Traitement du signal

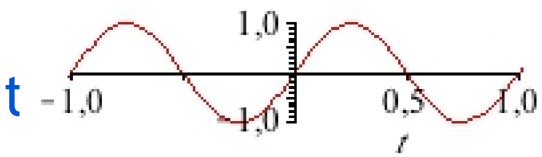
Parcours Informatique Electronique
Module « Elec4 »

Slides et materiel par Olivier Laligant

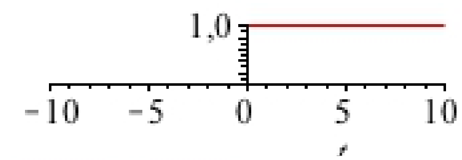
Les signaux

- Signaux déterministes à temps continu
  - la valeur du signal est connue à chaque instant
  - on modélise souvent un signal d'information ou le comportement d'un système par un signal déterministe

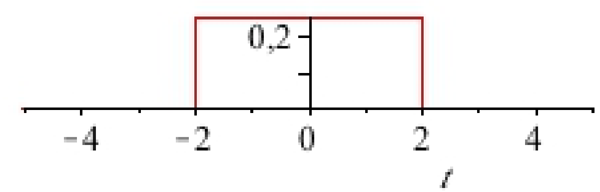
$$s_{\sin} := t \rightarrow \sin(2\,\pi f t)$$



$$s_H := t \rightarrow \text{Heaviside}(t) \quad \text{où} \quad \text{Heaviside} := t \rightarrow \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases}$$



$$\Pi_a := t \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} & -\frac{1}{2}a \leq t \textbf{ and } t < \frac{1}{2}a \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

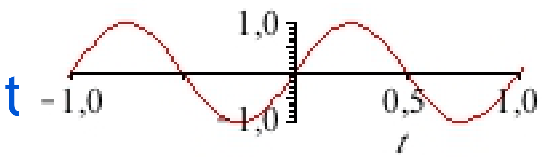


a=4

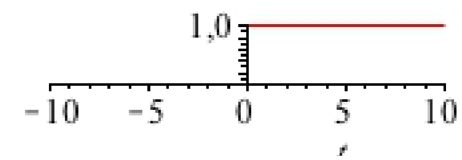
Les signaux

- Signaux déterministes à temps continu
  - la valeur du signal est connue à chaque instant
  - on modélise souvent un signal d'information ou le comportement d'un système par un signal déterministe

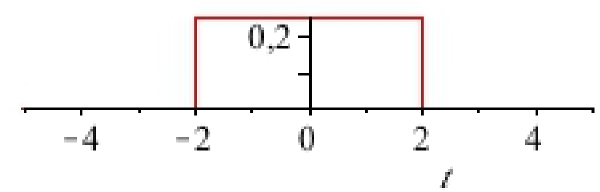
$$s_{sin} := t \rightarrow \sin(2\,\pi f t)$$



$$s_H := t \rightarrow \text{Heaviside}(t) \quad \text{où} \quad \text{Heaviside} := t \rightarrow \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases}$$

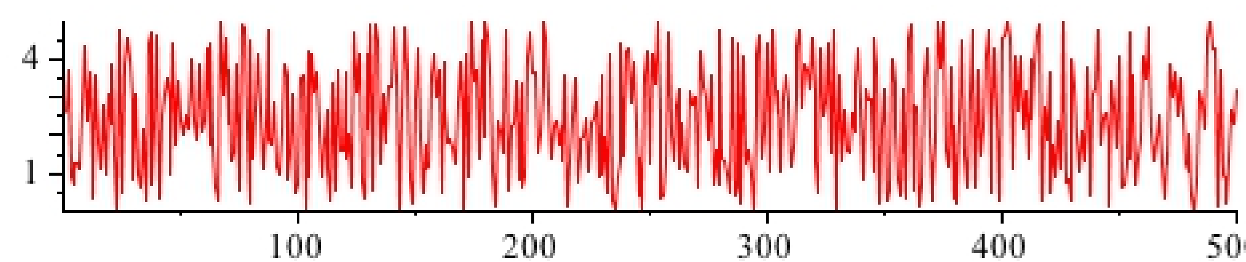


$$\Pi_a := t \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} & -\frac{1}{2}\,a \leq t \ \textbf{and}\ t < \frac{1}{2}\,a \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$



a=4

- Signaux aléatoires
  - on prédit seulement, avec un «degré de confiance» ou probabilité, la valeur que va prendre le signal
  - le bruit dans les mesures est souvent un signal aléatoire



- Signaux réels: signal déterministe + signal aléatoire

Les signaux, autres exemples ?

