

Exposente de Hurst

Renato Pereira de Aquino

2018-03-16

Sumário

1	Origem	5
2	Racional	7
3	Definição	9
3.0.1	Análise de período reescalado R/S	9

Capítulo 1

Origem

O expoente de Hurst ou coeficiente de Hurst é utilizado como uma medida de memória histórica de uma série temporal. É relacionado às autocorrelações de uma série temporal e a taxa na qual a mesma decai quando o atraso entre pares de valores aumenta.

Estudos com o coeficiente de Hurst são originários da hidrologia e foram inicialmente desenvolvidos como uma forma prática de determinar o tamanho ideal de uma represa para as condições voláteis de chuva e secas do rio Nilo. O nome expoente ou coeficiente de Hurst, assim como a notação H , é uma homenagem a Harold Edwin Hurst, pesquisador chefe destes estudos[1].

Na geometria fractal, o expoente generalizado de Hurst é denotada H ou H_q em homenagem a Harold Edwin Hurst e Ludwig Otto Hölder por Benoît Mandelbrot[2]. H é diretamente relacionado à dimensão fractal e é uma medida da "agressividade" ou "mansidão" da aleatoriedade da série de dados.

Capítulo 2

Racional

O expoente de Hurst é denominado o "índice de dependência" ou o "índice de dependência histórica". Ele quantifica a tendência relativa de uma série temporal a regredir fortemente à média ou agrupar em uma direção.

O valor de H de 0.5 à 1 indica uma série temporal com relação histórica positiva, significando que um valor alto será provavelmente seguido por outro valor alto e um valor baixo será provavelmente seguido por outro valor baixo.

Um valor entre 0 e 0.5 indica uma série temporal com relação histórica alternada entre valores altos e baixos, ou seja, um valor alto provavelmente será seguido por um valor baixo e o valor após este provavelmente será alto.

Um valor $H = 0.5$ pode indicar uma série histórica completamente não correlacionada, ou seja, aleatória.

Capítulo 3

Definição

O expoente de Hurst, H , é definido em termos do comportamento assintótico do período reescalado como uma função do período de tempo de uma série histórica como segue[3][4]:

$$E\left[\frac{R(n)}{S(n)}\right] = Cn^H \text{ para } n \rightarrow \infty$$

Onde:

- $R(n)$ é o período dos primeiros n valores e $S(n)$ é seu desvio padrão.
- $E[x]$ é o valor esperado.
- n é o período da observação (número de dados na série temporal)
- C é uma constante.

3.0.1 Análise de período reescalado R/S

Para estimar o expoente de Hurst, estimamos primeiramente a dependência do período reescalado em relação ao período n da observação[4]. A série temporal de total N é dividida em séries menores de tamanho $n = N, N/2, N/4, \dots$ e calculamos a média do período reescalado para cada valor de n . Para a série temporal de tamanho n , $X = X_1, X_2, \dots, X_n$, o valor reescalado é calculado da seguinte maneira:

- Calcule a média:

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- Crie uma série ajustada pela média:

$$Y_t = X_t - m \text{ para } t = 1, 2, \dots, n$$

- Calcule a série de desvio acumulado Z :

$$Z_t = \sum_{i=1}^t Y_i \text{ para } t = 1, 2, \dots, n$$

- Calcule o período R :

$$R(n) = \max(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) - \min(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$$

- Calcular o desvio padrão da série S :

$$S(n) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2}$$

- Calcular o período reescalado $\frac{R(n)}{S(n)}$ e tirar a média de todas as séries temporais do tamanho n

Referências Bibliográficas

- [1] Harold Edwin Hurst. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of American Society of Civil Engineers*, pages 116–770, 1951.
- [2] B. B. Mandelbrot and J. R. Wallis. Noah, Joseph, and Operational Hydrology. *Water Resources Research*, 4:909–918, October 1968.
- [3] Bo Qian and et al. Hurst exponent and financial market predictability, 2007.
- [4] Jens Feders. *Fractals (Physics of Solids and Liquids)*. Springer, 1988.