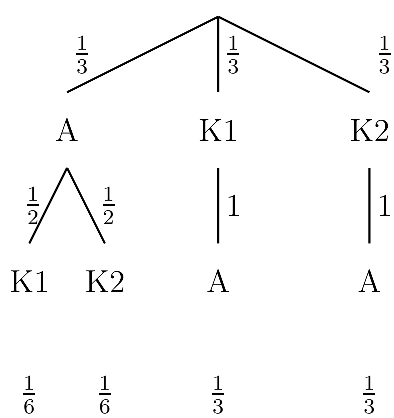
A_0 : "Nema niti jedan neispravan proizvod",
A_1 : "Ima jedan neispravan proizvod",
A_2 : "Imaju dva neispravna proizvoda".

Kako su navedeni događaji svi u parovima međusobno isključivi, tj. disjunktni (jer naprimjer, ne mogu istovremeno biti i tačno jedan i tačno dva neispravna proizvoda) imamo

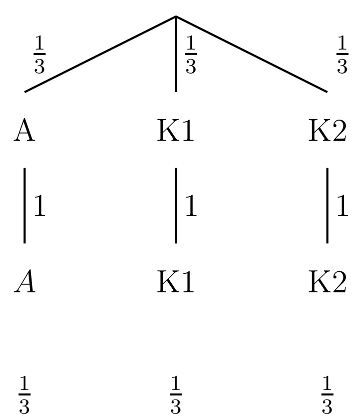
$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_0 \cup A_1 \cup A_2) \\ &= P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) \\ &= (\frac{3}{100})^0 (\frac{97}{100})^{50} \binom{50}{0} + (\frac{3}{100})^1 (\frac{97}{100})^{49} \binom{50}{1} + (\frac{3}{100})^2 (\frac{97}{100})^{48} \binom{50}{2} \\ &\approx 0.21806 + 0.33721 + 0.25552 \\ &= 0.81079. \end{aligned}$$

▲

Rješenje:[RJEŠENJE POČETNOG PROBLEMA] Početni problem najjednostavnije je riješiti upoređujući dijagram grananja ukoliko promijenimo izbor i ukoliko se držimo svog izbora. Naime, na osnovu sljedeće slike

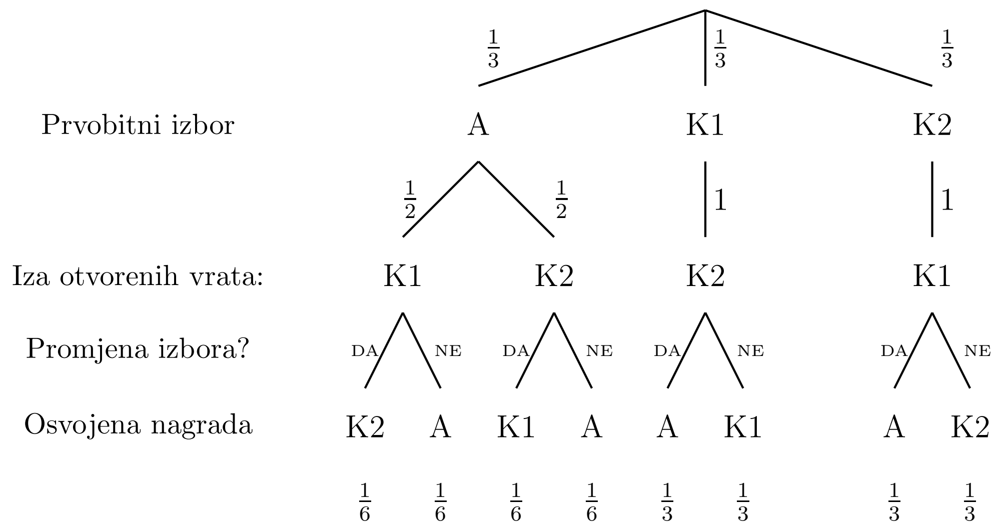


Sa promjenom izbora



Bez promjene izbora

zaključujemo da je zaista vjerovatnoća dobitka auta ukoliko promijenimo izbor $\frac{2}{3}$, a ukoliko to ne učinimo $\frac{1}{3}$, odnosno šansa za dobitak nam se promjenom prvobitnog izbora udvostručuje. Međutim, uočite i zašto se u prvom dijagramu grananja ukoliko naprimjer prvobitno izaberemo kozu K1, sa promjenom izbora sigurno dolazi do dobitka. Zašto nije moguće tada dobiti kozu K2, odnosno zašto se grananje nije nastavilo? Prisjetite se da, ukoliko smo prvobitno izabrali vrata sa kozom K1, voditelj kviza otvoriti će nam vrata sa drugom kozom K2, pa će nas izbor biti sužen na auto A i kozu K1. Ukoliko izbor promijenimo, sa vjerovatnoćom 1 dobijamo auto. Cijeli postupak se potpunije može prikazati sljedećim dijagramom grananja:



Na osnovu slike zaključujemo da sa promjenom izbora imamo

$$P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(K1) = P(K2) = \frac{1}{6},$$

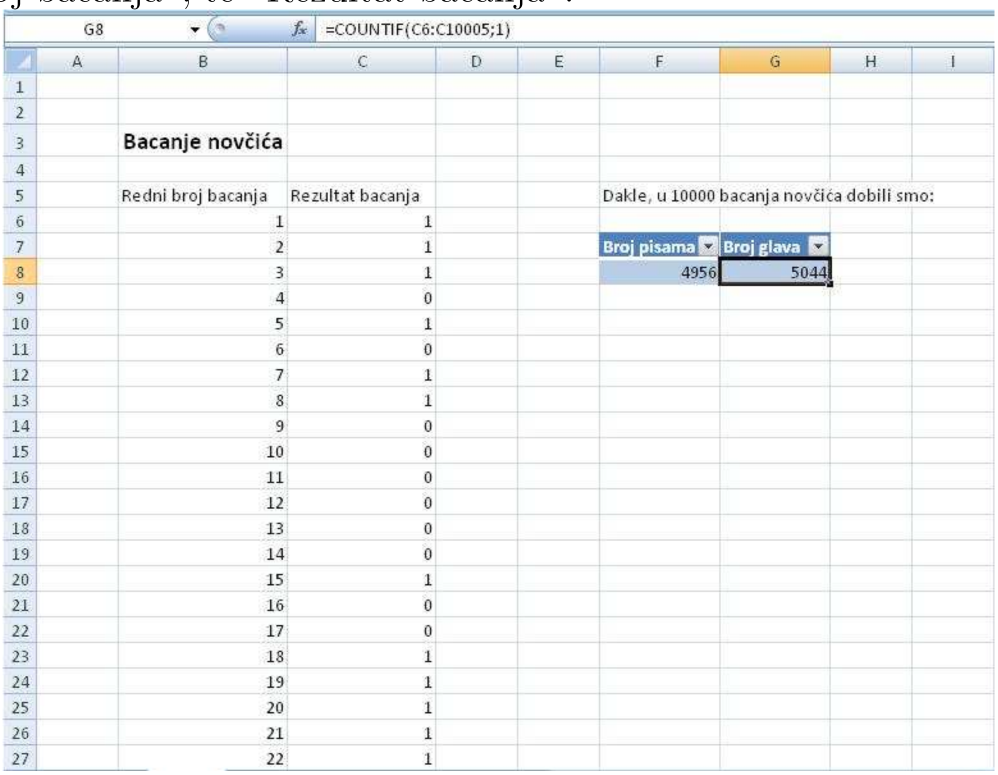
dok bez promjene izbora vrijedi

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(K1) = P(K2) = \frac{1}{3}.$$

Dakle, Marilyn von Savant je zaista bila u pravu - promjenom prvobitnog izbora udvostručujemo svoju šansu za dobitak. Studenti se upućuju da na http://www.youtube.com/ potraže druge zanimljive prikaze rješenja ovog problema (upišite "Monty Hall problem"). ▲

`MICROSOFT EXCEL` Prvobitno napomenimo da su svi primjeri ovdje opisani izvedeni u Microsoft Office Excel 2007, pa neke ugrađene funkcije koje se koriste još nisu bile kreirane unutar Microsoft Office Excel 97-2003. Ipak, većina primjera se može uraditi u oba programa, a ukoliko je postojanje neke funkcije baš

neophodno i bez njega se ne može izvršiti određena simulacija, studentima se preporučuje da barem pažljivo pročitaju vježbu i razumiju njenu svrhu.
Izvesti ćemo jednostavne simulacije dva primjera iz ovog poglavlja. U prvom je dijelu navedeno kako su određeni matematičari bacali novčić i po nekoliko desetina hiljada puta, registrujući pri tome koliko je puta palo pismo, odnosno glava. Uradimo slično istraživanje, u mnogo kraćem vremenu. Nakon što napišemo naslov naše simulacije, u polja $B5$ i $C5$ upišimo redom "Redni broj bacanja", te "Rezultat bacanja".



G8 =COUNTIF(C6:C10005;1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3		**Bacanje novčića**							
4									
5		Redni broj bacanja	Rezultat bacanja			Dakle, u 10000 bacanja novčića dobili smo:			
6		1	1						
7		2	1			Broj pisama	Broj glava		
8		3	1			4956	5044		
9		4	0						
10		5	1						
11		6	0						
12		7	1						
13		8	1						
14		9	0						
15		10	0						
16		11	0						
17		12	0						
18		13	0						
19		14	0						
20		15	1						
21		16	0						
22		17	0						
23		18	1						
24		19	1						
25		20	1						
26		21	1						
27		22	1						

U polje $B6$ upišimo 1, a zatim postavimo kursor na donji desni ugao tog polja, te povucimo redni broj bacanja sve do 10000, tj. do polja $B10005$ (pri postavljanju kursora na donji desni ugao, provjeriti da je uključena opcija "Fill Series", a ne "Copy Cells" ili nešto drugo). U polje $C6$ upišimo

$$= RANDBETWEEN(0; 1),$$

što je funkcija koja nam daje na slučajan način izabran cijeli broj između 0 i 1 (pri čemu nam rezultat 0 ustvari označava pismo, a 1 glavu). I ovdje ćemo također, na način kao i ranije, ponoviti djelovanje funkcije sve do polja $C10005$. Uočimo rezultate našeg eksperimenta. U neka od polja upišite "Broj pisama", te "Broj glava" (na slici su to $F7$ i $G7$). Broj pisama dobiti ćemo tako što u željeno polje upišemo

$$= COUNTIF(C6 : C10005; 0),$$

što je funkcija koja daje broj nula u rangu kolona $C6$-$C10005$. Broj glava tada možemo računati kao

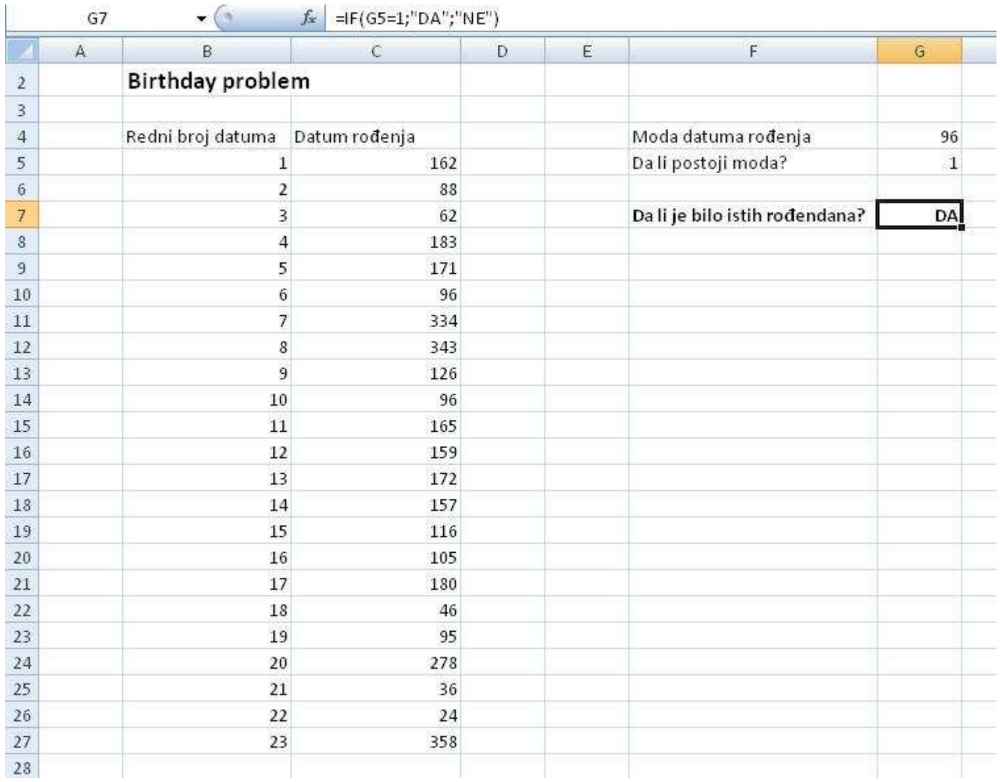
$$= 10000 - F8,$$

ili

$$= COUNTIF(C6 : C10005; 1).$$

Da bi rezultati bilo što uočljiviji, možemo ih jednostavno smjestiti u tabelu, tako što selektujemo željena polja (na slici su to $F7, G7, F8$ i $G8$), te izaberemo "Insert > Table". Pritiskom na tipku $F9$, sve funkcije u worksheet-u ponovno se računaju, pa se mijenjaju i rezultati 1000 bacanja novčića.

Izvedimo i simulaciju koja ima za cilj uvjeriti nas u tačnost izračunate vjerovatnoće u problemu sa istim rođendanima. Uraditi ćemo to na način sličan prethodnom primjeru. Nakon što napišemo naslov naše simulacije, te u polja $B4$ i $C4$ unesemo "Redni broj datuma", te "Datum rođenja", u polje $B5$ upišimo 1, a zatim pomoću Fill Series unesimo brojeve 2 do 23 u polja $B6 - B27$.



G7 =IF(G5=1;"DA";"NE")

	A	B	C	D	E	F	G
2		**Birthday problem**					
3							
4		Redni broj datuma	Datum rođenja			Moda datuma rođenja	96
5		1	162			Da li postoji moda?	1
6		2	88				
7		3	62			**Da li je bilo istih rođendana?**	**DA**
8		4	183				
9		5	171				
10		6	96				
11		7	334				
12		8	343				
13		9	126				
14		10	96				
15		11	165				
16		12	159				
17		13	172				
18		14	157				
19		15	116				
20		16	105				
21		17	180				
22		18	46				
23		19	95				
24		20	278				
25		21	36				
26		22	24				
27		23	358				
28							

U polje $C5$ upisujemo

$$= RANDBETWEEN(1; 365),$$

koja na slučajan način bira neki cijeli broj između 1 i 365, odnosno daje nam slučajan datum u godini. Preostalo je da uočimo da li u navedenom nizu od 23 datuma ima ponavljanja. To možemo uraditi na nekoliko načina, naprimjer pomoću funkcije IF. Ovdje ćemo to izvesti pomoću statističke funkcije $MODE$, koja vraća broj koji se najviše puta ponavlja u nekom zadatom nizu brojeva. Ukoliko su svi brojevi međusobno različiti, ova funkcija će vratiti Value Not Available grešku N/A, što neće predstavljati problem u daljem radu. Unesimo stoga u polje $F4$ "Moda datuma rođenja", te u $G4$

$$= MODE(C5 : C27).$$

Iskoristiti ćemo još funkciju $COUNT$ koja vraća broj brojeva u datom nizu polja. Nas zanima da li je dobijena moda neki broj ili ne, pa u polje $F5$ upišimo "Da li postoji moda?", te u $G5$

$$= COUNT(F5).$$

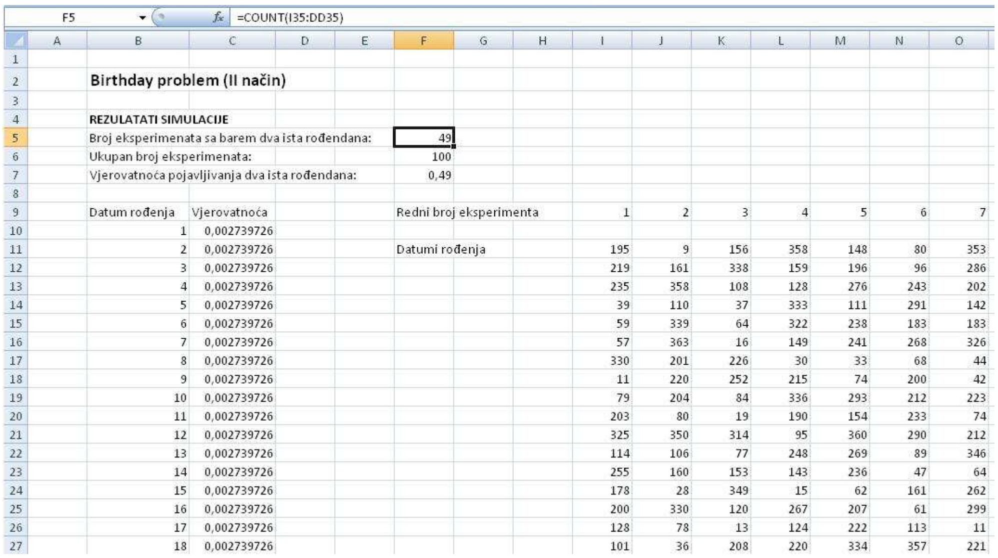
Konačno, u polje $F7$ upišimo "Da li je bilo istih rođendana?", a u $G7$ željeni odgovor na sljedeći način

$$= IF(G5 = 1; DA; NE).$$

Međutim, samo jedno izvođenje eksperimenta nije dovoljno da nas ubijedi u dobijeni rezultat, niti ukaže na traženu vjerovatnoću. Prisjetimo se da pritiskom na tipku $F9$ ustvari možemo ponoviti eksperiment, pa to možemo ponoviti određeni broj puta i registrovati željeni odgovor. Naprimjer, izvedemo li eksperiment 10 puta možemo registrovati sljedeći niz odgovora:

NE, DA, DA, DA, NE, NE, DA, DA, NE, NE,

što nam daje informaciju da je vjerovatnoća istih rođendana u prostoriji sa 23 osobe oko 0.5. Ipak, 10 ponavljanja eksperimenta nije dovoljno da nas zaista uvjeri u ovaj podatak. Kako bi izvođenje većeg broja eksperimenta na gore navedeni način bilo nešto zamorno (jer je neophodno registrovati dobijeni rezultat svaki put), pogledajmo kako drugačije možemo pristupiti problemu. Upišite naziv svih polja kao na slici.



F5 =COUNT(I35:DD35)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2		**Birthday problem (II način)**													
3															
4		**REZULATATI SIMULACIJE**													
5		Broj eksperimenata sa barem dva ista rođendana:				49									
6		Ukupan broj eksperimenata:				100									
7		Vjerovatnoća pojavljivanja dva ista rođendana:				0,49									
8															
9		Datum rođenja	Vjerovatnoća			Redni broj eksperimenta			1	2	3	4	5	6	7
10		1	0,002739726												
11		2	0,002739726			Datumi rođenja			195	9	156	358	148	80	353
12		3	0,002739726						219	161	338	159	196	96	286
13		4	0,002739726						235	358	108	128	276	243	202
14		5	0,002739726						39	110	37	333	111	291	142
15		6	0,002739726						59	339	64	322	238	183	183
16		7	0,002739726						57	363	16	149	241	268	326
17		8	0,002739726						330	201	226	30	33	68	44
18		9	0,002739726						11	220	252	215	74	200	42
19		10	0,002739726						79	204	84	336	293	212	223
20		11	0,002739726						203	80	19	190	154	233	74
21		12	0,002739726						325	350	314	95	360	290	212
22		13	0,002739726						114	106	77	248	269	89	346
23		14	0,002739726						255	160	153	143	236	47	64
24		15	0,002739726						178	28	349	15	62	161	262
25		16	0,002739726						200	330	120	267	207	61	299
26		17	0,002739726						128	78	13	124	222	113	11
27		18	0,002739726						101	36	208	220	334	357	221

Zatim u polja $B10 - B374$ upišimo sve moguće datume rođenja u godini, tj. brojeve $1-365$ (U $B10$ unesemo 1, a zatim pomoću Fill Series popunimo ostala polja). U polja $C10 - C374$ onda upišimo odgovarajuće vjerovatnoće, tj. vjerovatnoće svakog pojedinačnog datuma rođenja (U $C10$ unesimo $= 1/365$, a zatim pomoću Copy Cells popunimo ostala polja). U polja $I9 - DD9$ pomoću Fill Series unesimo brojeve $1 - 100$ (Ukoliko želimo eksperiment ponoviti 100 puta). Izaberimo

"Excel Options > Add-Ins > Go > Analysis ToolPak > OK",

te onda

"Data > Data Analysis > Random Number Generation > OK",

gdje ćemo unijeti sljedeće

Number of Variables:	100
Number of Random Numbers:	23
Distribution:	Discrete
Value and Probability Input Range:	$\$B\$10 : \$C\$374$
Output Range:	I11

(Imajte na umu da je i u Microsoft Office Excel 97-2003 moguće uključiti Data Analysis, samo što se to ne radi na potpuno identičan način kao što je gore opisan.) Ovime smo dobili 100 izvođenja prethodnog eksperimenta, odnosno dobili smo 100 nizova od 23 slučajna broja između 1 i 365, tj. nizove od 23 slučajna datuma. Da bismo provjerili koliko puta se desilo da barem dvije osobe imaju datum na isti rođendan, ponovno ćemo izračunati mode za dobijene nizove datuma. Dakle, u $F35$ upišimo "Mode", a zatim u $I35$:

$$= MODE(I11 : I33).$$

Pomoću Fill Series prenesimo djelovanje ove funkcije na polja $J35 - DD35$. Pređimo na analizu dobijenih podataka, tj. popunimo preostala polja iz uvodnog dijela našeg worksheet-a. Broj eksperimenata sa barem dva ista rođendana dobiti ćemo tako što prebrojimo koje od dobijenih moda su brojevi, pa u $F5$ upišimo

$$= COUNT(I35 : DD35).$$

Ukupan broj eksperimenata je 100, pa to upišimo u $F6$. Konačno, u polje $F7$ upisati ćemo

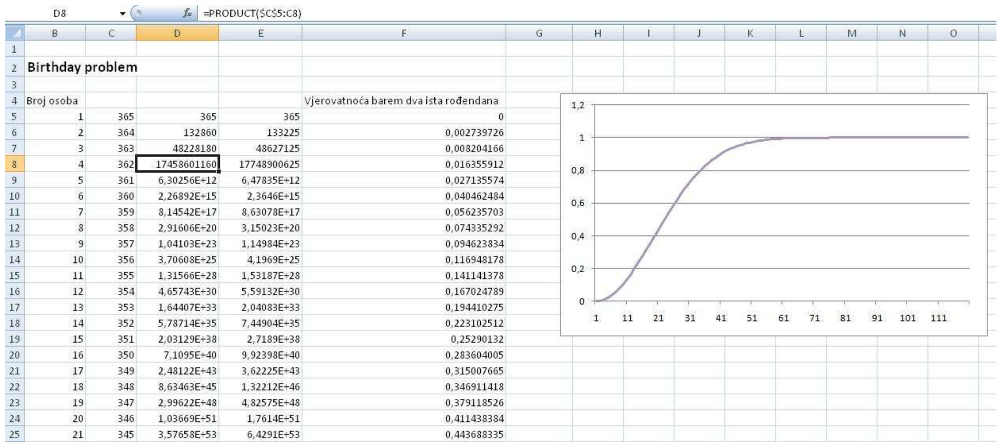
$$= F5/F6,$$

čime dobijamo statističku vjerovatnoću pojavljivanja barem dva ista rođendana u prostoriji sa 23 osobe. Želimo li eksperiment ponoviti još 100 puta jednostavno to uradimo birajući

"Data > Data Analysis > Random Number Generation > OK".

