Convolution, Auto et Inter-Corrélation et Bruit

Notion de convolution

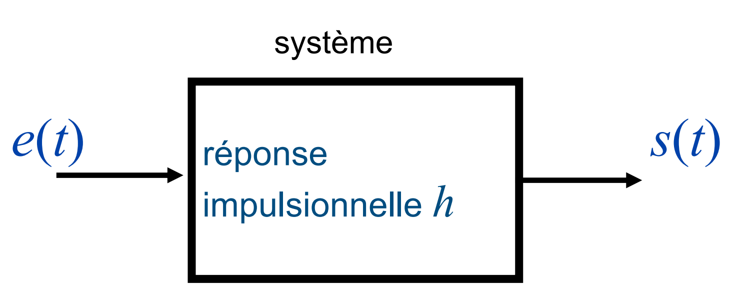
- Convolution discrete :

$$\mathbf{s[k] = \sum_{j \in [-\infty; +\infty]} h[j].e[k-j]}$$

de façon symbolique, nous écrivons : $\boldsymbol{s[k] = (h * e)[k]}$

***** est le symbole de convolution (ne pas confondre avec le **x** en informatique)

- Proprietés :



$s[k] = (h * e)[k]$ si h et **e** discrets

$s(t) = (h * e)(t)$ si h discret et **e** continu

$s(t) = (h * e)(t)$ si h continu

Notion de convolution

- Soient deux fonctions continues *f(t)* et *g(t)*, leur convolution est définie comme :

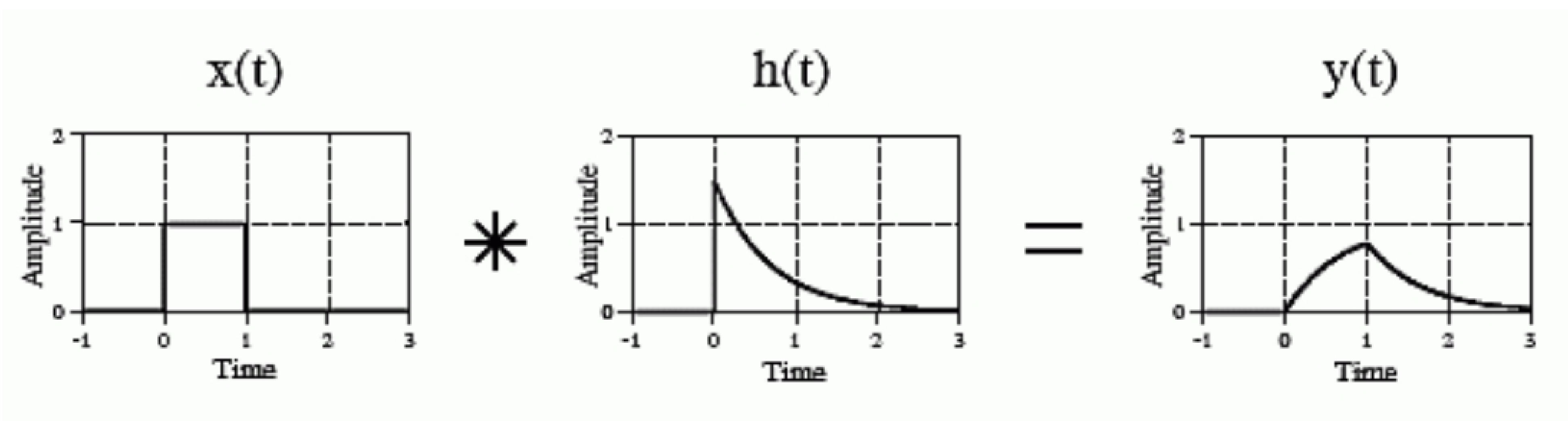
$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau)\, d\tau$$

- Interprétation intuitive :
  - f(τ) : fonction d'entrée (par exemple, un signal ou une image)
  - g(t−τ) : fonction appelée noyau ou filtre, "glissée" sur f
  - Somme pondérée des valeurs de f, influencée par le filtre g

Notion de convolution

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$$

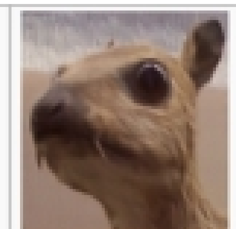
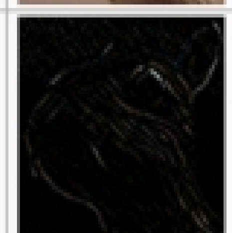
- La convolution modélise le fonctionnement des systèmes dynamiques linéaires (et invariants) !

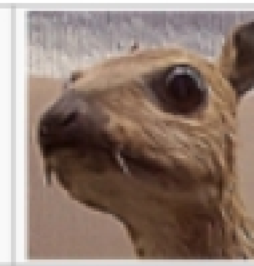
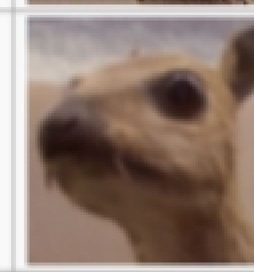
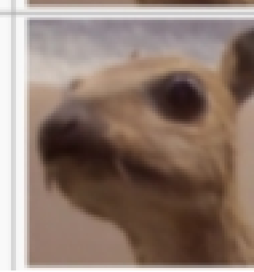


- Commutative : f∗g=g∗f
- Associative : *h* f∗(g∗h)=(f∗g)∗h
- Linéaire : a(f∗g)+b(h∗g)=(af+bh)∗g

Convolution Signaux 1D - 2D

- Convolutions avec filtres spatiaux dans traitement d'images, notamment pour manipuler l'image ou détecter différentes caractéristiques :

Identity	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
Edge detection	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	
	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	

Sharpen	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	
Box blur (normalized)	$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	
Gaussian blur (approximation)	$\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	

Intercorrélation des signaux

- Mesure la ressemblance entre deux signaux

- Permet de repérer (localiser) une signature dans un signal

- Permet d'observer-mesurer la réponse impulsionnelle d'un système

- Différence avec la convolution ?

