INSTITUTO FEDERAL SUL-RIO-GRANDENSE - CAMPUS PELOTAS
ENGENHARIA ELÉTRICA

ÁLGEBRA LINEAR

DAVI FERREIRA
JAIR VIGNOLLE DA SILVA
LISIANE MENESES
MARIA DA GRAÇA PERAÇA
ODAIR ANTONIO NOSKOSKI

PELOTAS
2010

EMENTA

Matrizes, determinantes e sistemas lineares. Espaços vetoriais. Espaços vetoriais Euclidianos. Transformações Lineares. Autovalores e autovetores. Diagonalização de operadores. Forma canônica de Jordan.

PROGRAMA

UNIDADE I: MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

UNIDADE II: ESPAÇOS VETORIAIS

UNIDADE III: ESPAÇOS VETORIAIS EUCLIDIANOS

UNIDADE IV: TRANSFORMAÇÕS LINEARES

UNIDADE V: AUTOVALORES A AUTOVETORES

UNIDADE VI: DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

UNIDADE VII: POLINÔMIO MINIMAL E FORMA CANÔNICA DE JORDAN

BIBLIOGRAFIA:

STEINBRUCH, A. e WINTERLE, p., Álgebra Linear.

HOFFMAN, K., Álgebra Linear.

POOLE, D., Álgebra Linear.

LIPSCHUTZ, S., Álgebra Linear. São Paulo: Makron Books, 1994. - (Coleção Schaum)

ANTON, H., Álgebra Linear.

CALLIOLI, C. A., Álgebra Linear.

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/index.html

1 – Matrizes, Determinantes e Sistemas

1.1 MATRIZES

Definição: Uma matriz é um agrupamento retangular de números. Os números neste agrupamento são chamados *elementos* ou *entradas* da matriz.

Chama-se matriz do tipo m x n (m linhas e n colunas) a qualquer tabela de m.n elementos dispostos.

As linhas de uma matriz são enumeradas de cima para baixo, e as colunas são enumeradas da esquerda para a direita.

Um elemento genérico de uma matriz A é denotado por $\mathbf{a_{ij}}$, onde i representa a linha e o j representa a coluna no qual esse elemento pertence.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A = a_{ij}}, \text{ onde } 1 \leq \mathbf{i} \leq m \text{ e } 1 \leq \mathbf{j} \leq n$$

Exercícios:

1) Represente a matriz $\mathbf{A_{mxn}}$ de acordo com o elemento genérico $\mathbf{a_{ij}}$.

(a) m = 2, n = 4, sabendo que $\mathbf{a_{ij}} = \mathbf{3i + j}$.

(b) m = 3, n = 3, sabendo que $\mathbf{a_{ij}} = \begin{cases} i + j, se\ i = j \\ 2ij, se\ i \neq j \end{cases}$

(c) m = 3, n = 3, sabendo que $\mathbf{a_{ij}} = \begin{cases} i, se\ i < j \\ ij, se\ i = j \\ i - j, se\ i > j \end{cases}$

1.1.1 Classificação de Matrizes:

Matriz Linha: é uma matriz formada por uma única linha.

Ex: A = $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, matriz 1x3

Matriz Coluna: é a matriz formada por uma única coluna.

Ex: A = $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, matriz 4x1

Matriz Zero (Nula): é a matriz com todas suas entradas nulas. Uma matriz zero sempre será denotada por **0**.

Ex: $\mathbf{0}_{\mathbf{2x2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz Quadrada: é aquela que possui o número de linhas igual ao número de colunas. Uma matriz quadrada nxn é chamada de matriz de ordem n.

Ex: A = $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$, matriz de ordem 2

Matriz Diagonal: é toda matriz quadrada em que todos os elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos.

Ex: A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a_{ij}}$ não nulo, se i = j, e $\mathbf{a_{ij}}$ = 0, se i $\neq$ j.

Matriz Identidade: é toda matriz diagonal em que seus elementos da diagonal principal são todos iguais a 1.

Ex: $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a_{ij}}$ = 1, se i = j, e $\mathbf{a_{ij}}$ = 0, se i $\neq$ j.

Matriz Transposta: é a matriz que se obtém transformando ordenadamente cada linha de A em coluna. Denota-se A^t.

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}$, $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 2 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

Obs:

$\mathbf{(A^t)^t = A}$, ou seja, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.

$\mathbf{(A \pm B)^t = A^t \pm B^t}$

Matriz Triangular Superior: é a matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja, $\mathbf{a_{ij} = 0}$, para $i > j$

Matriz Triangular Inferior: $\mathbf{a_{ij} = 0}$, para $i < j$

Exemplos:

$S = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular superior e

$F = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ y & z & 0 \\ w & r & s \end{bmatrix}$ uma matriz triangular inferior

Matriz Simétrica: matriz quadrada onde $\mathbf{a_{ij} = a_{ji}}$.

Obs: Neste caso, a parte superior é uma "reflexão" da parte inferior, em relação à diagonal principal

Exemplo: $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

Propriedade: Uma matriz M é simétrica $\Leftrightarrow$ $\mathbf{M = M^t}$

Igualdade de Matrizes: Duas matrizes do mesmo tipo m x n são iguais, se e somente se, os elementos correspondentes são iguais.

Exemplo: Se $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ então,

a =2, b = -3, c = 4, d = 7

Exercícios:

1. Se A_{3x2}, com $a_{ij} = \dfrac{2i-j}{2}$, determine as matrizes A e A^t.

2. Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, calcular a matriz:

(**2.1**) M, tal que M – 2A + 3B = 0. Obs: Neste caso 0 é a matriz nula 3x1.

(**2.2**) N, tal que N = $A^t - 2B^t$

(**2.3**) X que seja solução da equação matricial 2X – A + $\frac{1}{2}$B = 0.

3. Determine os números **a** e **b** tais que W = aX + bY, onde

(3.1) W = $\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$, **X =** $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, **Y =** $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(3.2) W = $\begin{bmatrix} -9 & -14 \end{bmatrix}$**,** **X =** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$**,** **Y =** $\begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$

4. Determine os números **a, b, c** e **d** tais que W = aX + bY + cZ + dR, onde

W = $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$**, X=** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$**, Y=** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$**, Z=** $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$**, R=** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$**,**

Resposta: (3.1) a=-1, b=2, (3.2) a=3, b=-4; (4) a=2, b=-4, c=1, d=3

Produto de Matriz por Matriz

Condição para o produto entre matrizes:

O número de colunas da primeira matriz tem que ser igual ao número de linhas da segunda matriz.

$$\underset{m\times r}{A}\times\underset{r\times n}{B}=\underset{m\times n}{C}$$

1.1.2 Propriedades Matriciais

Supondo que os tamanhos das matrizes A, B, C são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas, valem as seguintes propriedades.

Considere a, b, c números reais.

(**a**) **A** + **B** = **B** + **A** — Comutatividade da adição

(**b**) **A + (B + C) = (A + B) + C** — Associatividade da adição

(**c**) **A(BC) = (AB)C** — Associatividade da multiplicação

(**d**) **A(B** ± **C) = AB** ± **AC** — Distributividade à esquerda

(**e**) **(A** ± **B)C = AC** ± **BC** — Distributividade à direita

(**f**) a**(B** ± **C) =** a**B** ± a**C**

(**g**) (a ± b)**C** = a**C** ± b**C**

(**h**) a(b**C**) = a(b**C**)

(**i**) a(**BC**) = (a**B**)**C** = **B**(a**C**)

Cuidado! Em geral AB ≠ BA

Exercício 5: Sejam A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(5.1) Calcule AB e BA. (5.2) Determine $\mathbf{(AB)^t}$, $\mathbf{A^tB^t}$ **e** $\mathbf{B^tA^t}$**.** Compare os resultados**.** Resposta: (5.1) AB = 0, BA = $\begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

Outras propriedades:

(j) $\mathbf{(A^t)^t = A}$, ou seja, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.

(k) $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^{\mathbf{t}} = \mathbf{A^t} \pm \mathbf{B^t}$

(l) $\mathbf{(AB)^t = B^tA^t}$ **(**Observem a ordem!!!**)**

(m) AI = IA = A

(n) A.0 = 0.A = 0

Matriz Inversa

Uma matriz quadrada A de ordem **n** é inversível se, e somente se, existir uma matriz B tal que

$\mathbf{AB = BA = I_n}$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Desta forma para a matriz B utiliza-se a seguinte notação: $\mathbf{B = A^{-1}}$ (lê-se B é igual à inversa de A).

Exercicio: Verifique que as matrizes A = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ são inversíveis entre si.

Importante: Nem sempre uma matriz é inversível. Uma matriz A é inversível se, e somente se, o determinante de A for diferente de zero.

Propriedades da Matriz Inversa:

Sejam A e B matrizes inversíveis. Então valem as propriedades:

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iii) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ A inversa da transposta é a transposta da inversa

Exemplo: Determine a inversa da matriz A = $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$

Esta matriz tem inversa pois det A $\neq 0$. Procuremos sua inversa tal que

A.B = I e B.A = I

Impondo a primeira condição temos, $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 6a+2c & 6b+2d \\ 11a+4c & 11b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Portanto, $\begin{cases} 6a+2c=1 \\ 11a+4c=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 6b+2d=0 \\ 11b+4d=1 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, temos

a = 2, b = -1, c = -11/ 2, d = 3

Teremos então, **A.B** = $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{-11}{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, **A.B = I**.

Também vale B.A = I.

Portanto, B = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{-11}{2} & 3 \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de A.

Exercícios:

1) Sejam B = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(a) Justifique que B é uma matriz não inversível e A é inversível.

(b) Calcule $\mathbf{(AC)^{-1}}$, $\mathbf{A^{-1}C^{-1}}$ e $\mathbf{C^{-1}A^{-1}}$. Compare os resultados.

(c) Determine $\mathbf{(A^t)^{-1}}$ e $\mathbf{(A^{-1})^t}$

02) Calcule os valores de m e n para que as matrizes A e B sejam iguais:

a) $A = \begin{bmatrix} 8 & 15n \\ 12+n & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 8 & 75 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} m^2 - 40 & n^2 + 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 41 & 13 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & x^2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 10x - 25 \end{bmatrix}$

03) Dadas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 7 & -4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -7 \\ 6 & 2 & -8 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} e\ D = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & -8 \\ -3 & -1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 9 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, calcular:

a) AB b) (AB)D c) A(BD) d) BA e) (BA)C f) B(AC)

04) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & -1 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -9 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 8 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, calcular:

a) A+B b) B+C c) A+C d) A – B e) A- C f) B-C

g) X= 4A – 3B + 5C   h) X = 2B – 3A – 6C

05) Verifique se a matriz B é a inversa da matriz A nos seguintes casos:

a) $A = \begin{bmatrix} -0{,}5 & -1{,}5 & 1 \\ -0{,}5 & -2{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -12 & -4 & 14 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 4 & -6 & -6 \\ -4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1{,}5 & 2 & -1{,}5 \\ 2 & -2{,}5 & 1{,}5 \\ -1 & 1 & -0{,}5 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \\ 10 & -8 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -0{,}5 \\ 1{,}5 & -2 & 1 \\ -5{,}5 & 6{,}5 & -3{,}5 \end{bmatrix}$

06) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ -8 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 2 \\ -8 & 1 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $(AB)^T$ b) $(AB)D^T$ c) $A(BD^T)$ d) $2(A^TB^T)+3C^T$

07) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & -9 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -7 \\ 8 & 1 & -9 \end{bmatrix}$,

efetuar e classificar a matriz resultante:

a) $A + A^T$ b) $B + B^T$ c) AA^T d) $B - B^T$ e) $C - C^T$

08) Efetue as operações indicadas e classifique as seguintes matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2\sqrt{6}}{5} \\ \frac{2\sqrt{6}}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ -9 & -12 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & -9 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) AA^T f) F^2 l) M^2

b) BB^T g) G^2

c) CC^T h) H^3

d) DD^T i) J^2

e) EE^T j) L^2

09) Sejam as matrizes triangulares superiores (A e B) e inferiores (C e D)

a) calcular e classificar a matriz E = AB

b) calcular e classificar a matriz F = CD

10) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & -9 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 12 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$,

Calcular, pelo processo da triangularização ou por Laplace ou por Sarrus:

a) det A b) det B c) det (2A-3B+4C) d) det (AC^T) e) det (CB)A

11) Calcular o determinante da matriz $H=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, usando o processo de triangularização e por Laplace (desenvolvendo-o pela 2ª linha.)

