Elec4A - Traitement du Signal

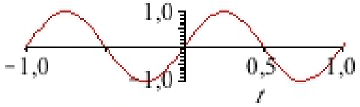
Introduction aux signaux & outils de base

Renato Martins, ICB UMR CNRS - Univ. Bourgogne
UFR Sciences & Techniques, 2026

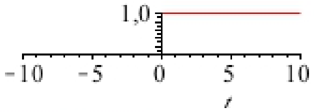
Les signaux

- Signaux déterministes à temps continu
  - la valeur du signal est connue à chaque instant
  - on modélise souvent un signal d'information ou le comportement d'un système par un signal déterministe

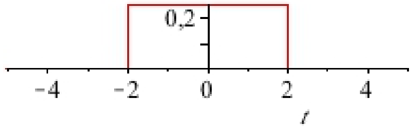
$$s_{\sin} := t \to \sin(2\,\pi f t)$$



$$s_H := t \to \mathrm{Heaviside}(t) \quad \text{où} \quad \mathrm{Heaviside} := t \to \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t \end{cases}$$



$$\Pi_a := t \to \begin{cases} \dfrac{1}{a} & -\dfrac{1}{2}\,a \le t \ \mathbf{and}\ t < \dfrac{1}{2}\,a \\ 0 & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

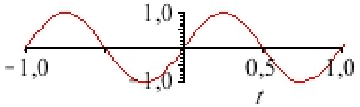


a=4

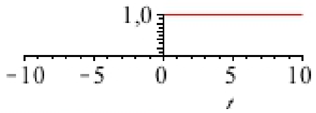
Les signaux

- Signaux déterministes à temps continu
  - la valeur du signal (fonction) est connue à chaque instant
  - on modélise souvent un signal d'information ou le comportement d'un système par un signal déterministe

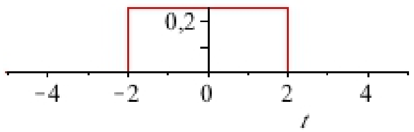
$s_{\text{sin}} := t \to \sin(2\,\pi f t)$



$s_H := t \to \text{Heaviside}(t)$ où $\text{Heaviside} := t \to \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t \end{cases}$



$\Pi_a := t \to \begin{cases} \frac{1}{a} & -\frac{1}{2}\,a \le t \text{ and } t < \frac{1}{2}\,a \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$