Auto/Intercorrélation des signaux

- Définition pour les signaux à énergie finie :

$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t-\tau)\mathrm{d}t$$

* : conjugué

- Définition pour les signaux périodiques (puissance moyenne finie) :

$$R_{fg}(\tau) = lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)g^*(t-\tau)\mathrm{d}t$$

- Autocorrelation : *f (t)= g(t)*

Rappel : corrélation linéaire statistique

coefficient de corrélation statistique entre les points (x_i, y_i): $$r_p = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

avec : $$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$ covariance entre x et y

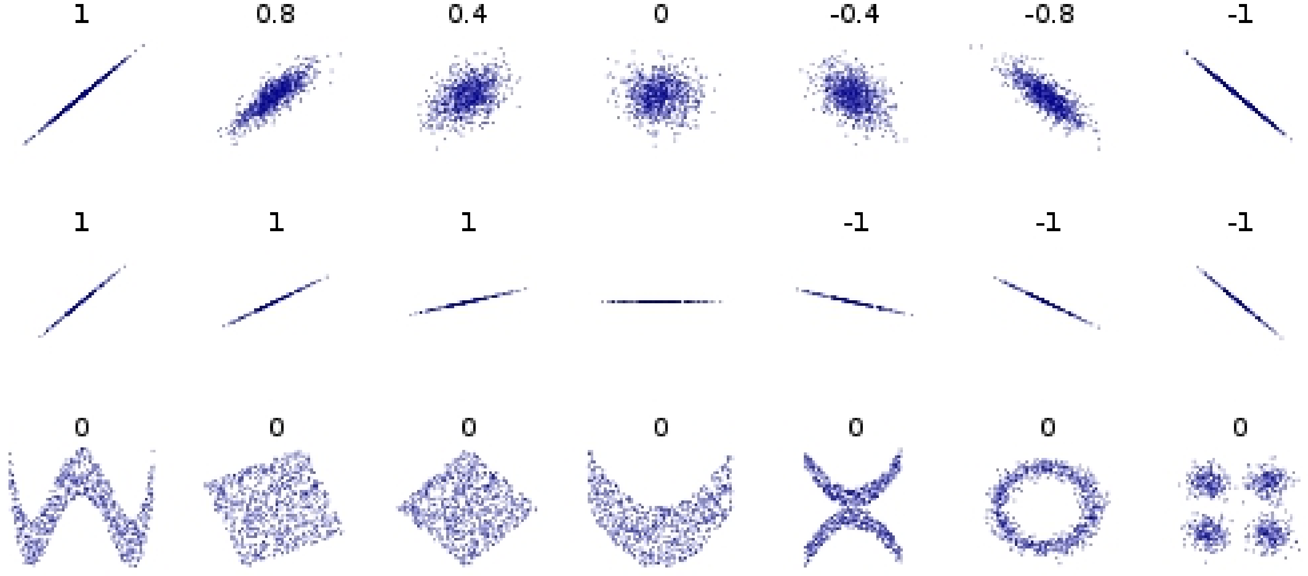
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$ écart-type de x

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}$$ écart-type de y

exemples:

les écart-types servent à normaliser le coefficient de corrélation

corrélation non linéaire ! →



Auto-corrélation

- Lien avec la convolution

$$\begin{aligned} R_f(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t-\tau) \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) f^*(t) \mathrm{d}t \\ &= f^*(.-\tau) * f(.) \end{aligned}$$

- Corrélation (inter/auto) est un outil d'analyse (signaux et systèmes) ou de détection et localisation de signature

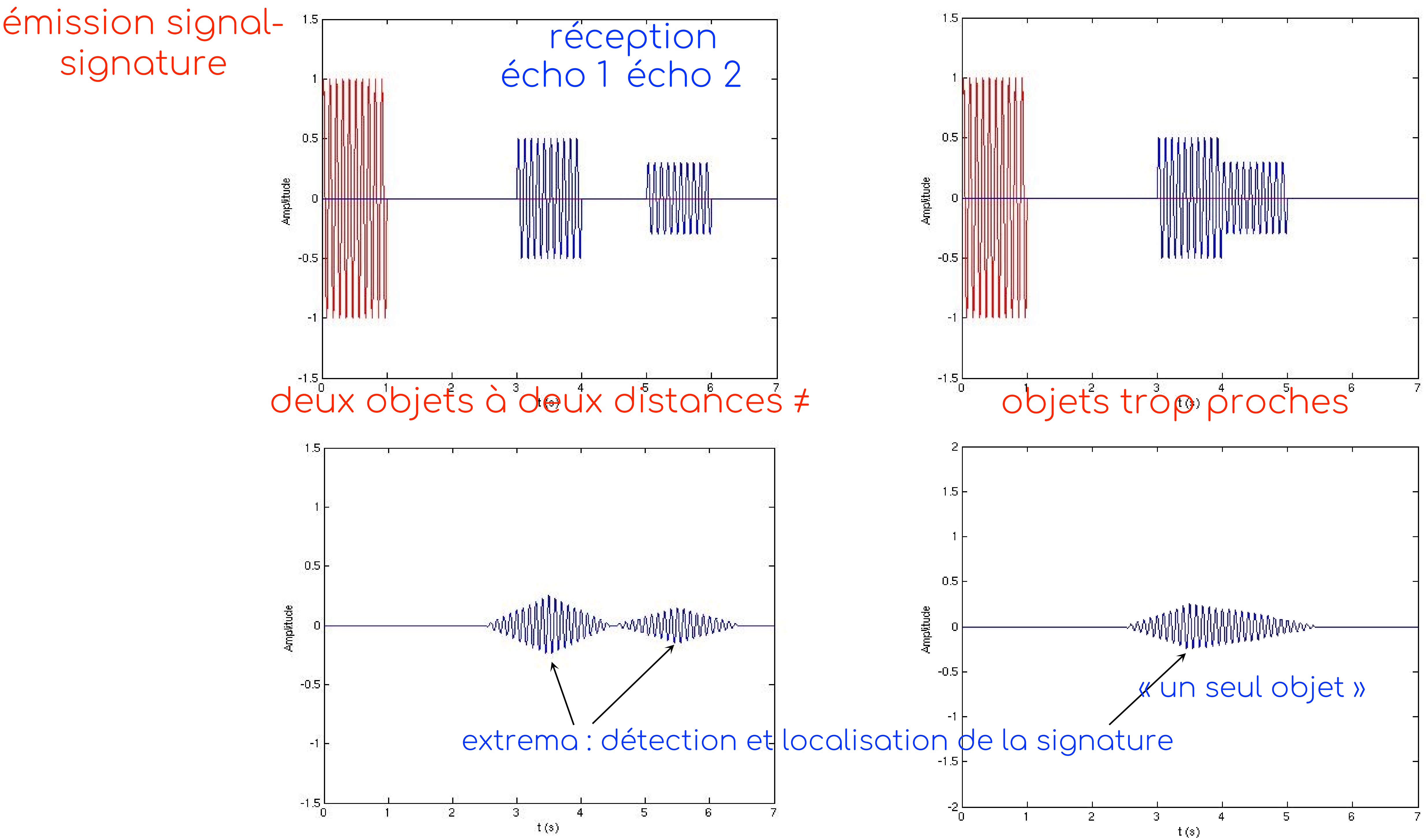
- Symétrie : paire si f réelle, hermitienne si f complexe

$$R_f(-\tau) = R_f^*(\tau)$$

- Donne l'énergie du signal en $\tau = 0$

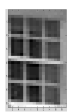
Application : recherche/localisation signature (1D)

- Localisation de signatures (mesure de distances par exemple)