12) Sendo U = IR, resolver as seguintes equações:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & x \\ 5 & 2 & -x \\ 7 & 4 & 2x \end{vmatrix} = -128$ b) $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 & x+4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 9 & 10 & 7 \end{vmatrix} = -7$ c) $\begin{vmatrix} 12-x & 1 & 1 \\ 18-2x & 3 & 2 \\ 15-2x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

13) Determinar, se existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes:

a) $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e) $E=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ f) $F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14) Resolver e classificar os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 5x + 8y = 34 \\ 10x + 16y = 50 \end{cases}$ Rta: Sistema Incompatível $S=\{\ \}$

b) $\begin{cases} 4x - y - 3z = 15 \\ 3x - 2y + 5z = -7 \\ 2x + 3y + 4z = 7 \end{cases}$ Rta: S.L.C.D $S=\{(3,3,-2)\}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 5y + 4z = 5 \\ x - 2y - 7z = -24 \end{cases}$ Rta: S.L.C.D. $S=\{(1,2,3)\}$

d) $\begin{cases} x + 4y + 6z = 0 \\ -\frac{3}{2}x - 6y - 9z = 0 \end{cases}$ Rta: S.L.C.I. $S=\{(-4y-6z,y,z),\forall y,z \in IR\}$

e) $\begin{cases} 4x - 3y = -18 \\ 2y + 5z = -8 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$ Rta: S.L.C.D. $S = \{(0, -6, 4)\}$

f) $\begin{cases} x + 4y + 6z = 11 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \\ 3x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$ Rta: S.L.C.I. $S = \left\{\left(\frac{3+2z}{5}, \frac{13-8z}{5}, z\right), \forall z \in IR\right\}$

g) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + 4z = 6 \\ x + y + 4z = 6 \end{cases}$ Rta: S.L.C.I. $S = \{(3-2z, 3-2z, z)\ \forall z \in IR\ \}$

h) $\begin{cases} 7x - 2y + 4z = -15 \\ 9x + 3y - 3z = 0 \\ x - 4y - z = -8 \end{cases}$ Rta: S.L.C.D. $S = \{(-1, 2, -1)\}$

15) Estabelecer a condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes para que os seguintes sistemas sejam compatíveis:

a) $\begin{cases} 4x + 12y + 8z = a \\ 2x + 5y + 3z = b \\ -4y - 4z = c \end{cases}$

Rta: 2a – 4b + c = 0

b) $\begin{cases} x + y - z = a \\ -x + 2z = b \\ y + z = c \end{cases}$

Rta: a + b −c = 0

1.2 Determinante

A toda matriz quadrada A está associado um número chamado **determinante** de A e simbolizado por det A.

1.2.1 Cálculo do determinante

a) Determinante de matrizes de 2ª Ordem

A= $\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix} \Rightarrow$ det A = ay - bx

Exemplo:

1) Se A = $\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ então, det A = (- 3) . (4) – (- 5) . (8) det A = - 12 + 40 det A = 28

b) Determinante de matrizes de 3ª Ordem (regra de Sarrus)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ p & q & r & p & q \\ x & y & z & x & y \end{vmatrix} = (aqz + brx + cpy) - (cqx + ary + bpx).$$

Exemplo:

Se B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 7 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ então, det B = $\left|\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 7 \\ 5 & -2 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \\ 5 & -2 \end{matrix}\Bigg|$

det B = (1)(3)(0)+(-1)(7)(5)+(0)(3)(-2)–(0)(-3)(5)–(1)(7)(-2)–(-1)(3)(0)

det B = 0 – 35 + 0 – 0 + 14 – 0 det B = - 21

1.3 EQUAÇÃO LINEAR

É uma equação da forma

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1$$

onde

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas;
- $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ são os coeficientes (reais ou complexos);
- b_1 é o termo independente (número real ou complexo).

Exemplos de equações lineares

1. $4x + 3y - 2z = 0$
2. $2x - 3y + 0z - w = -3$
3. $x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1$
4. $4i\,x + 3y - 2z = 2-5i$

Exemplos de equações não-lineares

1. $3x + 3y\sqrt{x} = -4$
2. $x^2 + y^2 = 9$
3. $x + 2y - 3zw = 0$
4. $x^2 + y^2 = -9$

SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LINEAR

Uma sequência de números reais (r_1,r_2,r_3,r_4) é solução da equação linear

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$$

se trocarmos cada x_i por r_i na equação e este fato implicar que o membro da esquerda é identicamente igual ao membro da direita, isto é:

$$a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + a_{13}r_3 + a_{14}r_4 = b_1$$

Exemplo: A sequência (5,6,7) é uma solução da equação $2x+3y-2z=14$ pois, tomando $x=5$, $y=6$ e $z=7$ na equação dada, teremos:

$$2\times5 + 3\times6 - 2\times7 = 14$$

1.3.1 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Um sistema de equações lineares ou sistema linear é um conjunto formado por duas ou mais equações lineares. Um sistema linear pode ser representado na forma:

$$a\mathbf{11}\,x\mathbf{1} + a\mathbf{12}\,x\mathbf{2} + \cdots + a\mathbf{1n}\,x\boldsymbol{n} = b\mathbf{1}$$

$$a\mathbf{21}\,x\mathbf{1} + a\mathbf{22}\,x\mathbf{2} + \ldots + a\mathbf{2n}\,x\boldsymbol{n} = b\mathbf{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a\boldsymbol{m}\mathbf{1}\,x\mathbf{1} + a\boldsymbol{m}\mathbf{2}\,x\mathbf{2} + \ldots + a\boldsymbol{mn}\,x\boldsymbol{n} = b\boldsymbol{n}$$

onde

- x_1, x_2, ..., x_n são as incógnitas;
- a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn} são os coeficientes;
- b_1, b_2, ..., b_m são os termos independentes.

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Uma sequência de números $(r_1, r_2, ..., r_n)$ é solução do sistema linear:

$$
\begin{gathered}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n = b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n = b_2 \\
... \; ... \; ... \; ... \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n = b_n
\end{gathered}
$$

se satisfaz identicamente a *todas* as equações desse sistema linear.

Exemplo: O par ordenado (2,0) é uma solução do sistema linear:

$$
\begin{gathered}
2x + y = 4 \\
x + 3y = 2 \\
x + 5y = 2
\end{gathered}
$$

pois satisfaz identicamente a todas as equações do mesmo, isto é, se substituirmos $x=2$ e $y=0$, os dois membros de cada igualdade serão iguais em todas as equações.

Consistência de sistemas lineares

O número de soluções de um sistema linear determina a sua classificação de duas maneiras com relação à sua consistência:

Sistema possível ou consistente: Quando tem pelo menos uma solução.

a. Se tem uma única solução, o sistema é determinado.

b. Se tem mais que uma solução, o sistema é indeterminado.

Sistema impossível ou inconsistente: Se não admite qualquer solução.

EXEMPLOS

Sistema com uma única solução: As equações lineares abaixo representam duas retas no plano cartesiano que têm o ponto (3,-2) como interseção.

$$x + 2y = -1$$

$$2x - y = 8$$

Sistema com infinitas soluções: As equações lineares representam retas paralelas sobrepostas no plano cartesiano, logo existem infinitos pontos que satisfazem a ambas as equações (pertencem a ambas as retas).

$$4x + 2y = 100$$

$$8x + 4y = 200$$

Sistema que não tem solução: As equações lineares representam retas paralelas no plano cartesiano, logo, não existem pontos que pertençam às duas retas.

$$x + 3y = 4$$

$$x + 3y = 5$$

Sistemas equivalentes

Dois sistemas são equivalentes se admitem a mesma solução.

Exemplo: São equivalentes os sistemas S1 e S2 indicados abaixo:

$$S1 \begin{array}{l} 3x + 6y = 42 \\ 2x - 4y = 12 \end{array} \qquad S2 \begin{array}{l} 1x + 2y = 14 \\ 1x - 2y = 6 \end{array}$$

pois eles admitem a mesma solução x=10 e y=2.

Notação: Quando dois sistemas S1 e S2 são equivalentes, usamos a notação S1~S2.

Operações elementares sobre sistemas lineares

Existem três tipos de operações elementares que podem ser realizadas sobre um sistema linear de equações de forma a transformá-lo em um outro sistema equivalente mais simples que o anterior. Na sequência trabalharemos com um exemplo para mostrar como funcionam essas operações elementares sobre linhas. O segundo sistema (o que aparece à direita) já mostra o resultado da ação da operação elementar. Nas linhas iniciais de cada tabela, você encontra a operação que foi realizada.

1. Troca de posição de duas equações do sistema

Troca a Linha 1 com a Linha 3		
x + 2y - z = 2		4x + y - 5z = 9
2x-3y+2z=0	~	2x-3y+2z=0
4x + y - 5z = 9		x + 2y - z = 2

2. Multiplicação de uma equação por um número não nulo

Multiplica a Linha 1 pelo número 3		
x + 2y - z = 2		3x + 6y - 3z = 6
2x-3y+2z=0	~	2x-3y+2z=0
4x+y-5z=9		4x+y-5z=9
A equação resultante fica na linha 1		

3. Adição de duas equações do sistema

Adição da Linha 2 com a Linha 3		
x+2y-z=2		3x+6y-3z=6
2x -3y + 2z = 0	~	2x-3y+2z=0
4x + y - 5z = 9		6x - 2y - 3z = 9
A equação resultante fica na linha 3		

Resolução de sistemas lineares por escalonamento

Com o auxílio das três Operações Elementares sobre linhas, podemos resolver sistemas lineares. Vamos mostrar como funciona este processo através de um exemplo.

Exemplo: Consideremos o sistema com 3 equações e 3 incógnitas.

$$3x + y + z = 20$$
$$2x - y - z = -15$$
$$-4x + y -5z = -41$$

Observação: Usamos Li+Lj->Lj para indicar a soma da linha i com a linha j com o resultado na linha j. Usamos k Li->Li, para indicar que multiplicamos a linha i pela constante k e o resultado ficou na linha i.

Passo 1: L1-L2->L1		
$3x + 1y + 1z = 20$		$1x + 2y + 2z = 35$
$2x - 1y - 1z = -15$	~	$2x-1y-1z=-15$
$-4x+1y-5z=-41$		$-4x+1y-5z=-41$

Passo 2: L2-2.L1->L2		
$1x + 2y + 2z = 35$		$1x+2y+2z=35$
$2x - 1y - 1z = -15$	~	$0x - 5y - 5z = -85$
$-4x+1y-5z=-41$		$-4x+1y-5z=-41$

Passo 3: L3+4.L1->L3		
$1x + 2y + 2z = 35$		$1x+2y+2z=35$
$0x-5y-5z=-85$	~	$0x-5y-5z=-85$
$-4x + 1y - 5z = -41$		$0x + 9y + 3z = 99$

Passo 4:(-1/5)L2->L2,(1/3)L3->L3		
$1x+2y+2z=35$		$1x+2y+2z=35$
$0x - 5y - 5z = -85$	~	$0x + 1y + 1z = 17$
$0x + 9y + 3z = 99$		$0x + 3y + 1z = 33$

Passo 5: L3-3.L2->L3		
1x+2y+2z=35		1x+2y+2z=35
0x + 1y + 1z = 17	~	0x+1y+1z=17
0x + 3y + 1z = 33		0x + 0y - 2z = -18

Passo 6: (-1/2)L3->L3		
1x+2y+2z=35		1x+2y+2z=35
0x+1y+1z=17	~	0x+1y+1z=17
0x + 0y - 2z = -18		0x + 0y + 1z = 9

Passo 7: L2-L3->L2		
1x+2y+2z=35		1x+2y+2z=35
0x + 1y + 1z = 17	~	0x + 1y + 0z = 8
0x + 0y + 1z = 9		0x+0y+1z=9

Passo 8: L1-2.L2-2.L3->L1		
1x + 2y + 2z = 35		1x + 0y + 0z = 1
0x + 1y + 0z = 8	~	0x+1y+0z=8
0x + 0y + 1z = 9		0x+0y+1z=9

Passo 9: Simplificar coeficientes		
1x + 0y + 0z = 1		x = 1
0x + 1y + 0z = 8	~	y = 8
0x + 0y + 1z = 9		z = 9

Após o escalonamento, observamos que a solução obtida é exatamente fornecida pelo último sistema.

Sistemas lineares homogêneos

Um sistema linear é homogêneo quando os termos independentes de todas as equações são nulos. Todo sistema linear homogêneo admite pelo menos a solução trivial, que é a solução identicamente nula. Assim, todo sistema linear homogêneo é possível. Este tipo de sistema poderá ser determinado se admitir somente a solução trivial ou indeterminado se admitir outras soluções além da trivial.

Exemplo: O sistema

$$2x - y + 3z = 0$$
$$4x + 2y - z = 0$$
$$x - y + 2z = 0$$

é determinado, pois possui a solução x=0, y=0 e z=0.

Regra de Cramer

Esta regra depende basicamente sobre o uso de determinantes. Para indicar o determinante de uma matriz X, escreveremos det(X).

Seja um sistema linear com n equações e n incógnitas:

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1j}\,x_j + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1$$
$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2j}\,x_j + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$a_{n1}\,x_n + a_{n2}\,x_n + \ldots + a_{nj}\,x_j + \ldots + a_{nn}\,x_n = b_n$$

A este sistema podemos associar algumas matrizes:

- **Matriz dos coeficientes:** Formada pelos coeficientes das incógnitas do sistema, aqui indicada pela letra A.