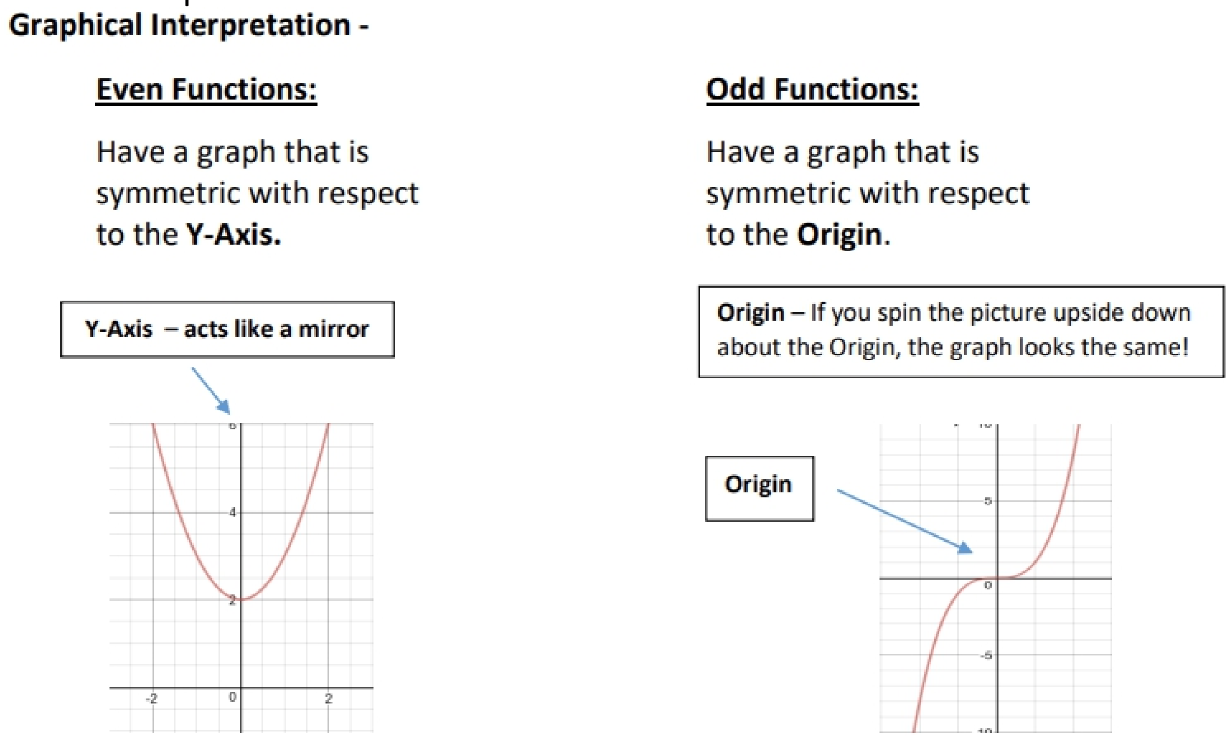


a=4

- Caractéristiques des signaux déterministes : facon analytique ou graphique
  - 1) Signaux **périodiques et apériodiques** : périodiques se reproduisent à l'identique à intervalles réguliers, faisant donc apparaître une période T
  - 2) **Période et fréquence**
  - 3) Fréquence vs pulsation/fréquence angulaire/vitesse angulaire
  - Examples : s = cos(t) et s = cos(2πt)

Les signaux

- Caractéristiques des signaux déterministes : **facon analytique ou graphique**
  - 3) Parité du signal :
    - Signal f(x) est paire si : f(-x) = f(x)
    - f(x) impaire si f(-x) = -f(x)
    - Toutes les fonctions deterministes peuvent etre décomposées comme comme une somme d’une fonction paire et une impaire !



Les signaux

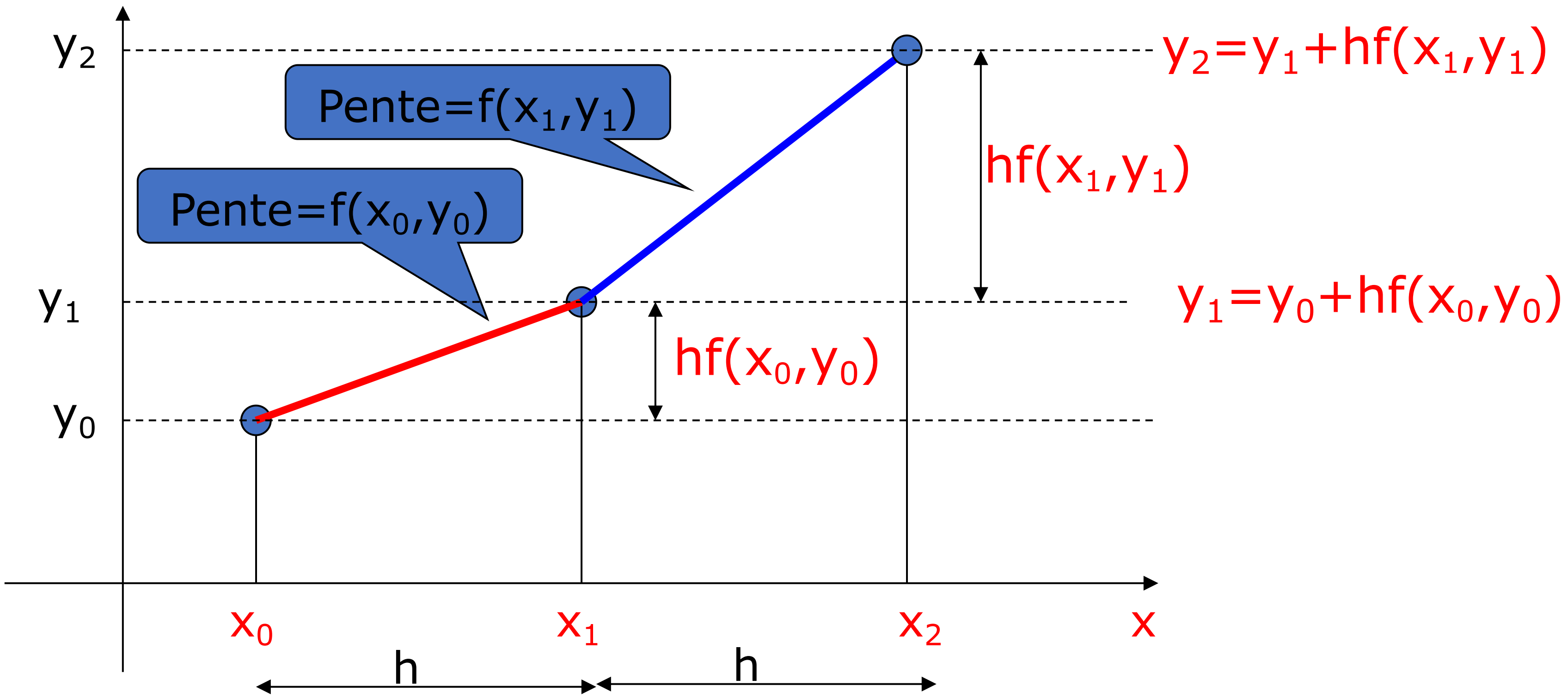
- Caractéristiques des signaux déterministes : **facon analytique ou graphique**
  - Parité d'un signal
  - Trouver la parité de facon algebrique (essayer de dessiner graphiquement ensuite) :