- Signaux déterministes à temps continu
  - Signaux définis par morceaux, ex Heaviside (échelon)
  - Signaux définis par des fonctions mathématiques (sin, cos, ln, exa, etc.)
  - Signaux produits pas des systèmes (instruments de musique, machines, activité humaine, etc.)

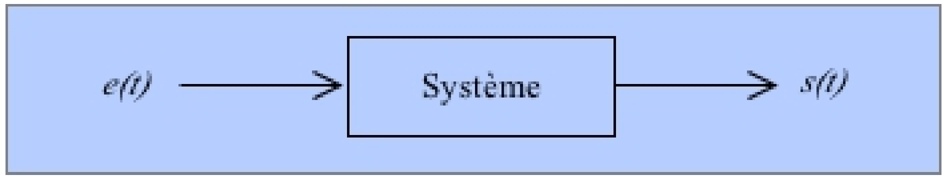
Les signaux, autres exemples ?

- Signaux déterministes à temps continu
  - Signaux définis par morceaux, ex Heaviside (échelon)
  - Signaux définis par des fonctions mathématiques (sin, cos, ln, exa, etc.)
  - Signaux produits pas des systèmes (instruments de musique, machines, activité humaine, etc.)

- Signaux aléatoires
  - Jeux du hasard
  - Bruits (définition scientifique = aléatoires!)
  - Signaux naturels

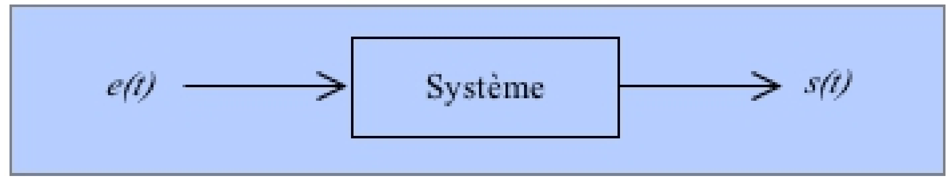
- Signaux réels: signal déterministe + signal aléatoire
  - Tout signal réel déterministe produit par l’activité humaine et la nature contient en général une partie déterministe et une partie aléatoire

Propriétés des systèmes linéaires invariants



- Un système reçoit un signal d'entrée $e(t)$ et délivre un signal de sortie $s(t)$
  - la grandeur physique d'entrée est en général différente de celle de sortie, sauf dans le cas où le système «traite» le signal
  - exemple de système: capteur température, voltmètre, filtre, ...
- Invariant
  - les propriétés ne varient pas dans le temps
  - par exemple, les températures ambiante ou de fonctionnement du système n'ont pas d'influence sur sa réponse