Matriz dos coeficientes

$$a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1j}\ \ldots\ a_{1n}$$
$$a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2j}\ \ldots\ a_{2n}$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots\ a_{nj}\ \ldots\ a_{nn}$

- **Matriz Aumentada do sistema:** Formada todos os coeficientes das incógnitas do sistema e também pelos termos independentes.

Matriz Aumentada

$a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1j}\ \ldots\ a_{1n}\ b_1$

$a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2j}\ \ldots\ a_{2n}\ b_2$

$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$

$a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots\ a_{nj}\ \ldots\ a_{nn}\ b_n$

- **Matriz da incógnita x_j**: É a matriz A_j obtida ao substituirmos a coluna j (1<j<n) da matriz A, pelos termos independentes das equações do sistema.

Matriz da incógnita x_j

$a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ b_1\ \ldots\ a_{1n}$

$a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ b_2\ \ldots\ a_{2n}$

$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$

$a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots\ b_n\ \ldots\ a_{nn}$

Quando as posições j=1,2,3 estão relacionadas com x_1, x_2 e x_3 e substituídas pelas incógnitas x, y e z, é comum escrever A_x, A_y e A_z.

Se det(A) é diferente de zero, é possível obter cada solução x_j (j=1,...,n), dividindo det(A_j) por det(A), isto é:

$$x_j = \det(A_j) / \det(A)$$

Se det(A)=0, o sistema ainda poderá ser consistente, se todos os determinantes nxn da matriz aumentada do sistema forem iguais a zero.

Um sistema impossível: Seja o sistema

$$2x + 3y + 4z = 27$$

$$1x - 2y + 3z = 15$$

$$3x + 1y + 7z = 40$$

A matriz A e a matriz aumentada Au do sistema estão mostradas abaixo.

2	3	4	2	3	4	27
1	-2	3	1	-2	3	15
3	1	7	3	1	7	40

Como det(A)=0, devemos verificar se todos os determinantes das sub-matrizes 3×3 da matriz aumentada são nulos. Se existir pelo menos um deles não nulo, o sistema será impossível e este é o caso pois é não nulo o determinante da sub-matriz 3x3 formada pelas colunas 1, 2 e 4 da matriz aumentada:

2	3	27
1	-2	15
3	1	40

Um sistema indeterminado: Consideremos agora o sistema (Quase igual ao anterior: trocamos 40 por 42 na última linha!)

$$2x + 3y + 4z = 27$$
$$1x - 2y + 3z = 15$$
$$3x + 1y + 7z = 42$$

A matriz A e a matriz aumentada Au do sistema, estão abaixo:

2	3	4	2	3	4	27
1	-2	3	1	-2	3	15
3	1	7	3	1	7	42

Aqui, tanto det(A)=0 como todos os determinantes das sub-matrizes 3×3 da matriz aumentada são nulos, então o sistema é possível e indeterminado. Neste caso, observamos que a última linha é a soma das duas primeiras e como estas duas primeiras dependem de x, y e z, você poderá encontrar as soluções, por exemplo, de x e y em função de z.

Um sistema com solução única: Seja o sistema

$$2x + 3y + 4z = 27$$

$$1x - 2y + 3z = 15$$

$$3x + 1y + 6z = 40$$

A matriz A e a matriz dos termos independentes do sistema estão indicados abaixo.

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 27 \\ 15 \\ 40 \end{array}$$

Como det(A)=7, o sistema admite uma única solução que depende dos determinantes das matrizes A_x, A_y e A_z, e tais matrizes são obtidas pela substituição 1a., 2a. e 3a. colunas da matriz A pelos termos independentes das três equações, temos:

$$Ax= \begin{array}{ccc} 27 & 3 & 4 \\ 15 & -2 & 3 \\ 40 & 1 & 6 \end{array} \qquad Ay= \begin{array}{ccc} 2 & 27 & 4 \\ 1 & 15 & 3 \\ 3 & 40 & 6 \end{array} \qquad Az= \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 27 \\ 1 & -2 & 15 \\ 3 & 1 & 40 \end{array}$$

Como $\det(A_x)=65$, $\det(A_y)=1$ e $\det(A_z)=14$, a solução do sistema é dada por:

$$x = \det(Ax)/\det(A) = 65/7$$

$$y = \det(Ay)/\det(A) = 1/7$$

$$z = \det(Az)/\det(A) = 14/7$$

2 - Espaços Vetoriais

Definição: Seja V um conjunto não vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, isto é,

$\forall$ **A, B** $\in$ V temos: **A + B** $\in$ V e,

$\forall$ **A** $\in$ V e $\alpha \in \Re$ temos: α**A** $\in$ V

V com essas operações é chamado **espaço vetorial real** se forem verificados 8 axiomas:

Em relação à adição: Sejam **A, B, C** $\in$ V e α, $\beta \in \Re$

(***A₁***) **(A + B) + C = A + (B + C)**

(***A₂***) A + B = B + A

(***A₃***) Existe um único elemento neutro neutro **O**$\in$ V tal que

A **+ O = O +** A **=** A

(***A₄***) Existe um único elemento simétrico **-A** $\in$ V tal que A **+** (**-**A) **= O**

(***M₁***) $(\alpha . \beta)$**A** **=** $\alpha(\beta$**A**)

(***M₂***) $(\alpha + \beta)$**A =** α**A** + β**A**

(***M₃***) α(**A + B**) = α**A +** α**B**

(***M₄***) **1A = A**

Obs: Os elementos de um espaço vetorial V podem ser polinômios, matrizes, números, funções, desde que as operações definidas neste conjunto satisfaçam os 8 <u>*Axiomas*</u>. Mas independente de sua natureza os elementos de um Espaço Vetorial V serão chamados ***vetores*.**

Exemplos:

1) **V** = conjunto das matrizes 2x2 ou V = **M(2x2)** = $\left\{\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} : x, y, z, w \in \Re\right\}$.

Em V é definido as operações:

Sejam **A, B** $\in$ **V** onde **A =** $\left\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right\}$**,** **B =** $\left\{\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right\}$ e $\alpha \in \Re$

Operações: **A + B =** $\left\{\begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix}\right\}$ e α **A =** $\left\{\begin{bmatrix} \alpha.a_1 & \alpha.a_2 \\ \alpha.a_3 & \alpha.a_4 \end{bmatrix}\right\}$

Obs: Essas são as ***operações usuais*** de adição e multiplicação por escalar no conjunto das matrizes 2x2.

Para essas operações assim definidas, podem ser verificadas facilmente que valem os 8 axiomas. Portanto, neste exemplo, **V = M(2x2)** é um espaço vetorial.

2) **V =** $\{[a \quad b \quad c] : a, b, c \in \Re\}$ = conj. das matrizes linha M(1x3)

Operações definidas:

$[a_1 \quad a_2 \quad a_3]$ **+** $[b_1 \quad b_2 \quad b_3]$ **=** $[a_1 \quad a_2 \quad a_3]$ (*Cuidado, **adição não usual***)

$\alpha\,[a_1 \quad a_2 \quad a_3]$ **=** $[\alpha.a_1 \quad \alpha.a_2 \quad \alpha.a_3]$ (*Multiplicação usual*)

Com estas operações, ***V é um espaço vetorial*** ?

Verificando os axiomas:

Sejam **A =** $[a_1 \quad a_2 \quad a_3]$**,** **B =** $[b_1 \quad b_2 \quad b_3]$**,** **C =** $[c_1 \quad c_2 \quad c_3]$

A_1) (A + B) + C = A + (B + C) **?**

(A + B) + C = **(** $[a_1 \quad a_2 \quad a_3]$ + $[b_1 \quad b_2 \quad b_3]$ **)** + $[c_1 \quad c_2 \quad c_3]$

= $[a_1 \quad a_2 \quad a_3]$ + $[c_1 \quad c_2 \quad c_3]$

= $[a_1 \quad a_2 \quad a_3]$

A + (B + C) = $[a_1 \quad a_2 \quad a_3]$ + **(** $[b_1 \quad b_2 \quad b_3]$ + $[c_1 \quad c_2 \quad c_3]$ **)**

= $[a_1 \quad a_2 \quad a_3]$ + $[b_1 \quad b_2 \quad b_3]$

= $[a_1 \quad a_2 \quad a_3]$

O Axioma A_1 é satisfeito.

A_2) A + B = B + A **?**

A + B = $[a_1 \quad a_2 \quad a_3]$ + $[b_1 \quad b_2 \quad b_3]$ = $[a_1 \quad a_2 \quad a_3]$

B + A = $[b_1 \quad b_2 \quad b_3]$ + $[a_1 \quad a_2 \quad a_3]$ = $[b_1 \quad b_2 \quad b_3]$, portanto A + B $\neq$ B + A.

Como o axioma A_2 falha, V **não é** um espaço vetorial.

Atenção !!! Basta que **<u>um dos</u>** axiomas falhe, para que o conjunto (com as oper. definidas) ***<u>não seja um espaço vetorial</u>***.

3) V ={(x,y)$\in \Re^2$}, conjunto dos vetores em $\Re^2$.

Operações definidas, (a, b) + (c, d) = (a +c, b + d) e α(a,b)= (α^2a,α^2b)

Como a adição é uma operação usual, vamos verificar se falha algum axioma em relação à multiplicação por escalar.

Sejam u = (a, b) e v = (c, d) em $\Re^2$, α e β números reais.

M_1) $(\alpha.\beta)$u = $\alpha(\beta$u) **?**

$(\alpha.\beta)$u = $(\alpha.\beta)$(a, b) = ($\alpha^2\beta^2$a, $\alpha^2\beta^2$b)

$\alpha(\beta$u) = α**(** β(a,b)**)** = α**(** β^2a**,** β^2b**)** = ($\alpha^2\beta^2$a, $\alpha^2\beta^2$b), logo $(\alpha.\beta)$u = $\alpha(\beta$u).

O Axioma M_1 é satisfeito.

M_2) $(\alpha+\beta)$u = αu + βu **?**

$(\alpha+\beta)$u = $(\alpha+\beta)$(a,b) = $((\alpha+\beta)^2$.**a,** $(\alpha+\beta)^2$.**b**)

αu + βu = α(a,b) + β(a,b) = (α^2a,α^2b) + (β^2a, β^2b) =

=**(**$(\alpha^2+\beta^2)$**a,** $(\alpha^2+\beta^2)$**b)**

O Axioma M_2 não é satisfeito pois $(\alpha+\beta)$u $\neq \alpha$u + βu.

Então, **V ={(x,y)**$\in \Re^2$**}** com as operações definidas, **não é** um espaço vetorial.

Exercícios: Verificar se os conjuntos abaixo são espaços vetoriais reais em relação às operações definidas. Para aqueles que não são, citar os axiomas que não se verificam. (Justiticando)

(**a**) $\mathbf{V_1}$ = {(x,y)$\in \Re^2$}, **(a, b) + (c, d) = (a +c, b + d)**

e α**(a,b)= (**α**a, 0)**

(**b**) $\mathbf{V_2}$ = {(x,y)$\in \Re^2$ / y = 5x} = {(x, 5x)} com as operações usuais,

(a, b) + (c, d) = (a +c, b + d) e α**(a,b)= (**α**a,** α**b)**

(**c**) $\mathbf{V_3}$ = {(x,y)$\in \Re^2$}, **(a, b) + (c, d) = (a +c, b + d)**

e α**(a,b)= (**α**a, b)**

Observações: Para V_1 e V_3, como a adição é uma operação usual e a multiplicação por escalar não é usual, basta verificar quais axiomas de M_1 à M_4 falham.

Já para V_2, todos os axiomas devem ser verificados para ser um espaço vetorial.

Respostas: (a) Falha M_4, (c) Falha M_2.

Outros exemplos:

4) **V** = conjunto das matrizes mxn = **M(m,n)** com as operações usuais (de adição e de multiplicação por escalar) definem um espaço vetorial.

Obs: Se A $\in$ M(mxn) então A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

5) V = $\Re^n$ = $\{$**(x_1, x_2, x_3, ... , x_n): $x_i \in \Re$**$\}$, $1 \leq$ i $\leq$ n

com as operações de adição e de multiplicação por escalar usuais definem um espaço vetorial.

6) V = ***P***$_3$ = conjunto dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 3 (incluindo os polinômios de grau zero)

ou ***P***$_3$ = **$\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_i \in \Re \}$**

Elementos de ***P***$_3$, exemplos: **3, 6 + 5x, $6x^2$, $1 + 4x^3$, $-3 + 5x - 4x^2 +$ $+7x^3$.**

Se $p_1(x)$ e $p_2(x)$ pertencem a ***P***$_3$ então:

$p_1(x) = a_0 + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x^2} + a_3\mathbf{x^3}$ e $p_2(x) = b_0 + b_1\mathbf{x} + b_2\mathbf{x^2} + b_3\mathbf{x^3}$

Operações usuais em ***P***$_3$:

$p_1(x) + p_2(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\mathbf{x} + (a_2 + b_2)\mathbf{x^2} + (a_3 + b_3)\mathbf{x^3}$

Se $\alpha \in \Re$ temos $\alpha.p_1(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1\mathbf{x} + \alpha a_2\mathbf{x^2} + \alpha a_3\mathbf{x^3}$

Com estas operações pode-se verificar que V = ***P***$_3$ é um espaço vetorial.

