

Nesta fase do trabalho prático realizámos um estudo sobre quais as regressões lineares se aplicavam melhor ao conjunto de dados recolhidos de maneira a poderem ser analisados.

Para isto, definimos algumas variáveis dependentes e independentes. Como variável dependente apenas seleccionámos o tamanho máximo de uma subsequência ordenada e, como variáveis independentes, seleccionámos o tamanho do *array* a ser ordenado (N), a probabilidade de ocorrência de erro na amostragem (EPS) e os diferentes algoritmos usados (*Insertion Sort*, *Merge Sort*, *Quick Sort*, *Bubble Sort*).

Para formular as diferentes regressões avaliámos cada algoritmo individualmente relacionando-o com cada uma das variáveis independentes (N, EPS). Depois os dados recolhidos foram modelados segundo os modelos: regressão linear, o modelo logarítmico, o modelo exponencial, o modelo quadrático, o modelo recíproco e modelo potência.

De seguida serão apresentadas e justificadas cada uma das diferentes conclusões.

### Bubble Sort com a variação de N

Os valores de  $R^2$  obtido para cada um dos modelos foram: para a regressão linear padrão: 0.3379, para o modelo logarítmico: 0.3928, para o modelo exponencial: 0.4552, para o modelo quadrático: 0.4072, para o modelo recíproco: 0.455, e para o modelo potência: 0.5586.

```
Call:
lm(formula = Tabela_Bubble_A_Variar_N$TamanhoMaximo ~ Tabela_Bubble_A_Variar_N$N)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-306.30 -106.92  -40.00   67.56  1028.50

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  2.543e+02  1.516e+01  16.77  <2e-16 ***
Tabela_Bubble_A_Variar_N$N  3.740e-02  2.339e-03  15.99  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 170.6 on 498 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3392,    Adjusted R-squared:  0.3379
F-statistic: 255.6 on 1 and 498 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Figura 1– Tabela obtida para o modelo de regressão linear padrão para o algoritmo Bubble Sort com variação de N e EPS= 0.01.

$$y = 254.3 + 0.03740 * x$$

Figura 2 – Equação da reta de regressão linear do algoritmo Bubble Sort presente na Figura 3 utilizando os dados da Figura 1.

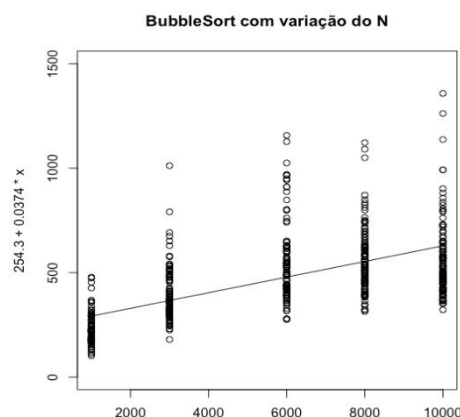


Figura 3 - Bubble Sort com variação do N e EPS=0.01. Onde o eixo das abscissas são os valores de N e o das ordenadas o tamanho máximo de uma subsequência ordenada.

Analisando os valores de  $R^2$  para cada um dos modelos, verificámos que o valor para o modelo de potência é o mais elevado. Por outro lado, ao observar os dados, o modelo de regressão linear padrão ( $y = m * x + b$ ) parece ser o mais apropriado.

Com auxílio do gráfico apresentado na figura 3, podemos constatar que existe um elevado número de *outliers* o que influencia o tratamento dos dados pelo R (*software*) e, consequentemente, os valores de R quadrado.

Tendo isto em conta e atendendo à diferença de complexidade dos dois modelos (modelo de potência e modelo de regressão linear padrão) conclui-se que o segundo é o mais adequado para expressar o comportamento dos dados em questão.

## Insertion Sort com a variação de N

Os valores de  $R^2$  obtido para cada um dos modelos foram: para a regressão linear 0.2452, para o modelo logarítmico 0.2769, para o modelo exponencial 0.2753, para o modelo quadrático 0.2616, para o modelo recíproco 0.2934 e para o modelo potência 0.3177.

