

Métodos Numéricos para Derivação e Integração

Uma imagem com texto, captura de ecrã, número, diagrama

Descrição gerada automaticamente

Análise Matemática II – Atividade 04 Trabalho

Renato Alexandre Oliveira Craveiro | 2018011392

Ano Letivo 2022/2023 – ISEC – Lic. Engenharia Informática – Regime Pós-Laboral

Índice

[1. Introdução 3](#_Toc136707914)

[2. Métodos Numéricos para Derivação: Fórmulas de Diferenças Finitas 4](#_Toc136707915)

[2.1 Fórmula de Diferenças Finitas Progressivas em 2 Pontos 4](#_Toc136707916)

[2.2 Fórmula de Diferenças Finitas Progressivas em 3 Pontos 5](#_Toc136707917)

[2.3 Fórmula de Diferenças Finitas Regressivas em 2 Pontos 6](#_Toc136707918)

[2.4 Fórmula de Diferenças Finitas Regressivas em 3 Pontos 7](#_Toc136707919)

[2.5 Fórmula de Diferenças Finitas Centradas em 3 Pontos 7](#_Toc136707920)

[3. Métodos Numéricos para Integração 8](#_Toc136707921)

[3.1 Regra dos Trapézios 8](#_Toc136707922)

[3.2 Regra de Simpson 9](#_Toc136707923)

[4. Avaliação de função real de 2 variáveis reais: Harmónica 11](#_Toc136707924)

[5. Aplicação MATLAB: Máquina de Cálculo Diferencial e Integral 12](#_Toc136707925)

[4 Conclusão 14](#_Toc136707926)

[5 Bibliografia 14](#_Toc136707927)

[6 Autoavaliação e heteroavaliação do trabalho submetido numa escala de 0 a 5 valores 14](#_Toc136707928)

1. Introdução

Este trabalho tem como objetivo aplicar Métodos de aproximação de Derivação e Integração de funções reais. Para isso, utilizamos o MATLAB para que possamos desenvolver uma aplicação que facilitará a implementação destes mesmos métodos.

Para os Métodos de Derivação foram aplicadas as Fórmulas das Diferenças Finitas Progressivas em 2 e 3 pontos, das Diferenças Finitas Regressivas em 2 e 3 pontos, das Diferenças Finitas Centradas e da Segunda Derivada.

Para a Integração utilizaram-se as Regras dos Trapézios e de Simpson.

Ainda se desenvolveu uma segunda aba com a demonstração gráfica de uma função real de 2 variáveis reais. Nesta, ao inserir a função, é-nos indicada se é harmónica (ou não), o seu *Laplaciano* e também nos possibilita ver as suas curvas de nível.

1. Métodos Numéricos para Derivação: Fórmulas de Diferenças Finitas
   1. Fórmula de Diferenças Finitas Progressivas em 2 Pontos

A fórmula de diferenças finitas progressivas em dois pontos é usada para calcular uma aproximação da derivada de uma função em um ponto específico. Ela utiliza a diferença entre os valores da função em dois pontos próximos, sendo o ponto de interesse e um ponto ligeiramente à direita. A fórmula é dada por:

Onde f'(x) é a derivada que queremos aproximar, f(x) é o valor da função no ponto de interesse, x + h é o ponto ligeiramente à direita e h é o tamanho do intervalo entre os pontos. Quanto menor o valor de h, mais precisa será a aproximação da derivada.

Em MATLAB:

Uma imagem com texto, captura de ecrã, ecrã, software

Descrição gerada automaticamente

* 1. Fórmula de Diferenças Finitas Progressivas em 3 Pontos

A fórmula de diferenças finitas progressivas em três pontos é usada para calcular uma aproximação da primeira derivada de uma função em um ponto específico. Ela envolve a diferença entre os valores da função em três pontos próximos, sendo dois pontos à direita do ponto de interesse. A fórmula é dada por:

Nessa fórmula, f'(x) é a derivada que queremos aproximar, f(x) é o valor da função no ponto de interesse, x + h é o ponto à direita do ponto de interesse, x + 2h é o ponto dois intervalos à direita, e h é o tamanho do intervalo entre os pontos.

Essa fórmula de diferenças finitas progressivas em três pontos é conhecida como uma aproximação de ordem mais alta do que a de dois pontos, o que significa que, em geral, ela oferece uma maior precisão na aproximação da derivada.