Observações: Matrizes, vetores, polinômios podem estar associados da seguinte maneira.

Por exemplo,

A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$**, v = (a, b, c, d, e, f),**

$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$

A $\in$ **M(2,3),** **v** $\in \Re^6$ **,** **p(x)**$\in$ ***P*₅**

Pode-se dizer que **a, b, c, d, e, f** são as coordenadas de **A, v** e **p(x)**. Por isto, matrizes, vetores, polinômios são chamados de maneira geral ***vetores***.

2.1 - Subespaços Vetoriais

Deseja-se dentro de um espaço vetorial V, detectar se um subconjunto S de V é também espaço vetorial. Tais conjuntos serão chamados subespaços de V.

Exemplo:

V = $\Re^2$ com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar é um espaço vetorial.

S é uma reta que passa pela origem. Neste caso, S é um subconjunto de V.

$$\mathbf{S} \subset \mathbf{V} = \Re^2$$

$$\mathbf{S} = \left\{(x, y) : y = \frac{1}{2}x\right\} = \left\{(x, \frac{x}{2}); x \in \Re\right\}$$

Observa-se que ao somarmos 2 vetores de S, obtemos outro vetor em S. E se multiplicarmos um vetor de S por um

u = (2,1), v = (3, 3/2), u + v = (5, 5/2)

Definição: Seja V um espaço vetorial e S um subconjunto não vazio de V.

S é um subespaço vetorial de V se:

(i) **0** $\in$ S

(ii) $\forall$ **u, v** $\in$ S $\Rightarrow$ **u** + **v** $\in$ S

(iii) $\forall\ \alpha \in \Re$ e $\forall$ **u** $\in$ S $\Rightarrow$ α**u** $\in$ S

OBSERVAÇÕES:

- Qualquer subespaço **S** de **V** deve conter o vetor nulo **0** (devido ao Axioma A_3 do Espaço Vetorial). Caso contrário **S** não é um subespaço vetorial.

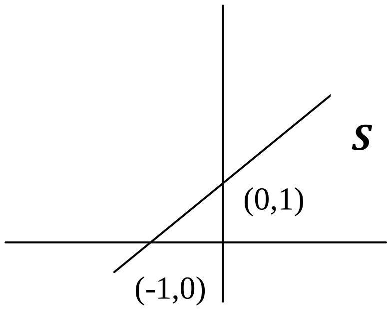
- Todo espaço vetorial V admite pelo menos 2 subespaços (chamados subespaços triviais), o conjunto $\{\ \mathbf{0}\ \}$ e o próprio espaço vetorial **V**.

Exemplos:

(1) V = $\Re^2$ com as operações usuais. **S** = $\{(t, t+1) : t \in \Re\}$

S pode ser representada por uma reta que passa pelos pontos **(-1,0)** e **(0,1).**

O vetor nulo **(0,0)** $\notin$ **S** $\Rightarrow$ **S** não é um subespaço vetorial de **V**.



(2) V = $\Re^2$ com as operações usuais.

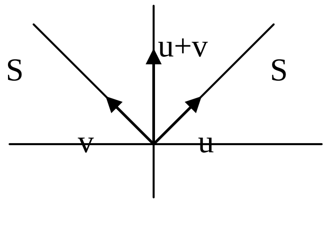
S = $\{(x, |x|) : x \in \Re\} \subset \Re^2$

S não é vazio pois (0,0) $\in \Re^2$.

Mas existem 2 vetores u e v de **S** tais que (u + v) $\notin$ **S**.

Por exemplo, **u = (1,1), v = (-1,1)** pertencem a **S** e **u + v = (0,2)** $\notin$ **S**.

Portanto, **S** não um subespaço de **V** = $\Re^2$.



(3) V = $\Re^3$ (com as operações usuais).

S = $\{(x, y, z) : ax + by + cz = 0\}$.   Obs: S é um plano que passa pela origem.

S é um subespaço de V ?

Solução:

Vamos verificar se em S satisfazem as condições (i), (ii) e (iii).

(**i**) (**0,0,0**) $\in$ S   pois a**0** + b**0** + c**0** = 0.

(**ii**) Sejam u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) elementos de **S.**

Então,

$$\begin{cases} au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \\ av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \end{cases}$$

Logo, a(u_1 + v_1)+b(u_2 + v_2)+c(u_3 + v_3) = 0. E portanto, (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$\in$**S**.

Daí, u +v $\in$**S**.

(**iii**) Seja α $\in \Re$ e u = (u_1, u_2, u_3)$\in \Re^3$.

Se u $\in$ S, então au_1 + bu_2 + cu_3 = 0.

Portanto, α(au_1 + bu_2 + cu_3) = 0 $\Rightarrow$ αu_1 + αu_2 + αu_3 = 0 $\Rightarrow$ $\alpha u \in$ S.

Como as 3 condições foram satisfeitas, S é um subespaço de V = $\Re^3$.

Exercícios:

(**a**) V = $\Re^5$ (com as operações usuais) e **S** = { (0, x_2, x_3, x_4, x_5) $\in \Re^5$}.

Verifique que S é um subespaço vetorial.

(**b**) V = $\Re^2$ (com as operações usuais) e **S** = { (x, x^2); x$\in \Re$}

Verifique que S não é um subespaço vetorial.

Intersecção e Soma de Subespaços

Teorema: S_1, S_2 subespaços vetorias de V (espaço vetorial).

Então,

(i) $S_1 \cap S_2$ é um subespaço de V.

(ii) $S_1 + S_2$ é um subespaço de V.

OBS:

$S_1 \cap S_2 = \{v \in V : \mathbf{v} \in S_1 \text{ e } \mathbf{v} \in S_2\}$

$S_1 + S_2 = \{ \mathbf{v = u + w} \; / \; \mathbf{u} \in S_1 \text{ e } \mathbf{w} \in S_2\}.$

Todo elemento de $S_1 + S_2$ é um vetor soma de 2 vetores, um vetor de S_1 e o outro de S_2.

Exemplos:

(a) V = M(3 x 3)

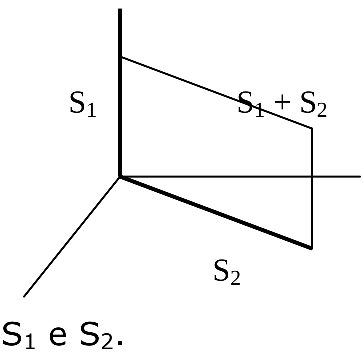
$$\mathbf{S_1} = \left\{ \left| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & a_9 \end{matrix} \right| \right\}; \quad a_i \in \Re \qquad \mathbf{S_2} = \left\{ \left| \begin{matrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & 0 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{matrix} \right| \right\}; \quad a_i \in \Re$$

S_1 e S_2 são subespaços de V = M(3 x 3)

S_1 = {matrizes triangulares superiores}

S_2 = {matrizes triangulares inferiores}

Logo, $S_1 \cap S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_9 \end{bmatrix} \right\}$ é um subespaço de V = M(3 x 3)



(b) $V = \Re^3$

$\mathbf{S_1} = \{(0, 0, x): x \in \Re\}$ Reta no eixo z

$\mathbf{S_2} = \{(a, a, 0): a \in \Re\}$ Reta no plano xy

$S_1 + S_2 = \{(a,a,x)\}$ plano que contém as retas S_1 e S_2.

$S_1 + S_2$ é um subespaço de $V = \Re^3$.

SOMA DIRETA DE SUBESPAÇOS

Definição:

Sejam S_1 e S_2 subespaços vetoriais de V.

V é a ***soma direta*** de S_1 e S_2 (Representado por $V = S_1 \oplus S_2$)

Se $V = S_1 + S_2$ e $S_1 \cap S_2 = \{ \mathbf{0} \}$.

Exemplo: V = M(2 x 2)

$\mathbf{S_1} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ e $\mathbf{S_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \right\}$ onde a, b, c, d $\in \Re$.

$S_1 + S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\}$ = M(2 x 2) e $S_1 \cap S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Logo, $V = S_1 \oplus S_2$ e portanto V é soma direta de S_1 e S_2.

3. ESPAÇOS VETORIAIS EUCLIDIANOS

3.1 Produto Interno em Espaços Vetoriais

Chama-se produto interno no espaço vetorial V uma aplicação de VxV em *R* que a todo par de vetores (u,v)∈VxV associa um número real, indicado por u.v ou <u,v>, tal que os axiomas seguintes sejam verificados:

P_1) u.v = v.u

P_2) u.(v+w) = u.v + u.w

P_3) (αu).v = α(u.v), $\forall \alpha \in R$

P_4) u.u ≥ 0 e além disso u.u = 0 ↔ u = 0

O número real u.v é chamado *produto interno* dos vetores u e v.

EXEMPLOS

1) No espaço vetorial $V=R^2$, a aplicação (função) que associa cada par de vetores $u=(x_1,y_1)$ e $v=(x_2,y_2)$, o número real $u.v = 2x_1x_2 + 5y_1y_2$, é um produto interno.

Mostrar:

- O produto interno examinado neste exemplo é diferente do produto interno usual do R^2 que é definido por: $u.\ v = x_1x_2 + y_1y_2$

  Logo, é possível a existência de mais de um produto interno no mesmo espaço vetorial.

2) Se $u=(x_1,y_1,z_1)$ e $v=(x_2,y_2,z_2)$ são vetores quaisquer do R^3, o número real $u.v=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ define o produto interno usual do R^3.

De forma análoga, se $u=(x_1,x_2,...,x_n)$ e $v=(y_1,y_2,...,y_n)$, o número real $u.v=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ define o produto interno usual no R^n.

3.1.1 Problemas para resolver em aula

1. Em relação ao produto interno usual do R^2, calcular u.v, sendo:

a) $u=(-2,6)$ e $v=(3,-4)$

b) $u=(4,8)$ e $v=(0,0)$

2. Em relação ao produto interno $u.v=2x_1x_2+5y_1y_2$, calcular u.v para $u=(2,1)$ e $v=(3,-2)$

3. Sejam $v_1=(1,2,-3)$, $v_2=(3,-1,-1)$ e $v_3=(2,-2,0)$ do R^3. Considerando esse espaço munido do produto interno usual, determinar o vetor u, tal que $u.v_1=4$, $u.v_2=6$ e $u.v_3=2$.

3.2 ESPAÇO VETORIAL EUCLIDIANO

Um espaço vetorial real, de dimensão finita, no qual está definido um produto interno, é um *espaço vetorial euclidiano*.

3.3 MÓDULO DE UM VETOR

Dado um vetor v de um espaço vetorial euclidiano V, chama-se módulo, norma ou comprimento de v, o número real não-negativo, indicado por |v|, definido por $||v||=\sqrt{v.v}$ ou $||v||=\sqrt{< v,v >}$

Assim, se $v=(x_1,y_1,z_1)\in R^3$, com produto interno usual, tem-se:

$||v||=\sqrt{(x_1,y_1,z_1).(x_1,y_1,z_1)} = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

Se $||v||=1$, isto é, v.v=1, o vetor é chamado vetor unitário.

O vetor $\frac{v}{||v||}$ é unitário, de mesma direção e sentido de v (versor de v). Diz-se, nesse caso, que o vetor v foi normalizado.

3.3.1 EXERCÍCIOS PARA AULA

1. Dado o vetor v=(-2,1,2) $\in R^3$, calcular o módulo de v e normalizar v, considerando que:

a) R3 está munido do produto interno usual

b) Em R^3 está definido o produto interno $v_1.v_2=3x_1x_2+2y_1y_2+z_1z_2$, sendo $v_1=(x_1,y_1,z_1)$ e $v_2=(x_2,y_2,z_2)$

É importante observar que o módulo de v depende do produto interno utilizado: se o produto interno muda, o módulo se modifica.

Por outro lado, os vetores $\frac{v}{||v||}$, obtidos de a) e b) são unitários em relação ao respectivo produto interno.

2. Dado o espaço vetorial V=R3, munido do produto interno usual, calcular "m" do vetor v=(6,-3,m) de modo que ||v||=7

3. Dado o espaço das funções contínuas no intervalo [0,1] (C[0,1]) em que o produto interno é $<f.g>=\int_0^1 f(x).g(x)dx$.

a) Determine o produto interno de f(x)=x+1 e g(x)=2x

b) Calcular a norma de f(x)=x+1

c) Normalizar a função f(x)=x+1

3.3.2 PROPRIEDADES DO MÓDULO DE UM VETOR

Seja V um espaço vetorial euclidiano.