```
Call:
lm(formula = Tabela_Insertion_A_Variar_N$TamanhoMaximo ~ Tabela_Insertion_A_Variar_N$N)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-10.7211  -3.0442  -0.4168   2.5832  20.9558

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  2.791e+01  4.129e-01  67.59  <2e-16 ***
Tabela_Insertion_A_Variar_N$N  8.137e-04  6.371e-05  12.77  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.647 on 498 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2467,    Adjusted R-squared:  0.2452
F-statistic: 163.1 on 1 and 498 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Figura 4 – Tabela obtida para o modelo de regressão linear padrão para o algoritmo Insertion Sort com variação de N e EPS=0.01.

$$y = 27.91 + 0.0008137 * x$$

Figura 5 – Equação da reta de regressão linear do algoritmo Insertion Sort presente na Figura 6 utilizando os dados da Figura 4.

Após a análise dos valores de  $R^2$  constata-se que o valor para o modelo de potência é o maior, contudo, com recurso à observação do gráfico da figura 6, o modelo de regressão linear padrão dá-nos a indicação de ser mais uma vez o mais indicado.

É possível observar a existência de *outliers* o que prejudica o que, como no caso anterior, afeta os valores de  $R^2$ . Juntando a isto a diferença de complexidade dos modelos conclui-se que a regressão linear padrão é a mais indicada para expressar o comportamento dos dados em questão.

## Merge Sort com a variação de N

Os valores de  $R^2$  obtido para cada um dos modelos foram: para a regressão linear 0.01843, para o modelo logarítmico 0.02681, para o modelo exponencial 0.02615, para o modelo quadrático 0.02213, para o modelo recíproco 0.03487 e para o modelo potência 0.03812.

```
Call:
lm(formula = Tabela_Merge_A_Variar_N$TamanhoMaximo ~ Tabela_Merge_A_Variar_N$N)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-25.392  -9.839  -2.115   8.378  67.371

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.479e+01  1.218e+00  53.18  < 2e-16 ***
Tabela_Merge_A_Variar_N$N  6.053e-04  1.880e-04   3.22  0.00137 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 13.71 on 498 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.0204,    Adjusted R-squared:  0.01843
F-statistic: 10.37 on 1 and 498 DF,  p-value: 0.001366
```

Figura 7 – Tabela obtida para o modelo de regressão linear padrão para o algoritmo Merge Sort com variação de N e EPS=0.01.

$$y = 64.79 + 0.0006053 * x$$

Figura 8 – Equação da reta de regressão linear Merge Sort presente na Figura 9 utilizando os dados da Figura 7.

InsertionSort com variação do N

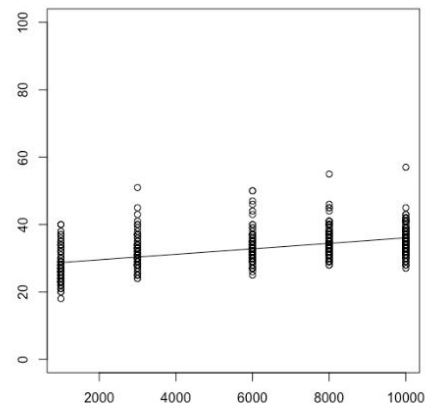


Figura 6 - Insertion Sort com variação do N e EPS=0.01. Onde o eixo das abcissas são os valores de N e o das ordenadas o tamanho máximo de uma subsequência ordenada.

MergeSort com variação do N

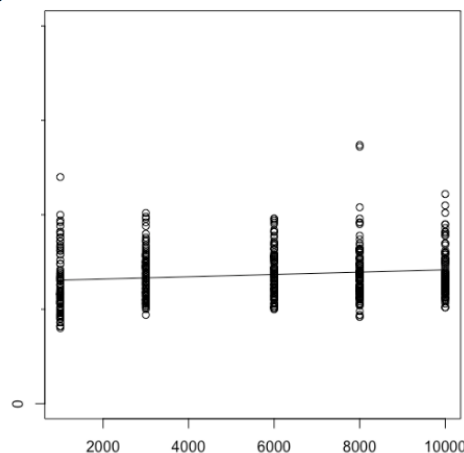


Figura 9 - Merge Sort com variação do N e EPS=0.01. Onde o eixo das abcissas são os valores de N e o das ordenadas o tamanho máximo de uma subsequência ordenada.