1. $f(x) = x^3 - x^2 + 4x + 2$
2. $f(x) = -x^2 + 10$
3. $f(x) = x^3 + 4x$
4. $f(x) = -x^3 + 5x - 2$
5. $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2} + 4$
6. $f(x) = |x + 4|$
7. $f(x) = |x| + 4$
8. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$
9. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
10. $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$

  - Et pour les signaux périodiques ? (e.g. sin(x), cos(x), ...)

Outres notions mathématiques

- Derivée des fonctions : notion géometrique et analytique



Série de Taylor

- Objectif : approximer localement une fonction régulière
- Hypothèse clé : régularité suffisante de f
- Definition : Soit $f \in C^\infty$ sur un intervalle **I** contenant un point **a**

Série de Taylor en a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

- Question clé : convergence vers f

Série de Taylor

- Convergence vers f :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + R_n(x)$$

- Le reste de Lagrange : $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$

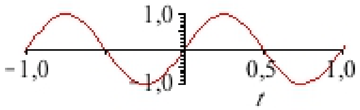
- Convergence si $\lim R_n(x) = 0$

- Exemples :
  - $f = e^x$
  - $f = 1/(1-x)$
  - $f = \ln(x)$

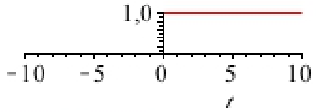
Les signaux

- Signaux déterministes à temps continu
  - la valeur du signal est connue à chaque instant
  - on modélise souvent un signal d'information ou le comportement d'un système par un signal déterministe

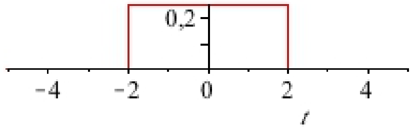
$s_{\sin} := t \rightarrow \sin(2\,\pi f t)$



$s_H := t \rightarrow \mathrm{Heaviside}(t)$ où $\mathrm{Heaviside} := t \rightarrow \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t \end{cases}$



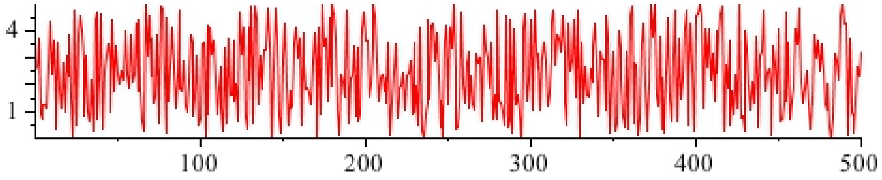
$\Pi_a := t \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} & -\frac{1}{2}a \le t \text{ and } t < \frac{1}{2}a \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$



a=4

- **Signaux aléatoires --> paramètres statistiques**
  - on prédit seulement, avec un «degré de confiance» ou probabilité, la valeur que va prendre le signal
  - le bruit dans les mesures est souvent un signal aléatoire

- **Signaux réels : signal déterministe + signal aléatoire**



Les signaux, autres exemples ?