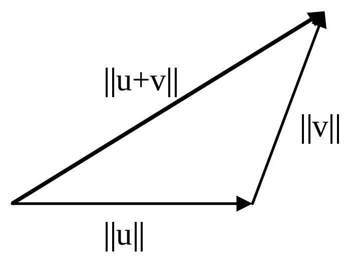
I) $||v|| \geq 0, \ \forall u \in V \ e \ ||v|| = 0 \leftrightarrow v = 0$

II) $||\alpha u|| = |\alpha|.||u||, \ \forall u \in V, \forall \alpha \in R$

Dem.: $||\alpha u|| = \sqrt{(\alpha u).(\alpha u)} = \sqrt{\alpha^2(u.u)} = |\alpha|\sqrt{u.u} = |\alpha|.||u||$

III) $||u+v|| \leq ||u||+||v||, \ \forall u, v \in V$ (Desigualdade de Shwarz ou Inequação de Cauchy-Schwarz ou Desigualdade triangular)

Interpretação Geométrica no R^2 ou R^3



"A soma das medidas de dois lados de um triângulo é maior do que a medida do terceiro lado."

3.4 ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES

$$\cos\theta = \frac{< u, v >}{||u||||v||}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

EXERCÍCIOS PARA AULA

Nos exercícios 1 e 2, considerando o produto interno usual no R^3 e no R^4 respectivamente, calcular o ângulo entre os vetores dados em cada um deles.

1. u=(2,1,-5) e v=(5,0,2)

2. u=(1,-1,2,3) e v=(2,0,1,-2)

3. Sendo V um espaço vetorial euclidiano e u,v $\in V$, calcular o cosseno do ângulo entre os vetores u e v, sabendo que ||u||=3, ||v||=7 e ||u+v||=$4\sqrt{5}$

4. No espaço vetorial das matrizes quadradas V=M(2x2), dadas duas matrizes quaisquer, $u = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, o número real u.v=a1a2+b1b2+c1c2+d1d2 define um produto interno em M(2x2).

Sabendo que $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular:

a) ||u+v|| b) O ângulo entre u e v

3.5 DISTÂNCIA ENTRE DOIS VETORES

Chama-se distância entre dois vetores (ou pontos) u e v, o número real, representado por d(u,v), definido por: d(u,v)=||u-v||

Se $u=(x_1,y_1)$ e $v=(x_2,y_2)$ são vetores (ou pontos) do R^2, com produto interno usual, tem-se:

$d(u,v)=|u-v|=|(x_1-x_2,\ y_1-y_2)|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

EXEMPLO: Calcular a distância entre os vetores u=(9,5) e v=(4,2)

3.6 VETORES ORTOGONAIS

Dado um espaço vetorial euclidiano V, diz-se que dois vetores u e v de V são ortogonais e se representa por $u \perp v$, se e somente se, u.v=0

- o vetor $0 \in V$ é ortogonal a qualquer outro vetor v $\in$V pois 0.v=0
- se $u \perp v$, então $\alpha u \perp v, \forall \alpha \in R$
- Se $u_1 \perp v$ e $u_2 \perp v$, então $(u_1+u_2) \perp v$

EXEMPLOS:

1) Os vetores u=(2,7) e v=(-7,2) de R^2, munido do produto interno usual, são ortogonais: (2,7).(-7,2)=-14+14=0

2) Os vetores u=(-3,2) e v=(4,3) são ortogonais no espaço vetorial V=R^2 em relação ao produto interno $(x_1,y_1).(x_2,y_2)=x_1.x_2+2y_1y_2$

3.7 CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

Dado um espaço vetorial euclidiano V, diz-se que um conjunto de vetores $\{v_1,v_2,...,v_n\}\subset V$ é ortogonal, se dois vetores quaisquer, distintos, são ortogonais, isto é, $v_i.v_j=0$ para $i \neq j$.

EXEMPLO:

No R^3, o conjunto {(1,2-3),(3,0,1),(1,-5,-3)} é ortogonal em relação ao produto interno usual.

3.7.1 CONJUNTO ORTOGONAL E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Um conjunto ortogonal de vetores não-nulos $A=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ de um espaço vetorial euclidiano V é linearmente independente – LI.

3.8 BASE ORTOGONAL

Uma base $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$de um espaço vetorial euclidiano V é ortogonal se os seus vetores são dois a dois ortogonais.

Se dim V = n, qualquer conjunto de n vetores não-nulos e dois a dois ortogonais, constitui uma base ortogonal. O conjunto B={(1,2-3),(3,0,1),(1,-5,-3)}, é uma base ortogonal de R^3.

3.8.1 BASE ORTONORMAL

Uma base B={v_1,v_2,...,v_n}de um espaço vetorial euclidiano V é ortonormal se B é ortogonal e todos os seus vetores são unitários, isto é:

$$v_i . v_j = \begin{cases} 0 \ \ se\ i \neq j \\ 1\ se\ i = j \end{cases}$$

EXEMPLOS:

1) As bases canônicas do R^2, R^3, ... R^n são bases ortonormais em relação ao produto interno usual.

2) A base $B = \left\{ v_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), v_2 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}\ do\ R^2$ é ortonormal em relação ao produto interno usual.

3) Uma base ortonormal sempre pode ser obtida de uma base ortogonal, normalizando cada um de seus vetores. Assim, da base ortogonal B={(1,2-3),(3,0,1),(1,-5,-3)} do R^3, relativamente ao produto interno usual, pode-se obter a base ortonormal B'={u_1,u_2,u_3}.

3.9 PROCESSO DE ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

Dado um espaço vetorial euclidiano V e uma base qualquer B={v_1,v_2,...,v_n} desse espaço, é possível, a partir dessa base, determinar uma base ortogonal de V.

A base ortogonal $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ é assim obtida:

$w_1 = v_1$

$w_2 = v_2 - \langle v_2, v_1 \rangle . u_1$ onde $u_1 = \frac{w_1}{|w_1|}$

$w_3 = v_3 - \langle v_3, u_2 \rangle . u_2 - \langle v_3, u_1 \rangle . u_1$ onde $u_2 = \frac{w_2}{|w_2|}$

$\vdots$

$w_n = v_n - \langle v_n, u_{n-1} \rangle . u_{n-1} - ... - \langle v_n, u_2 \rangle . u_2 - \langle v_n, u_1 \rangle . u_1$

EXEMPLO:

Sejam v1=(1,1,1), v2=(0,1,1) e v3=(0,0,1) vetores do R^3. Esses vetores constituem uma base $B=\{v_1, v_2, v_3\}$ não ortogonal em relação ao produto interno usual. Agora vamos obter uma base B' que seja ortonormal.

4. TRANSFORMAÇÕES LINEARES

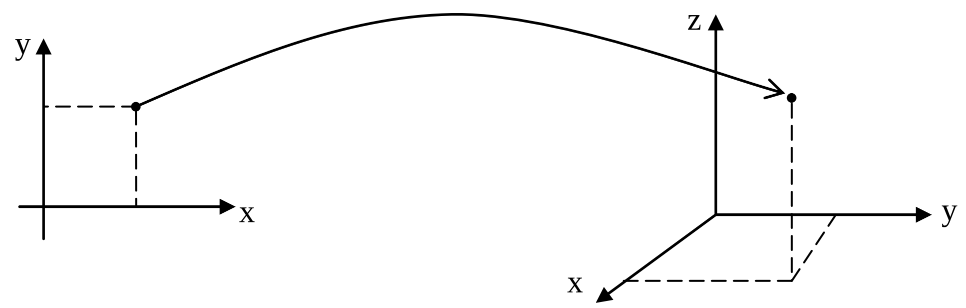
4.1 FUNÇÕES VETORIAIS

São funções onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais. Assim, tanto a variável dependente quanto a independente são vetores.

Para dizer que T é uma transformação do espaço vetorial V no espaço vetorial W, escreve-se T:V→W. Sendo T uma função, cada vetor v∈V tem um só vetor imagem w∈W, que será indicado por w=T(v).

EXEMPLO

Uma transformação T:R^2→R^3 associa vetores v=(x,y) ∈R^2 com vetores w=(a,b,c) do R^3. Se a lei que define T é tal que a=3x, b=-2y e c=x-y, a imagem de cada vetor (x,y) será representada por T(x,y)=(3x,-2y,x-y)



No caso de ser v=(2,1), tem-se: w=T(2,1)=(3(2),-2(1),2-1)=(6,-2,1)

4.2 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação T: V→W é chamada *transformação linear* de V em W, se:

I) T(u+v) = T(u) + T(v)

II) T(αu) = αT(u)

$$\forall u, v \in V \;\; e \;\; \forall \alpha \in R$$

"Uma transformação linear de V em V (é o caso de V=W) é chamada *operador linear* sobre V."

EXEMPLOS

1) $T:R^2 \rightarrow R^3$, $T(x,y)=(3x,-2y,x-y)$ é linear:

2) A transformação identidade $I: V \rightarrow V$, $v \rightarrow v$, $I(v)=v$, é linear.

3) A transformação nula é linear, $T: V \rightarrow W$, $T(v)=0$

4.2.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Uma transformação geométrica do significado de uma transformação linear pode ser dada considerando, por exemplo, o operador linear.

$T: R^2 \rightarrow R^2$, $T(x,y)=(-3x+y,2x+3y)$

Se $u=(-1,1)$ e $v=(0,1)$, tem-se $u+v=(-1,2)$
$T(u)=(4,1)$ e $T(v)=(1,3)$ $T(u)+T(v)=(5,4)$

Sendo $u+v$ a diagonal do paralelogramo determinado por u e v, sua imagem $T(u+v)$ representa a diagonal do paralelogramo determinado por $T(u)$ e $T(v)$,

isto é, $T(u+v)=T(u)+T(v)$. Diz-se, nesse caso, que T representa a adição de vetores.
A figura a seguir, mostra que, ao se multiplicar o vetor u por 2, por exemplo, sua imagem T(u) também fica multiplicada por 2, isto é, $T(\alpha u)= \alpha T(u)$. Diz-se que nesse caso, que T preserva a multiplicação de um vetor por um escalar.

PROPRIEDADES DAS TRANSFORMAÇÕES LINEARES

I) Se $T:V\to W$ é uma transformação linear, a imagem do vetor $0\epsilon V$ é o vetor $0\in W$.
Esta propriedade decorre da condição II da definição de transformação linear, para $\alpha=0$.
$T(\alpha u)= \alpha T(u)$
$T(0)=0.T(u)$
$T(0)=0$

EXEMPLO

$T:R^2\to R^3$ $T(x,y)=(3x, -2y, x-y)$

$T(0,0)=(0,0,0)$

Conclusão: Se T(0)≠0, a transformação não é linear.

É o caso da transformação $T:R^3\to R^2$ $T(x,y,z)=(2x+3, 3x+4z)$

$T(0,0,0)=(3,0)\neq 0$

II) Se $T:V \to W$ é uma transformação linear, tem-se:

$T(a_1v_1+a_2v_2)=a_1T(v_1)+a_2T(v_2)$, $\forall v_1,v_2$ de V e $\forall a_1,a_2$ de R

Isto é, a imagem de uma combinação linear de vetores v_1 e v_2 é uma combinação linear das imagens $T(v_1)$ e $T(v_2)$ com os mesmos coeficientes a_1 e a_2.

$T(a_1v_1+a_2v_2+...+ a_nv_n)=a_1T(v_1)+a_2T(v_2) +...+a_nT(v_n)$

Se $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ é uma base de V, para todo v de V, $\exists$ $a_1,a_2,...,a_n$ tal que $v=a_1v_1+a_2v_2+...+ a_nv_n$ e, por tanto, $T(v)= a_1T(v_1)+a_2T(v_2) +...+a_nT(v_n)$, isto é, dado v de V, o vetor T(v) estará determinado se forem conhecidas as imagens dos vetores de B. Em outras palavras, sempre que forem dados $T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)$, onde $v_1,v_2,...,v_n$ é a base do domínio de V, a transformação linear T está perfeitamente definida.

Resolver em aula:

1) Seja $T: R^3 \rightarrow R^2$ uma transformação linear e $B=\{v_1=(0,1,0),\ v_2=(1,0,1)$ e $v_3=(1,1,0)\}$ uma base do R^3. Sabendo que $T(v_1)=(1,-2)$, $T(v_2)=(3,1)$ e $T(v_3)=(0,2)$, determinar:

a) T(5,3,-2)

b) T(x,y,z)

2) Seja o operador linear no R^3 definido por: $T(x,y,z)=(x+2y+2z,\ x+2y-z,\ -x+y+4z)$

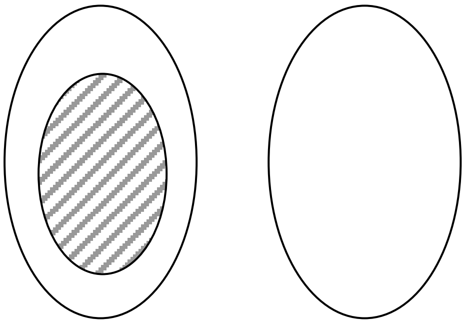
a) Determinar o vetor u de R^3 tal que $T(u)=(-1,8,-11)$

b) Determinar o vetor v de R^3 tais que $T(v)=v$

4.3 NÚCLEO DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Chama-se núcleo de uma transformação linear T: V→W ao conjunto de todos os vetores v de V que são transformados em 0∈W. Indica-se por N(T) ou Ker(T).

N(T)={v∈V|T(v)=0}



N(T) ⊂V

Todos os seus vetores têm uma única imagem que é o vetor zero de W.

