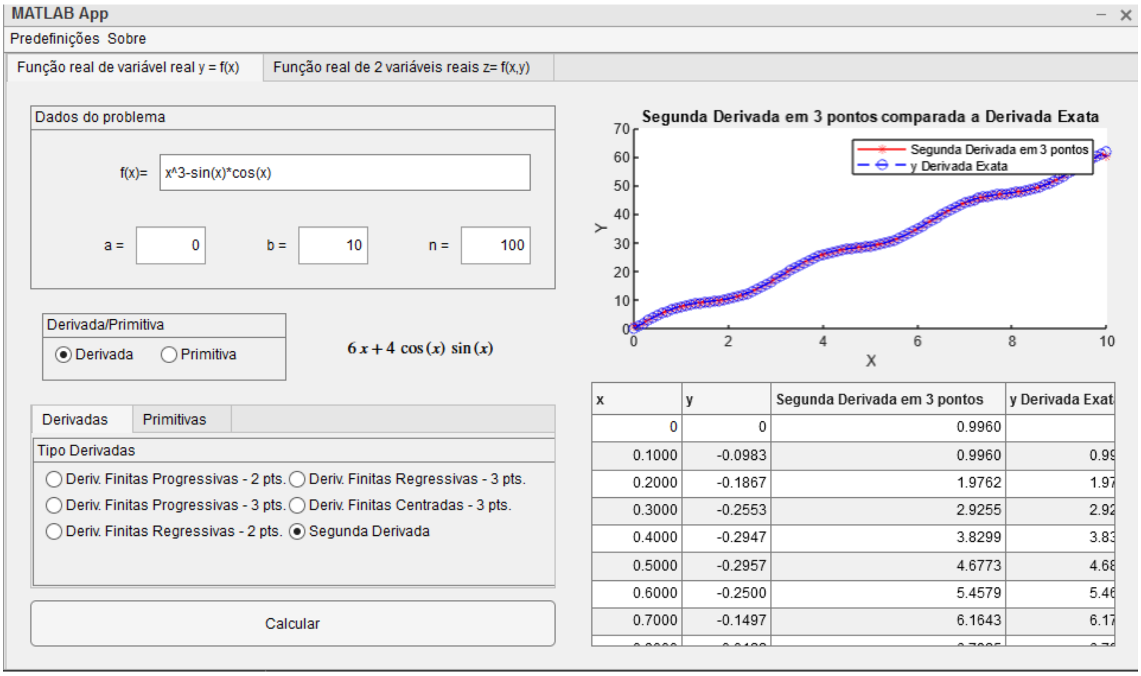
# Métodos Numéricos para Derivação e Integração





Análise Matemática II – Atividade 04 Trabalho

Renato Alexandre Oliveira Craveiro | 2018011392

Ano Letivo 2022/2023 – ISEC – Lic. Engenharia Informática – Regime Pós-Laboral

# Índice

# 1. Introdução

Este trabalho tem como objetivo aplicar Métodos de aproximação de Derivação e Integração de funções reais. Para isso, utilizamos o MATLAB para que possamos desenvolver uma aplicação que facilitará a implementação destes mesmos métodos.

Para os Métodos de Derivação foram aplicadas as Fórmulas das Diferenças Finitas Progressivas em 2 e 3 pontos, das Diferenças Finitas Regressivas em 2 e 3 pontos, das Diferenças Finitas Centradas e da Segunda Derivada.

Para a Integração utilizaram-se as Regras dos Trapézios e de Simpson.

Ainda se desenvolveu uma segunda aba com a demonstração gráfica de uma função real de 2 variáveis reais. Nesta, ao inserir a função, é-nos indicada se é harmónica (ou não), o seu *Laplaciano* e também nos possibilita ver as suas curvas de nível.

## 2. Métodos Numéricos para Derivação: Fórmulas de Diferenças Finitas

### 2.1 Fórmula de Diferenças Finitas Progressivas em 2 Pontos

A fórmula de diferenças finitas progressivas em dois pontos é usada para calcular uma aproximação da derivada de uma função em um ponto específico. Ela utiliza a diferença entre os valores da função em dois pontos próximos, sendo o ponto de interesse e um ponto ligeiramente à direita. A fórmula é dada por:

$$f'(x) \approx \frac{(f(x + h) - f(x))}{h}$$

Onde f'(x) é a derivada que queremos aproximar, f(x) é o valor da função no ponto de interesse, x + h é o ponto ligeiramente à direita e h é o tamanho do intervalo entre os pontos. Quanto menor o valor de h, mais precisa será a aproximação da derivada.