Iskoristimo Excel još da izračunamo teoretske vjerovatnoće ponavljanja istog rođendana barem dva puta u prostoriji sa 23, ali i $1, 2, 3, \ldots, 120$ osoba na način potpuno identičan onom ranije iznesenom u ovom poglavlju. U $B4$ upišimo "Broj osoba", te u $B5 - B124$ pomoću Fill Series brojeve $1 - 120$. Polja $C5 - E124$

iskoristiti ćemo za računanje traženih vjerovatnoća.



Birthday problem

Broj osoba				Vjerovatnoća barem dva ista rođendana
1	365	365	365	0
2	364	132860	133225	0,002739726
3	363	48228180	48627125	0,008204166
4	362	17458601160	17748900625	0,016355912
5	361	6,30256E+12	6,47835E+12	0,027135574
6	360	2,26892E+15	2,3646E+15	0,040462484
7	359	8,14542E+17	8,63078E+17	0,056235703
8	358	2,91606E+20	3,15023E+20	0,074335292
9	357	1,04103E+23	1,14984E+23	0,094623834
10	356	3,70608E+25	4,1969E+25	0,116948178
11	355	1,31566E+28	1,53187E+28	0,141141378
12	354	4,65743E+30	5,59132E+30	0,167024789
13	353	1,64407E+33	2,04083E+33	0,194410275
14	352	5,78714E+35	7,44904E+35	0,223102512
15	351	2,03129E+38	2,7189E+38	0,25290132
16	350	7,1095E+40	9,92398E+40	0,283604005
17	349	2,48122E+43	3,62225E+43	0,315007665
18	348	8,63463E+45	1,32212E+46	0,346911418
19	347	2,99622E+48	4,82575E+48	0,379118526
20	346	1,03669E+51	1,7614E+51	0,411438384
21	345	3,57658E+53	6,4291E+53	0,443688335

U $C5$ unesimo 365, a u $C6$

$$= C5 - 1,$$

te pomoću Fill Series popunimo i polja $C7 - C124$ sa brojevima $363 - 246$. U polje $D5 - D124$ izračunati ćemo potrebne proizvode pomoću funkcije $PRODUCT$. Naime, u $C5$ upišimo

$$= PRODUCT(\$C\$5 : C5),$$

te koristeći Fill Series popunimo preostala polja (Znak \$ ovdje ispred C i ispred 5 ustvari fiksiraju red i kolonu $C5$). Dalje, u $D5$ unesimo

$$= 365 \wedge B5,$$

i pomoću Fill Series ponovimo djelovanje ove funkcije sve do $D124$. Konačno, izračunajmo i vjerovatnoće pojavljivanja barem dva rođendana. U polje $F5$ upišimo

$$1 - D5/E5,$$

što ćemo također koristeći Fill Series ponoviti do $F124$. Jednostavno možemo narctati i odgovarajući grafik, selektujući polja $B4 - B124$ i $F4 - F24$ i odabirući "Insert > Line", nakon čega možemo urediti detalje grafika kako želimo. $\square$

Poglavlje 2

Slučajne promjenljive

Zadaci u ovom poglavlju prvobitno imaju za cilj poboljšati razumijevanje pojma slučajna promjenljiva, koji je jedan od ključnih termina za daljni rad u kursu Vjerovatnoća, ali i Statistika. Nakon intuitivno jasne podjele slučajnih promjenljivih na diskretne i neprekidne, potrebno je naučiti kako se one zadaju - funkcijom raspodjele ili zakonom raspodjele, odnosno funkcijom raspodjele ili funkcijom gustine. Kroz definicije i teoreme biti će objašnjeni ovi pojmovi, a kroz zadatke studenti će imati priliku sami određivate navedene funkcije ili zakone raspodjele, skicirati njihove grafike, a time i potpuno objasniti i shvatiti zašto one zadovoljavaju navedene osobine.

Također, definirati ćemo i kroz primjere objasniti poznate diskretne i neprekidne raspodjele (binomna, Poisson-ova, normalna), uvijek navodeći i motivaciju za njihovo uvođenje.

2.1 Pojam slučajne promjenljive

U raznim primjerima imali smo različite prostore elementarnih događaja, pa tako i događaje, koje u pravilu nismo mogli dovoditi u vezu jedne s drugima. Motivacija za uvođenje pojma slučajne promjenljive leži upravo u ideji da se svaka slučajna pojava opiše istim prostorom elementarnih događaja, a da tek vjerovatnoća događaja bude odgovorna za različitost. Svakom elementarnom događaju ćemo tako pridružiti neki broj, odnosno kao skup elementarnih događaja uzeti ćemo skup realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Definicija 2.1.1 (SLUČAJNA PROMJENLJIVA)**.** *Neka je Ω prostor elementarnih događaja. Slučajna promjenljiva je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$.*

ZADATAK 2.1.1. *Odrediti slučajnu promjenljivu X koja odgovara sljedećim eksperimentima:*

a. *bacanje jednog novčića jednom, pri čemu se registruje gornja strana novčića.*

b. *posmatranje razreda od 25 osoba, pri čemu se registruje broj djevojčica u razredu.*

c. *bacanje kocke za igru, pri čemu se registruje koliko je puta pala 6.*

c. *biranje jedne osobe u grupi, pri čemu se registruje njena visina*

Rješenje:

a. Prostor elementarnih događaja eksperimenta bacanja novčića, pri čemu se registruje gornja strana novčića, je $\Omega = \{P, G\}$. Definirajmo funkciju $X : \Omega \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$X(P) = 0, \quad X(G) = 1.$$

Dakle, slučajna promjenljiva X uzima vrijednosti 0 i 1.

b. Prostor elementarnih događaja eksperimenta posmatranja razreda od 25 osoba, pri čemu se registruje broj djevojčica, je

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 24, 25\}.$$

Definirajmo funkciju $X : \Omega \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$X(0) = 0, \quad X(1) = 1, \quad X(2) = 2, \quad \ldots \quad , X(25) = 25.$$

Dakle, slučajna promjenljiva X uzima vrijednosti $0, 1, 2, \ldots, 25$.

c. Prostor elementarnih događaja eksperimenta bacanja kocke za igru, pri čemu se registruje koliko je puta pala 6, je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Definirajmo funkciju $X : \Omega \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$X(1) = X(2) = X(3) = X(4) = X(5) = 0, \quad X(6) = 1.$$

Dakle, slučajna promjenljiva X uzima vrijednosti 0 i 1.

d. Prostor elementarnih događaja eksperimenta biranja jedne osobe u grupi, pri čemu se registruje njena visina je već nešto drugačije od prethodnih primjera. Naime, tada bismo imali $\Omega = (0, +\infty)$. Ovaj prostor elementarnih događaja smo mogli pisati i kao $[140, 220]$ ukoliko unaprijed znamo da u grupi nema osoba nižih od 140cm, ili viših od 220cm. Slučajnu promjenljivu $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definirali bi kao funkciju identita, tj.
$$X(t) = t, \quad t \in \Omega,$$
pa i slučajna promjenljiva X uzima vrijednosti iz intervala $(0, +\infty)$, odnosno $[140, 220]$. Ono što je nama bitno jeste da se ovdje radi o intervalu koji ima neprebrojivo mnogo različitih elementarnih događaja.

▲

Već iz prethodnog primjera možemo uočiti bitnu razliku između slučajnih promjenljivih diskretnog i neprekidnog tipa. Prije nego što počnemo izučavati ova dva tipa odvojeno, uvesti ćemo pojam koji je zajednički za oba.

Definicija 2.1.2 (FUNKCIJA RASPODJELE)**.** *Neka je X slučajna promjenljiva, i $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Funkcija raspodjele slučajne promjenljive X je funkcija $\mathcal{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana sa*
$$\mathcal{F}(x) = P(X < x).$$

Teorem 2.1.1 (OSOBINE FUNKCIJE RASPODJELE)**.** *Neka je $\mathcal{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija raspodjele slučajne promjenljive X. Tada vrijedi:*

(i) $(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad 0 \leq \mathcal{F}(x) \leq 1.$

(ii) *$\mathcal{F}$ je neopadajuća i neprekidna slijeva.*

(iii) $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(-n) = 0, \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(n) = 1$

Primjedba 2.1.1. *Svaka slučajna promjenljiva jednoznačno određuje svoju funkciju raspodjele. Obrnuto ne važi.*

2.2 Diskretne slučajne promjenljive

Definicija 2.2.1 (DISKRETNA SLUČAJNA PROMJENLJIVA)**.** *Slučajna promjenljiva X je diskretna ako uzima najviše prebrojivo mnogo različitih vrijednosti, tj. ako postoji skup $S = \{x_1, x_2, ...\}$ vrijednosti koje slučajna promjenljiva uzima, i pri tome je*
$$\sum_i P(X = x_i) = \sum_i p_i = 1.$$

Diskretna slučajna promjenljiva je zadata ako su poznate vrijednosti koje uzima i s kojim vjerovatnoćama. Shema u kojoj su navedeni podaci predstavljeni naziva se zakon raspodjele slučajne promjenljive X :

$$X : \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}.$$

Ovu shemu možemo pisati i u obliku tabele:

x_i	x_1	x_2	$\dots$
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$

Dakle, svakoj mogućoj vrijednosti slučajne promjenljive (odnosno, odgovarajućim događajima eksperimenta) pridružujemo njihove vjerovatnoće, tj.

$$p_i = P(X = x_i) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\}).$$

Naprimjer, u već navedenom eksperimentu bacanja kocke za igru, pri čemu se registruje broj dobijenih šestica, već smo ustanovili da slučajna promjenljiva uzima vrijednosti 0 i 1, odnosno $X(1) = X(2) = X(3) = X(4) = X(5) = 0, X(6) = 1$. Odredimo sada i njihove pripadne vjerovatnoće:

$$\begin{array}{l} P(X = 0) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = 0\}) = P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \frac{5}{6}, \\ P(X = 1) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = 1\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}. \end{array}$$

Kako je slučajna promjenljiva X jedna funkcija, ne može se desiti da za bilo kakav elementarni događaj $\omega \subseteq \Omega$ vrijedi $X(\omega) = x_i$ i $X(\omega) = x_j$, pri čemu je $x_i \neq x_j$. Dakle, događaji da slučajna promjenljiva X poprimi vrijednosti x_i su međusobno isključivi, odnosno disjunktni, čime se zaista uvjeravamo da vrijedi

$$1 = P(\Omega) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n) + \dots.$$

ZADATAK 2.2.1. *Eksperiment se sastoji u trostrukom bacanju novčića. Ako slučajna promjenljiva X označava broj pojave grba, naći zakon raspodjele i funkciju raspodjele slučajne promjenljive X, te nacrtati njen grafik.*

Rješenje: Bacamo li novčić tri puta, dobijamo sljedeći prostor jednakovjerovatnih elementarnih događaja

$$\Omega = \{PPP, PPG, PGP, PGG, GPP, GPG, GGP, GGG\}.$$

Kako registrujemo broj pojave grba, jasno je da ćemo odgovarajuću slučajnu promjenljivu $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definirati sa

$$\begin{array}{l} X(PPP) = 0, \\ X(PPG) = X(PGP) = X(GPP) = 1, \\ X(PGG) = X(GPG) = X(GGP) = 2, \\ X(GGG) = 3. \end{array}.$$

Tako slučajna promjenljiva X ima sljedeći zakon raspodjele

$$X : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

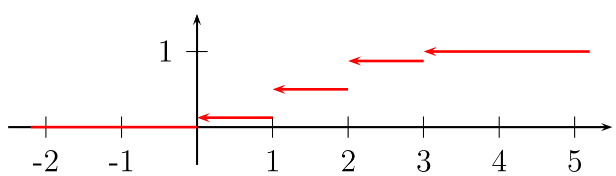
Uočimo da zaista vrijedi

$$\sum_i p_i = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

Funkcija raspodjele je

$$\mathcal{F}(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{4}{8}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{7}{8}, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases},$$

pa je njen grafik



▲

> **ZADATAK 2.2.2.** *Bacaju se dvije kocke za igru i registruje se zbir tačkica na njihovim gornjim stranama. Naći zakon raspodjele i funkciju raspodjele odgovarajuće slučajne promjenljive.*

Rješenje: Kako bacanje dvije kocke kao rezultat ima sljedeće jednakovjerovatne mogućnosti

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6),
\end{array}$$

zbir tačkica na gornjim stranama tada možemo predstaviti odgovarajućom shemom

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\
7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12.
\end{array}$$

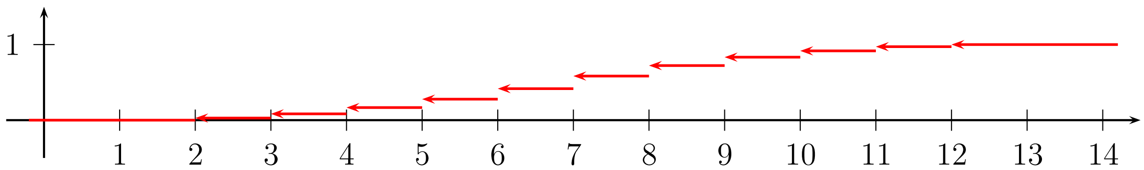
Na osnovu prethodne sheme zaključujemo da slučajna promjenljiva X (zbir tačkica na gornjim strana kocke) ima sljedeći zakon raspodjele

$$X: \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

Uvijek je korisno provjeriti da li zaista $\sum_i p_i = 1$, a ovdje to očito jeste slučaj. Odredimo i funkciju raspodjele:

$$\mathcal{F}(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{1}{36}, & 2 < x \leq 3 \\ \frac{3}{36}, & 3 < x \leq 4 \\ \frac{6}{36}, & 4 < x \leq 5 \\ \frac{10}{36}, & 5 < x \leq 6 \\ \frac{15}{36}, & 6 < x \leq 7 \\ \frac{21}{36}, & 7 < x \leq 8 \\ \frac{26}{36}, & 8 < x \leq 9 \\ \frac{30}{36}, & 9 < x \leq 10 \\ \frac{33}{36}, & 10 < x \leq 11 \\ \frac{35}{36}, & 11 < x \leq 12 \\ 1, & x > 12 \end{cases},$$

pa je njen grafik



▲

ZADATAK 2.2.3. *Kocku za igru bacamo sve dok ne dobijemo* 6. *Naći zakon raspodjele slučajne promjenljive* X *koja predstavlja broj bacanja kocke.*

Rješenje: Bacanje kocke zaustavljamo kada dobijemo 6, pa slučajna promjenljiva X koja predstavlja broj bacanja uzima vrijednosti $1, 2, 3, 4, \ldots$. Ako je broj bacanja kocke 1, to po pretpostavci zadatka znači da smo odmah u prvom bacanju dobili 6, a kako je vjerovatnoća da se desi taj događaj $\frac{1}{6}$, imamo

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}.$$

Ako je broj bacanja kocke 2, to znači da u prvom bacanju nismo dobili 6 (inače bi se već tada zaustavili sa bacanjem kocke), ali da smo u drugom bacanju dobili 6, pa imamo

$$P(X = 2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Ako je broj bacanja kocke 3, to znači da u prva dva bacanju nismo dobili 6 (inače bi se već tada zaustavili sa bacanjem kocke), ali da smo u trećem bacanju dobili 6, pa imamo

$$P(X = 3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Tako slučajna promjenljiva X ima sljedeći zakon raspodjele

$$X : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & \ldots \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} & (\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} & (\frac{5}{6})^3 \cdot \frac{1}{6} & \ldots & (\frac{5}{6})^{n-1} \cdot \frac{1}{6} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Uočimo da zaista vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_i p_i &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^2\cdot\frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^3\cdot\frac{1}{6} + \cdots + (\frac{5}{6})^{n-1}\cdot\frac{1}{6} + \ldots \\ &= \frac{1}{6}[1 + \frac{5}{6} + (\frac{5}{6})^2 + (\frac{5}{6})^3 + \cdots + (\frac{5}{6})^{n-1} + \ldots] \\ &= \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{5}{6}} \\ &= \frac{1}{6}\cdot 6 \\ &= 1.\end{aligned}$$

▲

ZADATAK 2.2.4. *Kontrolor provjerava proizvod jedne serije koja sadrži 20% neispravnih proizvoda i obustavlja provjeru proizvoda kada naiđe na neispravan proizvod. Ako sa X označimo broj pregledanih proizvoda, naći zakon raspodjele slučajne promjenljive X.*

Rješenje: Zaključivanjem sličnim kao u prethodnom primjeru, dolazimo do zakona raspodjele slučajne promjenljive X

$$X: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} & (\frac{4}{5})^2\cdot\frac{1}{5} & \ldots & (\frac{4}{5})^{n-1}\cdot\frac{1}{5} & \ldots \end{pmatrix},$$

odnosno

$$X: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5^2} & \frac{4^2}{5^3} & \ldots & \frac{4^{n-1}}{5^n} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Uočimo da zaista vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_i p_i &= \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} + (\frac{4}{5})^2\cdot\frac{1}{5} + (\frac{4}{5})^3\cdot\frac{1}{5} + \cdots + (\frac{4}{5})^{n-1}\cdot\frac{1}{5} + \ldots \\ &= \frac{1}{5}[1 + \frac{4}{5} + (\frac{4}{5})^2 + (\frac{4}{5})^3 + \cdots + (\frac{4}{5})^{n-1} + \ldots] \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{4}{5}} \\ &= \frac{1}{5}\cdot 5 \\ &= 1.\end{aligned}$$

▲

ZADATAK 2.2.5. *Dva košarkaša naizmjence bacaju loptu u koš, dok jedan ne postigne koš. Naći zakon raspodjele broja bacanja, ako je vjerovatnoća da prvi postigne koš* 0.4, *a vjerovatnoća da drugi postigne koš je* 0.6.

Rješenje: Zaključivanjem sličnim kao u prethodnom primjeru, dolazimo do zakona raspodjele slučajne promjenljive X

$$X: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2k-1 & 2k+1 & \dots \\ 0.4 & 0.6^2 & 0.6\cdot 0.4\cdot 0.4 & 0.6\cdot 0.4\cdot 0.6\cdot 0.6 & \dots & 0.4^k 0.6^{k-1} & 0.4^{k-1}0.6^{k+1} & \dots \end{pmatrix}.$$

Uočimo da zaista vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_i p_i &= 0.4+0.6^2+0.4^2\cdot 0.6+0.4\cdot 0.6^3+\dots+0.4^k\cdot 0.6^{k-1}+0.4^{k-1}\cdot 0.6^{k+1}+\dots\\ &= (0.4+0.4^2\cdot 0.6+\dots+0.4^k\cdot 0.6^{k-1}+\dots)\\ &\quad +(0.6^2+0.4\cdot 0.6^3+\dots+0.4^{k-1}\cdot 0.6^{k+1}+\dots)\\ &= 0.4(1+0.24+\dots+0.24^{k-1}+\dots)+0.6^2(1+0.24+\dots+0.24^{k-1}+\dots)\\ &= \frac{1}{1-0.24}(0.4+0.6^2)\\ &= \frac{1}{0.76}\cdot 0.76\\ &= 1.\end{aligned}$$

▲

ZADATAK 2.2.6. *Strijelac izvodi seriju nezavisnih gađanja u cilj, koji pogađa sa vjerovatnoćom* 0.4. *Gađanje vrši sve dok ne pogodi dva puta ili dok ne promaši tri puta. Ako je X slučajna promjenljiva koja označava broj gađanja, a Y broj pogodaka, naći zakon raspodjele i funkciju raspodjele slučajnih promjenljivih X i Y.*

Rješenje: Trebamo prvo uočiti da slučajna promjenljiva X može uzimati samo vrijednosti $2, 3$ i 4. Naime, gađanje se sigurno ne može zaustaviti nakon prvog, jer tada nećemo moći postići niti 2 pogotka niti 3 promašaja. S druge strane, ako strijelac gađa 4 puta, sigurno će se desiti da je ili pogodio 2 puta, ili promašio 3 puta. Odredimo i odgovarajuće vjerovatnoće. Ako je broj gađanja 2, to znači da su se morala desiti oba pogotka, pa je

$$P(X=2)=0.4\cdot 0.4=0.16.$$

Ukoliko je broj gađanja 3, moglo je nastupiti nekoliko situacija. Radi boljeg uočavanja, obilježimo pogodak sa P, i promašaj (odnosno gubitak) sa G. Svi mogući slučajevi su:

$$PPP, PPG, PGP, PGG, GPP, GPG, GGP, GGG.$$

Međutim, uočimo da slučajevi PPP i PPG ne odgovaraju vrijednosti slučajne promjenljive $X = 3$, već onoj ranije razmatranoj $X = 2$, jer bi se u ovim slučajevima gađanje zaustavilo odmah nakon 2 pogotka. Također, ni slučajevi PGG, GPG, GGP uopće još ne bi doveli do zaustavljanja gađanja. Dakle, broj gađanja biti će 3 ukoliko se desi PGP, GPP ili GGG, pa imamo (prisjetimo se da je već unaprijed objašnjeno kako su ovi događaji međusobno isključivi)

$$P(X = 3) = 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.408.$$

Konačno, vjerovatnoću događaja $X = 4$ odrediti ćemo na sličan način. Navedimo prvo sve mogućnosti:

$$PPPP, PPPG, PPGP, PPGG, PGPP, PGPG, PGGP, PGGG,$$

$$GPPP, GPPG, GPGP, GPGG, GGPP, GGPG, GGGP, GGGG.$$

Analogno kao ranije, možemo zaključiti da od navedenih jedino slučajevi $PGGP, PGGG, GPGP, GPGG, GGPP, GGPG$ zaista dovode do zaustavljanja gađanja nakon 4 pokušaja, pa vrijedi

$$\begin{aligned} P(X = 4) \quad &= 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \\ &+ 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.6 \\ &= 0.432. \end{aligned}$$

Na osnovu svega navednog, zakon raspodjele slučajne promjenljive X je

$$X : \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0.16 & 0.408 & 0.4328 \end{pmatrix}.$$

Možemo oučiti da zaista vrijedi $\sum_i p_i = 0.16 + 0.408 + 0.432 = 1$.