Para este caso constata-se que os valores de  $R^2$  obtidos (referidos em cima), são muito baixos. Isto deve-se ao facto de existir uma elevada variabilidade nos dados em estudo. Uma vez que a diferença entre eles não é significativa, concluímos que, com a observação dos dados do gráfico da figura 9, o modelo de regressão linear padrão é o mais apropriado.

### Quick Sort com a variação de N

Os valores de  $R^2$  obtido para cada um dos modelos foram: para a regressão linear 0.2942, para o modelo logarítmico 0.3379, para o modelo exponencial 0.3249, para o modelo quadrático 0.3116, para o modelo recíproco 0.3366 e para o modelo potência 0.3828.

```
Call:
lm(formula = Tabela_Quick_A_Variar_N$TamanhoMaximo ~ Tabela_Quick_A_Variar_N$N)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-30.018 -10.584  -1.494   8.148  58.744

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.621e+01  1.292e+00   51.26  <2e-16 ***
Tabela_Quick_A_Variar_N$N  2.881e-03  1.993e-04   14.46  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 14.54 on 498 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2956,    Adjusted R-squared:  0.2942
F-statistic: 209 on 1 and 498 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Figura 10 – Tabela obtida para o modelo de regressão linear padrão para o algoritmo Quick Sort com variação de N e EPS=0.01.

$$y = 66.21 + 0.002881 * x$$

Figura 11 – Equação da reta de regressão linear do algoritmo Quick Sort presente na Figura 12 utilizando os dados da Figura 10.

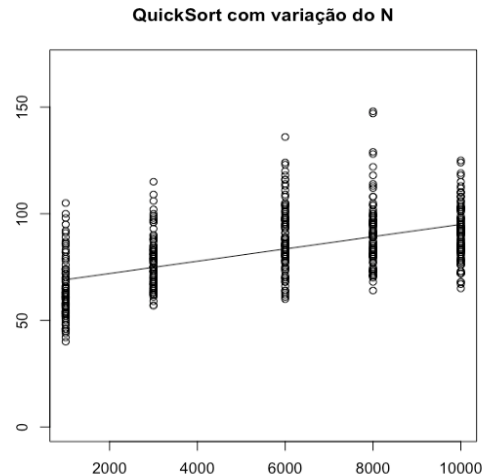


Figura 12 - Quick Sort com variação do N e EPS=0.01. Onde o eixo das abcissas são os valores de N e o das ordenadas o tamanho máximo de uma subsequência ordenada.

Com a análise do gráfico da figura 12, observamos que existe uma elevada variância dos dados, pelo que os valores de  $R^2$  serão afetados. Com isto, apesar do valor de  $R^2$  obtido não ser o mais elevado, concluímos que o modelo de regressão linear padrão será o mais adequado.

### Bubble Sort com a variação de EPS

Os valores de  $R^2$  obtido para cada um dos modelos foram: para a regressão linear 0.6069, para o modelo logarítmico 0.8014, para o modelo exponencial 0.8381, para o modelo quadrático 0.744, para o modelo recíproco 0.8176 e para o modelo potência 0.8777.

```
Call:
lm(formula = (1/Tabela_Bubble_A_Variar_EPS$TamanhoMaximo) ~ Tabela_Bubble_A_Variar_EPS$Probabilidade)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.0261682 -0.0031648 -0.0001345  0.0027306  0.0274032

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.001796  0.000547   3.282  0.0011 **
Tabela_Bubble_A_Variar_EPS$Probabilidade  0.211149  0.004463  47.306  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.006781 on 498 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.818,    Adjusted R-squared:  0.8176
F-statistic: 2238 on 1 and 498 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Figura 13 – Tabela obtida para o modelo de recíproco padrão para o algoritmo Bubble Sort com variação de EPS e N=1000.

$$y = \frac{1}{0.001796 + 0.211149 * x}$$

Figura 14 – Equação da reta recíproca do algoritmo Bubble Sort presente na Figura 15 utilizando os dados da Figura 13.