Em MATLAB:

```
function [dydx,x,y] = DFP(f,a,b,n,y)
%DFP - implemta o mét. das Dif. Finita Progressiva
%  f'(xi)=(y(i+1)-y(i))/h
%% INPUT:  f - funcao
%         [a, b] - intervalo de derivacao
%          n - número de subintervalos
%          y - imagens x vs y
% OUTPUT: [x, y] - malha de pontos
%          dydx - derivada de f
%
%   03/06/2023 - Renato Craveiro | 2018011392 | Lic. Eng. Informática ISEC
%   Ano Letivo 2022/23

    h=(b-a)/n;
    x=a:h:b;

    if nargin == 4
        y=f(x);
    end

    dydx = zeros(1,n+1);


    for i=1:n
        dydx(i)=(y(i+1)-y(i))/h;
    end
    dydx(n+1) = dydx(n);
end
```

## 2.2 Fórmula de Diferenças Finitas Progressivas em 3 Pontos

A fórmula de diferenças finitas progressivas em três pontos é usada para calcular uma aproximação da primeira derivada de uma função em um ponto específico. Ela envolve a diferença entre os valores da função em três pontos próximos, sendo dois pontos à direita do ponto de interesse. A fórmula é dada por:

$$f'(x) \approx \frac{(-3f(x) + 4f(x + h) - f(x + 2h))}{2h}$$

Nessa fórmula, f'(x) é a derivada que queremos aproximar, f(x) é o valor da função no ponto de interesse, x + h é o ponto à direita do ponto de interesse, x + 2h é o ponto dois intervalos à direita, e h é o tamanho do intervalo entre os pontos.

Essa fórmula de diferenças finitas progressivas em três pontos é conhecida como uma aproximação de ordem mais alta do que a de dois pontos, o que significa que, em geral, ela oferece uma maior precisão na aproximação da derivada.

Em MATLAB

```matlab
% Formula das Diferençs progressivas em 3 pontos
% f'(xi)=(-3*f(x(i)) + 4*f(x(i+1)) - f(x(i+2))/(2*h)
% INPUT:  f - funcao
%         [a, b] - intervalo de derivacao
%         n - número de subintervalos
%         y - imagens x vs y
% OUTPUT: [x, y] - malha de pontos
%         dydx - derivada de f
%
%   03/06/2023 - Renato Craveiro | 2018011392 | Lic. Eng. Informática ISEC
%   Ano Letivo 2022/23


function [dydx,x,y]=DFP3(f,a,b,n,y)

h=(b-a)/n;
x=a:h:b;

if nargin==4
    y=f(x);
end

dydx=zeros(1,n);

for i=1:n-1
    dydx(i)=( (-3)*y(i) + 4*y(i+1) - y(i+2) ) / (2*h)
end

dydx(n)=( y(n-3) - 4*y(n-2) + 3*y(n-1) )/(2*h);
dydx(n+1)=( y(n-2) - 4*y(n-1) + 3*y(n) )/(2*h);
```

## 2.3 Fórmula de Diferenças Finitas Regressivas em 2 Pontos

A fórmula de diferenças finitas regressivas em dois pontos é usada para calcular uma aproximação da derivada de uma função em um ponto específico. Essa fórmula utiliza a diferença entre os valores da função em dois pontos próximos, sendo o ponto de interesse e um ponto ligeiramente à esquerda. A fórmula é dada por:

$$f'(x) \approx (f(x) - f(x - h)) / h$$

Nessa fórmula, f'(x) representa a derivada que queremos aproximar, f(x) é o valor da função no ponto de interesse, x - h é o ponto ligeiramente à esquerda, e h é o tamanho do intervalo entre os pontos.

Assim como a fórmula de diferenças finitas progressivas em dois pontos, essa fórmula regressiva é uma aproximação da derivada e depende da suavidade e comportamento adequado da função no intervalo considerado.