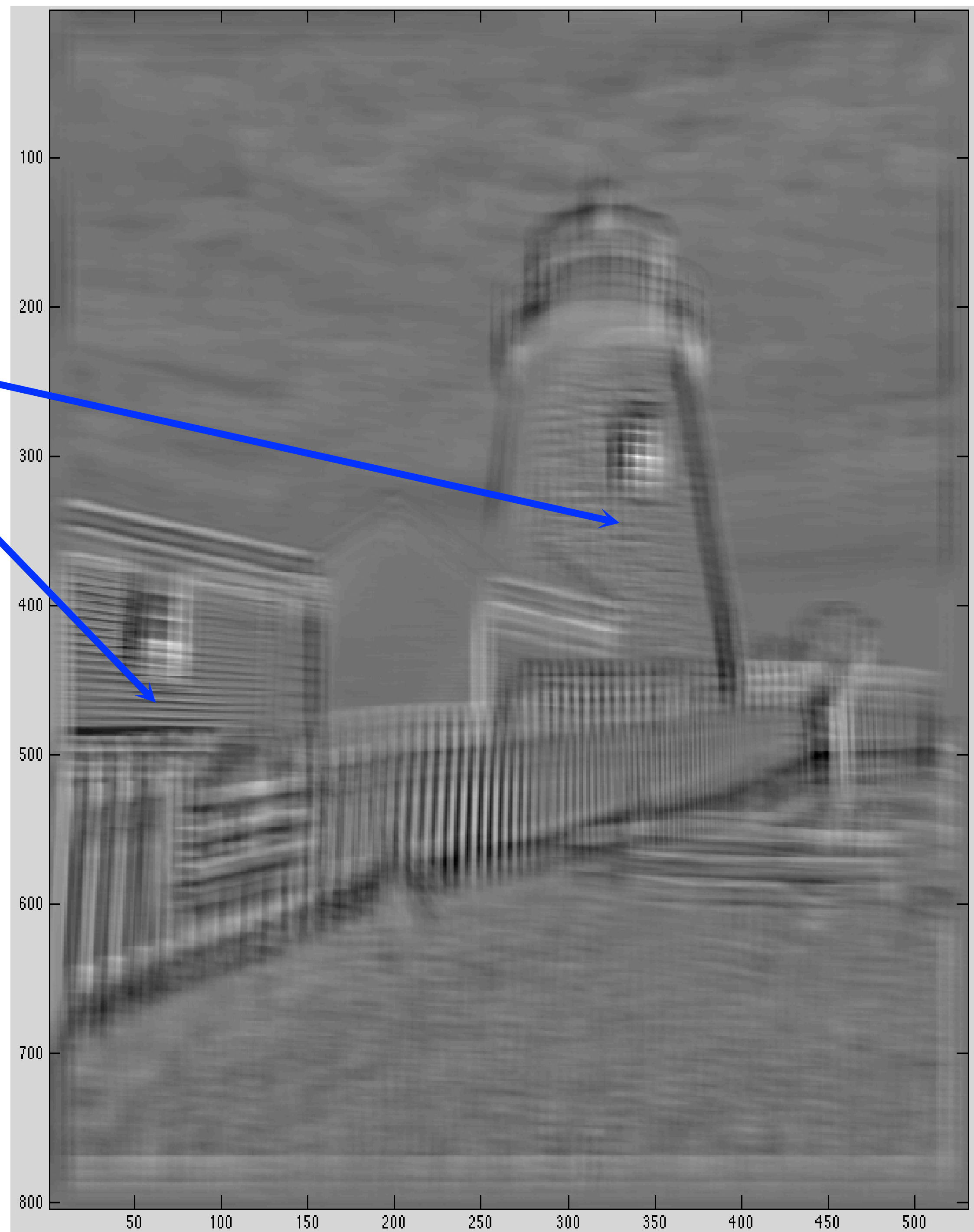


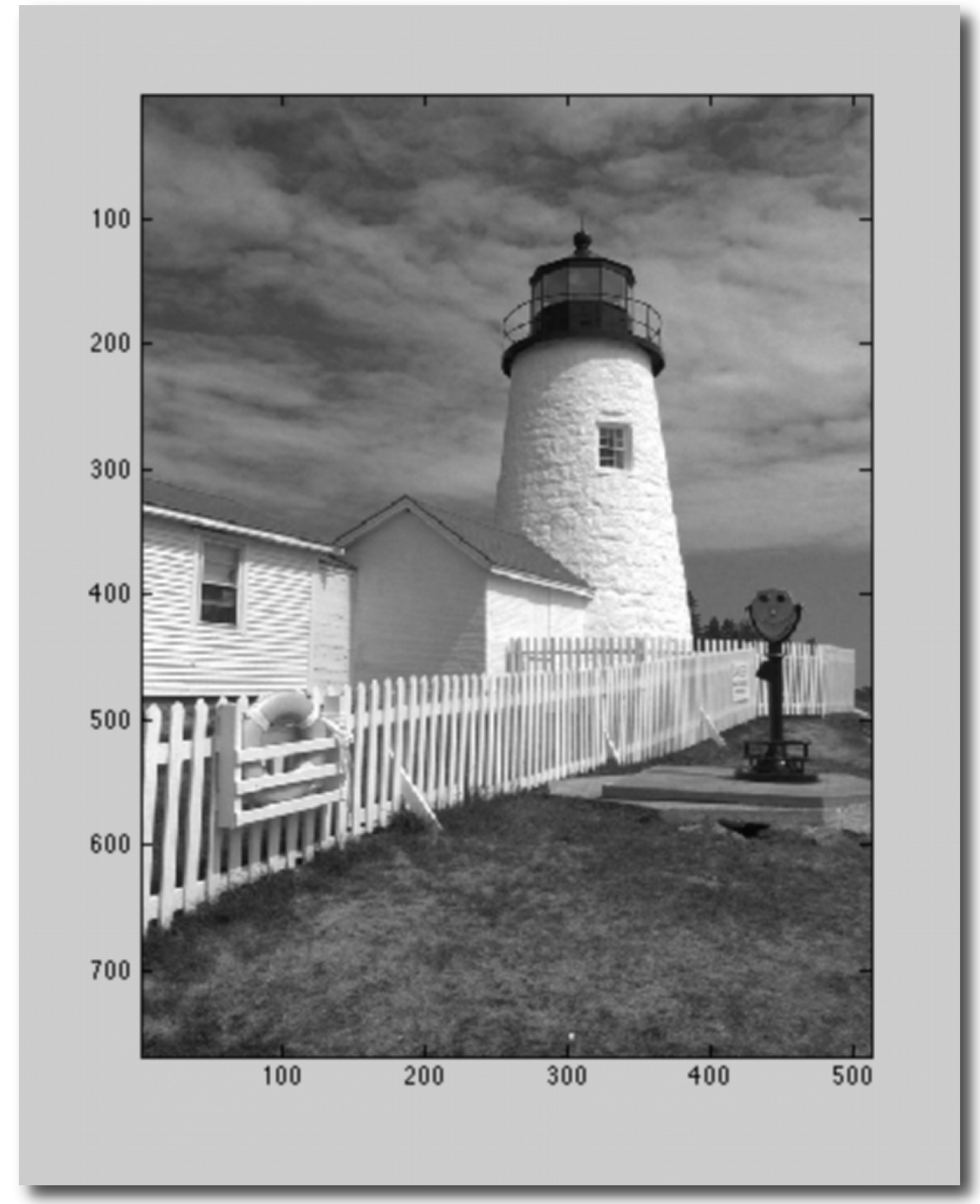
Application : recherche d'un motif 2D

- le motif (éventuellement l'image aussi) doit être à moyenne nulle