- Signaux déterministes à temps continu
  - Signaux définis par morceaux, ex Heaviside (échelon)
  - Signaux définis par des fonctions mathématiques (sin, cos, ln, exa, etc.)
  - Signaux produits pas des systèmes (instruments de musique, machines, activité humaine, etc.)

Les signaux, autres exemples ?

- Signaux déterministes à temps continu
  - Signaux définis par morceaux, ex Heaviside (échelon)
  - Signaux définis par des fonctions mathématiques (sin, cos, ln, exa, etc.)
  - Signaux produits pas des systèmes (instruments de musique, machines, activité humaine, etc.)

- Signaux aléatoires
  - Jeux du hasard
  - Bruits (définition scientifique = aléatoires!)
  - Signaux naturels

- Signaux réels: signal déterministe + signal aléatoire
  - Tout signal réel déterministe produit par l'activité humaine et la nature contient en général une partie déterministe et une partie aléatoire

Les signaux

- Signal déterministe
  - Quand on connaît le passé, la probabilité d'apparition d'un niveau donné à l'instant t est soit nulle, soit certaine (=1)
  - Valeur future exacte du signal

- Signal déterministe : formule définissant parfaitement le signal

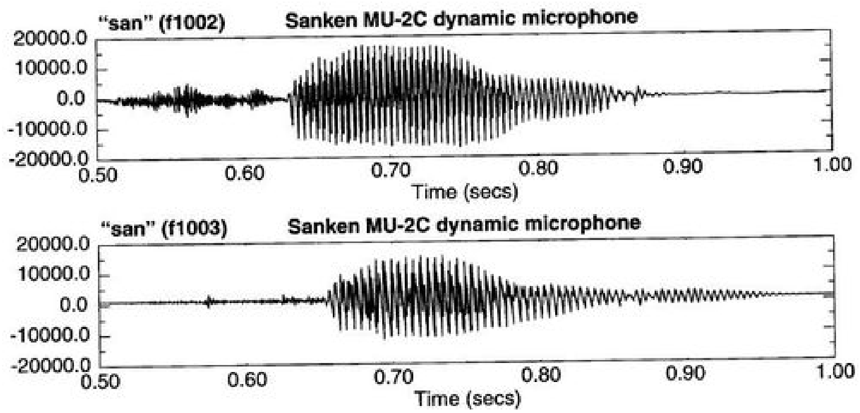
- Signal aléatoire : **paramètres statistiques** définissant les POSSIBILITES d'évolution
  - L'information est liée à un certain degré d'incertitude, d'aléatoire
  - Signaux aléatoires : bruit électronique, le signal de parole...

Les signaux

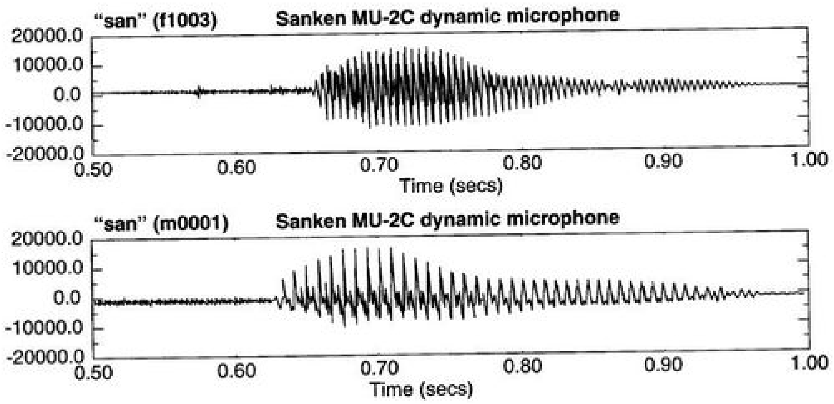
- Paramètres statistiques d’un signal aléatoire :
    - **Moyenne, variance, autocorrélation, moments, ...**