Em MATLAB:

```
% Formula das Diferenças regressivas em 2 pontos
% f'(xi)=(f(x(i))-f(x(i-1))/h
% INPUT:  f - função
%         [a, b] - intervalo de derivação
%         n - número de subintervalos
%         y - imagens x vs y
% OUTPUT: [x, y] - malha de pontos
%         dydx - derivada de f
%
%   03/06/2023 - Renato Craveiro | 2018011392 | Lic. Eng. Informática ISEC
%   Ano Letivo 2022/23

function [dydx, x,y]=DFR2(f,a,b,n,y)
h=(b-a)/n;

x=a:h:b;
if nargin==4
    y=f(x);
end
dydx=zeros(1,n);
dydx(1)=(y(2)-y(1))/h;
for i=2:n+1
    dydx(i)=(y(i)-y(i-1))/h;
end
```

## 2.4 Fórmula de Diferenças Finitas Regressivas em 3 Pontos

A fórmula de diferenças finitas regressivas em três pontos é usada para calcular uma aproximação da primeira derivada de uma função em um ponto específico. Ela envolve a diferença entre os valores da função em três pontos próximos, sendo dois pontos à esquerda do ponto de interesse. A fórmula é dada por:

$$f'(x) \approx (f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)) / (2h)$$

Nessa fórmula, f'(x) é a derivada que queremos aproximar, f(x) é o valor da função no ponto de interesse, x - h é o ponto à esquerda do ponto de interesse, x - 2h é o ponto dois intervalos à esquerda, e h é o tamanho do intervalo entre os pontos.

Assim como a fórmula de diferenças finitas progressivas em três pontos, essa fórmula regressiva também é uma aproximação de ordem mais alta e geralmente oferece maior precisão na aproximação da derivada em relação à fórmula de dois pontos.

Em MATLAB:

```
% Formula das Diferenças regressivas em 3 pontos
% f'(xi)=(f(x(i-2))-4*f(x(i-1)+3*f(x(i)))/(2*h)
% INPUT:  f - funcao
%         [a, b] - intervalo de deriva郯o
%         n - número de subintervalos
%         y - imagens x vs y
% OUTPUT: [x, y] - malha de pontos
%         dydx - derivada de f
%
%   03/06/2023 - Renato Craveiro | 2018011392 | Lic. Eng. Informática ISEC
%   Ano Letivo 2022/23

function [dydx, x,y]=DFR3(f,a,b,n,y)

h=(b-a)/n;
x=a:h:b;

if nargin==4
    y=f(x);
end
dydx=zeros(1,n);
dydx(1)=( (-3)*y(1) + 4*y(2) - y(3) )/(2*h);
dydx(2)=( (-3)*y(2) + 4*y(3) - y(4) )/(2*h);
for i=3:n+1
    dydx(i)=( y(i-2) - 4*y(i-1) + 3*y(i) )/(2*h);
end
```

## 2.5 Fórmula de Diferenças Finitas Centradas em 3 Pontos

A fórmula de diferenças finitas centradas em três pontos é usada para calcular uma aproximação da primeira derivada de uma função em um ponto específico. Ela envolve a diferença entre os valores da função em três pontos próximos, com um ponto à esquerda e um ponto à direita do ponto de interesse. A fórmula é dada por:

$$f'(x) \approx (f(x+h) - f(x-h)) / (2h)$$

Nessa fórmula, f'(x) é a derivada que queremos aproximar, f(x) é o valor da função no ponto de interesse, x + h é o ponto à direita do ponto de interesse, x - h é o ponto à esquerda, e h é o tamanho do intervalo entre os pontos.

A fórmula de diferenças finitas centradas em três pontos é considerada uma aproximação de ordem ainda mais alta, proporcionando maior precisão na aproximação da derivada em comparação com as fórmulas de diferenças finitas progressivas e regressivas em três pontos.

