Estatística Inferencial - Aula 7

Exercícios

1. Uma v.a X tem distribuição normal c/ média 10 e desvio padrão 4. Aos participantes de um jogo é permitido observar uma amostra de qualquer tamanho e calcular a média amostral. Ganha um prêmio aquele cuja média amostral for maior que 12.

a) Se um participante escolher uma amostra de tamanho 16, qual é a probabilidade dele ganhar um prêmio?

Se $X \sim N(10, 16)$, então $\bar{X} \sim N\left(10, \frac{16}{16} = 1\right)$

$$P(\bar{X} > 12) = P\left(\frac{\bar{X} - 10}{1} > \frac{12 - 10}{1}\right)$$

$$= P(Z > 2) = 0,5 - P(0 < Z <$$

$$= 0,5 - 0,47725 = 0,02275$$

2- Definimos a variável $e = \bar{X} - \mu$ como sendo o erro a de média. Suponha que a variância dos salários de uma região seja 400 reais

a) Determine a média e variância de e.

b) Que proporção das amostras de tamanho 25 terão erro amo[...] absoluto maior do que 2 reais?

c) E qual a proporção das amostras de tamanho 100?

d) Nesse último caso, qual o valor de d, tal que $P(|e|$

e) Qual deve ser o tamanho da amostra para qu[...]

95% desses amostras absoluto sejam inferiores a um real?

Digitalizado com CamScanner

a) Calcule a média e Variância de e

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$$E[\bar{X}-\mu] = E[\bar{X}] - E[\mu] = \mu - \mu = 0$$

$$\begin{aligned} Var[\bar{X}-\mu] &= E[(\bar{X}-\mu - E[\bar{X}-\mu])^2] \\ &= E[(\bar{X}-\mu)]^2 \\ &= Var[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{400}{n} \end{aligned}$$

b) Que proporção das amostras de tamanho 25 terão e menor que 2 reais?

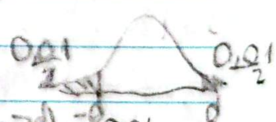
Se $X \sim N(\mu, 400)$, então $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{400}{25} = 16)$

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}-\mu| > 2) &= P(\bar{X}-\mu < -2) \text{ ou } P(\bar{X}-\mu > 2) \\ &= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{16}} < \frac{-2}{\sqrt{16}}\right) \text{ ou } P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{16}} > \frac{2}{\sqrt{16}}\right) \\ &= P(Z < -1/2) \text{ ou } P(Z > 1/2) \\ &= 1 - 2P\left(0 < Z < \frac{1}{2}\right) = 1 - 2\, 0{,}19146 \\ &= 0{,}61708 \end{aligned}$$

c) Se $X \sim N(\mu, 400)$ então $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{400}{100} = 4)$

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}-\mu| > 2) &= P(\bar{X}-\mu < -2) \text{ ou } P(\bar{X}-\mu > 2) \\ &= P(Z < -1) \text{ ou } P(Z > 1) \\ &= 1 - 2P(0 < Z < 1) \\ &= 1 - 2 \times 0{,}34134 = 0{,}31732 \end{aligned}$$

d) Nesse último caso, qual o valor de d, tal que



$P(|e| > d) = 1\%$? $\sqrt{\frac{400}{100}} = 2$ $P(\bar{X}-\mu < -d) = \frac{0{,}01}{2}$ ou $P(\bar{X}-\mu > d) = \frac{0{,}01}{2}$

$P(Z < -\frac{d}{2})$ ou $P(Z > \frac{d}{2})$

$$P(|\bar{X}-\mu| > d) = 0{,}01 \Rightarrow 1 - 2P\left(0 < Z < \frac{d}{2}\right) = 0{,}0$$

$$P\left(0 < Z < \frac{d}{2}\right) = 0{,}495$$

Portanto $\frac{d}{2} = 2{,}57 \Rightarrow d = 5{,}14$.

$P(|\bar{X}-\mu|<1)$ $\quad P(-1<\bar{X}-\mu<1)=0,95$

$z_\gamma = \frac{\sqrt{n}}{20} \Rightarrow n = z_\gamma^2 400 \quad P\left(\frac{\sqrt{n}}{20} < \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{20} < \frac{\sqrt{n}}{20}\right) = 0,95$

e) Qual deve ser o tamanho da amostra para que 95% dos erros amostrais absolutos sejam inferiores a um real?

$$P(|\bar{X}-\mu|<1) = 0,95 \Rightarrow$$

$$n = \frac{\sigma^2 z_\gamma^2}{\varepsilon^2} = \frac{400\,(1,96)^2}{1} \cong 1537.$$

3 - Um professor dá um teste rápido, constante de 20 questões do tipo certo - errado. Para testar a hipótese de o estudante estar adivinhando a resposta, ele adota a seguinte regra de decisão:

"Se 13 ou mais questões estiverem corretas, ele não está adivinhando".

Qual é a probabilidade de rejeitarmos a hipótese, sendo que na realidade ela é verdadeira?

Se $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, então $\hat{p} \overset{a}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

Pergunta $\qquad \hat{p} = \frac{13}{20} = 0,65$

$$P(\hat{p} > 0,65 \mid p = 0,5)$$

$$P(\hat{p} > 0,65) = P\left(\frac{\hat{p}-0,5}{\sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{20}}} > \frac{0,65-0,5}{\sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{20}}}\right)$$

$$= P(Z > 1,34) = 0,5 - 0,4098$$

$$= 0,09012$$