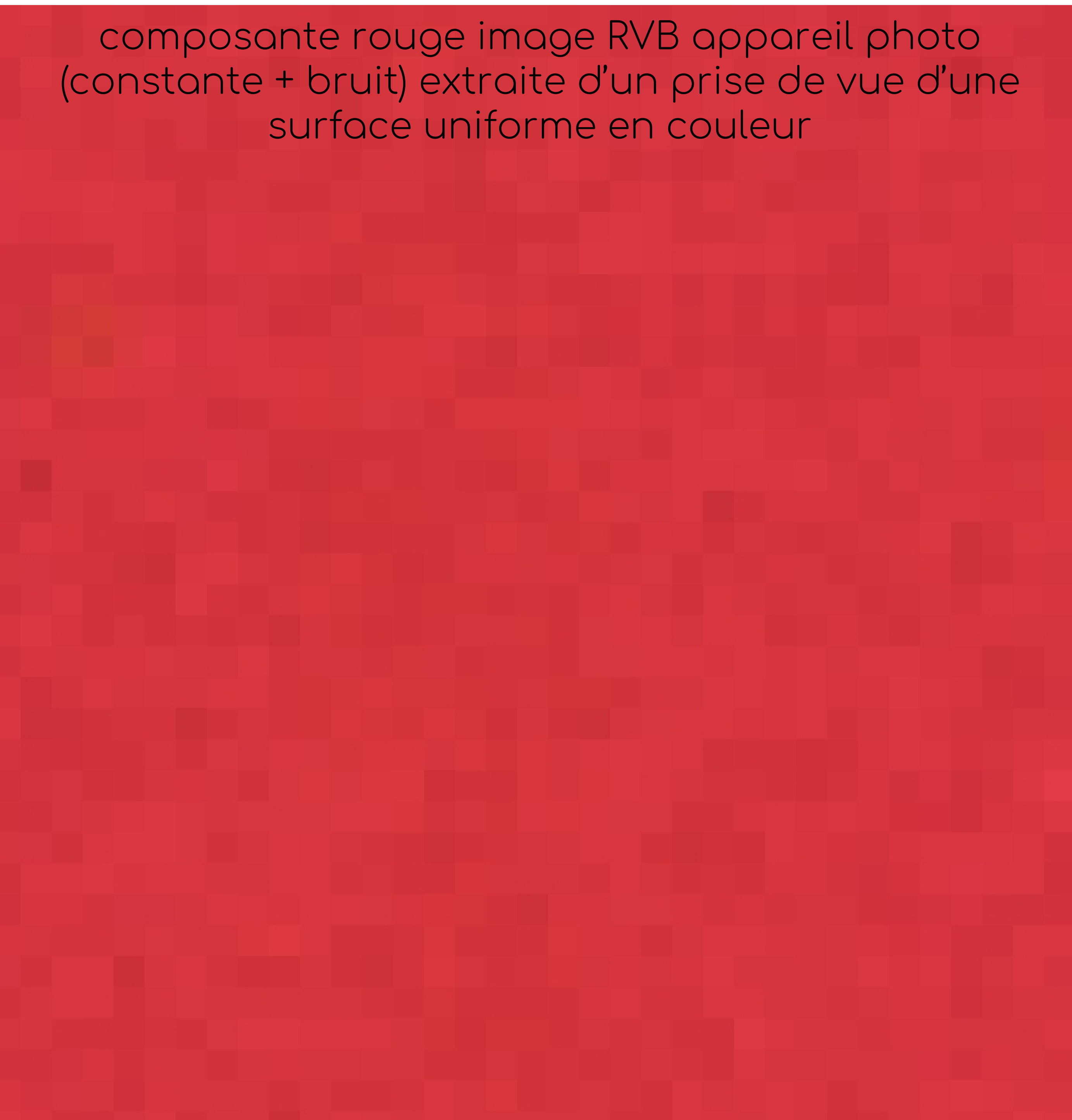
maxima: détection de la fenêtre

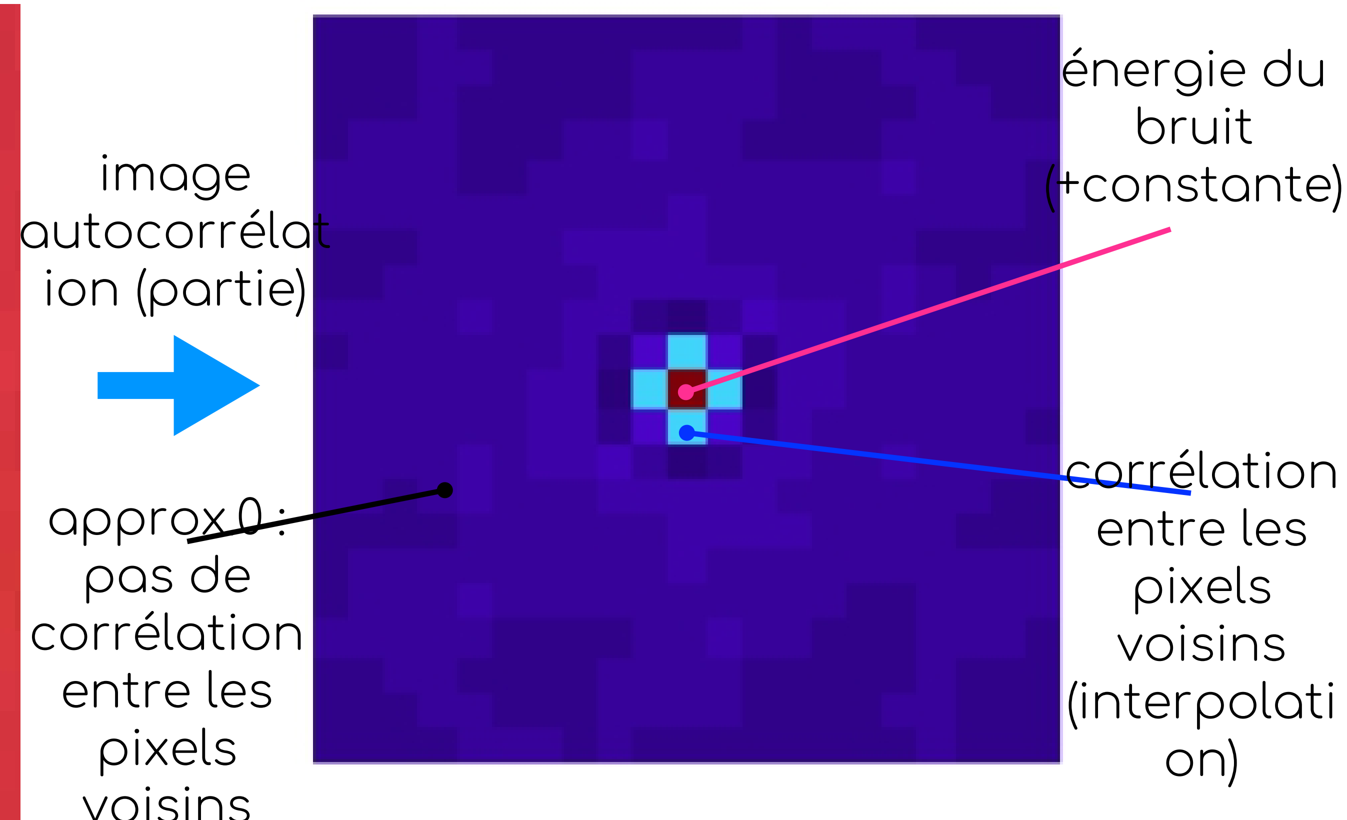




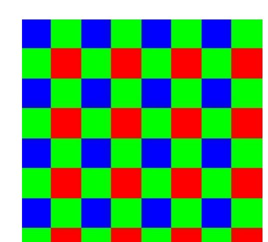
Autocorrélation du bruit dans les images