Odredimo i zakon raspodjele slučajne promjenljive Y. Kako ona predstavlja broj pogodaka, moguće vrijednosti ove slučajne promjenljive su $0, 1$ i 2. Za određivanje odgovarajućih vjerovatnoća iskoristiti ćemo sve ranije navedene moguće slučajeve (Naravno, radi jednostavnosti uočiti ćemo već izabrane slučajeve koj zaista mogu nastupiti). Naime, možemo uočiti da među njima vrijednosti $Y = 0$ odgovara samo GGG, pa imamo

$$P(Y = 0) = 0.6^3 = 0.216.$$

Vrijednosti $Y = 1$ odgovaraju slučajevi $PGGG, GPGG, GGPG$, te stoga

$$P(Y = 1) = 0.4 \cdot 0.6^3 \cdot 3 = 0.2592.$$

Konačno, ako je broj pogodaka 2, mogao je nastupiti neki od sljedećih slučajeva: $PP, PGP, GPP, PGGP, GPGP, GGPP$, pa

$$P(Y = 2) = 0.4^2 + 0.4^2 \cdot 0.6 \cdot 2 + 0.4^2 \cdot 0.6^2 \cdot 3 = 0.5428.$$

Dakle, slučajna promjenljiva Y ima zakon raspodjele

$$Y : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.216 & 0.2592 & 0.5428 \end{pmatrix}.$$

Uočimo i da ovdje vrijedi $\sum_i p_i = 0.216 + 0.2592 + 0.5428 = 1$. ▲

Različite diskretne slučajne promjenljive mogu imati jednake funkcije vjerovatnoće (pravila po kojem se svakom elementarnom događaju pridružuje njegova vjerovatnoća), a prema tome i funkcije raspodjele. Kako su to osnovne funkcije za razna računanja, takve slučajne promjenljive možemo smatrati jednakima. One, putem svojih funkcija vjerovatnoće određuju iste raspodjele vjerovatnoće na skupu realnih brojeva. Zato se prije govori o raspodjelama, nego o pojedinim slučajnim promjenljivim. Ovdje ćemo uvesti najvažnije diskretne slučajne promjenljive, binomnu i Poisson-ovu raspodjelu.

Slučajne promjenljive raspodjeljene po binomnoj raspodjeli smo već ranije spominjali. Naime, tipičan primjer ovakve slučajne promjenljive X je broj pojavljivanja događaja A u Bernoulli-jevoj shemi. Podsjetimo se da se u Bernoulli-jevoj shemi događaja radilo o n nezavisnih ponavljanja nekog eksperimenta, pri čemu nas samo zanima da li se određeni događaj A realizuje ili ne. Vjerovatnoća događaja A je u svakom pojedinačnom ponavljanju eksperimenta ista i iznosi p. Vjerovatnoća da se u tih n ponavljanja eksperimenta događaj A realizira k puta ($k \leq n$) je, kao što smo to i ranije naveli

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Naziv binomne raspodjele upravo i proizilazi iz binomnog koeficijenta koji se javlja u posljednjoj formuli. Navedimo i eksplicitnu definiciju.

Definicija 2.2.2 (BINOMNA RASPODJELA)**.** *Diskretna slučajna promjenljiva X ima binomnu raspodjelu ako vrijedi*

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n, 0 < p < 1).$$

Pišemo $X \sim B(n,p)$.

Na osnovu binomnog razvoja možemo se uvjeriti da i ovdje vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n + \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} p^n (1-p)^0 \\
&= (p+1-p)^n \\
&= 1.
\end{aligned}$$

ZADATAK 2.2.7. *Tim A dobija sa vjerovatnoćom $\frac{2}{3}$ kad god igra. Ako tim A odigra 4 igre, naći vjerovatnoću da dobije*

a. tačno 2 igre.

b. barem 1 igru.

c. više od pola igara.

Rješenje: Prvobitno odredimo zakon raspodjele slučajne promjenljive X koja označava broj pobjeda tima A u 4 odigrane igre, jer će nam to omogućiti brzo izračunavanje traženih vjerovatnoća. Slučajna promjenljiva X može uzeti vrijednosti $0, 1, 2, 3$ i 4, jer tim A može pobijediti nijednom, jednom, dva, tri ili četiri puta u 4 igre. Ako je $X = 0$, to znači da je tim A izgubio sve igre, pa je

$$P(X=0) = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}.$$

Ako je $X = 1$, to znači da je tim A pobijedio jednu igru, i izgubio tri. Međutim, tim A je mogao pobijediti bilo koju od tih igara, tj. jednu igru mogao je pobijediti na $\binom{4}{1}$ različitih načina, pa

$$P(X=1) = \binom{4}{1} \frac{2}{3} (\frac{1}{3})^3 = \frac{8}{81}.$$

Slično, ako je $X = 2$, to znači da je tim A pobijedio dvije igre, i izgubio dvije. Međutim, tim A je mogao pobijediti bilo koje dvije igre (naprimjer, prvu i treću, ili treću i četvrtu, itd.), tj. dvije igre mogao je pobijediti na $\binom{4}{2}$ različitih načina, pa

$$P(X=2)=\binom{4}{2}(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^2=\frac{24}{81}.$$

Analogno dobijamo i

$$P(X=3)=\binom{4}{3}(\frac{2}{3})^3\frac{1}{3}=\frac{32}{81},$$

$$P(X=4)=\binom{4}{4}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^0=\frac{16}{81}.$$

Dakle, slučajna promjenljiva X ima zakon raspodjele

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{81} & \frac{8}{81} & \frac{24}{81} & \frac{32}{81} & \frac{16}{81} \end{pmatrix}.$$

a. Kako slučajna promjenljiva X predstavlja broj pobjeda tima A u 4 igre, iz njenog zakona raspodjela imamo da je vjerovatnoća da tim A dobije tačno 2 igre
$$P(X=2)=\frac{24}{81}=\frac{8}{27}.$$

b. Tim A dobija barem 1 igru ako dobija jednu, dvije, tri ili četiri igre. Već je unaprijed objašnjeno da će se ovdje raditi o međusobno disjunktnim, odnosno isključivim događajima, pa ponovno iz navedenog zakona raspodjele imamo

$$\begin{aligned} P(X\geq 1) &= P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4) \\ &= \frac{8}{81}+\frac{24}{81}+\frac{32}{81}+\frac{16}{81} \\ &= \frac{80}{81}. \end{aligned}$$

Naravno, i ovdje smo traženu vjerovatnoću mogli lakše izračunati preko komplementa događaja, tj.

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\frac{1}{81}=\frac{80}{81}.$$

c. I ovdje direktno iz zakona raspodjele slučajne promjenljive X imamo

$$P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)=\frac{32}{81}+\frac{16}{81}=\frac{48}{81}=\frac{16}{27}.$$

▲

ZADATAK 2.2.8. *Strijelac gađa cilj. U svakom pojedinom gađanju vjerovatnoća da pogodi cilj je* 0.2. *Koliko puta mora gađati da s vjerovatnoćom barem* 0.9 *pogodi cilj*

a. barem jednom.

b. barem dva puta.

Rješenje: Kao i u prethodnom primjeru, prvobitno ćemo odrediti zakon raspodjele slučajne promjenljive X koja označava broj pogodaka u n gađanja, jer će nam to omogućiti brzo izračunavanje traženih brojeva. Slučajna promjenljiva X može uzeti vrijednosti $0, 1, 2, 3, \dots, n$ jer strijelac u n gađanja može ostvariti nijedan, jedan, dva, ..., ili n pogodaka. Ako je $X = 0$, to znači strijelac nije pogodio cilj nijednom, pa je

$$P(X = 0) = 0.8^n.$$

Ako je $X = 1$, to znači da je strijelac pogodio samo jednom u n gađanja. Međutim, strijelac je mogao pogoditi u bilo kojem od tih gađanja (naprimjer, prvom, ili trećem, ili tek n-tom gađanju), tj. taj jedan pogodak mogao je ostvariti na $\binom{n}{1}$ različitih načina, pa

$$P(X = 1) = \binom{n}{1} 0.2 \cdot 0.8^{n-1}.$$

Slično, ako je $X = 2$, to znači da je strijelac pogodio cilj dva puta, i sve ostalo promašio. Međutim, strijelac je ta dva pogotka mogao ostvariti na $\binom{n}{2}$ različitih načina, pa imamo

$$P(X = 2) = \binom{n}{2} 0.2^2 0.8^2.$$

Analogno dobijamo i

$$\begin{aligned} &P(X = 3) = \binom{n}{3} 0.2^3 0.8^{n-3}, \\ &\vdots \\ &P(X = n) = \binom{n}{n} 0.2^n 0.8^0. \end{aligned}$$

Dakle, slučajna promjenljiva X ima zakon raspodjele

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0.8^n & \binom{n}{1}0.2 \cdot 0.8^{n-1} & \binom{n}{2}0.2^2 0.8^2 & \binom{n}{3}0.2^3 0.8^{n-3} & \dots & \binom{n}{n}0.2^n \end{pmatrix}.$$

a. Na osnovu navedenog zakona raspodjele, sada imamo

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) \geq 0.9 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - P(X < 1) \geq 0.9 \\ &\Leftrightarrow \quad P(X < 1) \leq 0.1 \\ &\Leftrightarrow \quad P(X = 0) \leq 0.1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0.8^n \leq 0.1 \\ &\Leftrightarrow \quad \log_{0.8} 0.8^n \geq \log_{0.8} 0.1 \\ &\Leftrightarrow \quad n \geq \tfrac{\log_{10} 0.1}{\log_{10} 0.8} \approx 10.32, \end{aligned}$$

pa je strijelac treba gađati barem 11 puta da vjerovatnoća barem jednog pogotka bude barem 0.9.

b. Na osnovu navedenog zakona raspodjele, sada imamo

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) \geq 0.9 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - P(X < 2) \geq 0.9 \\ &\Leftrightarrow \quad P(X < 2) \leq 0.1 \\ &\Leftrightarrow \quad P(X = 0) + P(X = 1) \leq 0.1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0.8^n + n \cdot 0.2 \cdot 0.8^{n-1} \leq 0.1. \end{aligned}$$

Ovu nejednačinu već ne možemo riješiti tako jednostavno kao u prethodnom slučaju. Rješavali bi je tako što bi ustvari rješavali odgovarajuću jednačinu nekom od približnih metoda (naprimjer, iteracijske metode polovljenja, sječice, i sl.). Kako nam samo rješavanje ove nejednačine nije od važnosti, mi ćemo rješenje pogoditi, što neće biti teško jer nas zanimaju samo prirodni brojevi. Jednostavnom provjerom, dobijamo da je najmanji prirodan broj za koji je gornja nejednačina zadovoljena 18. Dakle, strijelac treba gađati barem 18 puta da vjerovatnoća barem dva pogotka bude barem 0.9.

▲

Definicija 2.2.3 (POISSON-OVA RASPODJELA)**.** *Diskretna slučajna promjenljiva X ima Poisson-ovu raspodjelu ako vrijedi*

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0, \lambda > 0).$$

Pišemo $X \sim P(\lambda)$.

Na osnovu razvoja funkcije $f(x) = e^x$ u red, odmah se možemo uvjeriti da i ovdje vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(X=k) &= \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} + \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} + \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} + \ldots \\ &= e^{-\lambda}(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!}) \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Poisson-ova raspodjela nastala je kao granica binomne raspodjele, posebice kada je n veliko, a p malo. Preciznije, imamo sljedeći teorem.

Teorem 2.2.1 (POISSON)**.** *Ako $n \to \infty$, $p \to 0$, ali tako da $np \to \lambda > 0$, onda vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Prisjetimo se još jednom da se binomna raspodjela koristi kada imamo n nezavisnih ponavljanja nekog eksperimenta, pri čemu nas samo zanima da li se neki događaj A realizuje ili ne, a gdje je vjerovatnoća događaja A u svakom pojedinačnom ponavljanju eksperimenta ista i iznosi p. Međutim, prethodni teorem nam govori da, ukoliko je ovaj broj ponavljanja eksperimenta velik ($n \to \infty$), a vjerovatnoća p mala ($p \to 0$), tada se slučajna promjenljiva X koja označava broj pojavljivanja događaja A može dobro aproksimirati Poisson-ovom raspodjelom s parametrom $\lambda = np$. Dakle, vjerovatnoća da se u tih n ponavljanja eksperimenta događaj A realizira k puta, ukoliko su zadovoljeni uslovi teorema, se može računati kao

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Jasno je da nam ovaj teorem znatno olakšava izračunavanje vjerovatnoća u mnogim zadacima, u što ćemo se uvjeriti i kroz sljedeće primjere. Napomenimo još da neki izvori navode da uz $n \geq 20$ i $p \leq 0.05$ Poisson-ova raspodjela daje dovoljno dobru aproksimaciju binomne, a drugdje je to navedeno kao $n \geq 100$ i $np \leq 10$.

ZADATAK 2.2.9. *Ako je u proizvodnji određenog artikla 2% neispravnih, odrediti vjerovatnoću da se u uzorku od 100 datih proizvoda nađu 3 neispravna.*

Rješenje: Odredimo prvobitno zakon raspodjele slučajne promjenljive X koja predstavlja broj neispravnih proizvoda u 100 izabranih proizvoda. Dakle, eksperiment je biranje jednog proizvoda, i ponavljamo ga 100 puta. Sličnim razmišljanima kao u prethodnim primjerima, jednostavno dobijamo

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 100 \\ 0.98^{100} & \binom{100}{1}0.02 \cdot 0.98^{99} & \binom{100}{2}0.02^2 0.98^{98} & \dots & \binom{100}{100}0.02^{100} \end{pmatrix}.$$

Dakle, slučajna promjenljiva X raspodijeljena je po binomnoj raspodjeli $B(100, 0.02)$, a po prethodnom teoremu zaključujemo da se ova slučajna promjenljiva može dovoljno dobro aproksimirati sa Poisson-ovom raspodjelom $P(2)$, tj. možemo reći da X ima približno sljedeći zakon raspodjele

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & 100 \\ \frac{2^0 e^{-2}}{0!} & \frac{2^1 e^{-2}}{1!} & \frac{2^2 e^{-2}}{2!} & \frac{2^3 e^{-2}}{3!} & \dots & \frac{2^{100} e^{-2}}{100!} \end{pmatrix},$$

što donekle čini izračunavanje vjerovatnoća prostijim. Iz posljednjeg zakona raspodjele imamo da traženu vjerovatnoću možemo približno računati kao

$$P(X = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = \frac{8e^{-2}}{6} \approx 0.180447.$$

Uočimo i tačnu vrijednost tražene vjerovatnoće, tek radi usporedbe:

$$P(X = 3) = \binom{100}{3} 0.02^3 0.98^{97} \approx \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{6} \cdot 0.000008 \cdot 0.140909953 \approx 0.182281.$$

▲

ZADATAK 2.2.10. *Pretpostavimo da su 3% ljudi ljevaci. Naći vjerovatnoću da u prostoriji sa 100 ljudi ima 4 ili više ljevaka.*

Rješenje: Odredimo prvobitno zakon raspodjele slučajne promjenljive X koja predstavlja broj ljevaka u prostoriji sa 100 osoba. Sličnim razmišljanima kao u prethodnim primjerima, jednostavno dobijamo

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 100 \\ 0.97^{100} & \binom{100}{1}0.03 \cdot 0.97^{99} & \binom{100}{2}0.03^2 0.97^{98} & \dots & \binom{100}{100}0.03^{100} \end{pmatrix}.$$

Dakle, slučajna promjenljiva X raspodijeljena je po binomnoj raspodjeli $B(100, 0.03)$, a po prethodnom teoremu zaključujemo da se ova slučajna promjenljiva može dovoljno dobro aproksimirati sa Poisson-ovom raspodjelom $P(3)$, tj. možemo reći da X ima približno sljedeći zakon raspodjele

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & 100 \\ \frac{3^0 e^{-3}}{0!} & \frac{3^1 e^{-3}}{1!} & \frac{3^2 e^{-3}}{2!} & \frac{3^3 e^{-3}}{3!} & \dots & \frac{3^{100} e^{-3}}{100!} \end{pmatrix},$$

što donekle čini izračunavanje vjerovatnoća prostijim. Iz posljednjeg zakona raspodjele imamo da traženu vjerovatnoću možemo približno računati kao

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\ &= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)] \\ &= 1 - e^{-3} - 3e^{-3} - \frac{9e^{-3}}{2} - \frac{27e^{-3}}{6} \\ &= 0.352768111. \end{aligned}$$

Ovdje već možemo očiti koliko nam je posljednji teorem olakšao računanje tražene vjerovatnoće. ▲

2.3 Neprekidne slučajne promjenljive

Za razliku od diskretnih, kod neprekidnih slučajnih promjenljivih vjerovatnoća svakog pojedinog elementarnog događaja jednaka je nuli. Tek vjerovatnoća događaja da slučajna promjenljiva poprimi vrijednost u nekom intervalu može biti veća od nule. Stoga, umjesto pojma funkcije vjerovatnoće (pravila po kojem se svakom elementarnom događaju pridružuje njegova vjerovatnoća) kojeg smo imali kod diskretnih slučajnih promjenljivih, ovdje ćemo imati funkciju gustine vjerovatnoće, ili kraće funkciju gustine. Ona se definira na način koji će nam obezbjediti da vrijedi

$$f(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \triangle x)}{\triangle x}.$$

Definicija 2.3.1 (NEPREKIDNE SLUČAJNE PROMJENLJIVE)**.** *Neka je $\mathcal{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija raspodjele slučajne promjenljive X. Ako postoji nenegativna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad \mathcal{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

onda kažemo da je slučajna promjenljiva X neprekidna. Funkcija $f(x)$ naziva se funkcija gustine vjerovatnoće slučajne promjenljive X.

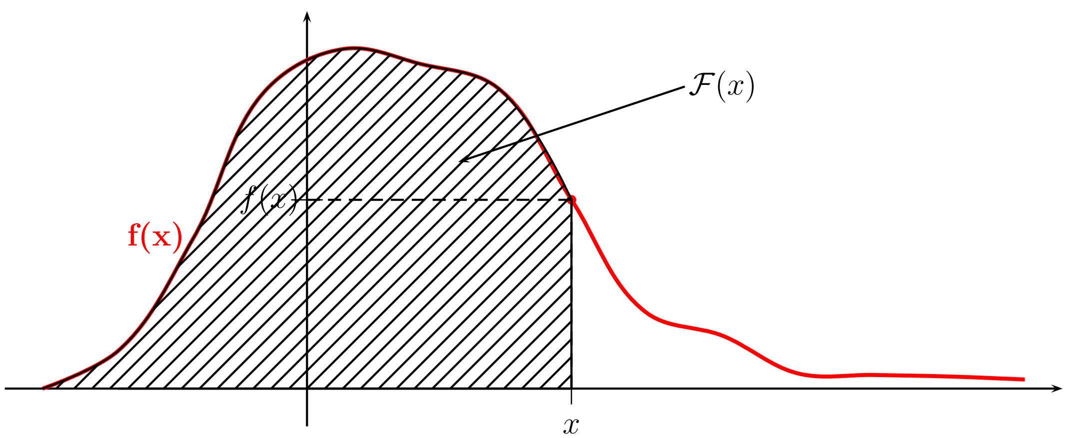
Ukoliko se dobro shvati nama bliži pojam diskretnih slučajnih promjenljivih, onda se i neprekidne slučajne promjenljive mogu jednako dobro razumjeti samo prateći analogiju sa već utvrđenim. Naprimjer, prisjetimo se da smo kod diskretne slučajne promjenljive koja uzima vrijednosti $0, 1, 2, 3, ..., 250$, vjerovatnoću da je $X < 5$ računali kao

$$P(X < 5) = \mathcal{F}(5) = P(X = 0)+P(X = 1)+P(X = 2)+P(X = 3)+P(X = 4).$$

Tako ovdje, ako želimo izračunati $P(X < 5)$, odnosno $\mathcal{F}(5)$, to radimo na sljedeći način

$$P(X < 5) = \mathcal{F}(5) = \int_{-\infty}^{5} f(t)dt,$$

jer sumi u neprekidnom slučaju odgovara integral, a zakonu raspodjele odgovara funkcija gustine. Primjetimo još da $\mathcal{F}(x)$ ustvari predstavlja površinu ispod krive $f(x)$ na intervalu $(-\infty, x)$.



Teorem 2.3.1 (OSOBINE FUNKCIJE GUSTINE). *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija gustine slučajne promjenljive X. Tada vrijedi*

(i) $f(x) \geq 0$

(ii) $(\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b) : \quad P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)dt$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

Sve osobine analogne navedenim uočili smo i koristili i kod diskretnih slučajnih promjenljivih. Naprimjer, poznato je da kod diskretnih slučajnih promjenljivih vrijedi

$$\sum_i p_i = \sum_i P(X = x_i) = 1,$$

dok ovdje imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1,$$

što je zaista analogno, jer sumu u neprekidnom slučaju mijenja integral. Slično bismo mogli zaključiti i za drugu navedenu osobinu. Naime, već smo nekoliko puta u zadacima sa diskretnim slučajnim promjenljivim koristili osobinu

$$P(a \leq X \leq b) = P(X = a) + P(X = a+1) + P(X = a+2) + \cdots + P(X = b),$$

a zamijenimo li sumu sa integralom, i funkciju vjerovatnoće sa funkcijom gustine, dobiti ćemo traženu osobinu. Primjetimo još da ove osobine ustvari znače da je površina ispod krive $f(x)$ jednaka 1, te da je vjerovatnoća $P(a < X < b)$ ustvari površina ispod krive $f(x)$ na intervalu (a, b).

ZADATAK 2.3.1. *Slučajna promjenljiva X data je funkcijom gustine*

$$f(x) = \frac{2}{a} - \frac{2}{a^2}x, \quad 0 < x < a.$$

Odrediti

a. funkciju raspodjele slučajne promjenljive X.

b. vjerovatnoću događaja $\frac{a}{2} < x < a$.