OBS.: $N(T) \neq \emptyset$ pois $0 \in N(T)$ uma vez que T(0)=0.

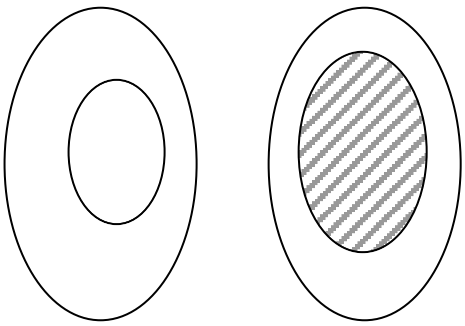
EXEMPLOS:

1) O núcleo da transformação linear $T: R^2 \rightarrow R^2, T(x, y) = (x - 2y, x + 3y)$

2) Seja a transformação linear $T: R^3 \rightarrow R^2, T(x, y, z) = (x - y + 4z,\ 3x + y + 8z)$

4.4 IMAGEM DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Chama-se de imagem de uma transformação linear T:V→W ao conjunto de vetores w ∈W que são imagens de vetores v∈V. Indica-se esse conjunto por Im(T) ou T(v).



$Im(T) = \{w \in W |\ T(v) = w\}$

$Im(T) \neq \emptyset$ pois T(0)=0 ∈ Im(T)

Se Im(T)=w, T diz-se sobrejetora: $\forall w \in W$ existe pelo menos um $v \in V$ tal que T(v)=w.

EXEMPLOS:

1) Seja $T: R^3 \rightarrow R^3, T(x,y,z) = (x,y,0)$ a projeção ortogonal do R^3 sobre o plano xoy. A imagem de T é o próprio plano xoy.

2) A imagem da transformação identidade I: V→V , definida por I(v)=v, $\forall v \in V$, é todo o espaço V. O núcleo, nesse caso é N(I)={0}.

3) A imagem da transformação nula, T: V→W, T(v)=0 $\forall v \in V$, é o conjunto Im(T)={0}. O núcleo nesse caso é todo o espaço V.

4.5 PROPRIEDADES DO NÚCLEO E DA IMAGEM

1. O núcleo de uma transformação linear T:V→W é um subespaço vetorial de V.

De fato, sejam v_1 e v_2 $\in$N(T) e $\alpha \in R$:

I) $T(v_1)=0$ $T(v_2)=0$

II) $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)=0+0$, $v_1+v_2 \in N(T)$

III) $T(\alpha v_1)= \alpha T(v_1)= \alpha.0=0$, $\alpha v_1 \in N(T)$

2. A imagem de uma transformação linear T:V→W é um subespaço vetorial de W. De fato, sejam w_1 e $w_2 \in$ Im(T) e $\alpha \in R$:

I) $0 \in$ Im(T)

II) $w_1+w_2 \in$ Im(T)

III) $\alpha w_1 \in$ Im(T)

Como w_1 e $w_2 \in$ Im(T), existem vetores v_1 e v_2 tais que $T(v_1)=w_1$ e $T(v_2)=w_2$

Fazendo $v= v_1+v_2$ e $u= \alpha v_1$

$T(v)= T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)= w_1+w_2$

$T(u) = T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1) = \alpha\ w_1$

3. Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $T: V \to W$ uma transformação linear, dimN(T)+dimIm(T)=dimV

a) No exemplo 1, o núcleo (eixo dos z) tem dimensão 1 e a imagem (plano xoy) tem dimensão 2, enquanto que o domínio R^3, tem dimensão 3.

b) No exemplo 2, da transformação identidade, tem-se dim(N(T))=0, logo, dim(Im(T))=dimV.

Para resolver.

1. Dado o operador linear $T: R^3 \to R^3, T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z)$

a) Determinar o núcleo de T, a dimensão do núcleo e uma de suas bases.

b) Determinar a imagem de T, a dimensão da imagem e uma de suas bases.

c) Verificar as propriedades da dimensão.

COROLÁRIOS

Seja $T:V \to W$ uma transformação linear.

1. Se dim V= dim W, então T é injetora se, e somente se, é sobrejetora.
2. Se dim V = dim W e T é injetora, então T transforma base em base, isto é, se $B=\{v_1, ..., v_n\}$ é base de V, então $T(B)=\{T(v_1),...,T(v_n)\}$

4.6 ISOMORFISMO

Chama-se *isomorfismo* do espaço vetorial V no espaço vetorial W a uma transformação linear $T: V \to W$, que é *bijetora*.

4.7 MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Sejam $T: V \to W$ uma transformação linear, A uma base de V e B uma base de W.

Sem prejuízo da generalização, consideremos o caso em que dim V=2 e dim W=3.

Sejam $A=\{v_1,v_2\}$ e $B=\{w_1,w_2,w_3\}$ bases de V e W, respectivamente.

Um vetor $v \in V$ pode ser expresso por:

$V= x_1v_1+x_2v_2$ ou $V_A=(x_1,x_2)$

E a imagem T(v) por:

$T(v)= y_1w_1+y_2w_2+y_3w_3$ ou $T(v)_B=(y_1,y_2,y_3)$

Por outro lado:

$T(v)=T(x_1v_1+x_2v_2)=x_1T(v_1)+x_2T(v_2)$

Sendo $T(v_1)$ e $T(v_2)$ vetores de W, eles são combinação lineares dos vetores de B:

$T(v)=T(x_1v_1+x_2v_2)=x_1(a_{11}w_1+a_{21}w_2+a_{31}w_3)+x_2(a_{12}w_1+a_{22}w_2+a_{32}w_3)$

Ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ou, simbolicamente:

$$[T(v)]_B = [T]_B^A [v]_A$$

Sendo a matriz $[T]_B^A$ denominada *matriz de* T *em relação às bases* A e B.

Observações:

a) A matriz $[T]_B^A$ é de ordem 3x2 quando dimV=2 e dimW=3

b) As colunas da matriz $[T]_B^A$ são as componentes das imagens dos vetores da base A em relação à base.

c) A matriz $[T]_B^A$ depende das bases A e B consideradas, isto é, a cada dupla de bases corresponde uma particular matriz. Assim, uma transformação linear poderá ter uma infinidade de matrizes para representá-la. No entanto, fixadas as bases, a matriz é única.

d) No caso de A e B serem as bases canônicas, representa-se a matriz simplesmente por [T], que é chamada *matriz canônica de* T, e tem-se: [T(v)]=[T].[v]

e) Calcular T(v) pela matriz [T] é o mesmo que fazê-lo pela fórmula que define T.

4.8 OPERAÇÕES COM TRANSFORMAÇÕES LINEARES

ADIÇÃO

Sejam $T_1:V\rightarrow W$ e $T_2:V\rightarrow W$ transformações lineares. Chama-se *soma* das transformações lineares T_1 e T_2 à transformação linear

$T_1+T_2:V\rightarrow W$; $v\rightarrow(T_1+T_2)(v) = T_1(v)+T_2(v)$, $\forall v \in V$

Se A e B são bases de V e W, tem-se:

$[T_1 + T_2]_B^A = [T_1]_B^A + [T_2]_B^A$

MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Sejam $T:V\rightarrow W$ uma transformação linear e $\alpha \in R$. Chama-se *produto* de T pelo escalar α à transformação linear

$\alpha T: V \rightarrow W; v \rightarrow (\alpha T)(v) = \alpha T(v), \qquad \forall v \in V$

Se A e B são bases de V e W, tem-se:

$[\alpha T]_B^A = \alpha[T]_B^A$

COMPOSIÇÃO

Sejam $T_1:V\rightarrow W$ e $T_2:W\rightarrow U$ transformações lineares. Chama-se aplicação *composta* de T_1 com T_2, e se representa por T_2oT_1, à transformação linear

$T_2oT_1:V\rightarrow U$; $v\rightarrow(T_2oT_1)(v) = T_2(T_1(v))$, $\forall v \in V$

Se A e B e C são bases de V, W e U, tem-se:

$[T_2 o T_1]_C^A = [T_2]_C^B + [T_1]_B^A$

Problemas do livro.

4.9 TRANSFORMAÇÕES LINEARES PLANAS

Entende-se por transformações lineares planas as transformações de R^2 em R^2. Veremos algumas de especial importância e suas interpretações.

REFLEXÕES:

a) Reflexão em torno do eixo dos x

Essa transformação linear leva cada ponto (x,y) para sua imagem (x,-y), simétrica em relação ao eixo dos x.

Gráfico:

T: $R^2 \to R^2$; $(x,y) \to (x,-y)$

b) Reflexão em torno do eixo dos y

Gráfico:

T: $R^2 \to R^2$; $(x,y) \to (-x,y)$

c) Reflexão na origem

Gráfico:

T: $R^2 \rightarrow R^2$; $(x,y) \rightarrow (-x,-y)$

d) Reflexão em torno da reta y=x

Gráfico:

T: $R^2 \rightarrow R^2$; $(x,y) \rightarrow (y,x)$

e) Reflexão em torno da reta y=-x

Gráfico:

T: $R^2 \rightarrow R^2$; $(x,y) \rightarrow (-y,-x)$

DILATAÇÕES E CONTRAÇÕES

a) Dilatação ou contração na direção do vetor

T: $R^2 \to R^2$; $(x,y) \to \alpha(x,y)$, $\alpha \in R$

Observação:

se $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor

se $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor

se $\alpha = 1$, T é a identidade I

se $\alpha < 0$, T troca o sentido do vetor

b) Dilatação ou contração na direção do eixo dos x

T: $R^2 \to R^2$; $(x,y) \to (\alpha x,y)$, $\alpha > 0$

se $\alpha > 1$, T dilata o vetor

se $0 < \alpha < 1$, T contrai o vetor

c) Dilatação ou contração na direção do eixo dos y

T: $R^2 \to R^2$; $(x,y) \to (x, \alpha y)$, $\alpha > 0$

Se fizéssemos $\alpha = 0$, teríamos $(x,y) \to (x,0)$ e T seria a projeção ortogonal do plano sobre o eixo dos x.

CISALHAMENTO

a) Cisalhamento na direção do eixo dos x

T: $R^2 \to R^2$; $(x,y) \to (x+\alpha y, y)$

O efeito do cisalhamento é transformar o retângulo OAPB no paralelogramo OAP'B', de mesma base e mesma altura. No cisalhamento, cada ponto (x,y) se desloca paralelamente ao eixo dos x até chegar em $(x+\alpha y, y)$, com exceção dos pontos do próprio eixo dos x, que permanecem em sua posição, pois para eles y=0. Com isso está explicado porque o retângulo e o paralelogramo da figura têm mesma base AO.

b) Cisalhamento na direção do eixo dos y

T: $R^2 \to R^2$; $(x,y) \to (x, y+\alpha x)$

ROTAÇÃO

A rotação do plano em torno da origem, que faz cada ponto descrever um ângulo θ, determina uma transformação Tθ: $R^2 \rightarrow R^2$ cuja matriz canônica é:

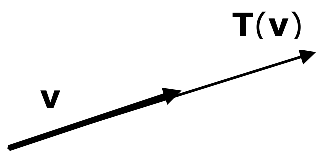
$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

Essa matriz chama-se matriz de rotação de um ângulo θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e é a matriz canônica da transformação linear Tθ: $R^2 \rightarrow R^2$, T_θ(x,y)=(x$cos\theta$-y$sen\theta$, x$sen\theta$+y$cos\theta$)

5. AUTOVALORES E AUTOVETORES

Dada uma transformação linear, **T**: V $\rightarrow$ V estamos interessados em saber que vetores (não nulos) são levados em um múltiplo de si mesmo; isto é, procuramos um vetor **v** $\in$ V e um escalar λ real tais que

T(**v**) = λ.**v**



Neste caso **T**(**v**) será um vetor de mesma "direção" que v.

O escalar λ será chamado autovalor e o vetor **v** um autovetor. Vamos formalizar este conceito.

Definição:

Seja **T**: V $\rightarrow$ V uma transformação linear.

Se existirem **v**$\in$V, **v**$\neq$0, e $\lambda \in \Re$ tais que T**v** = λ.**v**, então

λ é um <u>*autovalor*</u> de T e **v** um <u>*autovetor*</u> de T associados a λ.

Observe que λ pode ser o número 0, embora **v** não possa ser o vetor nulo.

Exemplos:

1) Seja $T:\Re^2 \to \Re^2$ dado por T(x,y) = 2.(x,y).

Neste caso λ = 2 é o autovalor de T

E qualquer vetor (x, y) $\neq$(0, 0) é um autovetor de T associado a λ=2.

2) $T:\Re^2 \to \Re^2$ onde T(x,y) = (x, -y)

Note que T(0, -y)=(0,-y)=-1(0, y)

Portanto, λ_1=-1 é o autovalor de T e todo vetor v_1=(0,y) tal que y$\neq$0 é um autovetor de T.

Observe também que T(x,0)=(x,0)=1(x,0)

Então, λ_2=1 é o autovalor de T e todo vetor v_2=(x,0) tal que x$\neq$0 é um autovetor de T.

Exercício: Quais são as matrizes A_1 e A_2 associadas às Transformações Lineares em relação à base canônica, nos exemplos 1 e 2 ?