Em MATLAB

Uma imagem com texto, captura de ecrã, software

Descrição gerada automaticamente

* 1. Fórmula de Diferenças Finitas Regressivas em 2 Pontos

A fórmula de diferenças finitas regressivas em dois pontos é usada para calcular uma aproximação da derivada de uma função em um ponto específico. Essa fórmula utiliza a diferença entre os valores da função em dois pontos próximos, sendo o ponto de interesse e um ponto ligeiramente à esquerda. A fórmula é dada por:

Nessa fórmula, f'(x) representa a derivada que queremos aproximar, f(x) é o valor da função no ponto de interesse, x - h é o ponto ligeiramente à esquerda, e h é o tamanho do intervalo entre os pontos.

Assim como a fórmula de diferenças finitas progressivas em dois pontos, essa fórmula regressiva é uma aproximação da derivada e depende da suavidade e comportamento adequado da função no intervalo considerado.

Em MATLAB:

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra

Descrição gerada automaticamente

* 1. Fórmula de Diferenças Finitas Regressivas em 3 Pontos

A fórmula de diferenças finitas regressivas em três pontos é usada para calcular uma aproximação da primeira derivada de uma função em um ponto específico. Ela envolve a diferença entre os valores da função em três pontos próximos, sendo dois pontos à esquerda do ponto de interesse. A fórmula é dada por:

Nessa fórmula, f'(x) é a derivada que queremos aproximar, f(x) é o valor da função no ponto de interesse, x - h é o ponto à esquerda do ponto de interesse, x - 2h é o ponto dois intervalos à esquerda, e h é o tamanho do intervalo entre os pontos.

Assim como a fórmula de diferenças finitas progressivas em três pontos, essa fórmula regressiva também é uma aproximação de ordem mais alta e geralmente oferece maior precisão na aproximação da derivada em relação à fórmula de dois pontos.

Em MATLAB:

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra

Descrição gerada automaticamente

* 1. Fórmula de Diferenças Finitas Centradas em 3 Pontos

A fórmula de diferenças finitas centradas em três pontos é usada para calcular uma aproximação da primeira derivada de uma função em um ponto específico. Ela envolve a diferença entre os valores da função em três pontos próximos, com um ponto à esquerda e um ponto à direita do ponto de interesse. A fórmula é dada por:

Nessa fórmula, f'(x) é a derivada que queremos aproximar, f(x) é o valor da função no ponto de interesse, x + h é o ponto à direita do ponto de interesse, x - h é o ponto à esquerda, e h é o tamanho do intervalo entre os pontos.

A fórmula de diferenças finitas centradas em três pontos é considerada uma aproximação de ordem ainda mais alta, proporcionando maior precisão na aproximação da derivada em comparação com as fórmulas de diferenças finitas progressivas e regressivas em três pontos.

Em MATLAB:

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra

Descrição gerada automaticamente

1. Métodos Numéricos para Integração
   1. Regra dos Trapézios

A regra dos trapézios é um método de integração numérica que aproxima o valor de uma integral definida de uma função. Ela divide o intervalo de integração em subintervalos e aproxima a curva da função por trapézios em cada subintervalo. A área de cada trapézio é calculada e somada para obter uma estimativa da área total sob a curva. A fórmula da regra dos trapézios é:

Integral ≈ ((b - a) / n) \* [(f(a) + f(b)) / 2 + soma dos valores de f(xi) para i = 1 até n-1]

Onde 'a' e 'b' são os limites do intervalo de integração, 'n' é o número de subintervalos, e 'xi' são os pontos dentro de cada subintervalo. Quanto mais subintervalos forem utilizados, maior será a precisão da aproximação. A regra dos trapézios é amplamente utilizada devido à sua simplicidade, mas a precisão da aproximação depende da suavidade da função e da escolha adequada do número de subintervalos.

Em MATLAB:

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra

Descrição gerada automaticamente

* 1. Regra de Simpson

A regra de Simpson é outro método de integração numérica que permite aproximar o valor de uma integral definida de uma função. Essa regra é baseada na ideia de aproximar a curva da função por uma série de polinômios de segundo grau (parábolas).

A regra de Simpson utiliza os pontos da função nos extremos e no ponto médio de cada subintervalo para construir as parábolas. Cada parábola representa uma aproximação suave da função dentro do subintervalo.

A fórmula geral da regra de Simpson para a aproximação da integral é:

Integral ≈ (h/3) \* [f(a) + 4 \* f((a + b)/2) + f(b)]

Nessa fórmula, 'a' e 'b' são os limites do intervalo de integração, 'h' é a largura de cada subintervalo (h = (b - a) / n), onde 'n' é o número de subintervalos.

A regra de Simpson é considerada mais precisa do que a regra dos trapézios, pois utiliza uma aproximação por parábolas em vez de trapézios retos. Ela tende a fornecer uma melhor aproximação para funções suaves e bem comportadas.

Assim como na regra dos trapézios, quanto mais subintervalos forem utilizados, maior será a precisão da aproximação. Normalmente, é recomendado utilizar um número par de subintervalos na regra de Simpson para obter resultados mais precisos.