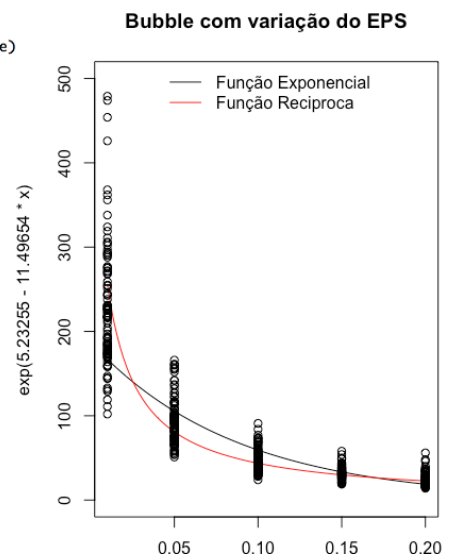


Figura 15 - Bubble Sort com variação do EPS e N=1000. Onde o eixo das abcissas são os valores de N e o das ordenadas o tamanho máximo de uma subsequência ordenada.

Examinando os dados verificamos que o modelo de potência, o modelo exponencial e o modelo recíproco são os que apresentam os valores de  $R^2$  mais elevados. No entanto as diferenças entre esses valores não são muito significativas. Por esta razão e, pelo facto de o modelo potência exibir uma complexidade superior, é descartado como possível modelo escolhido.

Como podemos observar pelo gráfico da figura 15, existe uma grande variância dos dados, pelo que os valores de  $R^2$  vão ser influenciados o que faz com que, em conjunto com a pequena diferença entre os dois modelos restantes, não seja suficiente para efetuar a escolha.

Depois da análise às curvas dos dois restantes modelos, conclui-se então que o modelo recíproco se ajusta melhor aos dados sendo por isso uma melhor escolha para descrever o comportamento do algoritmo estudado para este caso.

### Insertion Sort com a variação de EPS

Os valores de  $R^2$  obtido para cada um dos modelos foram: para a regressão linear 0. 6523, para o modelo logarítmico 0. 8637, para o modelo exponencial 0. 7601, para o modelo quadrático 0. 7128, para o modelo recíproco 0. 7987 e para o modelo potência 0. 8906.

```
Call:
lm(formula = Tabela_Insertion_A_Variar_EPS$TamanhoMaximo ~ log(Tabela_Insertion_A_Variar_EPS$Probabilidade))

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-8.5154 -1.4329 -0.1768  1.3818 13.4846

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    -2.5342     0.3238  -7.826 3.04e-14 ***
log(Tabela_Insertion_A_Variar_EPS$Probabilidade) -6.3080     0.1122 -56.240 < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.68 on 498 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.864,    Adjusted R-squared:  0.8637
F-statistic: 3163 on 1 and 498 DF, p-value: < 2.2e-16
```

Figura 16 – Tabela obtida para o modelo de logarítmico padrão para o algoritmo Insertion Sort com variação de EPS e N=1000.

$$y = -2.5342 - 6.3080 * \log(x)$$

Figura 17 – Equação da reta logarítmica do algoritmo Insertion Sort presente na Figura 20 utilizando os dados da Figura 16.

```
Call:
lm(formula = (1/Tabela_Insertion_A_Variar_EPS$TamanhoMaximo) ~ Tabela_Insertion_A_Variar_EPS$Probabilidade)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.051680 -0.010095 -0.000227  0.008129  0.042146

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    0.042599     0.001109  38.43 <2e-16 ***
Tabela_Insertion_A_Variar_EPS$Probabilidade  0.402548     0.009045  44.50 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.01374 on 498 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7991,    Adjusted R-squared:  0.7987
F-statistic: 1981 on 1 and 498 DF, p-value: < 2.2e-16
```

Figura 18 – Tabela obtida para o modelo de recíproco padrão para o algoritmo Insertion Sort com variação de EPS e N=1000.

$$y = \frac{1}{0.042599 + 0.482548 * x}$$

Figura 19 – Equação da reta recíproca do algoritmo Insertion Sort presente na Figura 20 utilizando os dados da Figura 18.