La résolution vraie des images couleur est fausse dans le domaine grand public: chaque pixel a trois composantes couleurs (R,V,B). Un pixel est issu en réalité d'un photo-site rendu sensible à une gamme de longueur d'ondes (dans le rouge ou le vert ou le bleu), les deux autres composantes sont donc obtenues par interpolation. C'est ce que montre l'image d'autocorrélation.





autocorrélation : on observe le résultat du filtre de Bayer : corrélation entre les pixels voisins

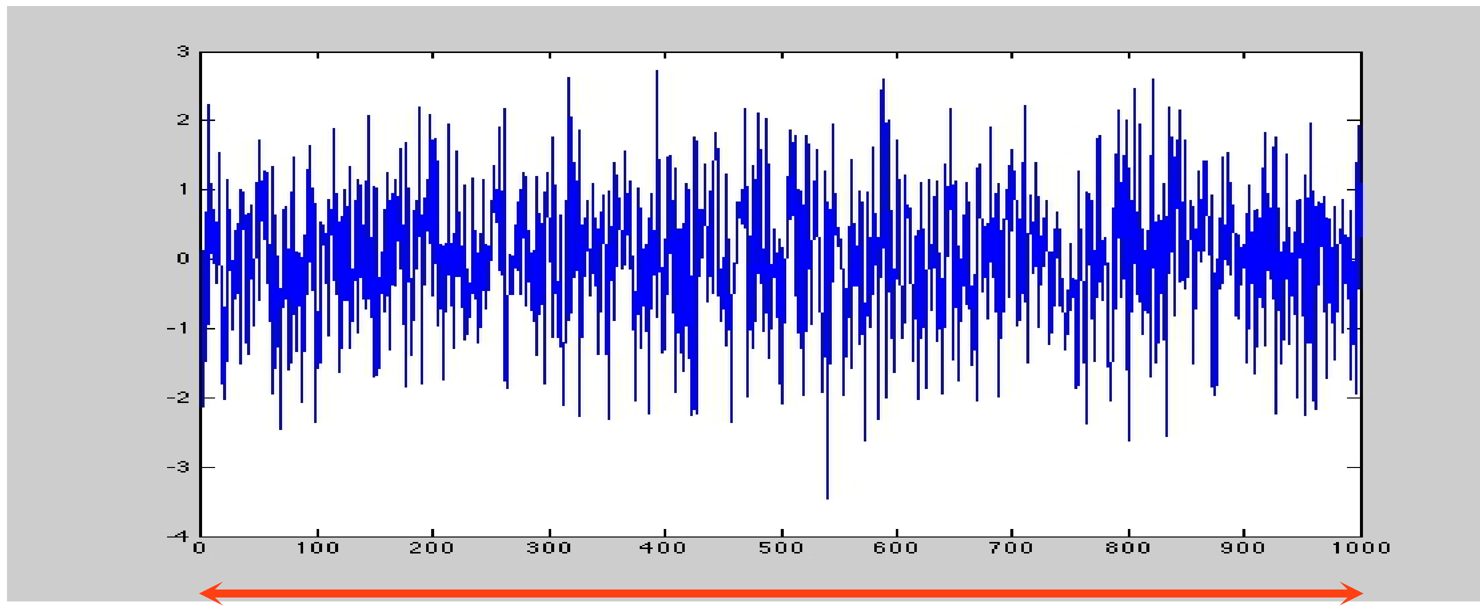


filtre de Bayer sur le capteur image

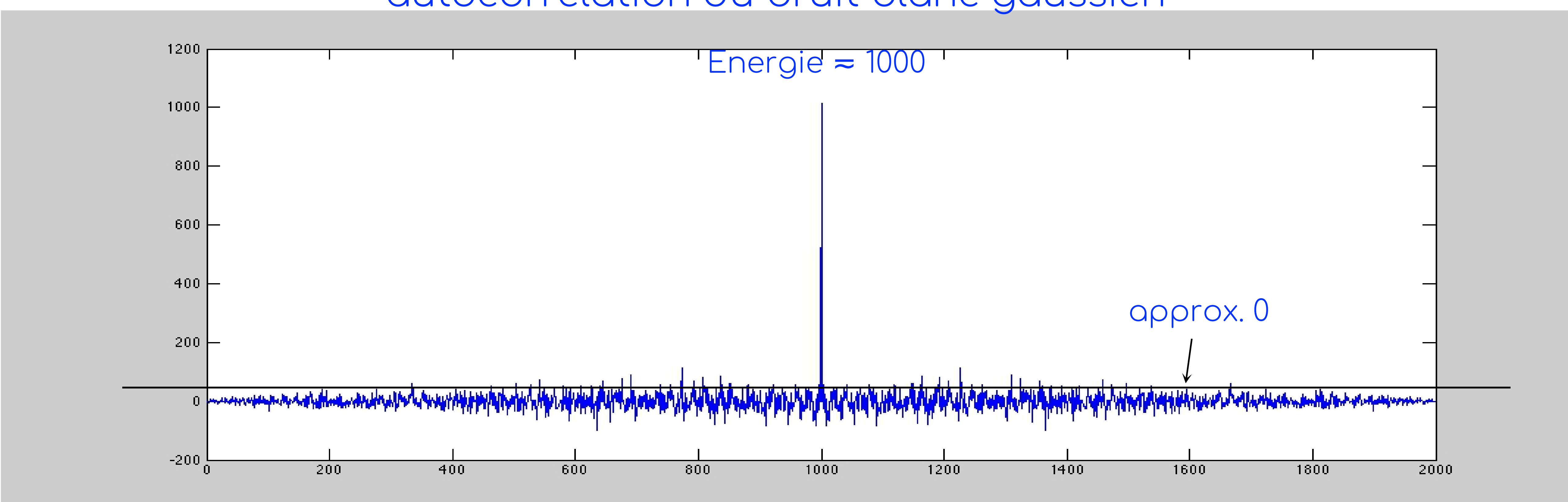
Auto/Intercorrélation des signaux

- Auto-corrélation du bruit

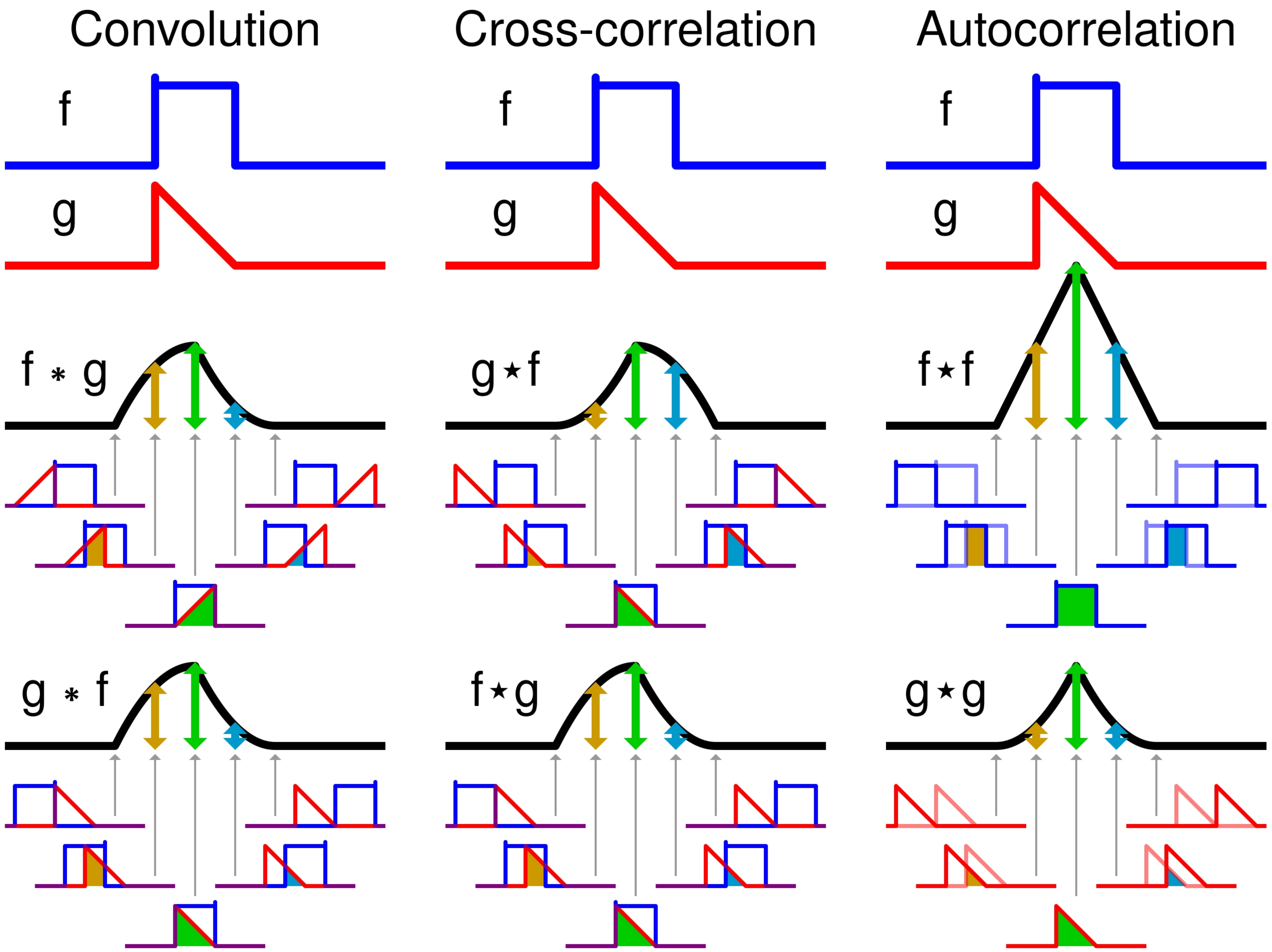
bruit blanc gaussien Energie ≈ 1000

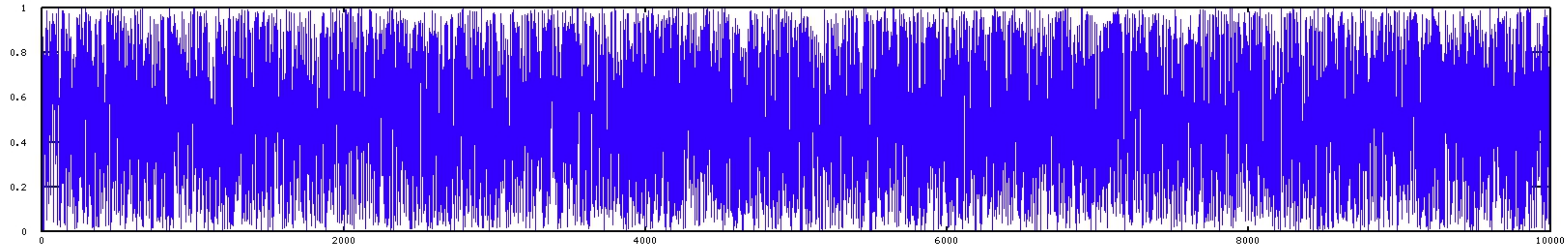


