Primeira Lista de Exercícios: Revisão de Probabilidade

Justifique e/ou desenvolva os cálculos de suas respostas.

Exercício 1. Um dado equilibrado é lançado 2 vezes e os números obtidos nos dois lançamentos são registrados. Considere os seguintes eventos aleatórios:

$$\begin{aligned}
A &= \text{soma maior ou igual a 10.}\\
B &= \text{soma par.}\\
C &= \text{pelo menos um dos lançamentos foi 5.}\\
D &= \text{o mínimo entre as duas faces é 4.}
\end{aligned}$$

Calcule as seguintes probabilidades: $P(A)$, $P(B|C)$, $P(B|A)$ $P(A \cap D)$ e $P(C \cup D)$.

Exercício 2. Um exame de sangue feito por um laboratório tem eficiência de 95% para detectar uma certa doença quando ela de fato existe. Entretanto, o teste aponta um resultado falso-positivo para 2% das pessoas sadias testadas (isto é, se uma pessoa testada for saudável, então, com probabilidade 0,02, o teste indicará que a pessoa sadia tem a doença). Se 0,3% da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que o resultado de seu exame foi positivo?

Exercício 3. Considere três urnas com as seguintes configurações: a urna I contém 6 bolas pretas, 2 brancas e 5 vermelhas; a urna II contém 4 bolas pretas, 5 brancas e 2 vermelhas; a urna III contém 4 bolas pretas, 2 brancas e 8 vermelhas. Lança-se um dado equilibrado. Se sair 5, uma bola da urna I é retirada; se sair 1, 4, então uma bola da urna II é retirada; se sair 2, 3 ou 6, então uma bola da urna III é retirada.

(a) Calcule a probabilidade da bola retirada ser branca.

(b) Calcule a probabilidade de ter sido sorteada a urna III, sabendo-se que a bola retirada foi branca.

Exercício 4. Os amigos Michael Scott, Dwight Schrute, Jim Halpert e Kevin Malone desejam fazer um *amigo oculto* entre eles. Calcule a probabilidade de que este amigo oculto dê errado.
Obs: um amigo oculto dá errado quando uma pessoa sorteia ela mesma.

Exercício 5. Luke Skywalker está na origem de uma reta. Um esboço da situação pode ser visto na Figura 1. Luke lança uma moeda honesta; se sair coroa, ele dá um passo para a esquerda (e termina na posição -1 da reta); se sair cara, ele dá um passo para a direita (e termina na posição 1 da reta).

Suponha que no primeiro lançamento tenha saído cara. Aí, agora na posição 1, ele lança novamente a moeda: se cara, um passo para a direita; se coroa um passo para a esquerda. Suponha que novamente tenha saído cara. Na posição 2 da reta ele irá jogar novamente a moeda e irá proceder da mesma forma que nos dois passos anteriores.

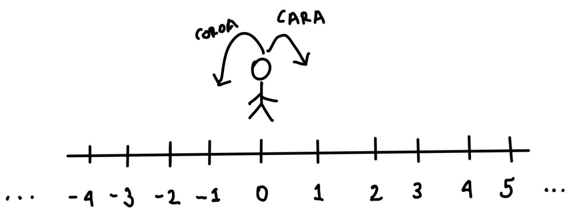

Figura 1: Passeio aleatório simétrico na reta.

(a) Yoda diz: *Luke à origem só pode voltar depois de um número par de rodadas.* Você concorda com Yoda? Justifique sua resposta.

(b) Luke está na origem da reta. Calcule a probabilidade dele retornar à origem depois de 4 passos.

Exercício 6. Seja X uma variável aleatória tal que

$$P(X=1)=\frac{2}{10},\ P(X=3)=\frac{1}{10},\ P(X=5)=\frac{4}{10} \quad \text{e} \quad P(X=12)=\frac{3}{10}.$$

(a) Calcule $P(X<6)$.

(b) Calcule $P(X \geq 4)$.

(c) Calcule a esperança e a variância de X.

(d) Esboce o gráfico da função de distribuição acumulada de X.

Exercício 7. Consideremos o lançamento de dois dados equilibrados. O espaço amostral desse experimento é formado pelos pares ordenados (i,j), em que $i,j=1,2,3,4,5,6$. Suponhamos que nosso interesse esteja no máximo das faces dos dois dados, isto é, vamos considerar a variável aleatória X que é dada por:

$$X = \text{o máximo das faces dos dois dados.}$$

Assim, por exemplo, se o resultado do experimento foi $(2,4)$, teremos que o valor de X neste ponto será 4, pois

$$X(2,4) = \text{máximo}\{2,4\} = 4.$$

Análise similar nos permite afirmar que se o resultado do experimento foi $(5, 5)$, então X assumirá, neste ponto, o valor 5. Em relação a esta variável aleatória X, responda:

(a) Quais os valores que X assume?

(b) Para cada valor k que X assume, determine $P(X = k)$.

(c) Calcule $P(X < 3)$ e $P(X \geq 3)$.

(d) Calcule $P(X > 2|X < 5)$.

(e) Esboce o gráfico da função de distribuição acumulada de X.

Exercício 8. Seja $X \sim \mathcal{N}(9, 4)$. Obtenha:

(a) $P(X \geq 11)$.

(b) $P(X < 5)$.

(c) Represente graficamente as probabilidades obtidas em (a) e (b).

(d) O valor de a tal que $P(X \leq a) = 0.04$.

Exercício 9. Num teste educacional com crianças, o tempo para a realização de uma bateria de questões de raciocínio verbal e lógico é medido e anotado para ser comparado com um modelo teórico. Este teste é utilizado para identificar o desenvolvimento das crianças e auxiliar a aplicação de medidas corretivas. O modelo teórico considera T, tempo de teste em minutos, como uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{40}(t-4), & 8 \leq t < 10; \\ \frac{3}{20}, & 10 \leq t \leq 15; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico de f.

(b) Prove que f é, de fato, uma função densidade.

(c) Calcule $P(1 < T \leq 13)$.

(d) Calcule $P(10 < T \leq 12)$.