Em MATLAB:

```
% Formula das Diferenças centradas em 3 pontos
% f'(xi)=(f(x(i+1))-f(x(i-1))/(2*h)
% INPUT:  f - funcao
%         [a, b] - intervalo de derivacao
%         n - número de subintervalos
%         y - imagens x vs y
% OUTPUT: [x, y] - malha de pontos
%         dydx - derivada de f
%
%   03/06/2023 - Renato Craveiro | 2018011392 | Lic. Eng. Informática ISEC
%   Ano Letivo 2022/23

function [dydx, x,y]=DFC3(f,a,b,n,y)

h=(b-a)/n;
x=a:h:b;

if nargin==4
    y=f(x);
end
dydx=zeros(1,n);
dydx(1)=(y(2)-y(1))/h;
for i=2:n
    dydx(i)=(y(i+1)-y(i-1))/(2*h);
end
dydx(n+1)=(y(n)-y(n-1))/h;
```

## 3. Métodos Numéricos para Integração

### 3.1 Regra dos Trapézios

A regra dos trapézios é um método de integração numérica que aproxima o valor de uma integral definida de uma função. Ela divide o intervalo de integração em subintervalos e aproxima a curva da função por trapézios em cada subintervalo. A área de cada trapézio é calculada e somada para obter uma estimativa da área total sob a curva. A fórmula da regra dos trapézios é:

Integral ≈ ((b - a) / n) * [(f(a) + f(b)) / 2 + soma dos valores de f(xi) para i = 1 até n-1]

Onde 'a' e 'b' são os limites do intervalo de integração, 'n' é o número de subintervalos, e 'xi' são os pontos dentro de cada subintervalo. Quanto mais subintervalos forem utilizados, maior será a precisão da aproximação. A regra dos trapézios é amplamente utilizada devido à sua simplicidade, mas a precisão da aproximação depende da suavidade da função e da escolha adequada do número de subintervalos.

Em MATLAB:

```
%CIRT - Calculo Integração Numérica através da Regra dos Trapézios
%   t = CIRT(f,a,b,n)
%   t = h*(f(a)+f(b)+t)/2;
%
%INPUT:
%   f - função real de variável real x
%   [a, b] - extremos do intervalo da variável independente x
%   n - número de subintervalos ou iterações da regra
%OUTPUT:
%   t - Resultado da área do Integral
%   t = h*(f(a)+f(b)+t)/2 , i=2,...,n-1
%
%   03/06/2023 - Renato Craveiro | 2018011392 | Lic. Eng. Informática ISEC
%   Ano Letivo 2022/23


function T = CIRT(f,a,b,n)

h = (b-a)/n;
s = 0;
x=a;

for i=1:n-1
    x=x+h;
    s = s+f(x);
end

T = h/2*((f(a) +2*s + f(b)));
```

3.2 Regra de Simpson

A regra de Simpson é outro método de integração numérica que permite aproximar o valor de uma integral definida de uma função. Essa regra é baseada na ideia de aproximar a curva da função por uma série de polinômios de segundo grau (parábolas).

A regra de Simpson utiliza os pontos da função nos extremos e no ponto médio de cada subintervalo para construir as parábolas. Cada parábola representa uma aproximação suave da função dentro do subintervalo.

A fórmula geral da regra de Simpson para a aproximação da integral é:

Integral ≈ (h/3) * [f(a) + 4 * f((a + b)/2) + f(b)]

Nessa fórmula, 'a' e 'b' são os limites do intervalo de integração, 'h' é a largura de cada subintervalo (h = (b - a) / n), onde 'n' é o número de subintervalos.

A regra de Simpson é considerada mais precisa do que a regra dos trapézios, pois utiliza uma aproximação por parábolas em vez de trapézios retos. Ela tende a fornecer uma melhor aproximação para funções suaves e bem comportadas.

Assim como na regra dos trapézios, quanto mais subintervalos forem utilizados, maior será a precisão da aproximação. Normalmente, é recomendado utilizar um número par de subintervalos na regra de Simpson para obter resultados mais precisos.

Em MATLAB:

```
%CIRS Calculo Integração Numérica através da Regra de Simpson
%   s = CIRS(f,a,b,n)
%   s = h*(f(a)+f(b)+s)/3;
%
%INPUT:
%   f - função real de variável real x
%   [a, b] - extremos do intervalo da variável independente x
%   n - número de subintervalos ou iterações da regra
%OUTPUT:
%   s - Resultado da área do Integral
%   s = h*(f(a)+f(b)+s)/3 , i=2,...,n-1
%
%   03/06/2023 - Renato Craveiro | 2018011392 | Lic. Eng. Informática ISEC
%   Ano Letivo 2022/23

function out_S =CIRS(f,a,b,n)

h = (b-a)/n;
s = 0;
x=a;

for i=1:n-1
    x=x+h;
    if mod(i,2)==0
        s = s+2*f(x);
    else
        s = s+4*f(x);
    end
end

out_S = h/3*((f(a)+s+f(b)));
```

## 4. Avaliação de função real de 2 variáveis reais: Harmónica

Uma função harmónica é uma função diferenciável de duas variáveis (ou mais) que satisfaz a equação de Laplace. A equação de Laplace para uma função de duas variáveis, denotada por f(x, y), é dada por:

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Isso significa que a função harmónica possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas em relação a x e y, e a soma dessas derivadas parciais é igual a zero.