autocorrélation du bruit blanc gaussien

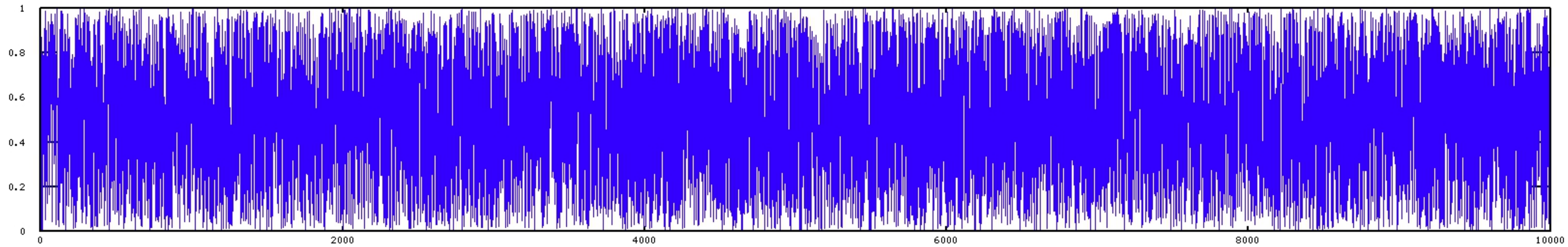


Convolution - auto - intercorrélation




1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2000
4000
6000
8000
10000

Bruit


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2000
4000
6000
8000
10000

Pourquoi s'intéresser au bruit

- Le bruit est un « élément » perturbateur. Il est important d'en connaître la loi de probabilité afin de séparer, si possible, l'information du bruit

- Certaines opérations ou traitement sur des données entachées de bruit peuvent conduire à une amplification importante de ce bruit. Par exemple, dériver, c'est amplifier les hautes fréquences (qui contiennent initialement généralement plus de bruit que d'information)

