Estatística Inferencial - Aula 6

Determinação do Tamanho de uma Amostra

Problema: Suponha que se queira determinar n de modo que:

$$P(|\bar{X}-\mu| \leq \varepsilon) \geq \gamma,$$

c/ grau de confiança γ entre 0 e 1 e ε é o erro máximo admitido, denominado erro amostral

Podemos resolver esse problema, por meio de:

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $\bar{X}-\mu \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$, portanto

$$P(|\bar{X}-\mu| \leq \varepsilon) = P(-\varepsilon \leq \bar{X}-\mu \leq \varepsilon)$$

$$= P\left(-\frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z < \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

Logo,

$$P\left(\frac{-\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \simeq \gamma$$

Assim, dado γ podemos obter z_γ tal que $P(-z_\gamma < Z$
de modo que

$$\sqrt{n}\,\frac{\varepsilon}{\sigma} = z_\gamma$$

$$n = \frac{z_\gamma^2\,\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

No caso de proporções

$$n = \frac{z_{\gamma}^2\, p(1-p)}{\varepsilon^2}$$

Como não conhecemos p, podemos usar o fato que $p(1-p) \leq 1/4$, $\forall p$ e então

$$n = \frac{z_{\gamma}^2 \frac{1}{4}}{\varepsilon^2}$$

Obs: Seja o tamanho da amostra dado por: $n = \frac{z_{\gamma}^2\, p(1-p)}{\varepsilon^2}$ e n_0 dado por: $n_0 = \frac{z_{\gamma}^2}{4\varepsilon^2}$. Prove que, para todo p, temos $n \leq n_0$

Resposta:

Para provarmos $n \leq n_0$, podemos fazer

$$n \leq n_0 \Rightarrow \frac{n}{n_0} \leq 1 \Rightarrow \frac{\frac{z_{\gamma}^2\, p(1-p)}{\varepsilon^2}}{\frac{z_{\gamma}^2}{4\varepsilon^2}} \leq 1$$

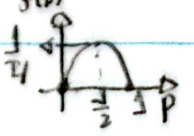
$$\Rightarrow \frac{p(1-p)}{\frac{1}{4}} \leq 1 \Rightarrow p(1-p) \leq \frac{1}{4}$$

Logo, para provarmos que $n \leq n_0$, temos que provarmos que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$

$f(p) = p(1-p) = p - p^2$; $\frac{df(p)}{dp} = 1 - 2p$.

Fazendo $\frac{df(p)}{dp} = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$ Teste da segunda derivada

$\frac{d^2 f(p)}{dp} = -2$, o que aponta um ponto de máximo



Logo, $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ c.q.p

Exemplos

1- Suponha que uma pequena amostra piloto de $n=10$, extraída de uma população, forneceu os valores $\bar{X}=15$ e $S^2=16$. Fixando-se $\varepsilon=0{,}5$ e $\gamma=0{,}95$. Obtenha n

$$n = \frac{16\,(1{,}96)^2}{(0{,}5)^2} \simeq 245$$

2- Suponha que numa pesquisa de mercado estima-se que no mínimo 60% das pessoas entrevistadas preferirão a marca A de um produto. Essa informação é baseada em pesquisas anteriores. Se quisermos que o erro amostral de $\hat{p}$ seja menor do que $\varepsilon=0{,}03$, c/ probabilidade $\gamma=0{,}95$, temos

$$n \simeq \frac{(1{,}96)^2(0{,}6)(0{,}4)}{(0{,}03)^2} = 1024$$

Exercícios

1- Suponha que uma indústria farmacêutica deseja saber a quantos voluntários se deva aplicar uma vacina, de modo que a proporção de indivíduos imunizados na amostra difira de menos de 2% da proporção verdadeira de imunizados na população, c/ probabilidade 90%. Qual o tamanho da amostra a escolher? Use

$$n = \frac{z_\gamma^2}{4\,\varepsilon^2}$$

P/ $\gamma = 0{,}9 \Rightarrow z_\gamma = 1{,}64$

$$n = \frac{1{,}64^2}{4\,(0{,}02)^2} = 1681$$

D S T Q Q S S
D L M M J V S

2- Suponha ainda uma indústria farmacêutica deseja testar uma vacina de modo que a proporção de imunizados difira menos de 2% c/ 90% de grau de confiança. Estudos apontam uma proporção na população em torno de 80%. Determine o tamanho da amostra

$$n = \frac{(1,64)^2\,(0,8)(0,2)}{(0,02)^2} \simeq 1076$$