- Ces paramètres peuvent être eux mêmes aléatoires (non stationnaire)
    - Exemple : le signal de parole

Même sons, même personne,
mêmes conditions d’enregistrement

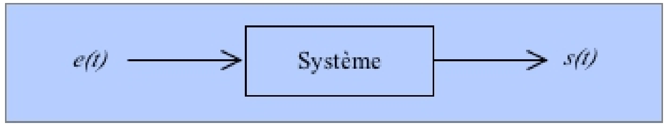


Même son, mêmes conditions d’enregistrement
deux locuteurs différents



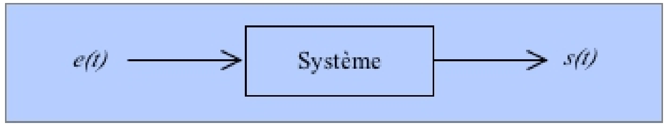
Propriétés des systèmes linéaires invariants

- Un système reçoit un signal d'entrée *e(t)* et délivre un signal de sortie *s(t)*
  - la grandeur physique d'entrée est en général différente de celle de sortie, sauf dans le cas où le système «traite» le signal
  - exemple de système: capteur température, voltmètre, filtre, ...



Propriétés des systèmes linéaires invariants

- Un système reçoit un signal d'entrée *e(t)* et délivre un signal de sortie *s(t)*
  - la grandeur physique d'entrée est en général différente de celle de sortie, sauf dans le cas où le système «traite» le signal
  - exemple de système: capteur température, voltmètre, filtre, ...