Rješenje:

a. Na osnovu definicije funkcije gustine, imamo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x) &= P(X < x)\\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\\ &= \int_{0}^{x} f(t)dt\\ &= \int_{0}^{x} (\frac{2}{a} - \frac{2}{a^2}t)dt\\ &= \frac{2}{a}\int_{0}^{x} dt - \frac{2}{a^2}\int_{0}^{x} tdt\\ &= \frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2}.\end{aligned}$$

Dakle, funkcija raspodjele zadata je na sljedeći način

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0,\\ \frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2}, & 0 < x < a,\\ 1, & x \geq a.\end{cases}$$

b. Traženu vjerovatnoću mogli bismo računati pomoću druge osobine iz posljedneg teorema, kada bismo imali

$$P(\frac{a}{2} < x < a) = \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(t)dt.$$

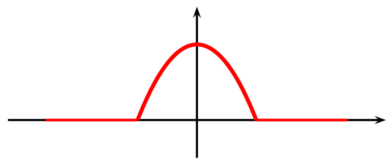
Međutim, kako smo navedeni integral već računali (samo su granice bile drugačije), možemo to iskoristiti:

$$P(\frac{a}{2} < x < a) = P(x < a) - P(x < \frac{a}{2}) = \mathcal{F}(a) - \mathcal{F}(\frac{a}{2}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

▲

ZADATAK 2.3.2. *Neprekidna slučajna promjenljiva X zadata je svojom funkcijom gustine*

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \cos 2x, & -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$



a. *Odrediti konstantu A.*

b. *Naći funkciju raspodjele $\mathcal{F}(x)$.*

c. *Izračunati vjerovatnoću $P(0 < x < \frac{\pi}{8})$.*

Rješenje:

a. Kako je f funkcija gustine, vrijedi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} A\cos 2tdt = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad A\frac{1}{2}\sin 2t|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}A(1+1) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad A = 1. \end{aligned}$$

b. Na osnovu definicije funkcije gustine, imamo

$$\mathcal{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{x} \cos 2tdt = \frac{1}{2}\sin 2t|_{-\frac{\pi}{4}}^{x} = \frac{1}{2}(\sin 2x + 1),$$

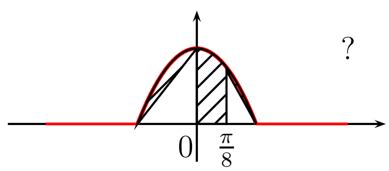
pa je funkcija raspodjele data sa

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{1}{2}(\sin 2x + 1), & -\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & x \geq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

c. Kao i u prethodnom zadatku, kako smo već našli funkciju raspodjele $\mathcal{F}(x)$, traženu vjerovatnoću računati ćemo kao

$$\begin{aligned} P(0 < x < \tfrac{\pi}{8}) &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{8}} f(t)dt - \int_{-\infty}^{0} f(t)dt \\ &= \mathcal{F}(\tfrac{\pi}{8}) - \mathcal{F}(0) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1) - \frac{1}{2}(0+1) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Podsjetimo se da dobijeni broj ustvari predstavlja površinu ispod grafika krive $f(x)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{8})$.



▲

ZADATAK 2.3.3. *Funkcija gustine slučajne promjenljive X jednaka je*

$$f(x) = ax^2 e^{-kx} \quad (k > 0, 0 \leq x < \infty).$$

a. Odrediti konstantu a.

b. Naći funkciju raspodjele $\mathcal{F}(x)$ i nacrtati njen grafik.

c. Izračunati vjerovatnoću $P(0 < x < \frac{1}{k})$.

Rješenje:

a. Kako je f funkcija gustine, vrijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1,$$

tj.

$$\int_0^{\infty} at^2 e^{-kt} dt = 1.$$

Primjenjujući parcijalnu integraciju dva puta, dobijamo da je ustvari

$$-\frac{a}{k^2}e^{-kx}(kx^2+2x+1)|_0^\infty = 1,$$

odnosno

$$-\frac{a}{k^2}(0-1) = 1,$$

pa je $a = k^2$.

b. Na osnovu definicije funkcije gustine, imamo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= k^2\int_0^x t^2 e^{-kt}dt \\ &= -\frac{k^2}{k^2}e^{-kt}(kt^2+2t+1)|_0^x \\ &= -e^{-kx}(kx^2+2x+1)+1,\end{aligned}$$

pa je funkcija raspodjele data sa

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-kx}(kx^2+2x+1), & 0 \leq x < \infty. \end{cases}$$

c. Kao i u prethodnom zadatku, kako smo već našli funkciju raspodjele $\mathcal{F}(x)$, traženu vjerovatnoću računati ćemo kao

$$\begin{aligned}P(0 < x < \tfrac{1}{k}) &= \mathcal{F}(\tfrac{1}{k}) - \mathcal{F}(0) \\ &= [1 - e^{-1}(\frac{1}{k}+\frac{2}{k})+1] - [1-1] \\ &= 1 - \frac{k+3}{ke}.\end{aligned}$$

▲

Kao i kod diskretnih slučajnih promjenljivih, postoje i različite neprekidne slučajne promjenljive koje imaju jednake funkcije gustine, pa tako i jednake funkcije raspodjele. Tako ćemo i ovdje navesti primjer jedne poznate i u primjeni jako česte neprekidne raspoodjele.

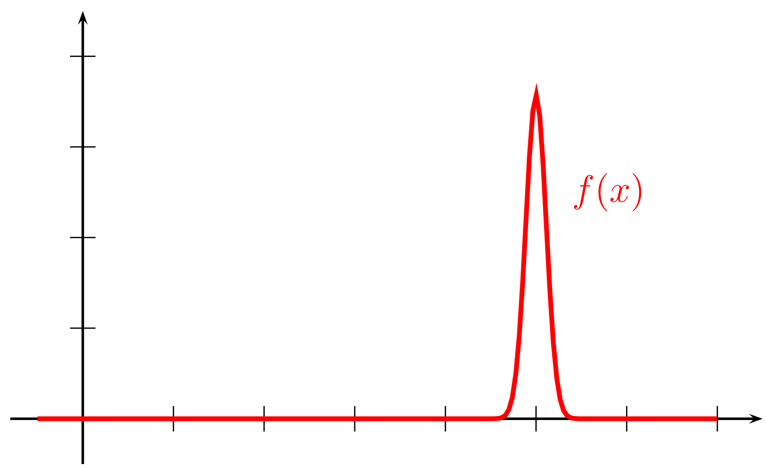
Definicija 2.3.2 (NORMALNA RASPODJELA)**.** *Neprekidna slučajna promjenljiva X ima normalnu raspodjelu ako vrijedi*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0).$$

Pišemo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Grafik funkcije $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ je zvonolika kriva kao na slici, i najčešće se naziva Gauss-ova kriva. Tako se i normalna raspodjela često naziva Gauss-ova raspodjela. Napomenimo da se na sljedećoj slici nalazi grafik funkcije gustine slučajne promjenljive X koja je raspodijeljena po normalnoj raspodjeli $N(5, \frac{1}{81})$, odnosno grafik funkcije

$$f(x) = \frac{9}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{81(x-5)^2}{2}}.$$

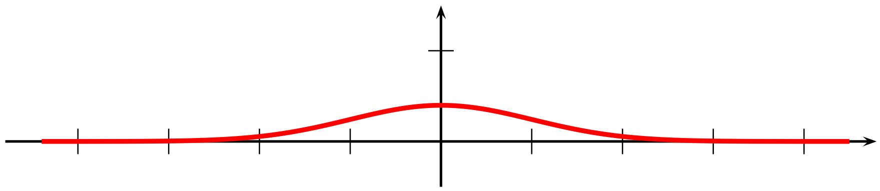


Uvjerimo se i ovdje da zaista vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= |s : t = \frac{x-\mu}{\sigma}| \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Normalna raspodjela često se koristi da opiše, barem približno, bilo koju slučajnu promjenljivu koja je zbijena oko prosječne vrijednosti. Naprimjer, visina svih odraslih muškaraca u Bosni i Hercegovini je približno normalno raspodijeljena sa $\mu = 180cm$. Većina odraslih muškaraca ima visinu blizu μ, iako postoji manji broj "uljeza" koji imaju visinu značajno ispod ili iznad prosjeka μ. Grafik koji na osi Ox uzima vrijednosti visina, a na osi $0y$ odgovarajuće vjerovatnoće, približno će imati oblik zvonolike krive.

Primjetimo i da μ može biti bilo koji realan broj, i σ bilo koji realan pozitivan broj, pa normalnih raspodjela ustvari ima beskonačno mnogo. Posebno je važna normalna raspodjela s parametrima $\mu = 0$ i $\sigma = 1$, tj. normalna raspodjela $N(0, 1)$, koja se naziva standardnom.



Odmah možemo primjetiti da je grafik funkcije gustine slučajne promjenljive X koja je raspodijeljena po standardnoj normalnoj raspodjeli $N(0, 1)$ simetričan u odnosu na osu Ox, što je činjenica koja će nam kasnije biti od važnosti. Mi ćemo ustvari uvijek koristiti isključivo ovu normalnu raspodjelu, jer za ovakvu raspodjelu postoje tablice sa već izračunatim svim potrebnim vrijednostima koje nas mogu zanimati u zadacima. Naime, kao što ćemo se kasnije i uvjeriti, ako slučajna promjenljiva X ima nestandardnu normalnu raspodjelu $N(\mu, \sigma^2)$, onda slučajna promjenljiva $X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ima standardnu normalnu raspodjelu $N(0, 1)$.

ZADATAK 2.3.4. *Ako je poznato da je slučajna promjenljiva X raspodijeljena po normalnoj raspodjeli*

a. $N(0, 1)$

b. $N(0.5, 9)$

izračunati vjerovatnoću $P(0.2 < X < 0.7)$.

Rješenje: Na osnovu osobina funkcije gustine, imamo

$$\begin{aligned} P(0.2 < X < 0.7) &= \int_{0.2}^{0.7} f(t)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{0.7} f(t)dt - \int_{-\infty}^{0.2} f(t)dt \\ &= \mathcal{F}(0.7) - \mathcal{F}(0.2). \end{aligned}$$

Međutim, da bismo izračunali $\mathcal{F}(0.2)$ i $\mathcal{F}(0.7)$ po definiciji, morali bi računati jako komplicirane integrale. Ipak, kao što je to već spomenuto, za standardnu raspodjelu $N(0,1)$ su izrađene tablice sa vrijednostima $f(x)$ i $\mathcal{F}(x)$, pa ćemo rješenju zadatka pristupiti na sljedeći način.

a. Direktno iz tablice u kojoj su predstavljene vrijednosti funkcije raspodjele $\mathcal{F}(x)$ slučajne promjenljive $X \sim N(0,1)$ čitamo potrebne vrijednosti:

$$P(0.2 < X < 0.7) = \mathcal{F}(0.7) - \mathcal{F}(0.2) = 0.7580 - 0.5793 = 0.1787.$$

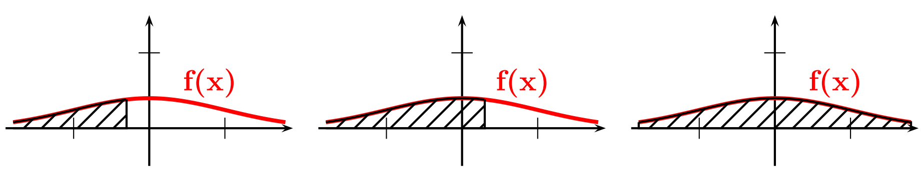
b. Ipak, ne postoje tablice sa vrijednostima funkcije raspodjele slučajne promjenljive $X \sim N(0.5, 9)$. Bilo bi i nemoguće izraditi tablice za sve normalne raspodjele, jer parametri μ i σ mogu biti bilo kakvi, pa imamo neprebrojivo mnogo normalnih raspodjela. Već je ranije spomenuto da nam navedena činjenica neće predstavljati problem, jer ukoliko $X \sim N(0.5, 9)$, onda je $X^* = \frac{X-0.5}{3} \sim N(0,1)$, pa je dovoljno samo standardizovati datu slučajnu promjenljivu, što radimo na sljedeći način

$$\begin{aligned} P(0.2 < X < 0.7) &= P\left(\tfrac{0.2-0.5}{3} < \tfrac{X-0.5}{3} < \tfrac{0.7-0.5}{3}\right) \\ &= P(-0.1 < X^* < 0.07) \\ &= \mathcal{F}(0.07) - \mathcal{F}(-0.1). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} P(0.2 < X < 0.7) &= \mathcal{F}_{N(0.5,9)}(0.7) - \mathcal{F}_{N(0.5,9)}(0.2) \\ &= \mathcal{F}_{N(0,1)}(0.07) - \mathcal{F}_{N(0,1)}(-0.1). \end{aligned}$$

Vrijednost $\mathcal{F}(0.07)$ možemo pročitati direktno iz tablice, međutim u tablici nema negativnih vrijednosti, pa u njoj ne možemo naći i $\mathcal{F}(-0.1)$. No, već ranije smo ustanovi da je grafik funkcije $f(x)$ simetričan, pa na osnovu sljedećih slika



$\mathcal{F}(-0.3) = \int_{-\infty}^{-0.3} f(x)dx$ $\mathcal{F}(0.3) = \int_{-\infty}^{0.3} f(x)dx$ $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

lako uočavamo da vrijedi $\mathcal{F}(-0.1) = 1 - \mathcal{F}(0.1)$. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} P(0.2 < X < 0.7) &= \mathcal{F}(0.07) - [1 - \mathcal{F}(0.1)] \\ &= \mathcal{F}(0.07) + \mathcal{F}(0.1) - 1 \\ &= 0.5279 + 0.5398 - 1 \\ &= 0.0677. \end{aligned}$$

▲

Normalna raspodjela daje nam još jednu dobru aproksimaciju binomne raspodjele, kada je n velik, a p nije blizu broju 0 ili 1. Preciznije, imamo sljedeći teorem.

Teorem 2.3.2. *Ako je $X \sim B(n,p)$ i $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, vrijedi*

$$\lim_{npq \to \infty} P(a \leq \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Ovaj teorem ustvari govori da, ukoliko slučajna promjenljiva ima binomnu raspodjelu $B(n,p)$, onda je možemo aproksimirati (pod određenim uslovima) normalnom raspodjelom $N(np, npq)$. Međutim, kako tablice postoje samo za standarnu normalnu raspodjelu $N(0,1)$, neophodno je standardizovati slučajnu promjenljivu X. Naime, već je ranije navedeno (a nešto kasnije ćemo to i pokazati) da, ukoliko $X \sim N(np, npq)$, onda je $X^* = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1)$. Kao što je to već navedeno, aproksimacija je sve bolja kako se n povećava, a p nije blizu ni 0 ni 1. U literaturi se mogu pronaći različiti načini kako odrediti da li je n dovoljno veliko, i da li je p dovoljno daleko od 0 i 1. Jedno pravilo kaže da $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$, a u nekim se izvorima umjesto 5 nalazi broj 10, zavisno koliko dobra aproksimacija je potrebna.

Prisjetimo se još da je i Poissonova raspodjela predstavljala aproksimaciju binomne raspodjele, ali diskretnu, kao što je to i sama binomna raspodjela. Normalna raspodjela je, sasvim jasno, neprekidna aproksimacija binomne raspodjele. Kao što smo naveli u samom uvodnom dijelu ove sekcije, kod neprekidnih slučajnih promjenljivih vjerovatnoća svakog pojedinog elementarnog događaja jednaka je nuli, pa nam stoga posljednji teorem i ne daje normalnu aproksimaciju za $P(X = k)$, gdje je $X \sim B(n,p)$, već samo za $P(a \leq X \leq b)$. Ipak, želimo li izračunati vjerovatnoću $P(X = 3)$, pri čemu je $X \sim B(n,p)$, možemo je računati kao $P(2.5 \leq X \leq 3.5)$. Također, čak i ako želimo izračunati $P(7 \leq X \leq 9)$, gdje je $X \sim B(n,p)$, najbolje bi bilo računati to kao $P(6.5 \leq X \leq 9.5)$, pri čemu smatramo da je $X \sim N(np, npq)$. Naime, posmatramo li binomnu raspodjelu koja je diskretna, imamo

$$\cdots + P(-2) + P(-1) + P(0) + P(1) + P(2) + \cdots = 1,$$

a za normalnu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Ako bi vjerovatnoću $P(7 \leq X \leq 9) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)$ aproksimirali sa $P(7 \leq X \leq 9)$, onda vjerovatnoću $P(10 \leq X \leq 11) =$

$P(X = 10) + P(X = 11)$ sa $P(10 \leq X \leq 11)$, interval $(9, 10)$ bio bi zanemaren (kao i svaki drugi otvoreni interval), što ne smijemo učiniti jer sada X posmatramo kao neprekidnu slučajnu promjenljivu. Ukoliko ne uradimo navedenu promjenu, rezultati znatno odstupaju od tačnih.

ZADATAK 2.3.5. *Ispravan novčić bačen je 12 puta. Odrediti vjerovatnoću p da je broj glava između 4 i 7 uključivo, koristeći*

a. binomnu raspodjelu.

b. normalnu aproksimaciju binomne raspodjele.

Rješenje: Odredimo zakon raspodjele slučajne promjenljive X koja predstavlja broj dobijenih glava prilikom bacanja ispravnog novčića 12 puta. Kao i mnogo puta ranije, jednostavno zaključujemo da je to sljedeća shema

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 12 \\ (\frac{1}{2})^{12} & \binom{12}{1}\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2})^{11} & \binom{12}{2}(\frac{1}{2})^{2}\frac{1}{2}^{10} & \dots & \binom{12}{12}(\frac{1}{2})^{12} \end{pmatrix}.$$

a. Koristimo li već navedeni zakon raspodjele, imamo

$$\begin{aligned} P(4 \leq X \leq 7) &= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) \\ &= (\tfrac{1}{2})^{12}(\tbinom{12}{4} + \tbinom{12}{5} + \tbinom{12}{6} + \tbinom{12}{7}) \\ &= 0.733154. \end{aligned}$$

b. Koristimo li normalnu aproksimaciju binomne raspodjele, odnodno prethodni teorem, imamo da se navedena slučajna promjenljiva $X \sim B(12, \frac{1}{2})$ može aproksimirati normalnom raspodjelom $N(6, 3)$, pa je

$$P(4 \leq X \leq 7) = \mathcal{F}(7) - \mathcal{F}(4).$$

Međutim, kako bi izbjegli računanje ovih kompliciranih integrala, standardizovati ćemo našu slučajnu promjenljivu X kako bi mogli koristiti gotove tablice za normalnu raspodjelu $N(0, 1)$. Naime, kako X aproksimiramo sa $N(6, 3)$, onda $X^* = \frac{X-6}{\sqrt{3}}$ aproksimiramo sa $N(0, 1)$, pa

$$\begin{aligned} P(4 \leq X \leq 7) &= P(\tfrac{4-6}{\sqrt{3}} \leq \tfrac{X-6}{\sqrt{3}} \leq \tfrac{7-6}{\sqrt{3}}) \\ &= P(-1.15 \leq X^* \leq 0.58) \\ &= \mathcal{F}(0.58) - \mathcal{F}(-1.15). \end{aligned}$$

Navedene vrijednosti sada već odgovaraju raspodjeli $N(0, 1)$, pa ih imamo u tablicama, a kako je i grafik funkcije gustine $f(x)$ normalne raspodjele $N(0,1)$ simetričan u odnosu na osu Ox, vrijedi

$$\begin{aligned} P(4 \leq X \leq 7) &= \mathcal{F}(0.58) - [1 - \mathcal{F}(1.15)] \\ &= 0.7190 - 1 + 0.8749 \\ &= 0.5939. \end{aligned}$$

Međutim, vidimo da dobijena vjerovatnoća znatno odstupa od tačnog rezultata, što se dešava jer nismo izveli gore opisanu korekciju. Ukoliko to učinimo, imamo sljedeće

$$\begin{aligned} P(3.5 \leq X \leq 7.5) &= P(\tfrac{3.5-6}{\sqrt{3}} \leq \tfrac{X-6}{\sqrt{3}} \leq \tfrac{7.5-6}{\sqrt{3}}) \\ &= P(-1.44 \leq X^* \leq 0.87) \\ &= \mathcal{F}(0.87) - \mathcal{F}(-1.44) \\ &= \mathcal{F}(0.87) - [1 - \mathcal{F}(1.44)] \\ &= -1+ \\ &= 0.7323. \end{aligned}$$

▲

ZADATAK 2.3.6. *Fabrika proizvodi ukrase za jelku. Vjerovatnoća da će ukras biti razbijen prilikom transporta je* 0.05. *Ako je kupac od fabrike naručio* 200 *ukrasa, kolika je vjerovatnoća da će biti manje od* 12 *razbijenih?*

Rješenje: Odredimo zakon raspodjele slučajne promjenljive X koja predstavlja broj razbijenih ukrasa prilikom transporta 200 ukrasa. Jednostavno zaključujemo da je to sljedeća shema

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 200 \\ (0.95)^{200} & \binom{200}{1}0.05 \cdot 0.95^{199} & \binom{200}{2}0.05^2 0.95^{198} & \dots & \binom{200}{200}0.05^{200} \end{pmatrix}.$$

Ukoliko bismo koristili već navedeni zakon raspodjele, imali bi

$$\begin{aligned} P(X < 12) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \cdots + P(X=11) \\ &= (0.95)^{200} + \binom{200}{1}0.05 \cdot 0.95^{199} + \binom{200}{2}0.05^2 0.95^{198} + \cdots + \binom{200}{11}0.05^{11}0.95^{189}. \end{aligned}$$

Međutim, računanje tražene vjerovatnoće na ovakav način bilo bi jako zamorno. Stoga ćemo koristiti prethodni teorem, tj. normalnu aproksimaciju binomne raspodjele. Na osnovu navedenog zakona raspodjele, uvidjeli smo da slučajna promjenljiva X ima binomnu raspodjelu $B(200, 0.05)$, pa je možemo aproksimirati sa normalnom raspodjelom $N(10, 0.5)$. Dakle,

$$P(X < 12) = \mathcal{F}(12).$$

Međutim, kako bi izbjegli računanje ovog kompliciranog integrala, standardizovati ćemo našu slučajnu promjenljivu X kako bi mogli koristiti gotove tablice za normalnu raspodjelu $N(0,1)$. Naime, kako X aproksimiramo sa $N(10, 0.5)$, onda $X^* = \frac{X-10}{\sqrt{0.5}}$ aproksimiramo sa $N(0,1)$, pa

$$\begin{aligned} P(X<12) &= P(\tfrac{X-10}{\sqrt{0.5}} < \tfrac{12-10}{\sqrt{0.5}}) \\ &= P(X^* < 2.83) \\ &= \mathcal{F}(2.83) \\ &= 0.9977. \end{aligned}$$

Navedimo i ovdje da bi bilo mnogo bolje da smo traženu vjerovatnoću računali kao

$$\begin{aligned} P(X<12.5) &= P(\tfrac{X-10}{\sqrt{0.5}} < \tfrac{12.5-10}{\sqrt{0.5}}) \\ &= P(X^* < 3.54) \\ &= \mathcal{F}(3.54) \\ &= 0.9998. \end{aligned}$$

