Estatística Inferencial - Aula 5

Distribuição Amostral da Proporção

x	$P(X=x)$
0	$1-p$
1	p

Seja uma população $X \sim Bernoulli(p)$, em que

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se o indivíduo for portador da característica} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

c/ $E[X] = p$ e $Var[p] = p(1-p)$

Por meio do teorema do limite central, temos

p/ $n \to \infty$, $\bar{X} \overset{a}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$, sendo

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \hat{p}$$

Exemplo

Suponha que $p = 0,3$ dos estudantes de uma escola sejam mulheres. Colhemos uma a.a de $n = 10$ estudantes e calculamos $\hat{p}$ = proporção de mulheres na amostra. Qual a probabilidade de que $\hat{p}$ difira de p em menos de 0,01?

1º Identificar população e distribuição amostral

Se $X \sim Bernoulli(0,3)$, então $\hat{p} \sim N\left(0,3 \;\; \frac{0,3(1-0,3)}{10}\right)$

2º Identificar a pergunta

$$P(|\hat{p} - p| < 0,01)$$

D S T Q Q S S
D L M M J V S

$P(|\hat{p}-p|<0{,}01)$

$= P(-0{,}01 < \hat{p}-p < 0{,}01)$

$= P\left(\dfrac{-0{,}01}{\sqrt{\frac{0{,}3\ 0{,}7}{10}}} < \dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{0{,}3\ 0{,}7}{10}}} < \dfrac{0{,}01}{\sqrt{\frac{0{,}3\ 0{,}7}{10}}}\right)$

$= P\left(\dfrac{-0{,}01}{\sqrt{0{,}021}} < Z < \dfrac{0{,}01}{\sqrt{0{,}021}}\right)$

$= P(-0{,}069 < Z < 0{,}069)$

$\simeq P(-0{,}07 < Z < 0{,}07) = 2\,P(0<Z<0{,}07$

$= 2\ 0{,}02790$

$= 0{,}0558$

Exercícios

1. Um procedimento de controle de qualidade foi planejado p/ garantir um máximo de 10% de itens defeituosos na produção. A cada 6 horas sorteia-se uma amostra de 20 peças e, havendo mais de 15% de defeituosas, encerra-se a produção p/ verificação do processo. Qual a probabilidade de uma parada desnecessária?

Se $X \sim$ Bernoulli $(0{,}1)$, então $\hat{p} \overset{a}{\sim} N\left(0{,}1;\ \dfrac{0{,}1\ 0{,}9}{20}\right)$

Parada desnecessária $P(\hat{p} > 0{,}15 \mid p = 0{,}1)$

$P(\hat{p} > 0{,}15) = P\left(\dfrac{\hat{p}-0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}1\ 0{,}9}{20}}} > \dfrac{0{,}15-0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}1\ 0{,}9}{20}}}\right)$

$= P(Z > 0{,}75) = 0{,}5 - P(0<Z<0{,}75)$

$= 0{,}5 - 0{,}27337 = 0{,}2226$

2 - Supondo que a produção do exemplo anterior esteja sob controle, isto é, $p = 0,1$ e que os itens sejam vendidos em caixas c/ 100 unidades, qual a probabilidade de que uma caixa:

a) tenha mais do que 10 de defeituosos?

b) não tenha itens defeituosos

a)

Se $X \sim$ Bernoulli $(0,1)$, então $\hat{p} \overset{a}{\sim} N\left(0,1 \quad \frac{0,1 \cdot 0,9}{100}\right)$

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 10\right) \Rightarrow P(\hat{p} > 0,1)$$

$$P(\hat{p} > 0,1) = P\left(\frac{\hat{p} - 0,1}{\sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{100}}} > \frac{0,1 - 0,1}{\sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{100}}}\right)$$

$$= P(Z > 0) \simeq 0,5$$

b)

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 0\right) \Rightarrow P(\hat{p} > 0)$$

$$= P\left(\frac{\hat{p} - 0,1}{\sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{100}}} > \frac{0 - 0,1}{\sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{100}}}\right)$$

$$P(Z > 3,33) = 0,5 - 0,49952$$

$$= 0,00048$$

$$= 0,048\%$$