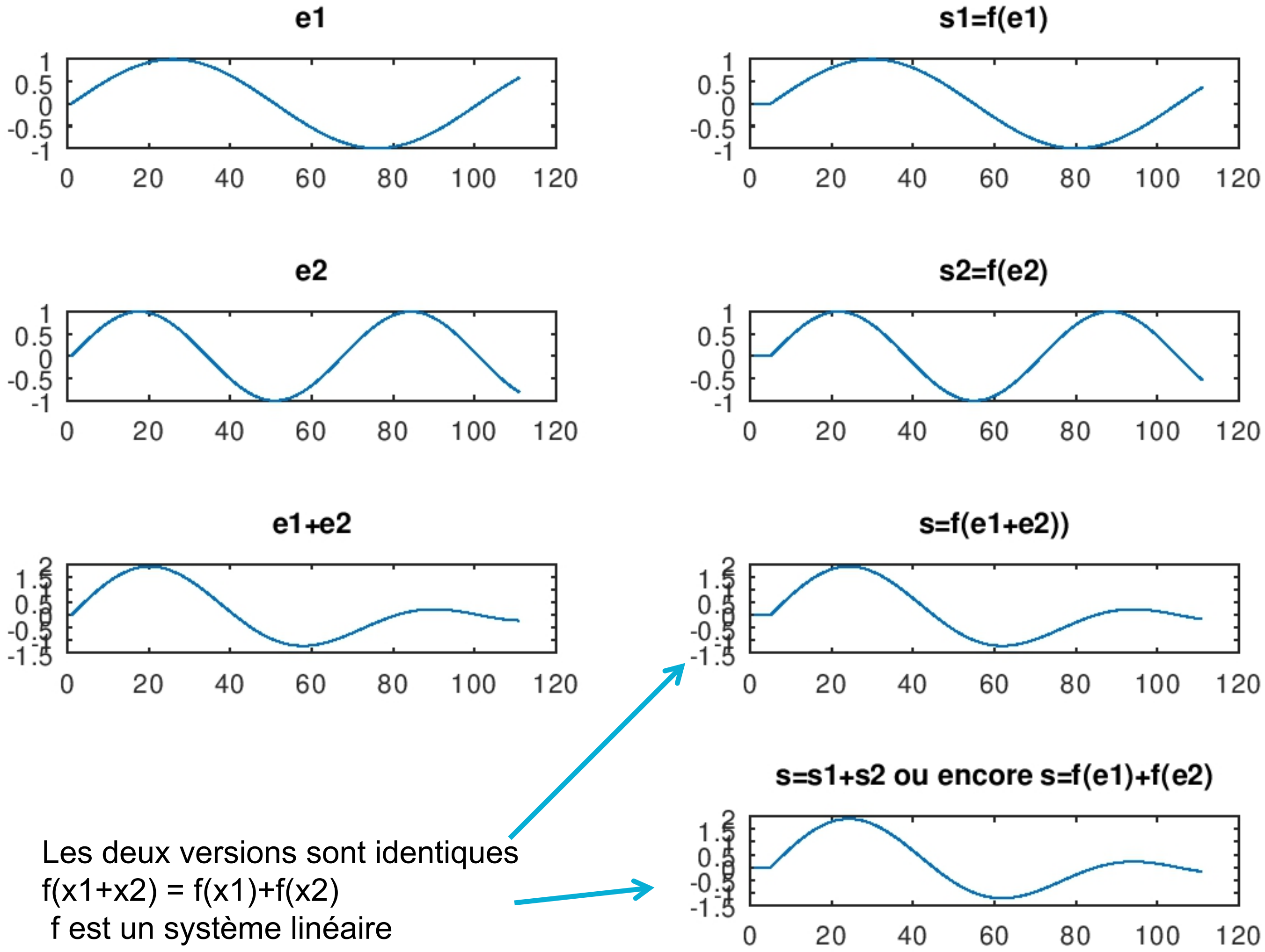


- Invariant
  - les propriétés ne varient pas dans le temps
  - par exemple, les températures ambiante ou de fonctionnement du système n'ont pas d'influence sur sa réponse
- Linéaire
  - le changement d'amplitude, par un certain facteur réel, d'un signal d'entrée induira le même facteur sur l'amplitude en sortie (1)
  - il revient au même de considérer des signaux pris séparément ou l'ensemble de ces signaux (2)
  - un amplificateur est un système linéaire tant qu'il ne fonctionne pas en régime de saturation.

$$\begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R},\ alors\ \alpha e(t) \rightarrow \alpha s(t) \\ e_1(t) \rightarrow s_1(t),\ e_2(t) \rightarrow s_2(t)\ \ alors\ \ e(t) = e_1(t) + e_2(t) \rightarrow s(t) = s_1(t) + s_2(t) \end{cases}$$

Propriétés des systèmes linéaires invariants

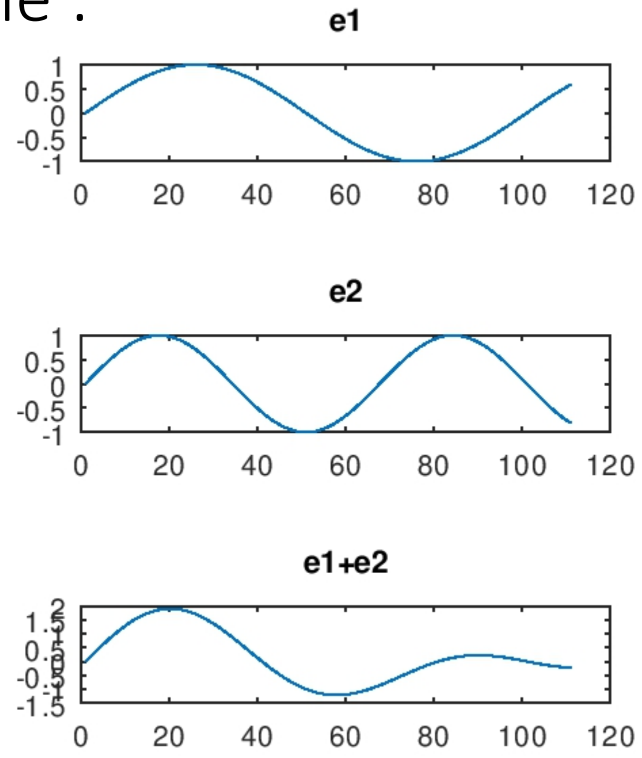
- Exemple :