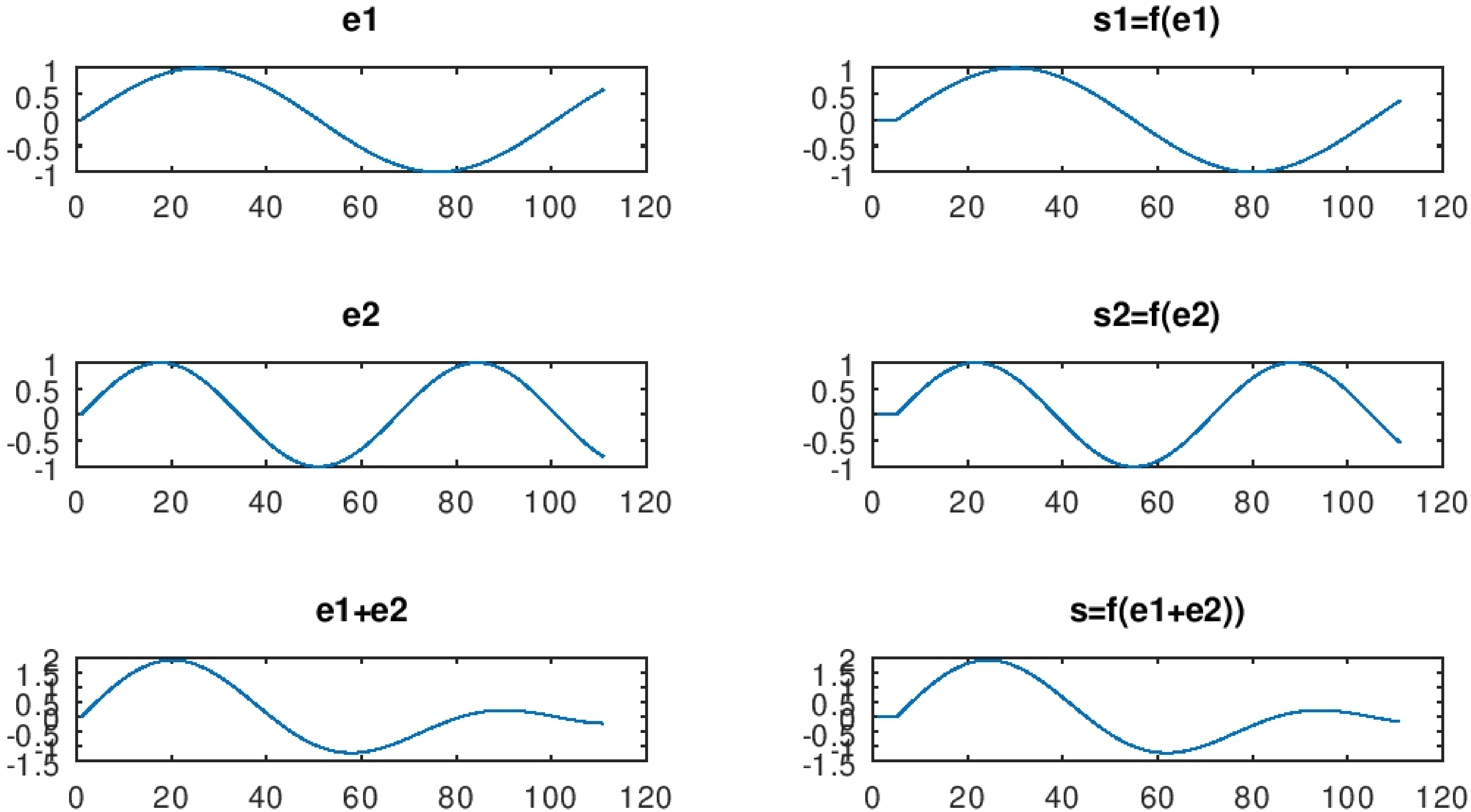
Propriétés des systèmes linéaires invariants

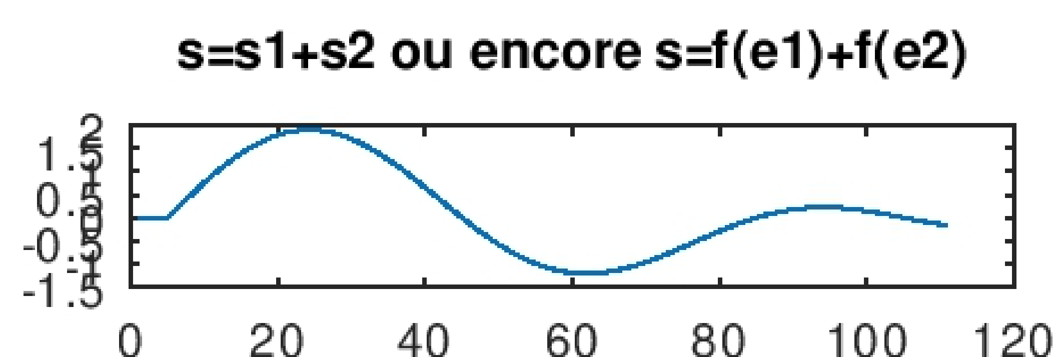


- Un système reçoit un signal d'entrée *e(t)* et délivre un signal de sortie *s(t)*
  - la grandeur physique d'entrée est en général différente de celle de sortie, sauf dans le cas où le système «traite» le signal
  - exemple de système: capteur température, voltmètre, filtre, ...
- Invariant
  - les propriétés ne varient pas dans le temps
  - par exemple, les températures ambiante ou de fonctionnement du système n'ont pas d'influence sur sa réponse
- Linéaire
  - le changement d'amplitude, par un certain facteur réel, d'un signal d'entrée induira le même facteur sur l'amplitude en sortie (1)
  - il revient au même de considérer des signaux pris séparément ou l'ensemble de ces signaux (2)
  - un amplificateur est un système linéaire tant qu'il ne fonctionne pas en régime de saturation.