As noções de autovetor e autovalor de uma transformação linear (ou matriz) são fundamentais, por exemplo, em Física Atômica porque os níveis de energia dos átomos e moléculas são dados por autovalores de determinadas matrizes. Também o estudo dos fenômenos de vibração, análise de estabilidade de um avião e muitos outros problemas de Física levam à procura de autovalores e autovetores de matrizes.

5.1 Autovalores e Autovetores de uma matriz

Lembre-se que toda transf. Linear T: $\Re^n \rightarrow \Re^n$ está associada a uma matriz A(n x n) em relação à base canônica, isto é, T(v) = A .v.

Logo, o autovalor e autovetor de A é o autovalor e autovetor de T.

Portanto, o autovalor λ e o autovetor v, são soluções das equações da seguinte equação

$$T(v) = \lambda.v, \text{ isto é , } A.v = \lambda.v, \quad v \neq 0 \text{ (v vetor não nulo)}$$

5.2 Polinômio Característico

Método prático para encontrar autovalores e autovetores de uma matriz.

Exemplo:

Dado A=$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, vamos procurar vetores v=(x,y) não nulo e escalares λ tais que

Observe que, se I for a matriz identidade de ordem 2, então a equação acima pode ser escrita na forma

$$\boxed{A.v = \lambda.v}$$

$$\boxed{A.v = (\lambda I)v}$$

Ou ainda,

$$\boxed{(A-\lambda I)v = \mathbf{0}}$$

Matriz nula

Explicitamente temos:

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se escrevermos explicitamente o sistema de equações lineares equivalente a esta equação matricial, iremos obter um sistema de 2 equações e 2 incógnitas.

Se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, saberemos que este sistema tem uma única solução, que é a solução nula, ou seja, x=y=0.

Mas estamos interessados em calcular os autovetores de A, isto é, vetores $v \neq 0$, ou seja,

$$\det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Portanto, $-(3+\lambda).(2-\lambda)+4=0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.

Denominamos de $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$ de polinômio característico de A.

Obs: $p(\lambda) = \det(A - \lambda.I)$

Continuando a resolução, temos $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$, que são as raízes do polinômio característico, e portanto os autovalores da matriz A são -2 e 1.

Através dos autovalores encontramos os autovetores.

(i) Substituindo $\lambda_1 = -2$ em $\begin{bmatrix} -3-\lambda_1 & 4 \\ -1 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=4y$$

O autovetor associado a λ_1 é $v_1=(4y,y)$, $y \neq 0$, ou $v_1=(x,x/4)$, $x \neq 0$

(ii) Substituindo $\lambda_2 = 1$ em $\begin{bmatrix} -3-\lambda_2 & 4 \\ -1 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ temos:

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x+4y=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=y$$

O autovetor associado a λ_2 é $v_2=(x,x)$, $x \neq 0$.

Teorema

Se a equação polinomial $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$, onde c_1, ... , c_n são inteiros.

Todas as soluções inteiras (se houver) desta equação são divisores do termo c_n.

Exemplo: As possíveis raízes inteiras da equação $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 6 = 0$ são os divisores de -6 que são, ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.

Se $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 6$, então $\lambda_0 = 2$ é uma das raízes do polinômio $p(\lambda)$, pois p(2)=0.

Para as outras possibilidades, não encontramos raízes.

Mas, dividindo p(λ) por $\lambda - \lambda_0$, onde λ_0 é uma raiz de p(λ), temos,

$$p(\lambda) = (\lambda - 2).(\lambda^2 + 3)$$

Logo, as outras raízes serão soluções da equação $\lambda^2 + 3 = 0$.

$$\lambda = \pm\sqrt{-3}$$

Considerando raízes no campo complexo, temos $\lambda = \pm i\sqrt{3}$.

Então, as raízes de p(λ) são: 2, $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$.

6. Semelhança e Diagonalização

As matrizes triangulares e matrizes diagonais são interessantes pois seus autovalores são determinados diretamente. Portanto, seria agradável se pudéssemos relacionar uma matriz a outra matriz triangular ou diagonal de forma que ambas tivessem os mesmos autovalores.

6.1 Matrizes Semelhantes

Definição: Sejam A e B matrizes nxn. Dizemos que A é ***semelhante*** a B se existir uma matriz nxn invertível P tal que $P^{-1}AP=B$. Se A é semelhante a B, escrevemos A~B.

Obs: Se A~B, podemos escrever que $A=PBP^{-1}$ ou AP=PB.

Exemplo: As matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ são semelhantes.

Tome $P=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Então, AP=PB=$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Teorema

Sejam A e B matrizes semelhantes. Então:

a) det A = det B.

b) A é invertível $\Leftrightarrow$ B é invertível.

c) A e B têm o mesmo posto.

d) A e B têm o mesmo polinômio característico.

Definição: O ***posto*** de uma matriz é o número de linhas não nulas de qualquer uma de suas formas escalonadas por linhas.

6.2 Diagonalização

Temos a melhor situação possível quando uma matriz quadrada é semelhante a uma matriz diagonal. Como veremos logo a seguir, a possibilidade de isso ocorrer está relacionada estreitamente com os autovalores e autovetores da matriz.

Definição: Uma matriz A (nxn) é ***diagonalizável*** se existe uma matriz diagonal D tal que A~D, ou seja, se existe P (nxn) invertível tal que

$P^{-1}AP=D$.

Exemplo: A matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ é diagonalizável, pois, se $P=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, então AP=PD=$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Teorema

A matriz A(nxn) é diagonalizável $\Leftrightarrow$ A tiver n autovetores LI.

Em outras palavras:

Existem P invertível e uma matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP=D$ se, e somente se, as colunas de P forem n autovetores de A, LI, e os elementos da diagonal de D forem os autovalores correspondentes aos autovetores.

Exemplos: Se possível, determine a matriz P que diagonaliza

a) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ **b)** $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Soluções:

a) det(A-λI)=0 $\Rightarrow$ $-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2=0$ $\Rightarrow$ $-(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$

Os autovalores são $\lambda_1=\lambda_2=1$ e $\lambda_3=2$.

Para $\lambda_1=\lambda_2=1$ tem como autovetor os múltiplos de (1,1,1).

Para $\lambda_3=2$ tem como autovetor os múltiplos de (1,2,4).

Como não é possível existir 3 autovetores LI, pelo teorema anterior, A não é diagonalizável.

Obs: $\lambda=1$ tem ***multiplicidade algébrica*** igual a 2 e $\lambda=2$ tem ***multiplicidade algébrica*** igual a 1. Cada autovalor gera somente um autovetor, portanto a ***multiplicidade geométrica*** é 1, para qualquer autovalor.

b) det(A-λI)=0 $\Rightarrow$ $\lambda^2(\lambda+2)=0$

Para $\lambda_1=\lambda_2=0$ temos autovetores da forma (x,y,x), x,y$\neq$0, que são gerados pelos vetores v_1=(0,1,0) e v_2=(1,0,1).

Para $\lambda_3=-2$ tem como autovetor v_3=(-1,3,1).

É fácil verificar que estes 3 vetores são LI. Pelo teorema,

$P=[v_1\ v_2\ v_3]=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ é invertível. Além disso, $P^{-1}AP=D=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$, ou que, AP=PD.

Obs: Se $P=[v_3\ v_1\ v_2]$ então $P^{-1}AP=D=\begin{bmatrix}\lambda_3 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$

Obs: $\lambda_1 = 0$ tem ***multiplicidade algébrica*** igual a 2 e $\lambda_3 = -2$ tem ***multiplicidade algébrica*** igual a 1.

$\lambda_1 = 0$ geral dois autovetores e $\lambda_3 = -2$ gera um autovetor, portanto λ_1 tem ***multiplicidade geométrica*** igual a 2 e $\lambda 3$ tem ***multiplicidade geométrica*** igual a 1.

Teorema

Se A (nxn) têm n autovalores distintos entre si, então A é diagonalizável.

Teorema da Diagonalização

Seja A(nxn) com n autovalores distintos (não necessariamente distintos entre si). São equivalentes os enunciados:

i) A é diagonalizável.

ii) A união de todos os autovetores gerados pelos autovalores contém n vetores LI.

iii) A multiplicidade algébrica de cada autovalor é igual à sua multiplicidade geométrica.

Exemplos

a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ tem ***multiplicidade algébrica*** igual a 2 mas **multiplicidade geométrica** igual a 1, logo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável, de acordo com com o Teorema da Diagonalização.

b) A matriz $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ tem dois autovalores distintos $\lambda_1=\lambda_2=0$ e $\lambda_3=-2$.

O autovalor $\lambda=0$ tem multiplicidades algébrica e geométrica iguais a 2, e para o autovalor $\lambda=-2$ as multiplicidades são iguais a 1. Portanto, de acordo com o Teorema da Diagonalização, A é diagonalizável.

Exercícios resolvidos:

1) Determine se A é diagonalizável e, quando for, encontre uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que

$P^{-1}AP=D$, ou, $AP=PD$.

a) $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ d) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ g) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ h) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Gabarito:

a) $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1=\lambda_2=-1$. Com apenas o autovetor (2,1) não é possível determinar P. Logo, A não é diagonalizável.

c) Para $\lambda = 3$ temos apenas o autovetor (1,0,0). Como não é possível determinar P com 1 vetor então A não é diagonalizável.

d) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) O polinômio característico de A é $(1-\lambda)^2(2-\lambda)$=0. Autovalores: 1 e 2.

Para $\lambda = 1$, a multiplicidade algébrica vale 2 e tem como autovetor

(0,1,-1), portanto a multiplicidade geométrica vale 1. Logo, A não é diagonalizável.

f) O polinômio característico de A é $\lambda^2(1-\lambda) = 0$.

Para $\lambda = 0$, a multiplicidade algébrica vale 2 e tem como autovetor

(1,-1,1), portanto a multiplicidade geométrica vale 1. Logo, A não é diagonalizável.

g) O polinômio característico de A é $(2-\lambda)(3-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$.

Para $\lambda = 3$, a multiplicidade algébrica vale 2 e tem como autovetor

(0,1,0,0), portanto a multiplicidade geométrica vale 1. Logo, A não é diagonalizável.

h) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Fonte: Álgebra Linear, Editora Thomson - David Poole

Exercícios:

1) Ache a matriz associada à transformação linear T: $\Re^n \to \Re^n$ em relação à base canônica

de $\Re^n$.

(a) Em $\Re^2$, T(x,y) = (3x, x+y)

(b) Em $\Re^2$, T(x,y) = (x-y, 2y)

(c) Em $\Re^2$, T(x,y) = (x, 2x + 3y)

(d) Em $\Re^3$, T(x,y,z) = (2x, 3y, z)

(e) Em $\Re^3$, T(x,y,z) = (4x+y, -5z, y)

(f) Em $\Re^3$, T(x,y,z) = (0, x+y, y+z)

2) Ache os autovalores e autovetores correspondente das transf. lineares dadas:

(a) T(x, y)= (2y, x) R: $\lambda_1 = \sqrt{2}$ $v_1 = (\sqrt{2}y, y)$, $y \neq 0$

$\lambda_2 = -\sqrt{2}$ $v_2 = (-\sqrt{2}y, y)$, $y \neq 0$

(b) T(x, y) = (x + y, 2x + y) R: $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$ $v_1 = (x, \sqrt{2}x)$, $x \neq 0$

$\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$ $v_2 = (x, -\sqrt{2}x)$, $x \neq 0$

3) Ache os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes:

(a) A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ R: $\lambda_1 = 1$ $v_1 = (x, 0)$, $x \neq 0$

$\lambda_2 = -1$ $v_2 = (-y, y)$, $y \neq 0$

(b) A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ R: $\lambda_1 = 0$ $v_1 = (x, -x)$, $x \neq 0$

$\lambda_2 = 2$ $v_2 = (x, x)$, $x \neq 0$

4) Encontre as equações características e os autovalores.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ R: $\lambda_1 = 1 \pm 2\sqrt{2}\,\mathbf{i}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ R: $\lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{31}\,i}{2}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ R: $\lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{23}\,i}{2}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ R: $\lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{73}\,i}{2}$

5) Encontre as equações características, os autovalores e os autovetores das matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ R: $\lambda_1 = 3$ $v_1 = (x, 2x), \quad x \neq 0$

$\lambda_2 = -1$ $v_2 = (0, y), \quad y \neq 0$

(b) $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ R: $\lambda = 4$ $v = (3x, 2x), \quad x \neq 0$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ R: $\lambda_1 = 2\sqrt{3}$ $v_1 = (3x, 2\sqrt{3}\,x), \quad x \neq 0$

$\lambda_1 = -2\sqrt{3}$ $v_1 = (-3x, 2\sqrt{3}\,x), \quad x \neq 0$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ R: $\lambda = 1$, autovetor qualquer $v = (x,y)$ tal que $x, y \neq 0$

6) Dado a matriz A, determine:

6.1) a transformação linear $T: \Re^3 \to \Re^3$ em relação à base canônica de $\Re^3$.