Para este conjunto de dados os modelos para os quais os valores de  $R^2$  foram mais elevados são: o modelo de potência, o modelo recíproco e o modelo logarítmico. À semelhança

Insertion com variação do EPS

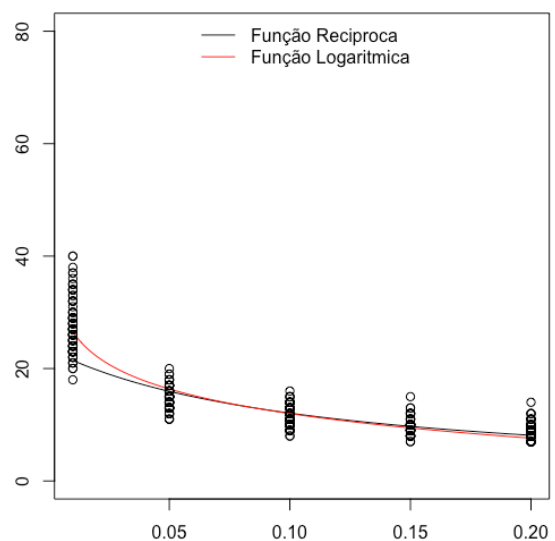


Figura 20 - Insertion Sort com variação do EPS e N=1000. Onde o eixo das abscissas são os valores de N e o das ordenadas o tamanho máximo de uma subsequência ordenada.

do que aconteceu no caso anterior o modelo será descartado pelo facto de apresentar uma complexidade superior aos outros dois.

Observando o gráfico da figura 20, verificamos que o modelo logarítmico, para além de possuir um valor de  $R^2$  superior, aparenta adequar-se melhor aos dados em estudo.

Contudo, como a diferença para o modelo recíproco não é muito elevada e manifesta um comportamento não muito diferente no que à representação dos dados diz respeito, para efeitos de comparação de performance com os outros algoritmos, o modelo recíproco é escolhido como o melhor a utilizar neste caso.

### Merge Sort com a variação de EPS

Os valores de  $R^2$  obtido para cada um dos modelos foram: para a regressão linear 0.5374, para o modelo logarítmico 0.8157, para o modelo exponencial 0.7358, para o modelo quadrático 0.6379, para o modelo recíproco 0.846 e para o modelo potência 0.9372.

```
Call:
lm(formula = Tabela_Merge_A_Variar_EPS$TamanhoMaximo ~ log(Tabela_Merge_A_Variar_EPS$Probabilidade))

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-17.928   -5.070    0.477    4.856   62.072

Coefficients:
(Intercept)          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
log(Tabela_Merge_A_Variar_EPS$Probabilidade) -18.613      0.396   -47.00  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 9.461 on 498 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.816,    Adjusted R-squared:  0.8157
F-statistic: 2209 on 1 and 498 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Figura 21 – Tabela obtida para o modelo de logarítmico padrão para o algoritmo Merge Sort com variação de EPS e N=1000.

$$y = -27.789 - 18.613 * \log(x)$$

Figura 22 – Equação da reta logarítmica do algoritmo Merge Sort presente na Figura 25 utilizando os dados da Figura 21.

```
Call:
lm(formula = (1/Tabela_Merge_A_Variar_EPS$TamanhoMaximo) ~ Tabela_Merge_A_Variar_EPS$Probabilidade)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.047032 -0.011880 -0.003722  0.012064  0.047921

Coefficients:
(Intercept)          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
Tabela_Merge_A_Variar_EPS$Probabilidade  0.532862    0.010177   52.36  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.01546 on 498 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8463,    Adjusted R-squared:  0.846
F-statistic: 2742 on 1 and 498 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Figura 23 – Tabela obtida para o modelo de recíproco padrão para o algoritmo Merge Sort com variação de EPS e N=1000.

$$y = \frac{1}{0.023793 + 0.532862 * x}$$

Figura 24 – Equação da reta recíproca do algoritmo Merge Sort presente na Figura 25 utilizando os dados da Figura 23.