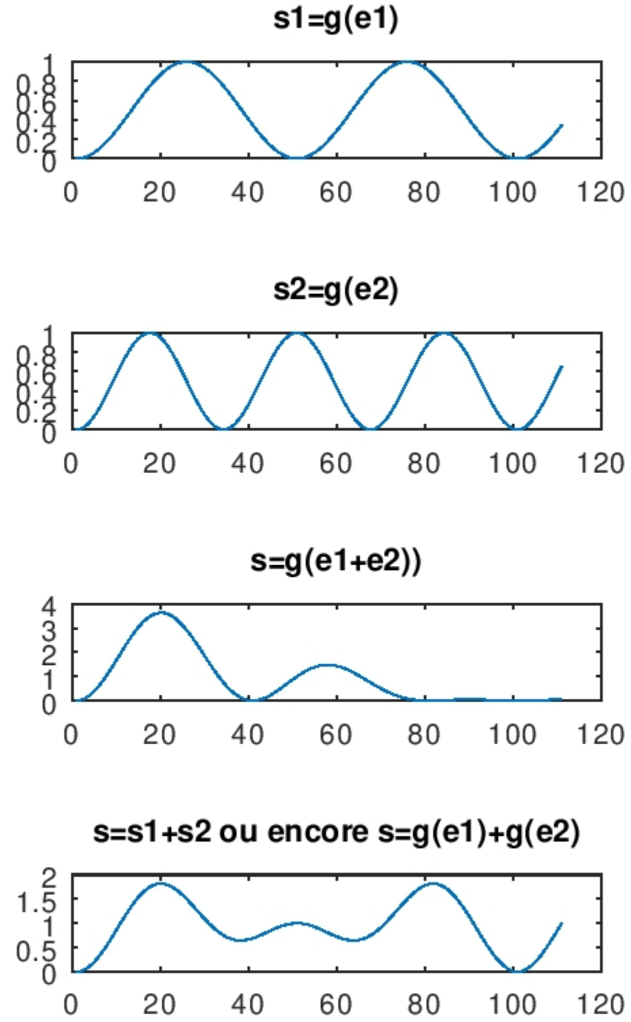


Les deux versions sont identiques
f(x1+x2) = f(x1)+f(x2)
f est un système linéaire

Propriétés des systèmes linéaires invariants

- Contre-exemple :





Les deux versions sont différentes
g(x1+x2) <> g(x1)+g(x2)
g n'est pas un système linéaire

Puissances et énergies des signaux

- Moyenne d'un signal

Moyenne sur un intervalle

Soit un signal $s(t)$ (périodique ou non). Sa valeur *moyenne* sur un intervalle $[t_1\,;\,t_2] \subset \mathbb{R}$ est définie par

$$m(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s(t)\mathrm{d}t$$

Puissances et énergies des signaux

- Moyenne d'un signal

Moyenne d'un signal périodique

Si l'on suppose que $s(t)$ est périodique de période T_p, sa moyenne sur tout l'horizon de temps est égale à sa moyenne sur une une période, à savoir

$$m = \langle s \rangle = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t)\mathrm{d}t, \quad \forall t_0 \in \mathrm{IR}\,.$$

Il est classique de considérer $t_0 = 0$ ou $t_0 = -\dfrac{T_p}{2}$.

Puissances et énergies des signaux

- Moyenne d'un signal

Moyenne d'un signal apériodique

Si $s(t)$ st apériodique, l'astuce consiste à considérer qu'il est en fait périodique, mais de période infinie. Il vient :

$$m = \langle s \rangle = \lim_{T_p \to \infty} \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t)\mathrm{d}t$$

Dans les deux cas, tout ajout d'un *offset* (composante continue) fait varier la moyenne de la valeur de l'offset.