Em outras palavras, uma função de duas variáveis é harmónica se o valor da função em qualquer ponto é igual à média aritmética dos valores das suas derivadas parciais de segunda ordem em relação a x e y.

As funções harmônicas têm diversas aplicações em física matemática, teoria do potencial, análise de campos vetoriais e outras áreas da matemática e da física. Elas também possuem propriedades importantes, como a conservação de médias e a propriedade de extrema mínima e máxima.

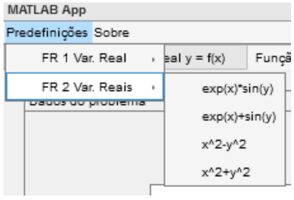
Em MATLAB, para confirmar se uma função é harmónica ou não, basta calcular o *Laplaciano* dessa mesma função e verificar se é zero ou não. Para isso, o MATLAB tem uma função interna que o resolva:

```
l = laplacian(func);

if(l==0)
    app.lblHarm.Text="A Função é Harmónica (Laplaciano = 0).";
    app.lblHarm.BackgroundColor = "g";
    app.lblHarm.FontColor = "k";
else
    app.lblHarm.Text = ['Função não é Harmonica (Laplaciano = $' latex(l) '$)!'];
    app.lblHarm.BackgroundColor = "r";
    app.lblHarm.FontColor ="w";
end
```

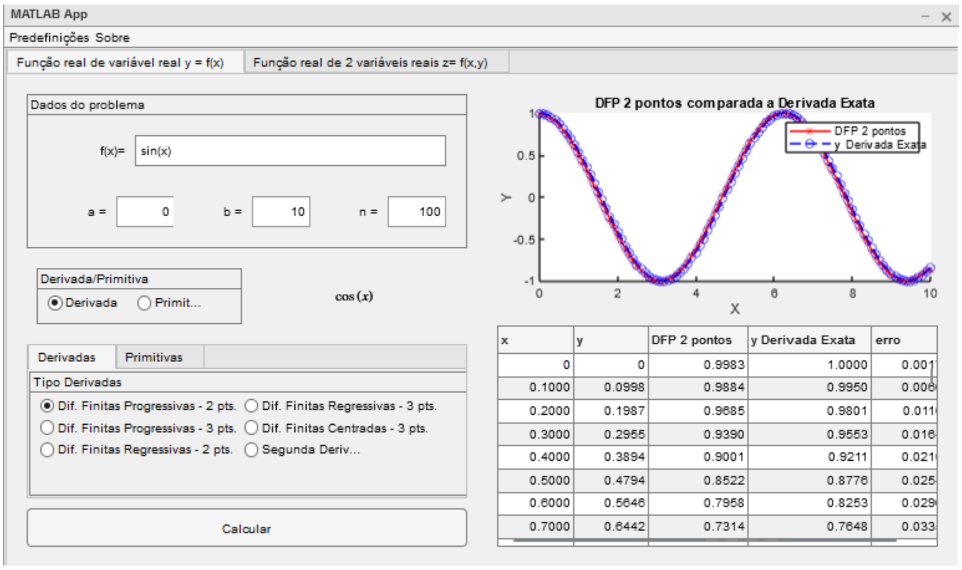
## 5. Aplicação MATLAB: Máquina de Cálculo Diferencial e Integral

