LISTA 3 MCC

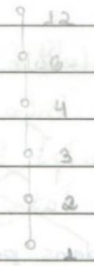
ALUNA: RENATA CRISTINA GOMES DA SILVA **11721BCC012**

Lista 3 - MCC - Ordem parcial

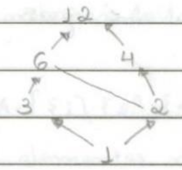
Aluna: Renata Cristina Gomes da Silva 11721BCC012

01- Fazer um diagrama de Hasse das seguintes ordens no conjunto A = $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

a) ordem habitual

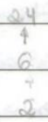


b) ordem por divisibilidade ($x \leq y \Leftrightarrow x | y$)



02- 1) Dizer se cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{N}$ é ou não totalmente ordenado pelas relações de ordem de divisibilidade.

a) $\{24, 2, 6\}$

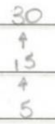


É totalmente ordenado.

b) $\{3, 15, 5\}$

Não é totalmente ordenado pelas relações de ordem de divisibilidade.

c) $\{15, 5, 30\}$



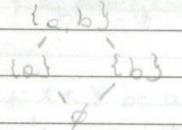
Não é totalmente ordenado.

d) N Não é totalmente ordenada pois 2 e 3 não são comparáveis

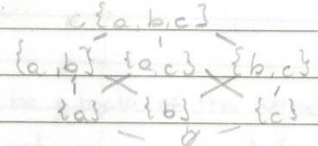
03. Fazer um diagrama de Hasse da relação de ordem por inclusão em $E = \mathbb{P}(\{a,b\})$ e em $F = \mathbb{P}(\{a,b,c\})$
conj. dos subc. de $\{a,b\}$

E $\emptyset$ - $\{a\}$ $\{b\}$ $\{a,b\}$

F $\emptyset$ $\{a\}\{b\}\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$ $\{a,b,c\}$



$\emptyset \subseteq \{a\}$



04. Quais destas relações em $\{0,1,2,3\}$ são ordens parciais? Determine as propriedades de uma ordem parcial que estão faltando nas outras.

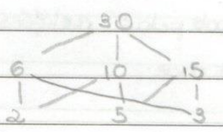
a) $\{(0,0),(2,2),(3,3)\}$ Reflexiva. Falta $(1,1)$. Não é ordem parcial

b) $\{(0,0),(1,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ é ordem parcial.

c) $\{(0,0),(1,1),(1,2),(2,2),(3,1),(3,3)$
$3 \leq 1$, $1 \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 2$. Falta $(3,2)$ então não é ordem parcial
Transitiva

d) $\{(0,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,2),(2,3),(3,0)(3,3)\}$
$1 \leq 3$, $3 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq 0$. Não é ordem parcial. Transitiva

05. Fazer um diagrama de Hasse da relação de ordem por divisibilidade em $A = \{2,3,5,6,10,15,30\}$. Quais são elementos máximo e mínimo, elementos maximais e minimais de A.



Máximo: 30
Mínimo: Não tem.

Maximais: 30
Minimais: 2, 3, 5

06- Fazer um diagrama de Hasse da relação de ordem por inclusão em:

$E = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c,d,e\}\}$

Quais são os elementos máximo e mínimo, e elementos maximais e minimais de E?

$\{a,b,c,d\}$ $\{a,b,c,d,e\}$

Maximal e maximo: $\{a,b,c,d,e\}$

$\{a,b,c,d,e\}$

$\{a,b,c,d\}$

$\{a,b,c\}$ $\{a,b,d\}$

$\{a\}$ $\{b\}$

Minimo: não tem

Minimal: $\{a\}, \{b\}$

07- Fazer um diagrama de Hasse de relação de ordem parcial por inclusão em:

$A = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$.