▲

ZADATAK 2.3.7. *Neka je u seriji proizvoda jedne fabrike* 80% *prve klase, a ostali su druge klase. Iz te serije je uzet, sa vraćanjem, uzorak od* 100 *proizvoda radi kontrole kvaliteta. Odrediti vjerovatnoću da u uzorku bude više od* 70 *proizvoda prve klase.*

Rješenje: Odredimo zakon raspodjele slučajne promjenljive X koja predstavlja broj proizvoda prve klase u izabranom uzorku od 100 proizvoda. Jednostavno zaključujemo da je to sljedeća shema

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 100 \\ (0.2)^{100} & \binom{100}{1}0.8\cdot 0.2^{99} & \binom{100}{2}0.8^2 0.2^{98} & \dots & \binom{100}{100}0.8^{100} \end{pmatrix}.$$

Ukoliko bismo koristili već navedeni zakon raspodjele, imali bi

$$\begin{aligned} P(X>70) &= P(X=71)+P(X=72)+\dots+P(X=100) \\ &= \binom{100}{71}0.8^{71}0.2^{29}+\binom{100}{72}0.8^{72}0.2^{28}+\dots+\binom{100}{100}0.8^{100}. \end{aligned}$$

Međutim, računanje tražene vjerovatnoće na ovakav način bilo bi jako zamorno. Stoga ćemo koristiti prethodni teorem, tj. normalnu aproksimaciju binomne raspodjele. Na osnovu navedenog zakona raspodjele, uvidjeli smo da slučajna promjenljiva X ima binomnu raspodjelu $B(100, 0.8)$, pa je možemo aproksimirati sa normalnom raspodjelom $N(80, 16)$. Kako diskretnu slučajnu promjenljivu aproksimiramo neprekidnom, potrebno je izvršiti i korekciju, pa

$$P(X > 69.5) = 1 - P(X \le 69.5) = 1 - \mathcal{F}(69.5).$$

Međutim, kako bi izbjegli računanje ovog kompliciranog integrala, standardizovati ćemo našu slučajnu promjenljivu X kako bi mogli koristiti gotove tablice za normalnu raspodjelu $N(0,1)$. Naime, kako X aproksimiramo sa $N(80,16)$, onda $X^* = \frac{X-80}{\sqrt{16}}$ aproksimiramo sa $N(0,1)$, pa

$$\begin{aligned} P(X < 69.5) &= P(\tfrac{X-80}{4} < \tfrac{69.5-80}{4}) \\ &= P(X^* < -2.625) \\ &= \mathcal{F}(-2.625) \\ &= 1 - \mathcal{F}(2.625) \\ &= 0.9957. \end{aligned}$$

Dakle, tražena vjerovatnoća je

$$P(X > 69.5) = 1 - P(X \leq 69.5) = 1 - \mathcal{F}(69.5) = 1 - 0.9957 = 0.0043.$$

▲

2.4 Dvodimenzionalne diskretne slučajne promjenljive

Definicija 2.4.1 (DVODIMENZIONALNA SLUČAJNA PROMJENLJIVA). *Neka su X i Y dvije slučajne promjenljive definirane nad istim prostorom elementarnih događaja Ω. Uređen par, tj. vektor (X,Y) je dvodimenzionalna slučajna promjenljiva, odnosno slučajni vektor.*

Definicija 2.4.2 (DVODIMENZIONALNA DISKRETNA SLUČAJNA PROMJENLJIVA). *Dvodimenzionalna diskretna slučajna promjenljiva je dvodimenzionalna slučajna promjenljiva (X,Y) koja uzima najviše prebrojivo mnogo različitih vrijednosti (x_i, y_j).*

Zakon raspodjele dvodimenzionalne diskretne slučajne promjenljive (X,Y) se zadaje u obliku sljedeće tabele:

$$\begin{array}{c|cccccc|c} X|Y & y_1 & y_2 & \ldots & y_j & \ldots & \\ \hline x_1 & p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1j} & \ldots & p_{1\cdot} \\ x_2 & p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2j} & \ldots & p_{2\cdot} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \ldots \\ x_i & p_{i1} & p_{i2} & \ldots & p_{ij} & \ldots & p_{i\cdot} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \ldots \\ \hline \vdots & p_{\cdot 1} & p_{\cdot 2} & \ldots & p_{\cdot j} & \vdots & \ldots \end{array},$$

pri čemu je

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) \quad (i, j \in 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

Marginalni zakoni raspodjele su

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ p_{1\cdot} & p_{2\cdot} & p_{3\cdot} & \ldots \end{pmatrix}, \quad Y: \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \ldots \\ p_{\cdot 1} & p_{\cdot 2} & p_{\cdot 3} & \ldots \end{pmatrix},$$

pri čemu su

$$p_{i\cdot} = P(X = x_i) = P(X = x_i, Y = y_1) + P(X = x_i, Y = y_2) + \cdots + P(X = x_i, Y = Y_j) + \ldots,$$

$$p_{\cdot j} = P(Y = y_j) = P(X = x_1, Y = y_j) + P(X = x_2, Y = y_j) + \cdots + P(X = x_i, Y = Y_j) + \ldots.$$

Definicija 2.4.3 (NEZAVISNOST DISKRETNIH SLUČAJNIH PROMJENLJIVIH)**.** *Diskretne slučajne promjenljive X i Y su nezavisne ako za sve uređene parove (i, j) vrijedi*

$$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$$

ZADATAK 2.4.1. *Dvodimenzionalna slučajna promjenljiva (X, Y) zadata je svojim zakonom raspodjele*

$X \vert Y$	2	4	6
0	0.02	0.06	0.12
1	0.03	0.12	0.18
3	0.07	0.18	a

a. *Naći konstantu a.*

b. *Naći marginalne zakone raspodjele slučajnih promjenljivih X i Y.*

c. *Ispitati nezavisnost slučajnih promjenljivih X i Y.*

d. *Izračunati vjerovatnoću $P(X = 1 \vert Y = 4)$.*

Rješenje:

a. Kako zbir svih vjerovatnoća mora biti 1 (jer mora nastupiti neki od navedenih događaja), vrijedi

$$0.02 + 0.06 + 0.12 + 0.03 + 0.12 + 0.18 + 0.07 + 0.18 + a = 1,$$

pa je tražena konstanta $a = 0.22$.

b. Na osnovu datog zakona raspodjele slučajne promjenljive (X, Y) jednostavno nalazimo marginalne zakone raspodjele slučajnih promjenljivih X i Y :

$$X : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0.2 & 0.33 & 0.47 \end{pmatrix},$$

$$Y : \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0.12 & 0.36 & 0.52 \end{pmatrix}.$$

c. Posmatramo li zakon raspodjele slučajne promjenljive (X, Y) zajedno sa marginalnim zakonima slučajnih promjenljivih X i Y, tj. shemu

$X \vert Y$	2	4	6	
0	0.02	0.06	0.12	0.2
1	0.03	0.12	0.18	0.33
3	0.07	0.18	0.22	0.47
	0.12	0.36	0.52	1

,

lako uočavamo da su X i Y zavisne jer naprimjer

$$(\exists i = 1, j = 2) : \quad 0.06 = p_{ij} \neq p_{i\cdot}p_{\cdot j} = 0.36 \cdot 0.2 = 0.072.$$

d. Na osnovu definicije uslovne vjerovatnoće (a i same intuicije), imamo

$$P(X = 1|Y = 4) = \frac{P(X = 1 \wedge Y = 4)}{P(Y = 4)} = \frac{0.12}{0.36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

▲

ZADATAK 2.4.2. *Ispravan novčič bačen je tri puta. Neka je X slučajna promjenljiva koja uzima vrijednost 0 ako prvi prvom bacanju padne pismo, a vrijednost 1 ako prvi prvom bacanju padne glava. Neka je Y slučajna promjenljiva koja označava broj glava koje se pojavljuju u tri bacanja.*

a. *Naći marginalne zakone raspodjele slučajnih promjenljivih X i Y.*

b. *Naći zakon raspodjele dvodimenzionalne slučajne promjenljive (X, Y).*

c. *Ispitati nezavisnost slučajnih promjenljivih X i Y.*

d. *Izračunati vjerovatnoću $P(X = 1|Y = 2)$.*

Rješenje: Prvobitno se prisjetimo da je slučajna promjenljiva ustvari jedna funkcija, $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Kako je ovdje prostor jednakovjerovatnih elementarnih događaja

$$\Omega = \{PPP, PPG, PGP, PGG, GPP, GPG, GGP, GGG\},$$

jednostavno se dolazi do potrebnih zaključaka.

a. Slučajna promjenljiva X uzima vrijednost 0 ako prvi prvom bacanju padne pismo, odnosno

$$X(PPP) = X(PPG) = X(PGP) = X(PGG) = 0,$$

pa je

$$P(X = 0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

S druge strane, X uzima vrijednost 1 ako prvi prvom bacanju padne glava, pa imamo

$$X(GPP) = X(GPG) = X(GGP) = X(GGG) = 1,$$

odakle slijedi

$$P(X = 1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Stoga je marginalni zakon raspodjele slučajne promjenljive X sljedeći

$$X : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Svakako, do navedenog zakona raspodjele mogli smo doći i ne posmatrajući navedeni prostor Ω, već jednostavno uočavajući da je pri bacanju novčića vjerovatnoća dobijanja pisma, odnosno glave, $\frac{1}{2}$.

Slučajna promjenljiva Y označava broj dobijenih glava u tri bacanja, pa je

$$\begin{aligned} &Y(PPP) = 0 \\ &Y(PPG) = Y(PGP) = Y(GPP) = 1 \\ &Y(PGG) = Y(GPG) = Y(GGP) = 2 \\ &Y(GGG) = 3, \end{aligned}$$

odakle imamo

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \tfrac{1}{8} \\ P(Y = 1) &= \tfrac{3}{8} \\ P(Y = 2) &= \tfrac{3}{8} \\ P(Y = 3) &= \tfrac{1}{8}. \end{aligned}$$

Dakle, marginalni zakon raspodjele slučajne promjenljive Y je sljedeći

$$Y: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}. \end{pmatrix}.$$

Naravno, kao i kod slučajne promjenljive X, do zakona raspodjele slučajne promjenljive Y mogli smo doći i bez pozivanja na prostor Ω, na način kako smo to i ranije činili:

$$Y: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.5^3 & \binom{3}{1}0.5 \cdot 0.5^2 & \binom{3}{2}0.5^3 & \binom{3}{3}0.5^3. \end{pmatrix}.$$

b. Do zakona raspodjele slučajne promjenljive (X, Y) dolazimo ponovno posmatrajući prostor Ω. Naime, po načinu kako su slučajne promjenljive X i Y definirane, par $X = 0$ i $Y = 0$ nastupa kada prvi prvom bacanju padne pismo, i glava nije pala niti jednom, odnosno jedino za elementarni ishod PPP, pa je $P(X = 0 \wedge Y = 0) = \frac{1}{8}$. Analogno zaključujemo i za ostale parove, pa dobijamo

$X \vert Y$	0	1	2	3	
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

.

c. Lako uočavamo da su X i Y zavisne jer naprimjer

$$(\exists i = 1, j = 1): \quad \frac{1}{8} = p_{ij} \neq p_{i\cdot}p_{\cdot j} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

d. Na osnovu definicije uslovne vjerovatnoće (a i same intuicije), imamo

$$P(X = 1|Y = 2) = \frac{P(X = 1 \wedge Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}.$$

▲

ZADATAK 2.4.3. *Broj X je izabran na slučajan način iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$. Drugi broj Y je izabran iz istog skupa, ali tako da nije manji od X. Naći zakon raspodjele slučajnog vektora (X, Y), te marginalne zakone raspodjele slučajnih promjenljivih X i Y. Da li su slučajne promjenljive X i Y nezavisne?*

Rješenje: Do potrebnih zaključaka dolazimo kao u ranijim primjerima. Za određivanje zakona raspodjele slučajne promjenljive (X,Y) može nam pomoći ukoliko prvobitno odredimo marginalne zakone raspodjele, što je ustvari i najčešće slučaj. Imamo

$X\|Y$	1	2	3	4	
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
4	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{25}{48}$	1

.

Dakle, marginalni zakoni raspodjele su

$$X: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$Y: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{48} & \frac{7}{48} & \frac{13}{48}. \end{pmatrix}.$$

Lako uočavamo da su X i Y zavisne jer naprimjer

$$(\exists i=1, j=1): \quad \frac{1}{16} = p_{ij} \neq p_{i\cdot}p_{\cdot j} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{64}.$$

▲

ZADATAK 2.4.4. *Kockica za igru se baca sve dok ne padne broj manji od 5. Ako je X slučajna promjenljiva koja označava broj dobijen u posljednjem bacanju, a Y slučajna promjenljiva koja označava broj izvedenih bacanja, odrediti zakon raspodjele slučajne promjenljive (X,Y), te marginalne zakone raspodjele. Da li su X i Y nezavisne?*

Rješenje: Do potrebnih zaključaka dolazimo kao u ranijim primjerima. Za određivanje zakona raspodjele slučajne promjenljive (X,Y) može nam pomoći ukoliko prvobitno odredimo marginalne zakone raspodjele, što je ustvari i najčešće slučaj. Imamo

$X\|Y$	1	2	3	$\dots$	
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{54}$	$\dots$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{54}$	$\dots$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{54}$	$\dots$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{54}$	$\dots$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}$	$(\frac{2}{6})^2\frac{4}{6}$	$\dots$	1

.

Dakle, marginalni zakoni raspodjele su

$$X: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$Y: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{27} & \dots \end{pmatrix}.$$

Lako uočavamo da su X i Y nezavisne jer vrijedi

$$(\forall i, j): \quad p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}.$$

▲

2.5 Dvodimenzionalne neprekidne slučajne promjenljive

Definicija 2.5.1 (DVODIMENZIONALNA NEPREKIDNA SLUČAJNA PROMJENLJIVA)**.** *Dvodimenzionalna neprekidna slučajna promjenljiva je dvodimenzionalna slučajna promjenljiva za koju postoji neprekidna funkcija $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ takva da za svaku oblast S u ravni xOy vrijedi*

$$\mathcal{F}(x,y) = P((X,Y) \in S) = \iint_S f(x,y)dxdy.$$

Funckija $\mathcal{F}(x,y)$ je zajednička funkcija raspodjele slučajne promjenljive (X,Y), a funkcija $f(x,y)$ je zajednička funkcija gustine slučajne promjenljive (X,Y). Marginalne funkcije gustine su

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \quad (-\infty < y < +\infty).$$

Definicija 2.5.2 (NEZAVISNOST NEPREKIDNIH SLUČAJNIH PROMJENLJIVIH)**.** *Neprekidne slučajne promjenljive X i Y su nezavisne ako vrijedi*

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

ZADATAK 2.5.1. *Dvodimenzionalna slučajna promjenljiva zadata je funkcijom gustine*

$$f(x,y) = \frac{C}{1+x^2+x^2y^2+y^2}.$$

a. Naći konstantu C.

b. Izračunati vjerovatnoću da slučajna promjenljiva (X,Y) uzima vrijednosti iz kvadrata čiji je centar koordinatni početak, stranice paralelne koordinatnim osama i imaju dužinu $a=2$.

c. Naći marginalne funkcije gustine, te ispitati nezavisnost slučajnih promjenljivih X i Y.

Rješenje:

a. Kako je f funkcija gustine, mora vrijediti

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{1+x^2+x^2y^2+y^2}dxdy = 1,$$

pa imamo

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{1+x^2+x^2y^2+y^2}dxdy \\
&= C\int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dx)dy \\
&= C\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx)dy \\
&= C\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\arctan x|_{-\infty}^{+\infty}dy \\
&= C(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}dy \\
&= C\pi \arctan y|_{-\infty}^{+\infty} \\
&= C\pi^2.
\end{aligned}$$

Dakle, $C = \frac{1}{\pi^2}$.

b. Navedeni kvadrat ograničen je pravim $x=-1$ i $x=1$, te sa $y=-1$ i

$y = 1$. Stoga imamo

$$\begin{aligned}
P((X,Y) \in K) &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}dxdy \\
&= \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+y^2}dy \\
&= \frac{1}{\pi^2}\arctan x|_{-1}^{1}\cdot \arctan y|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}) \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

c. Marginalne funkcije gustine su

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}dy \\
&= \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}dy \\
&= \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\arctan y|_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\pi \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}dx \\
&= \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}\arctan x|_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}\pi \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

Sada je jasno da su slučajne promjenljive X i Y nezavisne, kako vrijedi $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$. Inače, možemo odmah primjetiti da ćemo nezavisnost uvijek imati ukoliko funkciju $f(x,y)$ možemo napisati kao proizvod dvije funkcije od kojih je jedna funkcija od x, a druga funkcija od y.

▲

ZADATAK 2.5.2. *Neka je gustina slučajnog vektora data sa*

$$f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-2x-3y}, & x, y \geq 0, \\ 0, & x, y < 0. \end{cases}$$

Da li su X i Y nezavisne promjenljive?

Rješenje: Kako je $f(x,y) = 6e^{-2x-3y} = 6e^{-2x}e^{-3y}$, imamo

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \\ &= \int_0^{+\infty} 6e^{-2x}e^{-3y}dy \\ &= 6e^{-2x}\int_0^{+\infty} e^{-3y}dy \\ &= 6e^{-2x}(-\frac{1}{3})e^{-3y}|_0^{+\infty} \\ &= 6e^{-2x}(-\frac{1}{3})(0-1) \\ &= 2e^{-2x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \\ &= \int_0^{+\infty} 6e^{-2x}e^{-3y}dx \\ &= 6e^{-3y}\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx \\ &= 6e^{-3y}(-\frac{1}{2})e^{-2x}|_0^{+\infty} \\ &= 6e^{-3y}(-\frac{1}{2})(0-1) \\ &= 3e^{-3y}. \end{aligned}$$

Dakle, zaista vrijedi

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

tj. slučajne promjenljive X i Y su nezavisne, što je i bilo za očekivati jer smo, kao u prethodnom primjeru, uspjeli napisati funkciju $f(x,y)$ kao proizvod funkcija koje zavise samo od x, i samo od y. ▲

2.6 Funkcije slučajnih promjenljivih

Neka je data slučajna promjenljiva X, i neka funkcija g. Želimo odrediti funkciju raspodjele, zakon raspodjele ili funkciju gustine slučajne promjenljive $Y = g(X)$. Pokažimo kako to učiniti kroz nekoliko primjera.

ZADATAK 2.6.1. *Slučajna promjenljiva X zadata je svojim zakonom raspodjele*

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Naći zakon raspodjele slučajne promjenljive Y ako je

a. $Y = 2(X - 1)$,

b. $Y = X^2$.

Rješenje: Ako slučajna promjenljiva X uzima vrijednosti x_i, onda slučajna promjenljiva $Y = g(X)$ uzima vrijednosti $g(x_i)$, dok vjerovatnoće ostaju iste. Stoga jednostavno slijede traženi zakoni raspodjele.

a. Kako je $Y = 2(X - 1)$, imamo

$$Y : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

b. Kako je $Y = X^2$, imamo

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

▲

ZADATAK 2.6.2. *Slučajna promjenljiva X zadata je svojim zakonom raspodjele*

$$X : \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Naći zakon raspodjele slučajne promjenljive Y ako je

a. $Y = 2(X-1)$,

b. $Y = X^2$.

Rješenje: Prvi dio zadatka riješiti ćemo potpuno analogno kao u prethodnom primjeru, dok u slučaju b. treba uočiti jednu novu situaciju.

a. Kako je $Y = 2(X-1)$, vrijedi

$$Y : \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

b. Slučajna promjenljiva Y zadata je kao funkcija $g(X) = X^2$. Međutim, treba primjetiti da je $g(-1) = g(1) = 1$, pa će zbog isključivosti (koju smo odmah na početku poglavlja ustanovili!) događaja $X = -1$ i $X = 1$ vrijediti

$$P(Y=1) = P(X=-1) + P(X=1) = 0.1 + 0.3 = 0.4.$$

Dakle, imamo

$$Y : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

▲

ZADATAK 2.6.3. *Slučajna promjenljiva (X_1, X_2) je zadata svojim zakonom raspodjele*

$X_1 \vert X_2$	1	3	5
0	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.1	0.1

Odrediti zakon raspodjele slučajne promjenljive $Y = X_1 + X_2$.

Rješenje: Kao i uvijek, prvobitno odredimo koje sve vrijednosti uzima slučajna promjenljiva Y. Sabirajući sve moguće parove, zaključujemo da Y uzima vrijednosti $1, 3, 5, 7$, pa možemo preći na određivanje odgovarajućih vjerovatnoća:

$$\begin{aligned}
&P(Y=1) = P(X_1=0, X_2=1) = 0.1\\
&P(Y=3) = P(X_1=0, X_2=3) + P(X_1=2, X_2=1) = 0.2+0.2 = 0.4\\
&P(Y=5) = P(X_1=0, X_2=5) + P(X_1=2, X_2=3) = 0.3+0.1 = 0.4\\
&P(Y=7) = P(X_1=2, X_2=5) = 0.1.
\end{aligned}$$

Dakle, traženi zakon raspodjele je

$$Y: \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$$

▲

ZADATAK 2.6.4. *Neka nezavisne slučajne promjenljive X_1 i X_2 imaju zakone raspodjele*

$$X_1: \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} & \pi \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad X_2: \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & \pi \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Naći zakon raspodjele slučajnih promjenljivih

a. $Y = \sin X_1 + \cos X_2$

b. $Y = \sin X_1 - \cos X_2$.

Rješenje: Do željenih rezultata dolazimo analogno kao u prethodnom primjeru. ▲

ZADATAK 2.6.5. *Radi utvrđivanja kvaliteta u velikoj seriji, uzima se* 1 *proizvod i vrši njegova kompletna analiza. Ako izabrani proizvod u potpunosti odgovara željenom kvalitetu, dalja analiza se ne vrši, a ako ne odgovara, bira se sljedeći proizvod i vrši njegova analiza. Neka je za svaki proizvod vjerovatnoća da odgovara željenom kvalitetu jednaka* 0.8, *i neka su troškovi analize* $2000KM$. *Kolika je vjerovatnoća da će troškovi kontrole serije biti manji od* $5000KM$?