Tal como no caso anterior os modelos com valor de  $R^2$  superiores foram: o modelo logarítmico, o modelo recíproco e o modelo potência. E como referido anteriormente, atendendo à complexidade dos modelos, o modelo potência é descartado por ser muito complexo o que torna difícil a análise e previsão do comportamento do sistema pelo estudo da expressão gerada.

Merge com variação do EPS

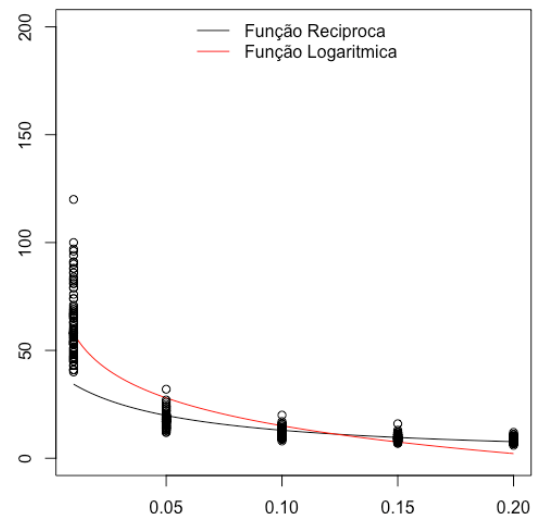


Figura 25 - Merge Sort com variação do EPS e N=1000. Onde o eixo das abcissas são os valores de N e o das ordenadas o tamanho máximo de uma subsequência ordenada.

Sendo assim, como a presença de *outliers* não é muito significativa, considerando os valores de  $R^2$  o modelo recíproco é o mais adequado para expressar o comportamento do algoritmo para este conjunto de dados. Algo que é corroborado com a análise do gráfico da figura 25, onde é possível verificar que apresenta uma concordância superior para todos os níveis sendo menos influenciados pelos *outliers*.

### Quick Sort com a variação de EPS

Os valores de  $R^2$  obtido para cada um dos modelos foram: para a regressão linear 0.6015, para o modelo logarítmico 0.8598, para o modelo exponencial 0.8015, para o modelo quadrático 0.7058, para o modelo recíproco 0.8877 e para o modelo potência 0.9448.

```
Call:
lm(formula = Tabela_Quick_A_Variar_EPS$TamanhoMaximo ~ log(Tabela_Quick_A_Variar_EPS$Probabilidade))

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-20.386  -4.386   0.211   3.779  44.614

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    -25.6563    0.9751  -26.31  <2e-16 ***
log(Tabela_Quick_A_Variar_EPS$Probabilidade)  -18.6839    0.3378  -55.32  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 8.069 on 498 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.86, Adjusted R-squared:  0.8598
F-statistic: 3060 on 1 and 498 DF, p-value: < 2.2e-16
```

Figura 26 – Tabela obtida para o modelo de logarítmico padrão para o algoritmo Quick Sort com variação de EPS e N=1000.

$$y = -25.6563 - 18.6839 * \log(x)$$

Figura 27 – Equação da reta logarítmica do algoritmo Quick Sort presente na Figura 30 utilizando os dados da Figura 26.

```
Call:
lm(formula = (1/Tabela_Quick_A_Variar_EPS$TamanhoMaximo) ~ Tabela_Quick_A_Variar_EPS$Probabilidade)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.036013 -0.006594 -0.001825  0.010871  0.029921

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    0.0177057    0.0009289   19.06  <2e-16 ***
Tabela_Quick_A_Variar_EPS$Probabilidade  0.4761530    0.0075796   62.82  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.01152 on 498 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8879, Adjusted R-squared:  0.8877
F-statistic: 3946 on 1 and 498 DF, p-value: < 2.2e-16
```

Figura 28 – Tabela obtida para o modelo de recíproco padrão para o algoritmo Quick Sort com variação de EPS e N=1000.

$$y = \frac{1}{0.0177057 + 0.4761530 * x}$$

Figura 29 – Equação da reta recíproca do algoritmo Quick Sort presente na Figura 30 utilizando os dados da Figura 28.