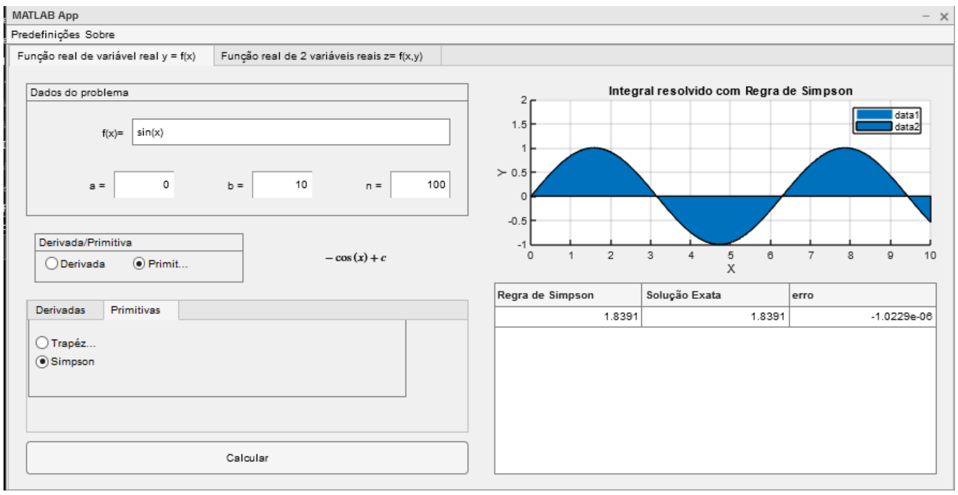
A aplicação divide-se em 2 abas: “Função real de variável real y = f(x)” e “Função real de 2 variáveis reais z= f(x,y)”. Para além das abas abaixo apresentadas, também existe um menu com informação sobre a aplicação e sobre o autor, tal como predefinições de funções a testar para cada uma das abas.




Na aba “Função real de variável real y = f(x)” podemos:

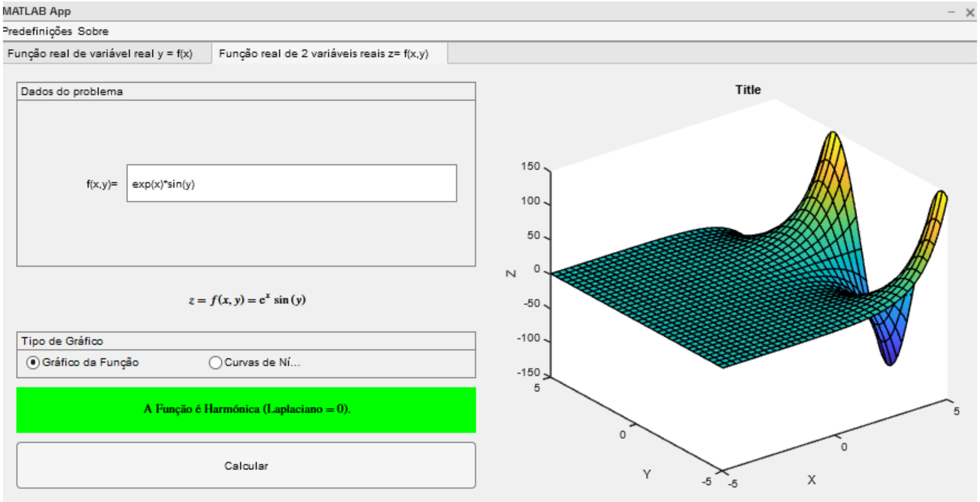
- apresentar uma função em x (f(x)), definir um intervalo [a,b] e o nº de subintervalos, na secção “Dados do problema”.
- Escolher apresentar o resultado real da Derivada ou da Primitiva na secção “Derivada/Primitiva”. O Resultado é apresentado à direita desta secção.
- Aida temos mais duar abas: “Derivadas” e Primitivas”. Na “Derivadas podemos escolher o método de aproximação a utilizar e ainda a Seguda Derivada. Na aba “Primitivas” podemos escolher entre a regra dos trapézios e a regra de Simpson.
- Do lado diretio desta aba é apresentado o resultado a Derivada/Primitiva escolhida (gráfico) e os valores do método selecionado comparado ao resultado real.