Puissances et énergies des signaux

- Energie d'un signal

Énergie d'un signal sur un intervalle

Soit un signal $s(t)$ (périodique ou non). Son *énergie sur un intervalle* $[t_1 ; t_2] \subset \mathbb{R}$ est définie par

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) \mathrm{d}t$$

Il s'agit d'une notion mathématique.

Puissances et énergies des signaux

- Puissance d’un signal

Puissance moyenne sur un intervalle

Soit un signal $s(t)$ (périodique ou non). La *puissance moyenne* de $s(t)$ sur un *intervalle* $[t_1 ; t_2] \subset \mathbb{R}$ est définie par

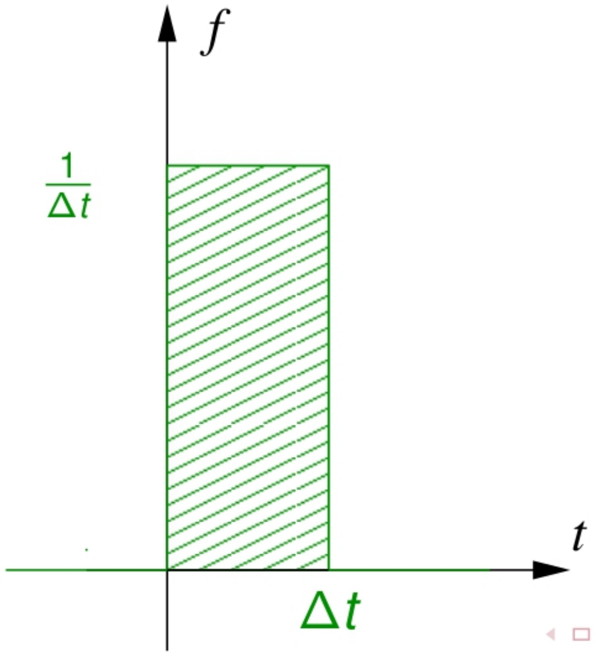
$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) \mathrm{d}t$$

C’est une moyenne, donc une valeur constante égale à

$$P(t_1, t_2) = \frac{E(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}. \qquad (1)$$

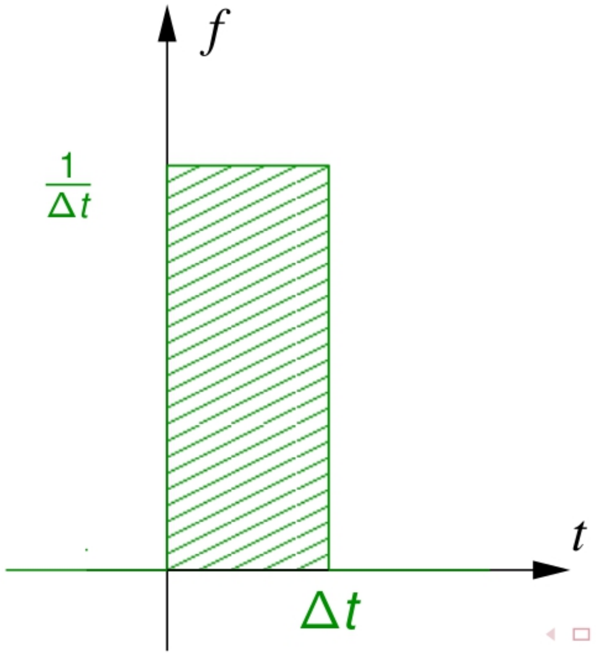
Les signaux

- Caractéristiques des signaux déterministes :
  - Un signal étrange et utile : **Impulsion (ou delta) de Dirac !**
  - Soit l'impulsion rectangulaire définissant une surface (hachurée) égale à 1



Les signaux

- Caractéristiques des signaux déterministes :
  - Un signal étrange et utile : **Impulsion (ou delta) de Dirac !**
  - Soit l'impulsion rectangulaire définissant une surface (hachurée) égale à 1



Pour définir l'*impulsion de Dirac*, il faut faire tendre Δt vers 0 et donc $\frac{1}{\Delta t}$ vers l'infini. L'impulsion devient donc infiniment fine, infiniment haute et de surface 1. On note une telle impulsion $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \mathrm{d}t = 1.$$