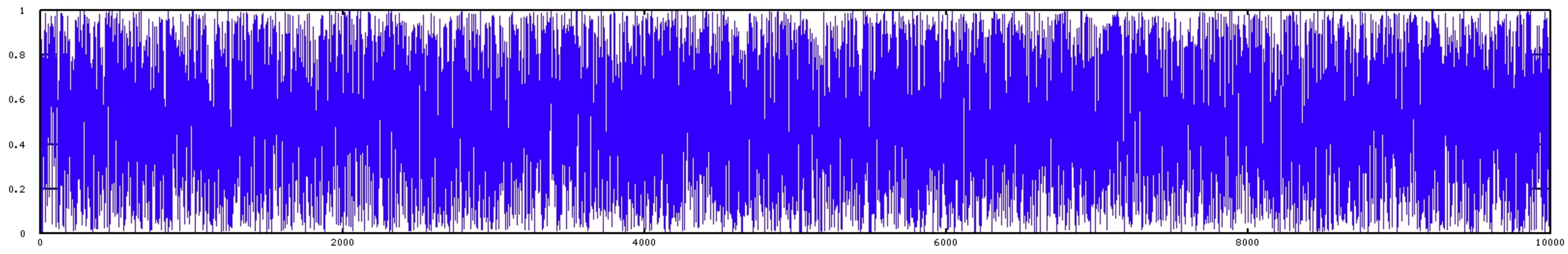
- Connaître la distribution de probabilité (**variable aléatoire**) permet de développer des outils spécifiques pour gérer ou réduire ce bruit

Définition du bruit : variable aléatoire

- Le bruit est un processus stochastique (aléatoire) que l'on modélise/représente par une variable aléatoire

- Une variable aléatoire est une variable dont on ne peut prédire qu'elle va prendre une certaine valeur qu'avec une certaine probabilité (loi de probabilité)

- La loi de probabilité décrit en détail la répartition des valeurs de la variable aléatoire. La loi peut être discrète (nombre fini de valeurs possibles) ou posséder une densité (nombre infini de valeurs)

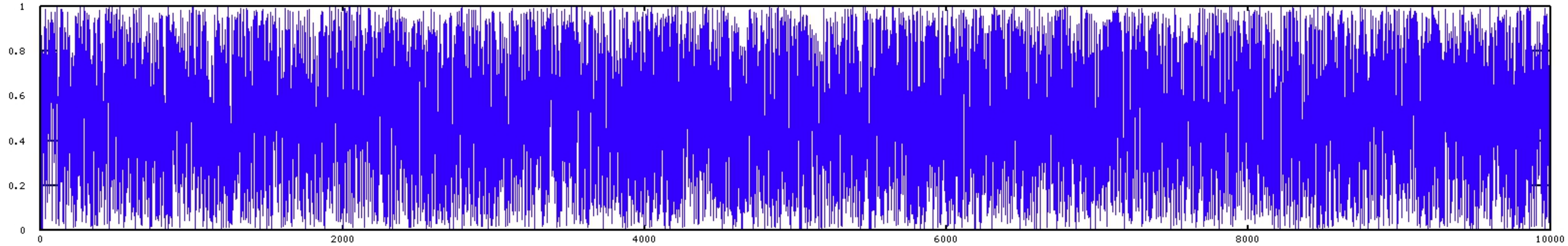


Définition du bruit : variable aléatoire

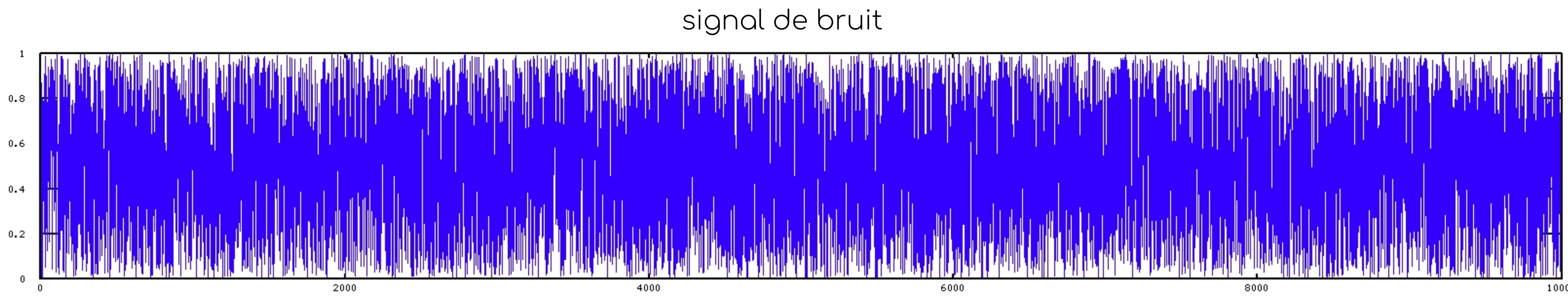
- La loi de probabilité peut être caractérisée par les moments de cette loi, plus particulièrement par les deux premiers: moyenne (espérance) et variance (moment d'ordre deux centré par la moyenne) qui mesure la dispersion.

- Si la loi est normale (gaussienne), les deux premiers moments sont suffisants pour caractériser complètement la variable

- Le moment centré d'ordre 3 mesure l'asymétrie de la loi, celui d'ordre 4 mesure l'aplatissement (kurtosis)