Rješenje: Neka je X slučajna promjenljiva koja označava broj proizvoda na kojima je izvršena analiza. Na osnovu pretpostavki zadatka, jednostavno zaključujemo da X ima sljedeći zakon raspodjele

$$X: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ 0.8 & 0.2 \cdot 0.8 & 0.2^2 \cdot 0.8 & \dots \end{pmatrix}.$$

Kako nas zanimaju troškovi analize, posmatrajmo slučajnu promjenljivu Y koja upravo označava te troškove. Iz uslova zadatka zaključujemo da je $Y = 2000X$, pa kao u prethodnim primjerima jednostavno dolazimo i do zakona raspodjele slučajne promjenljive Y

$$Y = 2000X: \quad \begin{pmatrix} 2000 & 4000 & 6000 & \dots \\ 0.8 & 0.16 & 0.032 & \dots \end{pmatrix}$$

, pa je tražena vjerovatnoća

$$P(Y < 5000) = P(Y = 2000) + P(Y = 4000) = 0.8 + 0.16 = 0.96.$$

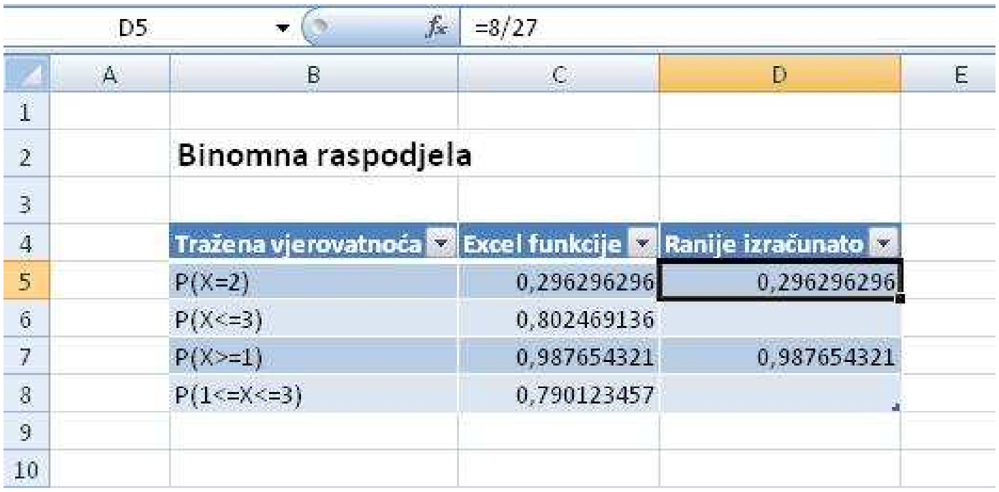
▲

Ovime bismo završili i funkcije slučajnih promjenljivih diskretnog tipa, i jednodimenzionalne i dvodimenzionalne. Kao i ranije, ukoliko se to dobro razumije, funkcije slučajnih promjenljivih neprekidnog tipa također neće biti teško shvatiti. Kako taj dio ipak zahtjeva nešto duži teoretski uvod, mi ćemo to ovdje izostaviti, a studenti se upućuju na predavanja kako bi i ovaj dio savladali.

`MICROSOFT EXCEL` U ovom dijelu pokazati ćemo kako nam Excel može pomoći u radu sa slučajnim promjenljivim koje imaju binomnu, Poisson-ovu ili normalnu raspodjelu. Da bismo to uradili, pozivati ćemo se na već rađene primjere iz ovog poglavlja (ili njihove varijacije, kako bi mogli pokazati što više mogućnosti koje Excel pruža).

Neka tim A dobija sa vjerovatnoćom $\frac{2}{3}$ kad god igra, i neka je ovaj tim odigrao 4 igre. Ranije smo ustanovili da slučajna promjenljiva koja predstavlja broj pobjeda tima A u 4 igre ima binomnu raspodjelu. Tako, želimo li naći vjerovatnoću da tim A dobije tačno 2 igre, jednostavno u željeno polje u Worksheet-u (na slici je to polje $C5$) upišemo

$$= BINOMDIST(2; 4; 2/3; FALSE).$$


D5 =8/27

	A	B	C	D	E
1					
2		Binomna raspodjela			
3					
4		Tražena vjerovatnoća	Excel funkcije	Ranije izračunato	
5		P(X=2)	0,296296296	0,296296296	
6		P(X<=3)	0,802469136		
7		P(X>=1)	0,987654321	0,987654321	
8		P(1<=X<=3)	0,790123457		
9					
10					

BINOMDIST skraćenica je za Binomial Distribution (eng, binomna raspodjela). Prvi parametar ove funkcije je broj realizacija događaja A, odnosno k; drugi parametar je broj izvođenja eksperimenta, odnosno n; treći je vjerovatnoća događaja A u svakom od izvođenja eksperimenta, tj. p; a četvrti parametar je TRUE ako nas zanima $P(X \leq k)$, FALSE ukoliko nas zanima $P(X = k)$. Dalje, želimo li izračunati vjerovatnoću da tim A dobija najviše 3 igre, to ćemo očito uraditi pomoću funkcije

$$= BINOMDIST(3; 4; 2/3; TRUE).$$

Vjerovatnoća da je tim A dobio barem 1 igru je $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X \leq 0)$, odnosno

$$= 1 - BINOMDIST(0; 4; 2/3; TRUE),$$

a vjerovatnoća da je tim A dobio između 1 i 3 igre je $P(1 \leq X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X < 1) = P(X \leq 3) - P(X \leq 0)$, tj.

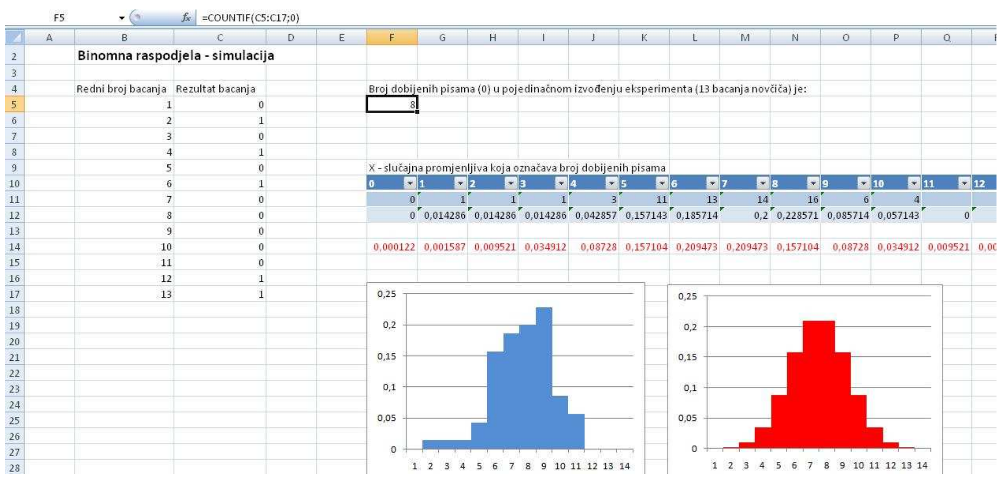
$$= BINOMDIST(3; 4; 2/3; TRUE) - BINOMDIST(0; 4; 2/3; TRUE).$$

U sljedećoj koloni možemo upisati rezultate koje smo dobili rješavajući zadatak ranije, tj. bez korištenja Excela, kako bi ih mogli uporediti. U ovom zadatku Excel nam i nije mnogo olakšao računanje, jer smo tražene vjerovatnoće i ranije mogli jednostavno izračunati. Ali, zamislite da je bilo potrebno izračunati vjerovatnoću da je tim A dobio barem 154 igre u odigranih 300! Ovdje bi morali pribjeći normalnoj aproksimaciji binomne raspodjele, ili korištenju navedenih Excel funkcija.

Sada izvedimo simulaciju jednog tipičnog primjera iz vjerovatnoće u kojem se javlja binomna raspodjela. Neka bacamo novčić 13 puta, i neka je X slučajna promjenljiva koja predstavlja broj dobijenih pisama. Jasno je da navedena slučajna promjenljiva ima sljedeći zakon raspodjele

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 13 \\ 0.5^{13} & \binom{13}{1}0.5 \cdot 0.5^{12} & \binom{13}{2}0.5^2 0.5^{11} & \dots & \binom{13}{13}0.5^{13} \end{pmatrix}.$$

Uradimo simulaciju ovog primjera u Excelu. Nakon ispisivanja naslova, u polja $B4$ i $C4$ upišimo "Redni broj bacanja" i "Rezultat bacanja".



U polja $B5 - B17$ ćemo pomoću Fill Series upisati brojeve $1 - 13$, a u polja $C5 - C17$ pomoću funkcije

$$= RANDBETWEEN(0;1)$$

ćemo unijeti rezultate ovih bacanja (naprimjer, 0 označava dobijanje pisma, a 1 dobijanje glave). Kako posmatramo slučajnu promjenljivu koja označava broj pisama u navedenih 13 bacanja, izračunajmo ga u polju $F5$ na sljedeći način

$$= COUNTIF(C5 : C17; 0).$$

Konačno, u naš Worksheet unesimo i zakon raspodjele posmatrane slučajne promjenljive. Kao što smo to i navikli, u jedan red unesimo vrijednosti koje ova slučajna promjenljiva uzima, tj. vrijednosti $0, 1, 2, \ldots, 13$ (na slici su te vrijednosti unesene u polja $F10 - S10$). Zatim ovih 13 bacanja novčića ponovimo nekoliko puta, što je više moguće (npr. 70), i svaki put unesimo traženu vrijednost, odnosno broj pisama (broj dobijen u polju $F5$). Dakle, u poljima $F11 - S11$ unijeti ćemo koliko se puta u naših 70 ponavljanja 13 bacanja novčića pismo pojavilo nijednom, jednom, dva puta, itd. (tj. koliko smo puta u polju $F5$ dobili 0, 1, 2, itd.). Kako u zakonu raspodjele drugi red predstavlja odgovarajuće vjerovatnoće, u polje $F12$ upišimo

$$= F11/70,$$

a zatim djelovanje te funkcije prenesimo na polja $G12 - S12$. Radi preglednosti, selektujmo polja $F10 - S12$, te umetnimo naš zakon raspodjele u tabelu sa

$$Insert > Table.$$

Konstruišimo još i histogram, odnosno grafik koji će na osi Ox imati vrijednosti $F10 - S10$, a na osi Oy vrijednosti $F12 - S12$. To ćemo učiniti tako što selektujemo navedena polja, te odaberemo

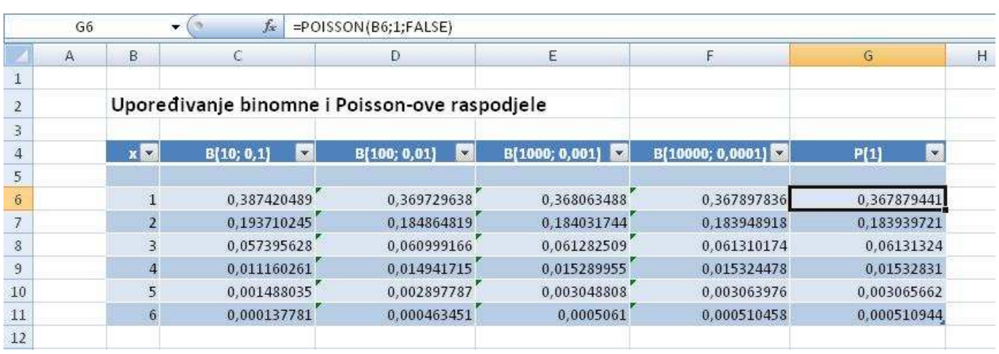
$$Insert > Chart > Colum,$$

kojeg ćemo zatim urediti po želji. Uporedimo sada ove rezultate (stvarnog bacanja novčića 13 puta) sa teoretskim vjerovatnoćama, odnosno binomon raspodjelom po kojoj smo utvrdili da je naša slučajna promjenljiva raspodijeljena. U polje $F14$ upišimo

$$= BINOMDIST(F10; 13; 0,5; FALSE),$$

te pomoću Fill Series ponovimo djelovanje ove funkcije na polja $G14-S14$. U ovim poljima dobili smo teoretske vjerovatnoće pojavljivanja redom $0, 1, 2, 3, \ldots, 13$ pisama u 13 bacanja novčića. Konstruišimo i za ovaj zakon raspodjele odgovarajući histogram, što ćemo najlakše učiniti kopiramo li prethodni, te na njemu samo promijenimo osu Oy u $F14 - S14$. Ove zakone raspodjele sada možemo porediti i grafički, ali i preko navedenih tabela. Primjetimo da smo dati eksperiment (bacanje novčića 13 puta) ovdje ponovili tek 70 puta, ali za veći broj ponovljanja bi navedene tabele, a tako i histogrami bili sve sličniji (tj. statističke vjerovatnoće približavale bi se sve više teoretskim vjerovatnoćama).

Nakon urađenih nekoliko primjera gdje smo koristili binomnu raspodjelu, uvodimo i Poisson-ovu raspodjelu $P(\lambda)$ koja je nastala kao granica binomne raspodjele $B(n, p)$, kada $n \to \infty$, $p \to 0$, i $np \to \lambda > 0$. Iskoristimo Excel kako bi se zaista u to uvjerili. Nakon što napišemo naslov, u polje $B4$ upišimo x, a u $B6$ upišimo 1.


G6 =POISSON(B6;1;FALSE)

Upoređivanje binomne i Poisson-ove raspodjele

x	B(10; 0,1)	B(100; 0,01)	B(1000; 0,001)	B(10000; 0,0001)	P(1)
1	0,387420489	0,369729638	0,368063488	0,367897836	0,367879441
2	0,193710245	0,184864819	0,184031744	0,183948918	0,183939721
3	0,057395628	0,060999166	0,061282509	0,061310174	0,06131324
4	0,011160261	0,014941715	0,015289955	0,015324478	0,01532831
5	0,001488035	0,002897787	0,003048808	0,003063976	0,003065662
6	0,000137781	0,000463451	0,0005061	0,000510458	0,000510944

Zatim pomoću Fill Series popunimo i polja $B7-B11$ sa $2-6$, a nakon toga ćemo u polja $C4-G4$ unijeti redom $B(10;0,1)$, $B(100;0,01)$, $B(1000;0,001)$, $B(10000;0,0001)$, $P(1)$. Želimo izračunati vjerovatnoće $P(X=1), P(X=2), \ldots, P(X=6)$ kada slučajna promjenljiva X ima navedene raspodjele, kako bi se zaista uvjerili da Poisson-va raspodjela aproksimira binomnu, i to sve bolje ukoliko n raste, i p se smanjuje. Stoga, u polje $C6$ unesimo

$$=BINOMDIST(B6;10;0,1;FALSE),$$

a zatim ponovimo djelovanje ove funkcije na polja $C7-C11$, koristeći Fill Series. Zatim u polje $D6$ unesemo

$$=BINOMDIST(B6;100;0,01;FALSE),$$

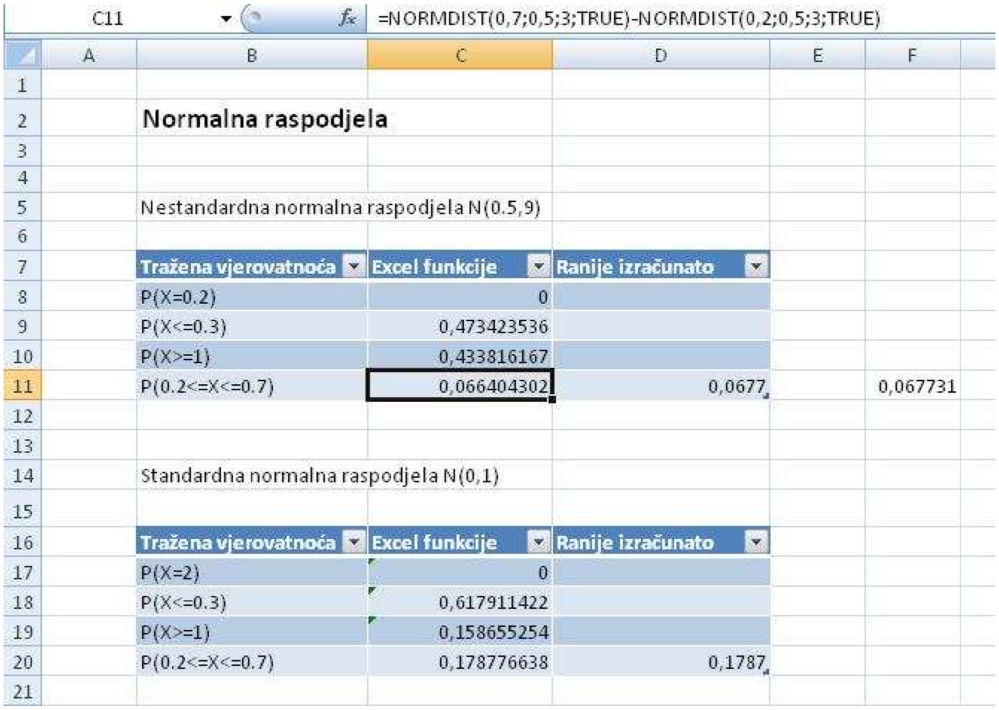
nakon čega ponavljamo djelovanje funkcije i na $D7-D11$. Analogno ćemo u poljima $E6-E11$, te $F6-11$ izračunati željene vjerovatnoće za slučajne promjenljive raspodijeljene po $B(1000,0.001)$ i $B(10000,0.0001)$. Konačno, u polje $G6$ upišimo

$$=POISSON(B6;1;FALSE)$$

kako bismo dobili vjerovatnoću $P(X=1)$ za slučajnu promjenljivu $X\sim P(1)$ $1=\lambda=10\cdot 0.1=100\cdot 0.01=1000\cdot 0.001=10000\cdot 0.0001$.

Svakako, kako nam Excel pomaže da jednostavno računamo željene vjerovatnoće za slučajne promjenljive koje imaju binomnu ili Poisson-ovu rasporedu, moći ćemo to uraditi i ukoliko slučajna promjenljiva ima normalnu raspodjelu. Slično kao i kod binomne raspodjele, vjerovatnoću $P(0.2\le X\le 0.7)$ slučajne promjenljive X računati ćemo pomoću funkcije

$$=NORMDIST(0,7;0,5;3;TRUE)-NORMDIST(0,2;0,5;3;TRUE).$$



C11 =NORMDIST(0,7;0,5;3;TRUE)-NORMDIST(0,2;0,5;3;TRUE)

	A	B	C	D	E	F
1						
2		**Normalna raspodjela**				
3						
4						
5		Nestandardna normalna raspodjela N(0.5,9)				
6						
7		Tražena vjerovatnoća	Excel funkcije	Ranije izračunato		
8		P(X=0.2)	0			
9		P(X<=0.3)	0,473423536			
10		P(X>=1)	0,433816167			
11		P(0.2<=X<=0.7)	0,066404302	0,0677		0,067731
12						
13						
14		Standardna normalna raspodjela N(0,1)				
15						
16		Tražena vjerovatnoća	Excel funkcije	Ranije izračunato		
17		P(X=2)	0			
18		P(X<=0.3)	0,617911422			
19		P(X>=1)	0,158655254			
20		P(0.2<=X<=0.7)	0,178776638	0,1787		
21						

NORMDIST skraćenica je za Normal Distribution (eng, normalna raspodjela), a parametri koje ova funkcija koristi su jasni iz navedene primjene. Kao što smo to već naveli, standardna normalna raspodjela se najčešće koristi, pa za računanje $P(X < x)$, gdje je $X \sim N(0,1)$, bi se izbjeglo zamorno pisanje

$$= NORMDIST(x; 0; 1; TRUE),$$

i željenu vjerovatnoću računati kao

$$= NORMSDIST(x).$$

NORMSDIST je, kao što je i za očekivati, skraćenica za Normal Standard Distribution.

Kao i za binomnu raspodjelu, izvedimo jednu simulaciju kako bi se uvjerili da navedene teoretske vjerovatnoće (koje smo raučunali ranije u zadacima, u prethodnoj Excel vježbi, odnosno koje nalazimo u tablicama) za slučajnu promjenljivu $X \sim N(0,1)$

zaista imaju smisla. Za to će nam biti potrebna opcija Data Analysis, pa ukoliko već nije uključena, potrebno je to učiniti na način opisan ranije:

"Excel Options > Add-Ins > Go > Analysis ToolPak > OK".

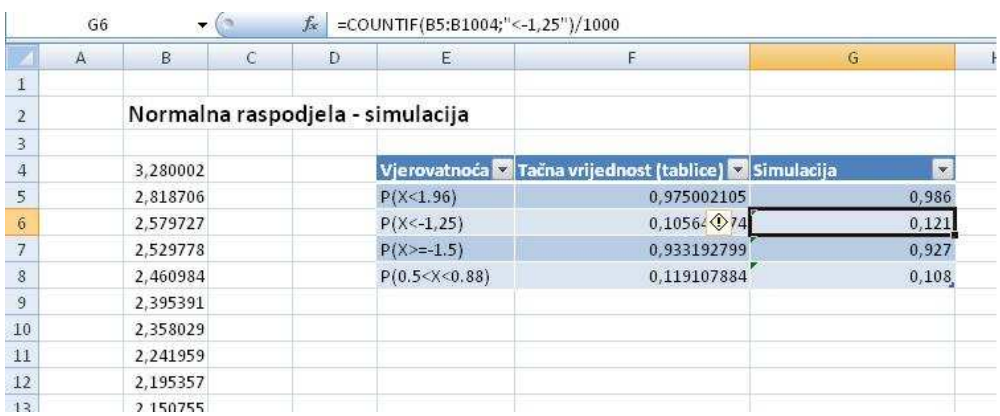
Izaberimo

"Data > Data Analysis > Random Number Generation > OK",

gdje ćemo unijeti sljedeće

Number of Variables:	1
Number of Random Numbers:	100
Distribution:	Normal
Mean:	0
Standard Deviation:	1
Output Range:	B4.

U kolonu E unesimo nekoliko proizvoljnih vjerovatnoća koje želimo izračunati, a u kolonu F izračunajmo te vjerovatnoće koristeći Excel.



Naprimjer, u polja $E5 - E8$ unesimo $P(X < 1.96), P(X < -1.25), P(X >= -1.5), P(0.5 < X < 0.88)$, te zatim u $F5 - F8$

upišimo redom

$$= NORMSDIST(1,96),$$
$$= NORMSDIST(-1,25),$$
$$= 1 - NORMSDIST(-1,5),$$
$$= NORMSDIST(0,88) - NORMSDIST(0,5).$$

Sada prebrojimo koliko se puta u stvarnosti, tj. u našoj vježbi pojavili brojevi manji, veći, statističke vjerovatnoće pa dijelimo sa 1000.

Konačno, pokažimo da normalna raspodjela zaista aproksimira binomnu raspodjelu. To bi mogli pokazati kao ranije, računajući određene vjerovatnoće i uporeďujući ih, no ovdje izvedimo simulaciju kako bi vježba bila zanimljivija. Izvesti ćemo simulaciju bacanja novčića 20 puta, i to tako što izaberemo

"Data > Data Analysis > Random Number Generation > OK",

gdje ćemo unijeti sljedeće

Number of Variables:	1000
Number of Random Numbers:	20
Distribution:	Bernoulli
p Value:	0,5
Output Range:	B5.