Quais são os elementos máximo e mínimo, elementos maximais e minimais

$\{1,3,4\}$ $\{2,3,4\}$

$\{1,2\}$ $\{1,4\}$ $\{2,4\}$ $\{3,4\}$

$\{1\}$ $\{2\}$ $\{4\}$

Maximo e minimo: não tem

maximal: $\{1,3,4\}$ $\{2,3,4\}$

minimais: $\{1\}, \{2\}$ $\{4\}$

~~08- Em $N^+ \times N^+$ define-se $(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow a|c$ e $b \leq d$. Mostre que esta relação é uma relação de ordem parcial em $N^+ \times N^+$~~

09- Provar que se R é uma relação de ordem parcial sobre E, então R^{-1} também é.

Demonstração ① $x R^{-1} x$, $x R x$ pois R é reflexiva. Logo, $x R^{-1} x$

② $x R^{-1} y$, $y R^{-1} \Rightarrow x = y$

$\left.\begin{array}{l} x R^{-1} y \Rightarrow y R x \\ y R^{-1} x \Rightarrow x R y \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$ R é antissimétrica

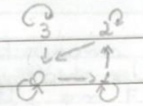
③ $\left.\begin{array}{l} x R^{-1} y \Rightarrow y R x \\ y R^{-1} z \Rightarrow z R y \end{array}\right\} \Rightarrow z R x$ R é transitivo

$z R x \Rightarrow x R^{-1} z$

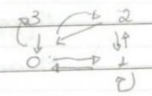
$\boxed{R^{-1} \text{ é ordem parcial sobre } E.}$

10- Seja R a relação no conjunto $\{0,1,2,3\}$ que contém os pares ordenados $(0,1),(1,1),(1,2),(2,0),(3,0)$. Encontre o fecho ~~transitivo~~ reflexivo e o fecho simétrico de R.

Fecho reflexivo $\Rightarrow R \cup I_A \Rightarrow \{(0,1),(1,1),(1,2),(2,0),(3,0),(0,0),(2,2),(3,3)\}$



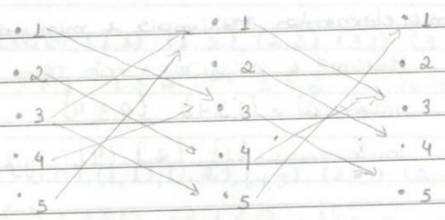
Fecho simétrico de R $\Rightarrow R \cup R^{-1} \Rightarrow \{(0,1),(1,1),(1,2),(2,0),(3,0),(1,0),(2,1),(0,2),$
$(0,3)\}$



12- Seja R uma relação no conjunto $\{1,2,3,4,5\}$ que contém os pares ordenados $(1,3),(2,4),(3,1),(3,1),(3,5),(4,3),(5,1)$. Encontre $R^2, R^3, R^4, R^5, R^6, R^*$

$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5 = (R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5)$

$R^2 = R \circ R$ $\qquad\qquad R^3 = R \circ R \circ R = (R^2) \circ R$



$R2 = \{(1,1),(1,5),(2,3),(3,3),(3,1),$
$(4,1),(4,5),(5,3)\}$

$M_R = (M_{ij}) \qquad m_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in R \\ 0 & (i,j) \notin R \end{cases}$

	1	2	3	4	5
1	0	0	1	0	0
2	0	0	0	1	0
3	1	0	0	0	1
4	0	0	1	0	0
5	1	0	0	0	0

$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$M_{SoR} = M_R \odot M_S$ $\quad S = R$

$M_R^2 = M \circ M \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0 \\ 1&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

R^2 Tem 8 pares

$$M_R^3 = M_R^2 \circ M_R \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0 \\ 1&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&1 \\ 1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

R^3 tem 11 pares

$$M^4 = M_R^3 \cdot M_R = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&1 \\ 1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&0 \\ 1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

R^4 tem 13 pares

$$M_R^5 = M_R^4 \cdot M_R = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&0 \\ 1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1 \end{pmatrix}$$

R^5 tem 15 pares

$M_R^6 = M_R^5$ $\quad R^5 = R^6$

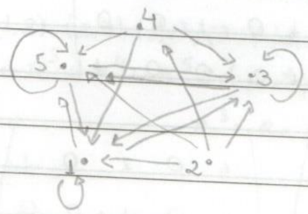
$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5$ fecho transitivo

$M_R^* = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 \vee M_R^4 \vee M_R^5$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R^* tem 16 pares



Fecho Transitivo de R.