Para este conjunto de dados os modelos que apresentaram um valor de  $R^2$  superior foram, novamente, o modelo recíproco, o modelo potência e o modelo recíproco. Mais uma vez o modelo potência irá ser descartado pois apresenta uma complexidade muito superior.

Analisando então os valores de  $R^2$  para os restantes dois modelos observamos que o modelo recíproco possui um valor superior. Informação suportada pela análise do gráfico da figura 30, onde podemos constatar que a expressão gerada pelo modelo se ajusta melhor ao

QuickSort com variação do EPS

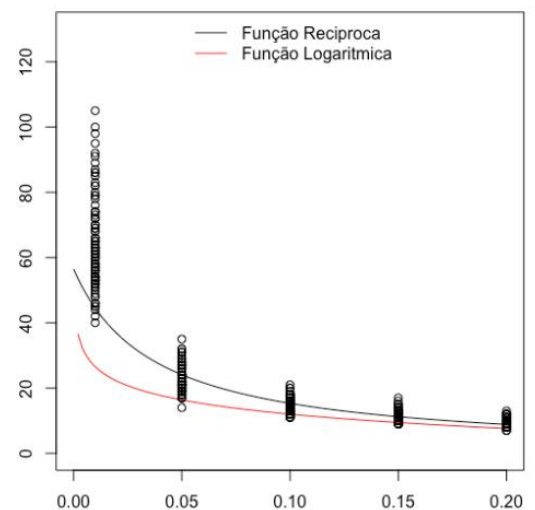


Figura 30 - Quick Sort com variação do EPS e N=1000. Onde o eixo das abscissas são os valores de N e o das ordenadas o tamanho máximo de uma subsequência ordenada.



comportamento dos dados em questão. Tendo tudo isto em conta podemos então concluir que, para este caso, o modelo recíproco é o mais adequado.

### Análise dos resultados

Comparação das expressões das regressões lineares dos diferentes algoritmos para a variação de N

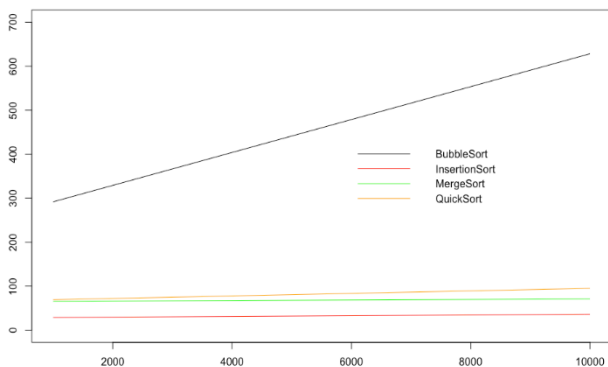


Figura 31 – Comparação das expressões das regressões lineares dos algoritmos com a variação de N e com EPS=0.01. Onde o eixo das abscissas são os valores de N e o das ordenadas o tamanho máximo de uma subsequência ordenada.

Comparação das expressões das regressões recíprocas dos diferentes algoritmos para a variação do EPS

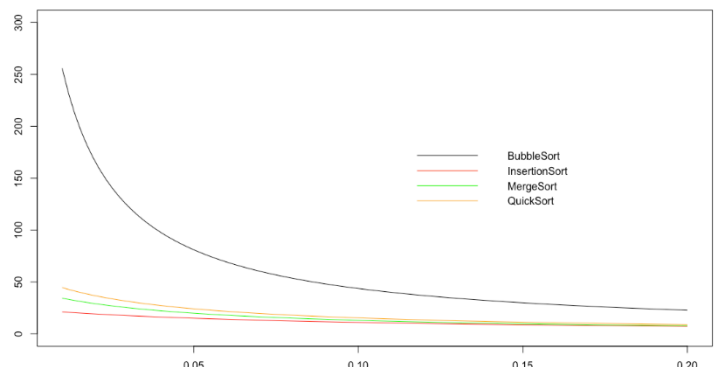


Figura 32 – Comparação das expressões das regressões recíprocas dos algoritmos com a variação de EPS e com N=1000. Onde o eixo das abscissas são os valores de EPS e o das ordenadas o tamanho máximo de uma subsequência ordenada.