Posmatrati ćemo koliko puta smo dobili glavu (odnosno, 1) u 20 bacanja novčića, pa ćemo u polje $B26$ unijeti

$$= SUM(B5 : B24),$$

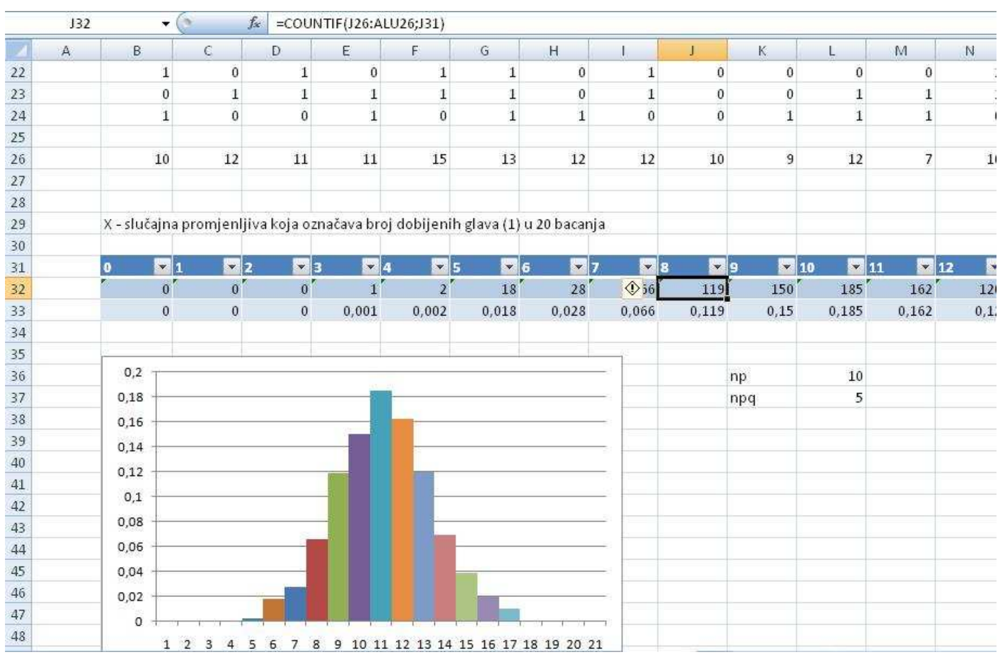
te pomoću Fill Series prenijeti djelovanje te funkcije na polja $C26 - ALM26$. Sada u naš Worksheet možemo unijeti zakon raspodjele slučajne promjenljive X, i to na način kako smo navikli i ranije. U polja $B31 - V31$ unesimo brojeve $0 - 20$, koji predstavljaju sve moguće vrijednosti koje X uzima (X označava broj dobijenih glava u 20 bacanja novčića). Uočimo koliko se puta koja od navedenih vrijednosti pojavila u 1000 izvođenja eksperimenta, što činimo tako što u polje $B32$ unesemo

$$=COUNTIF(B26 : ALM26; B31),$$

te prenesmo djelovanje te funkcije $C32 - V32$. Da bi izračunali odgovarajuće vjerovatnoće, u $B33$ ćemo upisati

$$= B32/1000,$$

te ponoviti djelovanje te funkcije na $C33-V33$. Pomoću $Insert >$ $Column$ kreirajmo grafik kojeg ćemo urediti po želji, tj. tako da su na osi Ox vrijednosti koje slučajna promjenljiva X uzima (polja $B31 - V31$), a na Oy odgovarajuće vjerovatnoće (polja $B32 - V32$). Sada možemo uočiti da dobijeni grafik približno odgovara grafiku normalne raspodjele.



□

Poglavlje 3

Numeričke karakteristike slučajnih promjenljivih

Nakon usvajanja pojma slučajne promjenljive, u ovom kursu preostalo je još naučiti kako izračunati određene numeričke karakteristike datih slučajnih promjenljivih. Te numeričke karakteristike trebaju nam dati neke informacije o samoj slučajnoj promjenljivoj, a ovdje ćemo uvesti dvije najvažnije - matematičko očekivanje i disperziju. Pored samog izračunavanja matematičkog očekivanja i disperzije, kroz uvodne zadatke studenti će imati priliku shvatiti i motivaciju za njihovo uvođenje.

3.1 Matematičko očekivanje slučajne promjenljive

ZADATAK 3.1.1. *Dobili ste ponudu da igrate igru u kojoj dobijate* 3 *KM ukoliko dobijete najmanje broj* 3*, a gubite* 5*KM ukoliko dobijete* 1 *ili* 2 *prilikom bacanja standardne kocke za igru. Da li trebate prihvatiti ponudu?*

Rješenje: Prvobitno napišimo zakon raspodjele slučajne promjenljive X koja uzima vrijednosti -5 za gubitak i 3 za pobjedu (jer po pravilima igre pri svakom bacanju gubimo 5KM, ili dobijamo 3KM). Prilikom bacanja standardne kocke za igru, prostor jednakovjerovatnih elementarnih događaja je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. S obzirom na način kako smo definirali slučajnu promjenljivu X, jasno je da vrijedi

$$X(1) = X(2) = -5, \quad X(3) = X(4) = X(5) = X(6) = 3,$$

pa je

$$P(X=-5)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, \quad P(X=3)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Dakle, naša slučajna promjenljiva ima sljedeći zakon raspodjele

$$X: \quad \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Na osnovu načina na koji je ponuda formirana, jasno je da je rezultat za nas

$$-5\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3},$$

odnosno za očekivati je da ćemo nakon igre biti "u plusu" (i to za $\frac{1}{3}$KM), pa treba prihvatiti ponudu. ▲

Ovaj zadatak nam sada jasno daje povod za uvođenje sljedeće definicije.

Definicija 3.1.1 (MATEMATIČKO OČEKIVANJE)**.** *Matematičko očekivanje diskretne slučajne promjenljive X koja je zadata zakonom raspodjele*

$$X: \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots \end{pmatrix},$$

je broj

$$E(X)=\sum_i x_i p_i,$$

ukoliko dati red konvergira.
Matematičko očekivanje neprekidne slučajne promjenljive X koja je zadata funkcijom gustine $f(x)$ je broj

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx.$$

Teorem 3.1.1 (OSOBINE MATEMATIČKOG OČEKIVANJA)**.** *Vrijede sljedeće osobine:*

a. $E(c)=c$ *(c konst.)*

b. $E(aX)=aE(X)$ *(a konst.)*

c. $E(aX+b)=aE(X)+b$ *(a,b konst.)*

d. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$, *ukoliko $E(X)$ i $E(Y)$ postoje* *e.* $E(XY) = E(X)E(Y)$, *ukoliko su* X *i* Y *nezavisne*

f. Ako je $a \leq X \leq b$, *onda je i* $a \leq E(X) \leq b$.

ZADATAK 3.1.2. *Naći matematičko očekivanje slučajne promjenljive* X *koja označava broj s gornje strane pri jednom bacanju kocke za igru.*

Rješenje: Lako zaključujemo da data slučajna promjenljiva ima sljedeći zakon raspodjele

$$X : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

pa je matematičko očekivanje

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5.$$

▲

ZADATAK 3.1.3. *U sljedećoj tabeli prikazane su godišnje isplate jedne osiguravajuće kompanije.*

Visina osiguranja u KM	*0*	*2000*	*4000*	*6000*	*8000*	*10000*
Vjerovatnoća	*0.80*	*0.10*	*0.05*	*0.03*	*0.01*	*0.01*

Koliko to kompanija treba naplaćivati svoje prosječno osiguranje, pa da ne bi bila u gubitku (tj. da bi mogla isplatiti sva osiguranja, a da nije u gubitku)?

Rješenje: Slučajna promjenljiva koja označava visinu osiguranja ima sljedeći zakon raspodjele

$$X : \quad \begin{pmatrix} 0 & 2000 & 4000 & 6000 & 8000 & 10000 \\ 0.80 & 0.10 & 0.05 & 0.03 & 0.01 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

Jednostavno zaključujemo da nas ustvari zanima matematičko očekivanje navedene slučajne promjenljive, koje iznosi

$$E(X) = 0 \cdot 0.80 + 2000 \cdot 0.10 + 4000 \cdot 0.05 + 6000 \cdot 0.03 + 8000 \cdot 0.01 + 10000 \cdot 0.01 = 760.$$

Dakle, prosječna godišnja uplata za osiguranje trebala bi biti 760KM da bi kompanija bez gubitka mogla isplatiti sva osiguranja. ▲

ZADATAK 3.1.4. *Na osnovu izvještaja jedne izdavačke kuće,* 20% *njihovih knjiga ne ostvare nikakav dobitak, ali ni gubitak;* 30% *knjiga izgube* 1000*KM,* 25% *izgube* 10000*KM, a* 25% *zarade* 20000*KM. Kada ova izdavačka kuća izdaje neku novu knjigu, kolika se zarada od nje očekuje?*

Rješenje: Lako zaključujemo da slučajna promjenljiva koja označava visinu zarade knjige ima sljedeći zakon raspodjele

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & -1000 & -10000 & 20000 \\ 0.20 & 0.30 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Jednostavno zaključujemo da nas ustvari zanima matematičko očekivanje navedene slučajne promjenljive, koje iznosi

$$E(X) = 0 \cdot 0.20 - 1000 \cdot 0.30 - 10000 \cdot 0.25 + 20000 \cdot 0.25 = 2200.$$

Dakle, prosječna zarada od nove knjige je 2200KM. ▲

ZADATAK 3.1.5. *Američki se rulet sastoji od* 38 *polja numerisanih sa* 00, 0 *i brojevima* 1−36*. Kladite se na neki broj tako što postavite svoj ulog na to polje. Ako ste se kladili na broj na kojem se rulet zaustavi, dobijate* 35 *puta više nego što se uložili, a ako se rulet ne zaustavi na broju kojeg ste izabrali, gubite svoj ulog. Ako ste na neki broj uložili* 100*KM, koliki se prosječni gubitak očekuje?*

Rješenje: Pretpostavimo da smo uložili 100KM na neki broj x_0. Prvobitno napišimo zakon raspodjele slučajne promjenljive X koja uzima vrijednosti -100 za gubitak i 3500 za pobjedu (na osnovu pravila igre). Rulet se može zaustaviti na bilo kojem od polja, pa je prostor jednakovjerovatnih elementarnih događaja $\Omega = \{00, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 36\}$. S obzirom na način kako smo definirali slučajnu promjenljivu X, jasno je da vrijedi

$$X(\Omega \backslash x_0) = -100, \quad X(x_0) = 3500,$$

pa je

$$P(X = -100) = \frac{37}{38}, \quad P(X = 3500) = \frac{1}{38}.$$

Dakle, naša slučajna promjenljiva ima sljedeći zakon raspodjele

$$X: \quad \begin{pmatrix} -100 & 3500 \\ \frac{37}{38} & \frac{1}{38} \end{pmatrix}.$$

Na osnovu načina na koji je rulet definiran, rezultat za nas nakon odigrane igre je sada očigledno

$$E(X) = -100 \cdot \frac{37}{38} + 3500 \cdot \frac{1}{38} = \frac{-200}{38} \approx -5.26,$$

odnosno za očekivati je da ćemo nakon igre biti u gubitku od približno 5.26KM. (Naravno, nakon svake pojedinačne partije mi ili gubimo 100KM ili dobijamo 3500KM, ali nakon mnogo odigranih partija očekuje se prosječni gubitak oko 5.26KM.) ▲

ZADATAK 3.1.6. *Ispravan novčić se baca sve dok ne padne glava ili pet pisama. Naći matematičko očekivanje broja bacanja novčića.*

Rješenje: Prvobitno odredimo zakon raspodjele slučajne promjenljive X koja predstavlja broj bacanja novčića. Po uslovima zadatka, X uzima vrijednosti $1, 2, 3, 4, 5$. Ukoliko je $X = 1$, znači da je bacanje zaustavljeno odmah nakon prvog pokušaja, odnosno u prvom je bacanju pala glava, pa je $P(X = 1) = \frac{1}{2}$. Ukoliko je $X = 2$, to znači da je u prvom bacanju palo pismo (inače bi bacanje odmah bilo zaustavljeno), a u drugom glava, pa $P(X = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Slično nalazimo i da je

$$P(X = 3) = (\frac{1}{2})^3,$$

$$P(X = 4) = (\frac{1}{2})^4.$$

Ako je $X = 5$, to znači da smo dobili pismo prilikom prva četiri bacanja, a glavu pri petom bacanju; ili da smo dobili pet pisama, pa vrijedi

$$P(X = 5) = (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^5 = 2 \cdot (\frac{1}{2})^5 = (\frac{1}{2})^4.$$

Dakle, slučajna promjenljiva X ima sljedeći zakon raspodjele

$$X : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 & (\frac{1}{2})^3 & (\frac{1}{2})^4 & (\frac{1}{2})^4 \end{pmatrix},$$

pa je traženo matematičko očekivanje

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 3 \cdot (\frac{1}{2})^3 + 4 \cdot (\frac{1}{2})^4 + 5 \cdot (\frac{1}{2})^4 = \frac{8 + 8 + 6 + 4 + 5}{16} = \frac{31}{16} = 1.9375.$$

▲

ZADATAK 3.1.7. *Slučajna promjenljiva X uzima cjelobrojne pozitivne vrijednosti n s vjerovatnoćama koje su proporcionalne sa 3^{-n}, tj.*

$$P(X = n) = k \cdot 3^{-n},$$

gdje je k koeficijent proporcionalnosti. Naći:

a. konstantu k,

b. matematičko očekivanje $E(X)$.

Rješenje: Radi bolje preglednosti, navedimo zakon raspodjele slučajne promjenljive X u shemi kako smo to do sada i navikli:

$$X : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \frac{k}{3} & \frac{k}{3^2} & \frac{k}{3^3} & \dots & \frac{k}{3^n} & \dots \end{pmatrix}.$$

a. Kako zbir vjerovatnoća mora biti 1, vrijedi

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k}{3^i} = k \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^j = \frac{k}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{k}{2},$$

pa je $k = 2$.

b. Na osnovu same definicije matematičkog očekivanja, imamo

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_i x_i p_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{2}{3^i} \\ &= 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3^2} + 3 \cdot \frac{2}{3^3} + \dots + n \cdot \frac{2}{3^n} + \dots \\ &= \frac{2}{3}(1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3^2} + \dots + n \cdot \frac{1}{3^{n-1}} + \dots) \\ &= \frac{2}{3}[1 + 2(\frac{1}{3})^1 + 3(\frac{1}{3})^2 + \dots + n(\frac{1}{3})^{n-1}] \end{aligned}$$

Posljednji ćemo izraz izračunati pomoću poznate sume

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots = \frac{1}{1-q},$$

jer njenim diferenciranjem dobijamo

$$1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-q)^2},$$

pa vrijedi

$$E(X) = \frac{2}{3}[1+2(\frac{1}{3})^1+3(\frac{1}{3})^2+\cdots+n(\frac{1}{3})^{n-1}] = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4} = \frac{3}{2}.$$

▲

ZADATAK 3.1.8. *Neka je data funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Dokazati da je f funkcija gustine neke slučajne promjenljive X, te odrediti matematičko očekivanje te slučajne promjenljive.

Rješenje: Kako vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{1}{2}\cos x|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(-1-1) = 1,$$

data funkcija je funkcija gustine neke slučajne promjenljive X. Na osnovu definicije matematičkog očekivanja, imamo

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin x dx \\ & |u = x, du = dx; \quad dv = \sin x dx, v = -\cos x| \\ &= \frac{1}{2}[-x\cos x|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx] \\ &= \frac{1}{2}[-(-\pi-0) + \sin x|_0^{\pi}] \\ &= \frac{1}{2}(\pi + 0 - 0) \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

▲

ZADATAK 3.1.9. *Neka je X neprekidna slučajna promjenljiva čija je funkcija gustine*

$$f(x) = \begin{cases} k, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odrediti:

a. *konstantu k,*

b. *matematičko očekivanje $E(X)$,*

c. *funkciju raspodjele $\mathcal{F}(x)$.*

Rješenje:

a. Kako je f funkcija gustine neke slučajne promjenljive, mora vrijediti

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

odnosno

$$\int_{a}^{b} kdx = 1,$$

pa je $k = \dfrac{1}{b-a}$.

b. Na osnovu definicije matematičkog očekivanja, imamo

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} xdx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} \cdot (b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}.$$

c. Na osnovu definicije funkcije raspodjele, imamo

$$\mathcal{F}(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} dt = \frac{x-a}{b-a},$$

odnosno

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

▲

ZADATAK 3.1.10. *Dvodimenzionalna slučajna promjenljiva* (X, Y) *zadata je funkcijom gustine*

$$f(x,y) = \begin{cases} kxye^{-(x^2+y^2)}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Odrediti:

a. *konstantu* k,

b. *marginalne funkcije gustine* $f_X(x)$ *i* $f_Y(y)$,

c. *matematičko očekivanje* $E(X)$ *i disperziju* $\sigma^2(X)$.

Rješenje:

a. Konstantu k ćemo, kao i mnogo puta ranije, odrediti iz uslova

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1,$$

tj. imamo

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\
&= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} kxye^{-(x^2+y^2)}dxdy \\
&= k\int_{0}^{\infty} ye^{-y^2}dy \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx \\
&= |s: -x^2 = t, \quad -2xdx = dt| \\
&= \frac{-1}{2}k\int_{0}^{\infty} ye^{-y^2}dy \int_{0}^{\infty} e^t dt \\
&= \frac{-1}{2}k\int_{0}^{\infty} ye^{-y^2}dy e^{-x^2}|_0^{\infty} \\
&= \frac{-1}{2}k\int_{0}^{\infty} ye^{-y^2}dy(0-1) \\
&= \frac{1}{2}k\int_{0}^{\infty} ye^{-y^2}dy \\
&= \frac{1}{2}k\cdot(\frac{-1}{2})(0-1) \\
&= \frac{k}{4},
\end{aligned}$$

pa je $k = 4$.

b. Na osnovu definicije marginalne funkcije gustine, imamo

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \\ &= \int_0^{\infty} 4xye^{-(x^2+y^2)}dy \\ &= 4xe^{-x^2}\int_0^{\infty} ye^{-y^2}dy \\ &= 4xe^{-x^2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= 2xe^{-x^2}, \end{aligned}$$

odnosno

$$f_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Analogno bismo dobili i

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2ye^{-y^2}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

c. Kako smo odredili funkciju gustine slučajne promjenljive X, lako određujemo i traženo matematičko očekivanje

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \\ &= \int_0^{\infty} x\cdot 2xe^{-x^2}dx \\ &= 2\int_0^{\infty} x^2e^{-x^2}dx \\ & |u = x, du = dx; \quad dv = xe^{-x^2}dx, v = \frac{-1}{2}e^{-x^2}| \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-x^2}|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \\ &= -\frac{1}{2}(0-0) + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx. \end{aligned}$$

Koristimo li činjenicu da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt = \sqrt{2\pi},$$

imamo da je

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx &= |s : \sqrt{2}x = t, 2x^2 = t^2, -x^2 = \frac{-1}{2}t^2| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2\pi} \\ &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Kako je jasno da je funkcija e^{-x^2} parna, onda vrijedi

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

pa konačno imamo

$$E(X) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

▲

ZADATAK 3.1.11. *Naći matematičko očekivanje slučajne promjenljive* X, *ako je*

a. $X \sim B(n,p)$,

b. $X \sim P(\lambda)$,

c. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

Rješenje:

a. Kako slučajna promjenljiva $X \sim B(n,p)$ ima sljedeći zakon raspodjele

$$X : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ (1-p)^n & \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} & \binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2} & \dots & \binom{n}{n}p^n \end{pmatrix},$$

to vrijedi

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_k x_k p_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot [(n-1)-(k-1)+1]}{(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \cdot p \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= n \cdot p \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i} (1-p)^{n-1-i} \\
&= n \cdot p \cdot 1 \\
&= np.
\end{aligned}
$$

Navedeni rezultat i intuitivno je veoma jasan. Naprimjer, ako iz određene serije nasumice izaberemo 200 proizvoda, pri čemu je vjerovatnoća da slučajno izabran proizvod neispravan 0.1 ($n = 200, p = 0.1$), očekujemo da će u izabranim proizvodima biti oko $np = 200 \cdot 0.1 = 20$ neispravnih proizvoda.

b. Kako slučajna promjenljiva $X \sim P(\lambda)$ ima sljedeći zakon raspodjele

$$
X : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} & \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} & \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} & \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} & \ldots & \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} & \ldots \end{pmatrix},
$$

to vrijedi

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_k x_k p_k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

c. Kako slučajna promjenljiva $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ima funkciju gustine

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

to vrijedi

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= |s: \quad \tfrac{x-\mu}{\sigma} = t, \quad x = \sigma t + \mu, \quad dx = \sigma dt| \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sigma \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sigma\mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \\
&= |s: \quad -\tfrac{t^2}{2} = s, \quad t^2 = -2s, \quad tdt = -ds| \\
&= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} e^s ds + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \\
&= 0 + \mu \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

▲

ZADATAK 3.1.12. *Slučajna promjenljiva X je raspodijeljena po normalnoj raspodjeli $N(0, \sigma^2)$. Naći matematičko očekivanje slučajne promjenljive $Y = 4X^2$.*

Rješenje: U ranijem poglavlju upoznali smo se sa funkcijama slučajnih promjenljivih, $Y = g(X)$. Dalje postoje i same definicije, odnosno formule za izračunavanje nekih numeričkih karakteristika (npr. matematičko očekivanje, ili disperzija) funkcija slučajnih promjenljivih. Međutim, i ne oslanjajući se na iste, jednostavno zaključujemo da tražemo matematičko očekivanje nalazimo na sljedeći način

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E(4X^2)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 4x^2 f(x)dx\\
&= 4\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-0)^2}{2\sigma^2}} dx\\
&= \frac{4}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx\\
&= |u = x, du = dx; \quad dv = xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, v = -\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}|\\
&= \frac{4}{\sigma\sqrt{2\pi}} [-\sigma^2 x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}|_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx]\\
&= |s : \quad \tfrac{x}{\sigma} = t, \quad x = \sigma t|\\
&= \frac{4}{\sigma\sqrt{2\pi}} [0 + \sigma^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt]\\
&= \frac{4}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \sigma^3 \cdot \sqrt{2\pi}\\
&= 4\sigma^2.
\end{aligned}$$

▲

ZADATAK 3.1.13. *Dvodimenzionalna slučajna promjenljiva* (X, Y) *zadata je svojim zakonom raspodjele*

$$\begin{array}{c|ccc} X|Y & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{18} \\ 2 & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} \\ 3 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{15} \end{array}.$$

Odrediti:

a. *marginalne zakone raspodjele,*

b. *uslovni zakon raspodjele za slučajnu promjenljivu* X *pod uslovom da je* $Y = 2$,

c. *matematička očekivanja* $E(X), E(Y), E(XY)$ *i* $E(X|Y = 2)$.