$$\begin{cases} \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ alors\ \alpha e(t) \rightarrow \alpha s(t) & (1) \\ e_1(t) \rightarrow s_1(t),\ e_2(t) \rightarrow s_2(t)\ \ alors\ \ e(t) = e_1(t) + e_2(t) \rightarrow s(t) = s_1(t) + s_2(t) & (2) \end{cases}$$

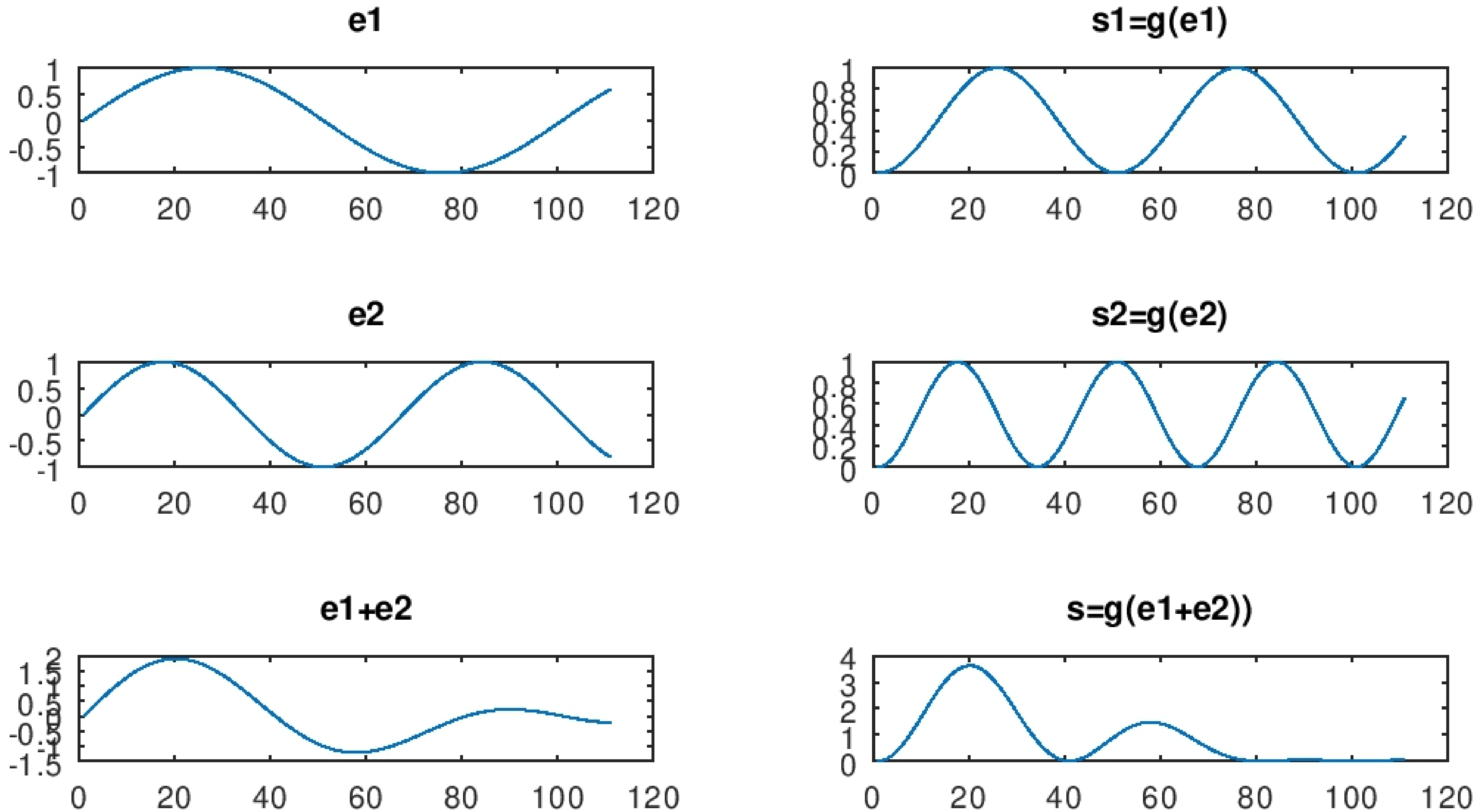
Propriétés des systèmes linéaires invariants : exemple