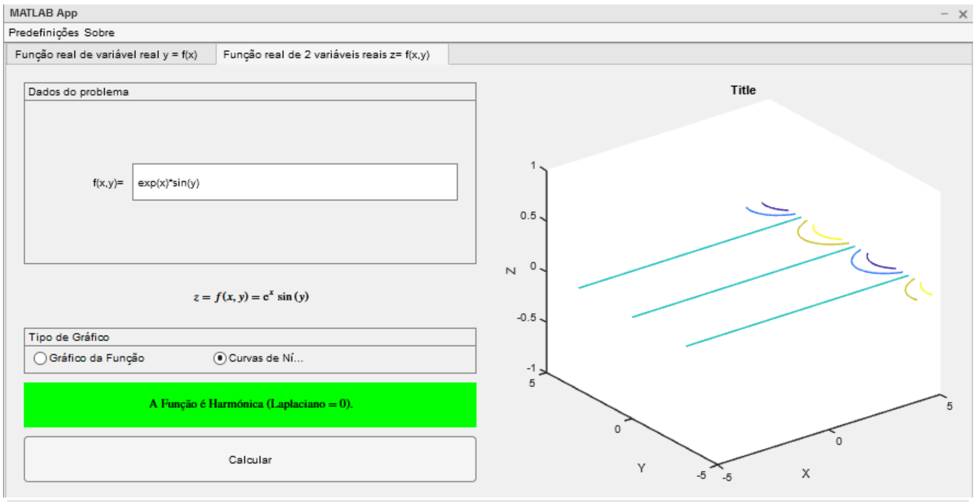


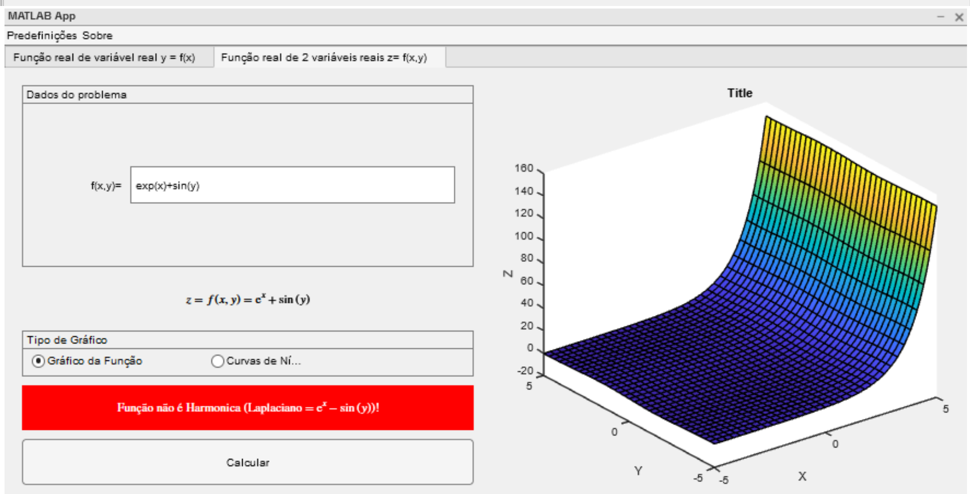



Na aba "Função real de 2 variáveis reais z= f(x,y)" podemos:

- Inserir a função a mostrar
- Escolher entre mostrar o gráfico da função ou as Curvas de nível da mesma
- Ao pressionar em calcular é demonstrada se a função é Harmónica (Laplaciano = 0) ou não, e mostra o resultado do Laplaciano
- Do lado direito é mostrado o Gráfico ou as Curvas de Nível (dependendo da seleção)



## 4 Conclusão

Em conclusão, as aproximações de derivadas e integrais são bastante úteis quando não existe informação da função de origem e apenas temos alguns pontos que possam ser utilizados como referência de forma a chegar a um resultado possivelmente parecido à função “original”.

Para as funções de 2 variáveis reais, decidi não aplicar as aproximações e apenas indicar se são harmónicas ou não e as suas curvas de nível, pois seria uma “repetição” do que também existe para uma variável e o próprio MATLAB simplifica ao implementar o *Laplaciano* internamente, ajudando na confirmação de função Harmónica (ou não).

A aplicação desenvolvida permite o cálculo e apresentação gráfica/tabela destas mesmas aproximações, sendo que foi um desafio implementá-las e apresentá-las de forma simples e direta ao utilizador.

## 5 Bibliografia

Moodle ISEC – AM2 (06/2023):

https://moodle.isec.pt/moodle/course/view.php?id=15679

MATLAB Answers:

https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/index

MathPages: The Laplace Equation and Harmonic Funcitons

https://www.mathpages.com/home/kmath214/kmath214.htm

## 6 Autoavaliação e heteroavaliação do trabalho submetido numa escala de 0 a 5 valores

Renato Alexandre Oliveira Craveiro – 3.5 valores em 5.