Rješenje: Iz samog zakona raspodjele slučajne promjenljive jednostavno dolazimo do potrebnih zaključaka.

a. Marginalni zakoni raspodjele slučajnih promjenljivih X i Y su sljedeći:

$$X : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{5}{36} & \frac{19}{36} & \frac{5}{15} \end{pmatrix},$$

$$Y : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{12} & \frac{14}{45} & \frac{79}{180} \end{pmatrix}.$$

b. Na osnovu definicije uslovne vjerovatnoće (a i same intuicije), nalazimo da je uslovni zakon raspodjele za slučajnu promjenljivu X pod uslovom da je $Y = 2$

$$X|Y = 2 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{\frac{1}{18}}{\frac{79}{180}} & \frac{\frac{1}{4}}{\frac{79}{180}} & \frac{\frac{2}{15}}{\frac{79}{180}} \end{pmatrix},$$

odnosno

$$X|Y = 2 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{10}{79} & \frac{45}{79} & \frac{24}{79} \end{pmatrix}.$$

c. Sada jednostavno zaključujemo da je

$$E(X) = 1 \cdot \frac{5}{36} + 2 \cdot \frac{19}{36} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5 + 38 + 36}{36} = \frac{79}{36} \approx 2.19,$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{14}{45} + 2 \cdot \frac{79}{180} = \frac{56+158}{180} = \frac{214}{180} \approx 1.19.$$

Da bi pronašli matematičko očekivanje slučajne promjenljive XY, pronađimo prvobitno njen zakon raspodjele. Jasno je da navedena slučajna promjenljiva može uzeti vrijednosti $0, 1, 2, 4, 3, 6$, a odgovarajuće vjerovatnoće također jednostavno računamo, pa imamo

$$XY : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + 0 & 0 & \frac{1}{18} + \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{2}{15} \end{pmatrix},$$

odnosno

$$XY : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}.$$

Dakle, traženo matematičko očekivanje je

$$\begin{aligned} E(XY) &= 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{2}{15} \\ &= \frac{0+0+20+36+60+48}{60} \\ &= \frac{164}{60} \\ &\approx 2.73. \end{aligned}$$

Konačno, matematičko očekivanje $E(X|Y = 2)$ naći ćemo koristeći zakon raspodjele već naveden u b., pa

$$E(X|Y=2) = 1 \cdot \frac{10}{79} + 2 \cdot \frac{45}{79} + 3 \cdot \frac{24}{79} = \frac{172}{79} \approx 2.18.$$

▲

3.2 Disperzija slučajne promjenljive

ZADATAK 3.2.1. *Slučajna promjenljiva X, koja označava ocjene na testu iz latinskog jezika odjeljenja IIa, ima sljedeći zakon raspodjele*

$$X: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.20 & 0.25 & 0.10 & 0.25 & 0.2 \end{pmatrix},$$

dok slučajna promjenljiva Y označava ocjene na istom testu odjeljenja IIb i ima zakon raspodjele

$$Y: \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Naći matematičko očekivanje slučajnih promjenljivih X i Y.

Rješenje: Na osnovu datih zakona raspodjele, lako zaključujemo da je

$$E(X) = 1 \cdot 0.20 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.10 + 4 \cdot 0.25 + 5 \cdot 0.2 = 3,$$

$$E(Y) = 3 \cdot 1 = 3.$$

Dakle, slučajne promjenljive X i Y imaju jednaka matematička očekivanja, iako je evidentno da odjeljenja IIa i IIb imaju potpuno različite rezultate na testu. Ova dva odjeljenja imaju jednake prosječne ocjene, međutim u prvom odjeljenju zastupljene su sve ocjene (naprimjer, bilo je i ocjena 1 i 5, a mali procenat učenika su uopće dobili 3), dok su u drugom odjeljenju svi dobili ocjenu 3. To nam govori da matematičko očekivanje nije jedina numerička karakteristika neke slučajne promjenljive koju bi trebali posmatrati, jer nam očito ne daje dovoljno informacija o tome kako ta slučajna promjenljiva izgleda. Sljedeća numerička karakteristika neke slučajne promjenljive X trebala bi nam dati informaciju o tome koliko je "raspršena" ta slučajna promjenljiva, tj. u kojem se rasponu nalaze vrijednosti koje ona uzima (koliko daleko od matematičkog očekivanja). ▲

S obzirom na prethodni zadatak, potpuno ima smisla sljedeća definicija.

Definicija 3.2.1 (DISPERZIJA). *Disperzija slučajne promjenljive X je matematičko očekivanje slučajne promjenljive $[X - E(X)]^2$, tj. to je broj*

$$\sigma^2(X) = E[[X - E(X)]^2].$$

Kao što smo to već objasnili kroz prethodni primjer, želimo dobiti informaciju koliko je slučajna promjenljiva X raspršena, tj. koliko daleko se njene vrijednosti nalaze od matematičkog očekivanja $E(X)$, pa ima smisla da posmatramo slučajnu promjenljivu $X - E(X)$. Međutim, ukoliko bi novu numeričku karakteristiku definirali kao matematičko očekivanje slučajne promjenljive $X - E(X)$, ona nam ne bi dala nikakvu informaciju o posmatranoj slučajnoj promjenljivoj X. Naime, primjetimo da npr. u prethodnom zadatku slučajna promjenljiva $X - E(X) = X - 3$ ima sljedeći zakon raspodjele

$$X - E(X): \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.20 & 0.25 & 0.10 & 0.25 & 0.2 \end{pmatrix},$$

pa vrijedi

$$E[X-E(X)] = E(X-3) = -2\cdot 0.20 + (-1)\cdot 0.25 + 0\cdot 0.10 + 1\cdot 0.25 + 2\cdot 0.2 = 0.$$

Štaviše, uvijek ćemo dobiti da je $E[X - E(X)] = 0$, jer za svaku slučajnu promjenljivu X vrijedi ranije navedena osobina matematičkog očekivanja, pa

$$E[X - E(X)] = E(X) - E(X) = 0.$$

Tu leži razlog zašto posmatramo slučajnu promjenljivu $[X - E(X)]^2$, koja nam također daje neku informaciju o raspršenosti slučajne promjenljive X. Stoga disperziju i označavamo sa σ^2, a u literaturi se često spominje i numerička karakteristika $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, koja se naziva standardna devijacija (varijacija) slučajne promjenljive X.

Teorem 3.2.1 (OSOBINE DISPERZIJE)**.** *Vrijede sljedeće osobine:*

a. $\sigma^2(c) = 0$ *(c konst.)*

b. $\sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

c. $\sigma^2(X + a) = \sigma^2(X)$ *(a konst.)*

d. $\sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X)$ *(a konst.)*

e. $\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$, *ukoliko su X i Y nezavisne*

Navedene se osobine jednostavno dokazuju, a od svih nam je najznačajnija osobina *b.* jer tako ustvari najčešće i računamo disperziju u zadacima. Ona je zadovoljena jer

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= E[[X - E(X)]^2] \\ &= E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2. \end{aligned}$$

ZADATAK 3.2.2. *Neka je slučajna promjenljiva X data svojim zakonom raspodjele*

$$X : \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.22 & 0.03 & 0.50 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Naći disperziju $\sigma^2(X)$.

Rješenje: Kao što smo već naveli, disperziju ćemo računati koristeći osobinu b., odnosno činjenicu da vrijedi $\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Iz samog zakona raspodjele slučajne promjenljive X jasno je da vrijedi

$$E(X) = -1 \cdot 0.22 + 0 \cdot 0.03 + 1 \cdot 0.50 + 2 \cdot 0.25 = 0.78.$$

Kako bismo odredili i $E(X^2)$ najbolje je da prvobitno napišemo i zakon raspodjele slučajne promjenljive X^2, koji ima sljedeći oblik

$$X : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.03 & 0.72 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Dakle, vrijedi

$$E(X^2) = 0 \cdot 0.03 + 1 \cdot 0.72 + 4 \cdot 0.25 = 1.72,$$

pa je

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1.72 - 0.78^2 = 1.116.$$

▲

ZADATAK 3.2.3. *Slučajna promjenljiva X predstavlja broj pobjeda jedne ekipe u tri utakmice. Ako se zna da se utkamice odigravaju nezavisno jedna od druge, i da je vjerovatnoća pobjede te ekipe u svakoj pojedinačnoj utkamici* 0.6, *odrediti*

a. zakon raspodjele slučajne promjenljive X,

b. matematičko očekivanje broja pobjeda u tri utakmice,

c. odgovarajuću disperziju.

Rješenje:

a. Kao i u mnogim primjerima u prethodnoj sekciji, jednostavno nalazimo da je zakon raspodjele slučajne promjenljive X

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \binom{3}{0}0.4^3 & \binom{3}{1}0.4^2 0.6 & \binom{3}{2}0.4 \cdot 0.6^2 & \binom{3}{3}0.6^3 \end{pmatrix},$$

odnosno

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.064 & 0.288 & 0.432 & 0.216 \end{pmatrix}.$$

b. Koristeći a., potpuno je jasno da

$$E(X) = 0 \cdot 0.064 + 1 \cdot 0.288 + 2 \cdot 0.432 + 3 \cdot 0.216 = 1.8.$$

c. Kako slučajna promjenljiva X^2 očito ima sljedeći zakon raspodjele

$$X^2: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0.064 & 0.288 & 0.432 & 0.216 \end{pmatrix},$$

imamo da je

$$E(X^2) = 0 \cdot 0.064 + 1 \cdot 0.288 + 4 \cdot 0.432 + 9 \cdot 0.216 = 3.96,$$

pa vrijedi

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3.96 - 1.8^2 = 3.96 - 3.24 = 0.72.$$

▲

ZADATAK 3.2.4. *Neka je slučajna promjenljiva X data svojim zakonom raspodjele*

$$X: \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Naći $E(X), E(X^2), \sigma^2(X), E(2X+1), E(2X^2+1), \sigma^2(5X-2)$.

Rješenje: Iz samog zakona raspodjele slučajne promjenljive X jasno je da vrijedi

$$E(X) = -2 \cdot 0.1 + (-1) \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.2 = 0.2.$$

Kako bismo odredili i $E(X^2)$ najbolje je da prvobitno napišemo i zakon raspodjele slučajne promjenljive X^2, koji ima sljedeći oblik

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Dakle, vrijedi

$$E(X^2) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.3 = 1.6,$$

a dalje imamo i

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1.6 - 0.2^2 = 1.6 - 0.04 = 1.56.$$

Da bi našli $E(2X + 1)$ bilo bi poželjno napisati zakon raspodjele slučajne promjenljive $2X+1$, no možemo ga računati i pomoću definicije matematičkog očekivanja funkcije slučajnih promjenljivih $E(g(X)) = \sum_i g(x_i)p_i$. U svakom slučaju, imamo

$$E(2X + 1) = -3 \cdot 0.1 + (-1) \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.2 = 1.4.$$

Također, posljednje matematičko očekivanje mogli smo izračunati i koristeći osobine matematičkog očekivanja, što bi ustvari i bilo najjednostavnije, jer vrijedi

$$E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = 2 \cdot 0.2 + 1 = 1.4.$$

Zbog svoje jednostavnosti, iskoristimo ovaj pristup (osobine matematičkog očekivanja i disperzije) i za računanje preostalih numeričkih karakteristika

$$E(2X^2 + 1) = 2E(X^2) + 1 = 2 \cdot 1.6 + 1 = 4.2,$$

$$\sigma^2(5X - 2) = \sigma^2(5X) = 5^2\sigma^2(X) = 25 \cdot 1.56 = 39.$$

▲

ZADATAK 3.2.5. *Pri bacanju homogene kocke posmatrane su slučajne promjenljive X i Y. X uzima vrijednost 0 ako dobijemo paran, a vrijednost 1 ako dobijemo neparan broj. Y uzima vrijednost 0 ako dobijemo $1, 2, 4$ ili 5, a vrijednost 1 ako dobijemo 3 ili 6. Odrediti*

a. *zakon raspodjele slučajne promjenljive (X, Y)*

b. *marginalne zakone raspodjele*

c. *zakon raspodjele slučajne promjenljive $Z = X + 2Y$*

d. *$E(Z)$ i $\sigma^2(Z)$.*

Rješenje:

a. Kako bacanje dvije kocke kao rezultat ima sljedeće jednakovjerovatne mogućnosti

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6),
\end{array}$$

zakon raspodjele slučajne promjenljive (X, Y) je sljedeći

$$\begin{array}{c|cc}
X|Y & 0 & 1 \\ \hline
0 & \frac{12}{36} & \frac{6}{36} \\
1 & \frac{12}{36} & \frac{6}{36}
\end{array}.$$

b. Marginalne zakone raspodjele možemo jednostavno uočiti iz već navedenog zakona raspodjele slučajne promjenljive (X, Y), ili jednostavno iz samog opisa slučajnih promjenljivih X i Y :

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$Y: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}.$$

c. Kako X i Y uzimaju vrijednosti $0, 1$, slučajna promjenljiva $Z = X + 2Y$ uzima vrijednosti $0, 2, 1, 3$. Odgovarajuće vjerovatnoće lako nalazimo na osnovu zakona raspodjele slučajne promjenljive (X, Y) već navedenog u a. (ili pomoću zakona raspodjele slučajnih promjenljivih X i Y navedenih u b., i činjenice da su X i Y nezavisne), pa je

$$Z: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{12}{36} & \frac{12}{36} & \frac{6}{36} & \frac{6}{36} \end{pmatrix},$$

odnosno

$$Z: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

d. Na osnovu c. sada jednostavno imamo

$$E(Z) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \approx 1.167.$$

Kako je

$$Z^2 : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

onda je

$$E(Z^2) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{15}{6} = 2.5.$$

Dakle, imamo

$$\sigma^2(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{15}{6} - (\frac{7}{6})^2 = \frac{90}{36} - \frac{49}{36} = \frac{41}{36} \approx 1.139.$$

▲

ZADATAK 3.2.6. *Odrediti matematičko očekivanje i disperziju uniformne raspodjele čija je funkcija gustine*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Rješenje: Slučajnu promjenljivu X sa datom funkcijom gustine već smo nekoliko puta ranije spominjali (kao što je to već navedeno, ovakva slučajna promjenljiva ima tzv. uniformnu raspodjelu) i odredili njeno matematičko očekivanje

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Preostalo je još da odredimo i disperziju. Kako vrijedi

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3}(b^3 - a^3) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

imamo

$$\begin{aligned}
\sigma^2(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - (\frac{a+b}{2})^2 \\
&= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \\
&= \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} \\
&= \frac{a^2-2ab+b^2}{12} \\
&= \tfrac{(a-b)^2}{12}.
\end{aligned}$$

▲

ZADATAK 3.2.7. *Slučajna promjenljiva X zadata je funkcijom gustine*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Izračunati matematičko očekivanje $E(X)$ i disperziju $\sigma^2(X)$ slučajne promjenljive X.

Rješenje: Za izračunavanje potrebnih numeričkih karakteristika ovdje ćemo koristiti poznatu gama funkciju koja se definiše kao

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x},$$

pri čemu za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\
&= \int_0^\infty x\frac{x^n e^{-x}}{n!}dx \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}dx \\
&= \frac{1}{n!}\Gamma(n+2) \\
&= \frac{(n+1)!}{n!} \\
&= n+1.
\end{aligned}$$

Dalje, vrijedi

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2 \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+2} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{n!} \Gamma(n+3) \\ &= \frac{(n+2)!}{n!} \\ &= (n+2)(n+1), \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= (n+2)(n+1) - (n+1)^2 \\ &= n^2 + 3n + 2 - n^2 - 2n - 1 \\ &= n + 1. \end{aligned}$$

▲

ZADATAK 3.2.8. *Neka slučajna promjenljiva X ima funkciju gustine*

$$f(x) = \begin{cases} a \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x \leq 0 \text{ ili } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

a. Odrediti vrijednost konstante a.

b. Odrediti matematičko očekivanje i disperziju slučajne promjenljive X.

c. Odrediti matematičko očekivanje slučajne promjenljive $Y = X + 2$.

Rješenje:

a. Kako je f funkcija gustine, mora vrijediti

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

pa imamo

$$1 = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = a \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = a(1-0) = a.$$

Dakle, tražena konstanta je $a = 1$.

b. Na osnovu definicije matematičkog očekivanja, imamo

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx \\ &|u = x, du = dx; \quad dv = \cos x dx, v = \sin x| \\ &= x\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Dalje, vrijedi

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx \\ &|u = x^2, du = 2xdx; \quad dv = \cos x dx, v = \sin x| \\ &= x^2\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx \\ &|u = x, du = dx; \quad dv = \sin x dx, v = -\cos x| \\ &= (\frac{\pi}{2})^2 - 2[-x\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx] \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2[0 + \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}] \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2, \end{aligned}$$

pa imamo

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 - \frac{\pi^2}{4} + \pi - 1 = \pi - 3.$$

c. Na osnovu osobina matematičkog očekivanja, imamo

$$E(Y) = E(X+2) = E(X) + 2 = \frac{\pi}{2} - 1 + 2 = \frac{\pi}{2} + 1.$$

▲

ZADATAK 3.2.9. *Naći disperziju slučajne promjenljive X, ako je*

a. $X \sim B(n,p)$,

b. $X \sim P(\lambda)$,

c. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

Rješenje:

a. Prvobitno se iz prethodne sekcije prisjetimo da je $E(X) = np$. Da bi izračunali disperziju neophodno je još da izračunamo $E(X^2)$. Kako slučajna promjenljiva $X \sim B(n,p)$ ima sljedeći zakon raspodjele

$$X : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ (1-p)^n & \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} & \binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2} & \dots & \binom{n}{n}p^n \end{pmatrix},$$

to vrijedi

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_k x_k^2 p_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [k(k-1)+k] \cdot \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot [(n-2)-(k-2)+1]}{(k-2)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot [(n-1)-(k-1)+1]}{(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} + n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k} + np\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2 \cdot 1 + np \cdot 1 \\
&= n(n-1)p^2 + np.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= E(X^2) - E(X)^2\\ &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2\\ &= np[(n-1)p + 1 - np]\\ &= np(np - p + 1 - np)\\ &= np(1-p).\end{aligned}$$

b. Prvobitno se iz prethodne sekcije prisjetimo da je $E(X) = \lambda$. Da bi izračunali disperziju neophodno je još da izračunamo $E(X^2)$. Kako slučajna promjenljiva $X \sim P(\lambda)$ ima sljedeći zakon raspodjele

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} & \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} & \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} & \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} & \dots & \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} & \dots \end{pmatrix},$$

to vrijedi

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \sum_k x_k^2 p_k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [k(k-1) + k] \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!}\\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}\\ &= \lambda^2 + \lambda.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

c. Prvobitno se iz prethodne sekcije prisjetimo da je $E(X) = \mu$. Da bi izračunali disperziju neophodno je još da izračunamo $E(X^2)$. Kako slučajna promjenljiva $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ima funkciju gustine

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

to vrijedi

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
& |\frac{x-\mu}{\sigma} = s, x = \sigma s + \mu| \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \sigma \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^2 s^2 + 2\sigma\mu s + \mu^2) e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} s^2 e^{-\frac{1}{2}s^2} ds + 2\sigma\mu \int_{-\infty}^{\infty} s e^{-\frac{1}{2}s^2} ds + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2}] ds \\
& |u = s, du = ds; \quad dv = s e^{-\frac{1}{2}s^2}, v = -e^{-\frac{1}{2}s^2}| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\sigma^2 (-s e^{-\frac{1}{2}s^2}|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds) - 2\sigma\mu e^{-\frac{1}{2}s^2}|_{-\infty}^{\infty} + \mu^2\sqrt{2\pi}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\sigma^2 (0 + \sqrt{2\pi}) - 2\sigma\mu \cdot 0 + \mu^2 \sqrt{2\pi}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\sigma^2 \sqrt{2\pi} + \mu^2 \sqrt{2\pi}] \\
&= \sigma^2 + \mu^2.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2.$$

▲

Konačno, prisjetimo se da smo u nekoliko primjera ranije standardizovali određene slučajne promjenljive kako bi mogli riješiti postavljene probleme. Naime, koristili smo činjenicu da, ukoliko slučajna promjenljiva X ima matematičko očekivanje $E(X)$ i disperziju $\sigma^2(X)$, onda slučajna promjenljiva

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma}$$

ima matematičko očekivanje 0 i disperziju 1, a sada ćemo to i pokazati.

ZADATAK 3.2.10. *Naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promjenljive* $X^* = \frac{X-E(X)}{\sigma}$.

Rješenje: Na osnovu utvrđenih osobina koje zadovoljava matematičko očekivanje, imamo

$$\begin{aligned} E(X^*) &= E(\frac{X-E(X)}{\sigma}) \\ &= E[\frac{1}{\sigma}(X-E(X))] \\ &= \frac{1}{\sigma}E(X-E(X)) \\ &= \frac{1}{\sigma}[E(X)-E(X)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Na osnovu istih osobina, vrijedi

$$\begin{aligned} E(X^{*2}) &= E[(\frac{X-E(X)}{\sigma})^2] \\ &= E[\frac{1}{\sigma^2}(X-E(X))^2] \\ &= \frac{1}{\sigma^2}E(X^2-2XE(X)+E(X)^2) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}[E(X^2)-2E(X)E(X)+E(X)^2] \\ &= \frac{1}{\sigma^2}[E(X^2)-2E(X)^2+E(X)^2] \\ &= \frac{1}{\sigma^2}[E(X^2)-E(X^2)] \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 \\ &= 1, \end{aligned}$$

pa je dalje

$$\sigma^2(X^*) = E(X^{*2}) - E(X^*)^2 = 1 - 0^2 = 1.$$

▲

Poglavlje 4

Karakteristične funkcije

Karakteristične funkcije moćan su alat za dokazivanje mnogih teorema teorije vjerovatnoće, ali i rješavanje nekih zadataka. Međutim, takvi su zadaci ipak više teoretskog tipa, i na pismenom dijelu ispita se najčešće izostavljaju. Kako se njihova primjena obično vrlo jasno demonstrira na samim predavanjima, studenti se upućuju na rješavanje i razumijevanje istih.

Poglavlje 5

Granične teoreme teorije vjerovatnoće

Granične teoreme teorije vjerovatnoće podrazumijevaju niz od nekoliko važnih teorema, od kojih su prve Chebyshevljeva nejednakost, zakon velikih brojeva, centralna granična teorema, kao i lokalna i integralna Moivre-Laplace-ova teorema. Rezultate koji su nam za rješavanje zadataka najvažniji već smo spominjali u prethodnim poglavljima (Poisson-ova i normalna raspodjela, pod određenim uslovima, dovoljno dobro aproksimiraju binomnu raspodjelu) i to kroz više urađenih primjera i laboratorijskih vježbi, pa ćemo ih ovdje izostaviti.