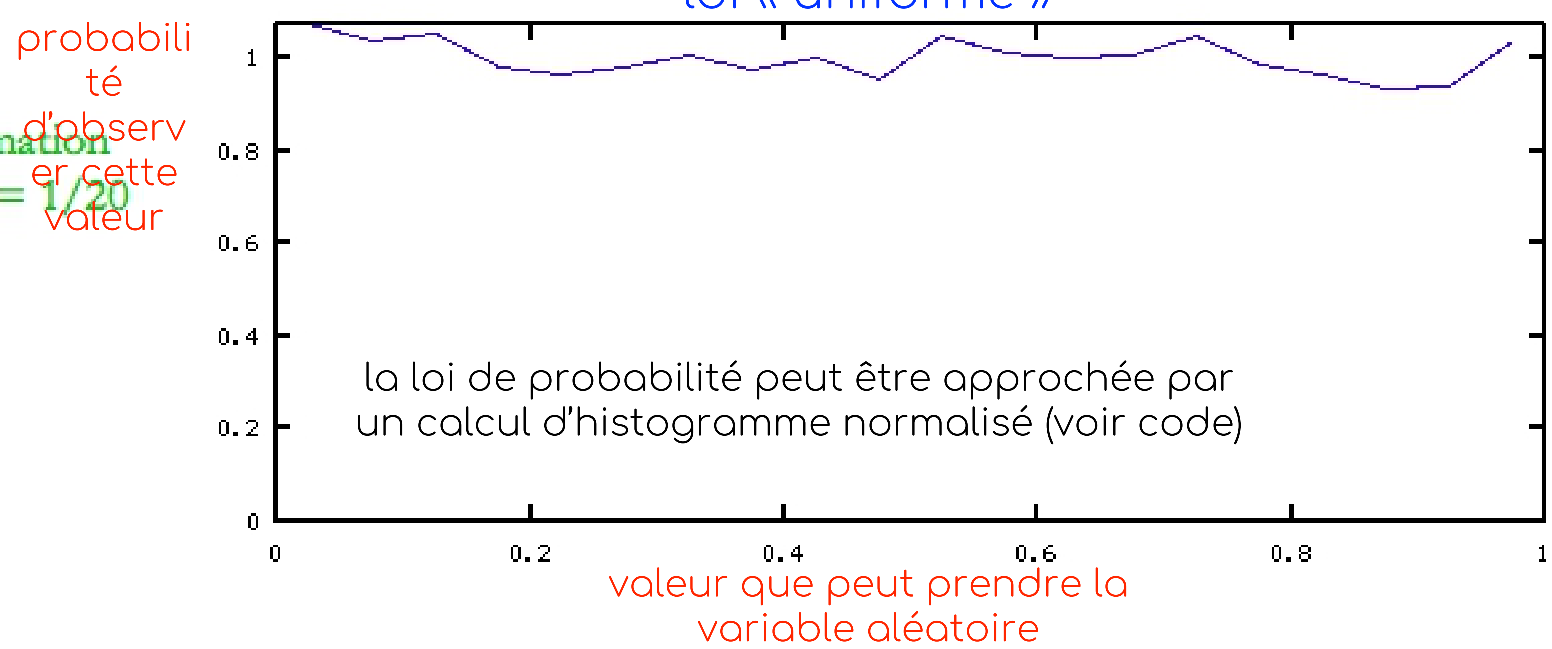
Exemple : observation



- Estimation de la loi de probabilité

```
figure(1);
sb = rand(1,10000); % générateur nbr aléatoire
plot(sb);
[histogramme, absHisto] = hist(sb, 20,1); % 20 pts d'estimation
probabilite = histogramme * 20; % pas de la summation = 1/20
figure(2);
plot(absHisto, probabilite);
axis([0,1,0,max(probabilite)], "manual");
m = mean(sb)
ecart_type = sqrt(var(sb))
```

loi de probabilité : l'estimation donne une loi « uniforme »



- Estimation de la moyenne : `m = 0.50037`

- Ecart-type: `ecart_type = 0.28733`

Quelques distributions

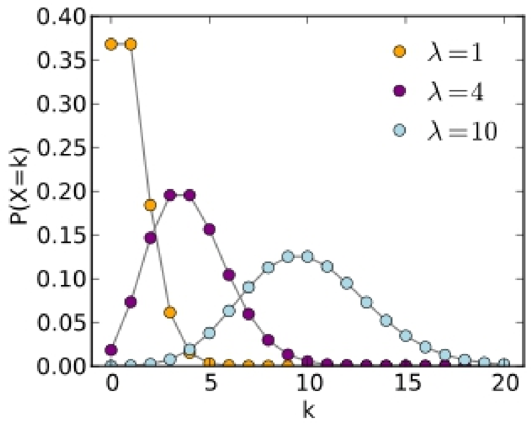
- On distingue essentiellement les bruits par leur loi de probabilité

  - Loi de Poisson $$p(k) = P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

    - p = probabilité d'observer k occurrences sur un nombre attendu λ d'événements sur/pendant un certain intervalle (indépendance au temps écoulé entre les événements).

    - Exemple : proba. d'voir k photons pour un nombre λ attendu pendant l'acquisition d'une caméra.
      Si 1 photons en moyenne par µs, proba. d'en observer k pendant 10µs : paramètre λ=10 x 1 = 10 (voir graphe).

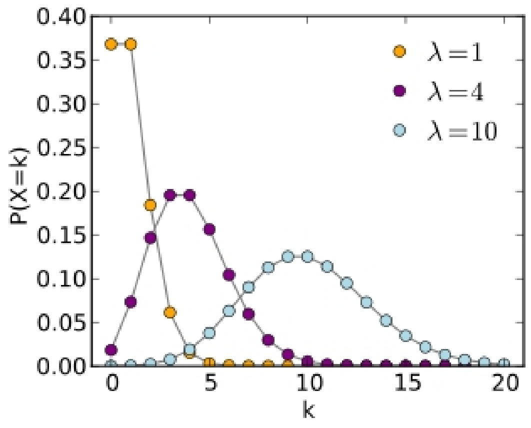
    - Applications : modélisation événements rares, télécommunications (nombre de comm. instantanées), phénomènes de mutations biologiques, météorologiques, …



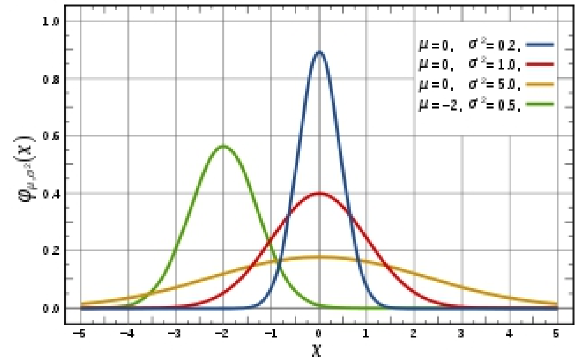
Quelques distributions

- On distingue essentiellement les bruits par leur loi de probabilité

  - Loi de Poisson $$p(k) = P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$



    - *p* = probabilité d'observer *k* occurrences sur un nombre attendu λ d'événements sur/pendant un certain intervalle (indépendance au temps écoulé entre les événements).
    - Exemple : proba. d'voir *k* photons pour un nombre λ attendu pendant l'acquisition d'une caméra.
      Si 1 photons en moyenne par µs, proba. d'en observer *k* pendant 10µs : paramètre λ=10 x 1 = 10 (voir graphe).
    - Applications : modélisation événements rares, télécommunications (nombre de comm. instantanées), phénomènes de mutations biologiques, météorologiques, ...



  - Loi uniforme
  - Loi normale $$p(x) \;=\; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
    - application: modélisation de nombreux phénomènes physiques

Quelques propriétés du bruit

- Valeurs d'un échantillon de bruit sont indépendantes les unes des autres : l'**autocorrélation du bruit est nulle sauf en 0** (superposition de l'échantillon à lui-même) où elle représente l'énergie (signaux de supports finis) ou la puissance (signaux de supports infinis) du bruit

- La somme d'une infinité de variables aléatoires (peu importent les lois individuelles) mène à une variable de loi normale (théorème central limite)
  - Exemple: la somme de deux variables de lois uniformes donne une variable de loi «triangle», et ainsi de suite

- Répartition spectrale du bruit est **en général indépendante** de sa loi de probabilité

Coloration spectrale

- Pour caractériser la répartition spectrale de l'énergie du bruit, on parle de couleur. Cette couleur est associée à la valeur de β qui règle la décroissance de la densité en $\dfrac{1}{f^{\beta}}$
  - bruit blanc (β=0) : densité constante sur tout le spectre (en fait une limite physique existe!)
  - bruit rose (β=1) : la densité décroit en 1/f. Adapté à l'étude de la perception auditive humaine
  - bruit rouge ou brownien (β=2)
  - bruit bleu (β=-1)
  - bruit violet (β=-2)