Em MATLAB:

Uma imagem com texto, captura de ecrã

Descrição gerada automaticamente

1. Avaliação de função real de 2 variáveis reais: Harmónica

Uma função harmónica é uma função diferenciável de duas variáveis (ou mais) que satisfaz a equação de Laplace. A equação de Laplace para uma função de duas variáveis, denotada por f(x, y), é dada por:

Isso significa que a função harmónica possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas em relação a x e y, e a soma dessas derivadas parciais é igual a zero.

Em outras palavras, uma função de duas variáveis é harmónica se o valor da função em qualquer ponto é igual à média aritmética dos valores das suas derivadas parciais de segunda ordem em relação a x e y.

As funções harmônicas têm diversas aplicações em física matemática, teoria do potencial, análise de campos vetoriais e outras áreas da matemática e da física. Elas também possuem propriedades importantes, como a conservação de médias e a propriedade de extrema mínima e máxima.

Em MATLAB, para confirmar se uma função é harmónica ou não, basta calcular o *Laplaciano* dessa mesma função e verificar se é zero ou não. Para isso, o MATLAB tem uma função interna que o resolva:

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra, file

Descrição gerada automaticamente

1. Aplicação MATLAB: Máquina de Cálculo Diferencial e Integral

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra, número

Descrição gerada automaticamenteA aplicação divide-se em 2 abas: “Função real de variável real y = f(x)” e “Função real de 2 variáveis reais z= f(x,y)”. Para além das abas abaixo apresentadas, também existe um menu com informação sobre a aplicação e sobre o autor, tal como predefinições de funções a testar para cada uma das abas.

Na aba “Função real de variável real y = f(x)” podemos:

* apresentar uma função em x (f(x)), definir um intervalo [a,b] e o nº de subintervalos, na secção “Dados do problema”.
* Escolher apresentar o resultado real da Derivada ou da Primitiva na secção “Derivada/Primitiva”. O Resultado é apresentado à direita desta secção.
* Aida temos mais duar abas: “Derivadas” e Primitivas”. Na “Derivadas podemos escolher o método de aproximação a utilizar e ainda a Seguda Derivada. Na aba “Primitivas” podemos escolher entre a regra dos trapézios e a regra de Simpson.
* Do lado diretio desta aba é apresentado o resultado a Derivada/Primitiva escolhida (gráfico) e os valores do método selecionado comparado ao resultado real.

Uma imagem com texto, captura de ecrã, número, diagrama

Descrição gerada automaticamente

Uma imagem com texto, captura de ecrã, diagrama, Gráfico

Descrição gerada automaticamente

Na aba “Função real de 2 variáveis reais z= f(x,y)” podemos:

* Inserir a função a mostrar
* Escolher entre mostrar o gráfico da função ou as Curvas de nível da mesma
* Ao pressionar em calcular é demonstrada se a função é Harmónica (Laplaciano = 0) ou não, e mostra o resultado do Laplaciano
* Do lado direito é mostrado o Gráfico ou as Curvas de Nível (dependendo da seleção)

Uma imagem com texto, captura de ecrã, diagrama, Software gráfico

Descrição gerada automaticamente

Uma imagem com texto, captura de ecrã, diagrama, file

Descrição gerada automaticamente

Uma imagem com texto, captura de ecrã, diagrama, design

Descrição gerada automaticamente

4 Conclusão

Em conclusão, as aproximações de derivadas e integrais são bastante úteis quando não existe informação da função de origem e apenas temos alguns pontos que possam ser utilizados como referência de forma a chegar a um resultado possivelmente parecido à função “original”.

Para as funções de 2 variáveis reais, decidi não aplicar as aproximações e apenas indicar se são harmónicas ou não e as suas curvas de nível, pois seria uma “repetição” do que também existe para uma variável e o próprio MATLAB simplifica ao implementar o *Laplaciano* internamente, ajudando na confirmação de função Harmónica (ou não).

A aplicação desenvolvida permite o cálculo e apresentação gráfica/tabela destas mesmas aproximações, sendo que foi um desafio implementá-las e apresentá-las de forma simples e direta ao utilizador.

5 Bibliografia

Moodle ISEC – AM2 (06/2023):

<https://moodle.isec.pt/moodle/course/view.php?id=15679>

MATLAB Answers:

<https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/index>

MathPages: The Laplace Equation and Harmonic Funcitons

<https://www.mathpages.com/home/kmath214/kmath214.htm>

6 Autoavaliação e heteroavaliação do trabalho submetido numa escala de 0 a 5 valores

Renato Alexandre Oliveira Craveiro – 3.5 valores em 5.