Comparando os gráficos representantes do desempenho dos vários algoritmos testados onde o tamanho do *array* a ordenar (N) varia (figuras 3,6,9 e 12) verificamos que existe, em todos os casos, um comportamento linear.

No entanto esse comportamento não é semelhante para todos os algoritmos. Apesar de os algoritmos *Quick Sort* e *MergeSort* apresentarem valores muito semelhantes para N igual a 1000, porém, com o aumento do N, o primeiro tende a ter melhores resultados mesmo que não seja uma diferença significativa.

Analisando as expressões resultantes da modelação linear padrão, presentes nas figura 31, observamos que o algoritmo *Insertion Sort*, *Merge Sort* e *Quick Sort* apresentam um declive pouco acentuado sendo que são os três positivos. Isto traduz-se no desempenho do algoritmo com três algoritmos onde os resultados se apresentaram relativamente estáveis com a variação de N.

O algoritmo *Bubble Sort* demonstra um declive consideravelmente maior. O que indica que tem um crescimento proporcionalmente positivo à variação de N sendo, por isso, mais sensível à variação do tamanho do *array* a ordenar.

Com o gráfico da figura 9, fica evidente que o desempenho de cada algoritmo é diferente. Para a variação do N, os resultados para o tamanho máximo de uma subsequência ordenada são melhores para o Bubble Sort, seguindo-se o Quick Sort, o Merge Sort e o Insertion Sort.

Analisando o gráfico da figura 32, constatamos que todos os algoritmos, para N igual a 1000, apresentam um comportamento recíproco para variação da probabilidade de ocorrência de erro (EPS).

É também possível verificar que os algoritmos *Quick Sort*, *Merge Sort* e *Insertion Sort* apresentam resultados para o tamanho máximo de uma subsequência ordenada muito semelhantes quando o valor de EPS é igual ou superior a 0.10. Para valores de EPS inferiores a 0.10 nota-se uma pequena diferença no desempenho dos três algoritmos, onde o *Quick Sort* apresenta melhores resultados seguido do *Merge Sort* e do *Insertion Sort* apesar de não serem diferenças significativas.

Também é possível observar que o *Bubble Sort* apresenta um desempenho muito melhor que os restantes algoritmos para valores de EPS baixos (entenda-se inferiores a 0.10).

Com o aumento do valor de EPS as diferenças vão sendo cada vez menores continuando, porém, a obter melhores resultados.

## Conclusão

Com o estudo dos dados obtidos podemos concluir que, o *Bubble Sort*, para uma probabilidade de erro de 0.01, tem uma melhor performance relativamente ao tamanho máximo de uma subsequência ordenada quando o tamanho do *array* a ser ordenado varia.

Para a variação da probabilidade de ocorrência de erro (EPS), com o tamanho do *array* a ordenar igual a 1000, concluímos que o *Bubble Sort* apresenta melhores resultados sendo, portanto, para os dados estudados, o melhor algoritmo.

Para finalizar, e para responder à pergunta inicialmente colocada de “Como é que os algoritmos de ordenamento são afetados por falhas de memória?”, podemos concluir que com a variação do tamanho do *array* a ser ordenado, os algoritmos comportam-se de maneiras distintas. Nos casos do *Quick Sort*, *Merge Sort* e *Insertion Sort* o tamanho da maior subsequência ordenada com o aumento do N praticamente não se altera, ou seja, têm um comportamento estável. Já no caso do *Bubble Sort*, este é muito influenciável.

Com o aumento do valor do EPS (probabilidade de ocorrência de erro), e como era expectável, o tamanho da subsequência máxima ordenada diminui. Sendo que por volta de 15% de EPS esses valores estabilizam.