1

Estatística Inferencial - Aula 8

Intervalo de Confiança

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ p/ qualquer tamanho de amostra

Para uma distribuição qualquer

Por meio do TLC, temos $\bar{X} \overset{a}{\sim} N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, p/ n suficientemente grande.

$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

Sendo assim p/ ambos os casos,

$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$, portanto, dado um grau de confiança γ, podemos determinar o intervalo de confiança p/ μ através de:

$$P\left(-z_\gamma < \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right) < z_\gamma\right) = 1-\gamma$$

$$P\left(-z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\gamma$$

↳ Erro padrão

$$P\left(\bar{X} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\gamma$$

↳ Mede a qnão distante está $\bar{X}$ em relação.

↳ Qual a probabilidade do intervalo aleatório $\left[\bar{X} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ conter o verdadeiro valor da média populacional

$$I.C(\mu) = \left]\bar{X} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

Exemplo:
Uma máquina enche pacotes de café c/ uma variância igual a 100 g. Ela estava regulada para encher os pacotes c/ 500 g em média.

Agora, a máquina desregulou e queremos saber a nova média μ

Uma amostra de 25 pacotes apresentou uma média igual a 485 g. Construa um intervalo de 95% de confiança.

$$P/\ \gamma = 0{,}95 \Rightarrow z_\gamma = 1{,}96\ ;\ \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$$

$$I.C(\mu) = 485 \pm 1{,}96 \times 2$$

$$=]481{,}08\ ;\ 488{,}92[$$

Se repetíssemos esse experimento aleatório 100 vezes, em 95 das vezes o intervalo aleatório conteria a verdadeira média da população

Intervalo de confiança c/ variância desconhec

Se σ^2 for desconhecido,

$$\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1}$$, sendo t_{n-1} o quantil da distribuição T de Student c/ $n-1$ g.l

Intervalo de Confiança p/ proporção

$$\hat{p} \sim N\left(p,\ \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \sim N(0,1)$$

$$P\left[-z_\gamma < \frac{\sqrt{n}(\hat{p}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} < z_\gamma \right] = 1-\gamma$$

$$I.C(p) = \left] \hat{p} - z_\gamma\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; \hat{p} + z_\gamma\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right[$$

Dado p é desconhecido

$$I.C(p) = \left] \hat{p} - \frac{z_\gamma}{\sqrt{4n}} ; \hat{p} + \frac{z_\gamma}{\sqrt{4n}} \right[$$

Exemplo:

Numa pesquisa de mercado $n = 400$ pessoas foram entrevistadas sobre determinado produto e 60% delas preferiram a marca A. Construa um intervalo de 95%.

P/ $\gamma = 0,95 \Rightarrow z_\gamma = 1,96$. Como não conhecemos p, vamos usar:

$$I.C(p) = \left] \hat{p} - \frac{z_\gamma}{\sqrt{4n}} , \hat{p} + \frac{z_\gamma}{\sqrt{4n}} \right[$$

$$I.C(p) = \left] 0,6 - \frac{1,96}{\sqrt{1600}} ; 0,6 + \frac{1,96}{\sqrt{1600}} \right[$$

$$= \left] 0,551 ; 0,649 \right[$$

Exemplo

Suponha que em $n = 400$ provas obtemos $k = 80$ sucessos. Construa um intervalo de 95% de confiança

$$I.C(p) = \left] 0{,}2 - \frac{1{,}96}{\sqrt{1600}} \,;\, 0{,}2 + \frac{1{,}96}{\sqrt{1600}} \right[$$

$$= \left] 0{,}151 \,;\, 0{,}249 \right[$$

Construa um intervalo de 90% de confiança

$$I.C(p) = \left] 0{,}2 - \frac{1{,}64}{\sqrt{1600}} \,;\, 0{,}2 + \frac{1{,}64}{\sqrt{1600}} \right[$$

$$= \left] 0{,}159 \,;\, 0{,}241 \right[.$$