6.2) os autovalores e os autovetores da matriz A

a) A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

R: $\lambda_1 = 2$, v_1 = (x, 0, 0), $x \neq 0$

$\lambda_2 = 3$, v_2 = (x, x, -2x), $x \neq 0$

b) A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

R: $\lambda_1 =$ 3, v_1 = (x, y, 0), $x, y \neq 0$

$\lambda_2 =$ -1, v_2 = (z, -$\frac{5}{4}$z, z), $z \neq 0$

c) A = $\begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

R: $\lambda_1 =$ 3, v_1 = (x, 0, 0), $x \neq 0$

$\lambda_2 =$ -1, v_2 = ($\frac{z}{16}$, -$\frac{5}{4}$z, z), $z \neq 0$

d) A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

R: λ = 1, v_1 = (x, 0, 0), $x \neq 0$

e) A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

R: $\lambda_1 =$ 1, v_1 = (x, -x, 0), $x \neq 0$

$\lambda_2 =$ -1, v_2 = (x, 2x, -x), $x \neq 0$

$\lambda_3 =$ 3, v_3 = (x, 0, x), $x \neq 0$

f) A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

R: $\lambda_1 =$ -1, v_1 = (x, -2x, $\frac{-x}{2}$), $x \neq 0$

$\lambda_2 =$ -2, v_2 = (x, -3x, x), $x \neq 0$

$\lambda_3 =$ 2, v_1 = (x, x, x), $x \neq 0$

g) A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

R: $\lambda_1 = 1$ v_1 = (x, 0, x), $x \neq 0$ $\lambda_2 = -1$, v_2 = (x, 0, x), $x \neq 0$

$\lambda_3 = 4$ v_3 = (x, x, x), $x \neq 0$

7) Dado a base no espaço vetorial V, determine a transformação linear

T: $\Re^n \rightarrow \Re^m$ tal que:

a) n=2, m=3, T(1,2) = (1,3,-3), T(2,1) = (2,3,0)

b) n=2, m=3, T(1,0) = (1,-1,2), T(0, 2) = (4, 0, 6)

c) n=3, m=2, T(1,0,0) = (1, 2), T(1,1,1) = (2, 1), T(2,3,0) = (5,4)

d) n=3, m=3, T(0,1,0) = (-1, 0, 1), T(1, 0, 3) = (2, 3,9), T(1,1,0) = (1,0,1)

e) n=2, m=2, T(1, 2) = (9, 0), T(2, 0) = (2, 4)

f) n=3, m=3, T(1,0,0) = (1,0,1), T(0, 2, 1) = (2, 3, 2), T(0, 0, 1) = (0, 1, 2)

7. POLINÔMIO MINIMAL

Vimos, que os operadores eram ou não diagonalizáveis, exibindo uma base de autovetores, ou mostrando a inexistência desta base. Em casos de espaços vetoriais de baixa dimensão é este o procedimento conveniente. Entretanto, podemos estar interessados, principalmente, em casos de espaços vetoriais de dimensão alta, onde os cálculos são longos. Já sabemos que se dim V=n e o operador linear T tem n autovetores distintos, então ele é diagonalizável. No caso geral, a resposta está ligada ao aspecto de um polinômio que chamaremos de *polinômio minimal do operador T.* Para isso, vamos introduzir a definição de polinômios calculados em matrizes.

Definição: Seja $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio e A uma matriz quadrada. Então p(A) é a matriz $p(A) = a_n \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{I}$**.**

Quando p(A)=0, dizemos que o polinômio anula a matriz A.

Exemplo: Sejam os polinômios $p(x) = x^2 - 9 \;\; e \;\; q(x) = 2x + 3$

Se $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ então $p(A) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^2 - 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

E q$(A) = 2 \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ Então p(x) anula A e q(x) não anula A.

Definição: Seja A uma matriz quadrada. O polinômio minimal de A é um polinômio $m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0$ tal que

i) m(A)=0, isto é, m(x) anula a matriz A

ii) m(x) é o polinômio de menor grau entre aqueles que anulam A

OBS. O coeficiente do termo x^k do polinômio minimal é 1.

Teorema: Sejam $T: V \to V$ um operador linear e α uma base qualquer de V de dimensão n. Então T é diagonalizável se, e somente se o polinômio minimal de $[T]_\alpha^\alpha$ é da forma

$$m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_r)\ com\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\ distintos$$

O problema que consiste em determinar de T é diagonalizável reduz-se então ao de saber achar o polinômio minimal de T.

Teorema de Cayley-Hamilton: Seja $T: V \to V$ um operador linear, α uma base de V e p(x) o polinômio característico de T. Então: $p([T]_\alpha^\alpha) = 0$

Isto significa que o polinômio característico é um candidato ao polinômio minimal porque ele satisfaz a condição i) da definição acima.

Teorema: As raízes do polinômio minimal são as mesmas raízes (distintas) do polinômio característico.

Estes dois últimos teoremas juntos nos dizem como achar o polinômio minimal de um operador linear $T: V \to V$. O polinômio minimal deve ser de grau menor ou no máximo igual ao do polinômio característico e ainda deve ter as mesmas raízes.

Exemplo:

Seja $T: V \to V$ um operador linear e α uma base de V. Suponhamos que o polinômio característico de T seja $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 1)^3(\lambda + 5)$. Então o seu polinômio minimal será um dos polinômios:

$p_1(x) = (x - 3)\ \ (x - 1)\ \ (x + 5)$

$p_2(x) = (x - 3)^2(x - 1)\ \ (x + 5)$

$p_3(x) = (x - 3)\ \ (x - 1)^2(x + 5)$

$p_4(x) = (x-3)\ \ (x-1)^3(x+5)$

$p_5(x) = (x-3)^2(x-1)^2(x+5)$

$p_6(x) = (x-3)^2(x-1)^3(x+5)$

Como o polinômio minimal é o de menor grau que anula $[T]_\alpha^\alpha$, verificamos primeiramente se $p_1([T]_\alpha^\alpha) = 0$. Em caso afirmativo, $p_1(x)$ será o polinômio minimal. Se $p_1([T]_\alpha^\alpha) \neq 0$, testamos $p_2([T]_\alpha^\alpha)$ e assim sucessivamente. Na pior das hipóteses o polinômio minimal será o próprio polinômio característico.

Se voltarmos ao primeiro teorema veremos que o operador linear T só será diagonalizável se $p_1(x)$ for o polinômio minimal. Então, vamos reestruturar o primeiro teorema:

Teorema: Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ os autovalores distintos de um operador linear T. Então T será diagonalizável se, e somente se o polinômio $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_r)$ anular T.

Exemplo: O operador linear $T: R^4 \to R^4$ definido por T(x,y,z,t)=(3x-4z,3y+5z,-z,-t) é diagonalizável?

Exemplo: Determine o polinômio mínimo da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$. Verifique se a matriz é diagonalizável.

Exemplo: Determine os polinômios mínimos das matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$. Verifique se são diagonalizáveis.

Teorema 1:

O polinômio mínimo m(t) de A divide todo polinômio que tem A como zero. Em particular, m(t) divide o polinômio característico $\Delta(t)$ de A.

Teorema 2:

Os polinômios característicos e mínimo de uma matriz A têm os mesmos fatores irredutíveis.

Este teorema, não nos diz que $m(t)=\Delta(t)$, e sim que qualquer fator irredutível de um deve dividir o outro. Em particular, como um fator linear é irredutível, m(t) e A(t) têm os mesmos fatores lineares; logo eles têm as mesmas raízes. Temos assim:

Teorema 3:

Um escalar λ é um autovalor de uma matriz A se e somente se λ é uma raiz do polinômio mínimo de A.

Exemplo 1:

Ache o polinômio mínimo m(t) de $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

7.1 Operadores Nilpotentes

Um operador linear $T:V\to V$ é chamado nilpotente se $T^n=0$ para algum inteiro positivo n; k é o índice de nilpotência de T se $T^k=0$, mas $T^{k-1}\neq 0$.
Analogamente, uma matriz quadrada A é chamada nilpotente se $A^n=0$ para algum inteiro positivo n, e de índice k se $A^k=0$, mas $A^{k-1}\neq 0$. Obviamente o polinômio mínimo de um operador (matriz) nilpotente de índice *k* é $m(t)=t^k$; logo 0 é seu único autovalor.

Teorema 4:

Seja $T:V\to V$ um operador nilpotente de índice *k*. Então *T* admite uma representação matricial em bloco cujos elementos diagonais têm a forma

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(isto é, todos os elementos de N são 0s, exceto os que estão, diretamente acima da diagonal principal, e que são 1s). Há ao menos uma N de ordem k, e todas as outras N são de ordem $\leq k$. O número de Ns de cada ordem possível é determinado de modo único por T. Além disso, o número total de Ns de todas as ordens é igual à nulidade de T.

Observemos que a matriz N acima é ela própria nilpotente, e que seu índice de nilpotência é igual à sua ordem. Note-se que a matriz N de ordem 1 não é mais do que a matriz zero 1x1(0).

7.2 Forma Canônica de Jordan

Um operador T pode ser posto em forma canônica de Jordan se seus polinômios característico e mínimo puderem fatorar-se em polinômios lineares. Isto é sempre verdadeiro se ***K*** é o corpo complexo ***C***. Em qualquer caso, podemos sempre prolongar o corpo base ***K*** para um corpo em que os polinômios mínimo e característico se decompõem, de fato, em fatores lineares; assim, em um sentido amplo, todo operador tem uma forma canônica de Jordan. Analogamente, toda matriz é semelhante a uma matriz em forma canônica de Jordan.

Teorema 5:

Seja $T: V \to V$ um operador linear cujos polinômios característico e mínimo são, respectivamente.

$\Delta(t) = (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_r)^{n_r}$ e $m(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_r)^{m_r}$

onde os λ_i são escalares distintos. Então T admite uma representação matricial em bloco J cujos elementos diagonais têm a forma

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Para cada λ_i os blocos correspondentes J_{ij} têm as seguintes propriedades:

(i) Há ao menos um J_{ij} de ordem m_i; todos os outros J_{ij} são de ordem $\leq m_i$.

(ii) A soma das ordens dos J_{ij} é n_i.

(iii) O número de J_{ij} é igual à multiplicidade geométrica de λ_i.

(iv) O número de J_{ij} de cada ordem possível é univocamente determinado por T.

A matriz J que aparece no teorema acima é chamada forma canônica de Jordan do operador T. Um bloco diagonal J_{ij} é chamado bloco de Jordan pertencente ao autovalor λ_i. Observe que

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Isto é $J_{ij} = \lambda_i I + N$, onde N é o bloco nilpotente que aparece no Teorema 4

Exemplo 2:

Suponhamos que os polinômios característico e mínimo de um operador T sejam, respectivamente, $\Delta(t) = (t-2)^4 (t-3)^3$ e $m(t) = (t-2)^2 (t-3)^2$. Então a forma canônica de Jordan de Té uma das matrizes seguintes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & 0 & 2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & 0 & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & 0 & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{bmatrix}$$

A primeira matriz ocorre se T tem dois autovetores independentes pertencentes ao seu autovalor 2; e a segunda matriz ocorre se T tem três autovetores independentes pertencentes a 2.

Exemplo 3:

Determine todas as formas canônicas possíveis para um operador linear $T: V \rightarrow V$ cujo polinômio característico é $\nabla(t) = (t-2)^3 (t-5)^2$.

Exemplo 4:

Determine todas as formas canônicas de Jordan J possíveis para uma matriz de ordem 5 cujo polinômio mínimo é $m(t) = (t-2)^2$.

Exercícios:

1) Determine o polinômio mínimo m(t) da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

2) Determine o polinômio mínimo m(t) da matriz (onde $\alpha \neq 0$): $B = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha & 0 \\ 0 & \lambda & \alpha \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

3) Ache o polinômio mínimo m(t) da matriz $M = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

4) Determine uma matriz A cujo polinômio mínimo seja

(a) $f(t) = t^3 - 8t^2 + 5t + 7$

(b) $f(t) = t^4 - 3t^3 - 4t^2 + 5t + 6$

5) Determine todas as formas canônicas de Jordan possíveis para as matrizes cujos polinômios característicos $\nabla(t)$ e mínimo $m(t)$ são:

(a) $\nabla(t) = (t-2)^4 (t-3)^2$, $m(t) = (t-2)^2 (t-3)^2$

(b) $\nabla(t) = (t-7)^5$, $m(t) = (t-7)^2$

(c) $\nabla(t) = (t-2)^7$, $m(t) = (t-2)^3$

(d) $\nabla(t) = (t-3)^4 (t-5)^4$, $m(t) = (t-3)^2 (t-5)^2$

Respostas:

1) $m(t) = (t-2)(t-1) = t^2 - 3t + 2$

2) $m(t) = \nabla(t) = (t-\lambda)^3$

3) $m(t) = (t-4)^3$

4) (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

5) (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & & & \\ & & 7 & 1 & \\ & & & 7 & \\ & & & & 7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & & & \\ & & 7 & & \\ & & & 7 & \\ & & & & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & 5 \end{bmatrix}$