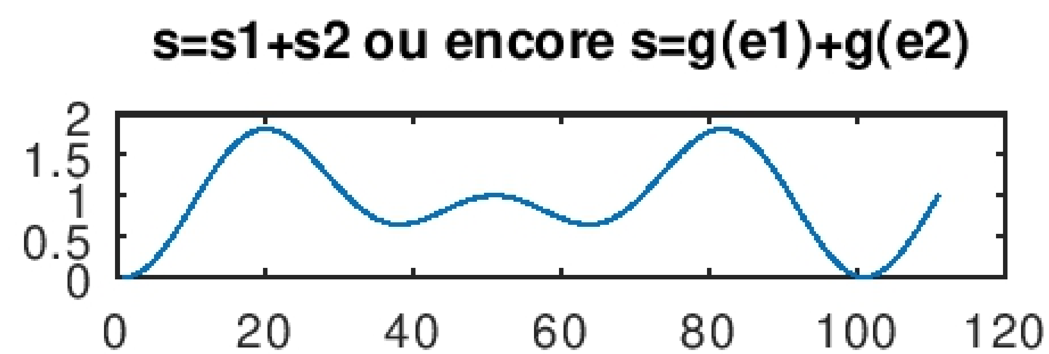




Les deux versions sont identiques
f(x1+x2) = f(x1)+f(x2)
f est un système linéaire

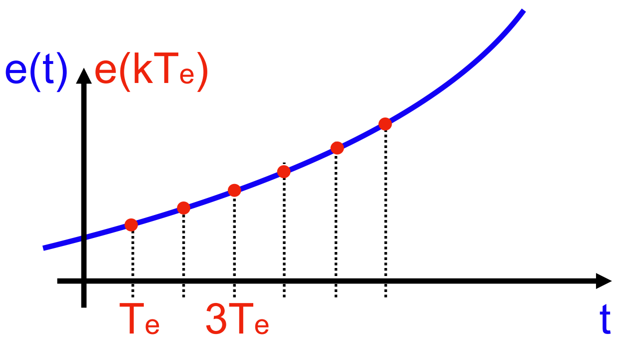
Propriétés des systèmes linéaires invariants : contre-exemple

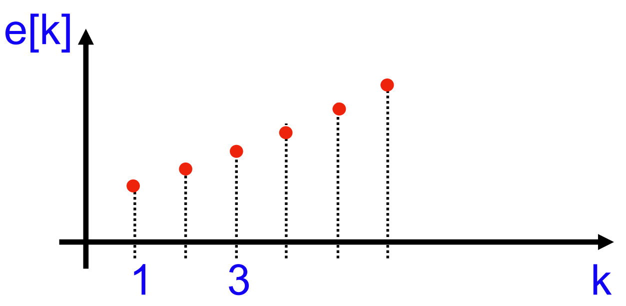




Les deux versions sont différentes
g(x1+x2) <> g(x1)+g(x2)
g n'est pas un système linéaire

Notion de convolution





Modélisation moyenne glissante :

- soit le signal e[k] signal discret, k entier $\in [-\infty; +\infty]$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Remarque :
signal discret obtenu par exemple en échantillonnant un signal continu e(t) :
$e(kT_e)$ —> CAN —> e[k] , avec T_e période d'échantillonnage

$\{ e[k] = e(kT_e) \}_{k\in\mathbb{Z}}$ ou encore $\{ e[k] = e(t)_{t=kTe} \}_{k\in\mathbb{Z}}$

- soit le signal s[k] résultat de la moyenne glissante

- nous avons pour une <u>moyenne centrée sur 5 points</u> :

$\{ s[k] = (e[k-2] + e[k-1] + e[k] + e[k+1] + e[k+2]) / 5 \}_{k\in\mathbb{Z}}$

- pour une <u>moyenne presque centrée sur 4 points</u> :

$\{ s[k] = (e[k-2] + e[k-1] + e[k] + e[k+1]) / 4 \}_{k\in\mathbb{Z}}$

ou :

$\{ s[k] = (e[k-1] + e[k] + e[k+1] + e[k+2]) / 4 \}_{k\in\mathbb{Z}}$

Notion de convolution

- pour une <u>moyenne centrée pondérée sur 5 points</u> :

  $s[k] = (e[k-2] + e[k-1] + 3e[k] + e[k+1] + e[k+2]) \,/\, 7 \quad \forall\, k$

  le point courant (k) est plus important => coefficient plus grand (3), 7 est la somme des coefficients

- pour une <u>moyenne pondéré causale sur 5 points</u> :

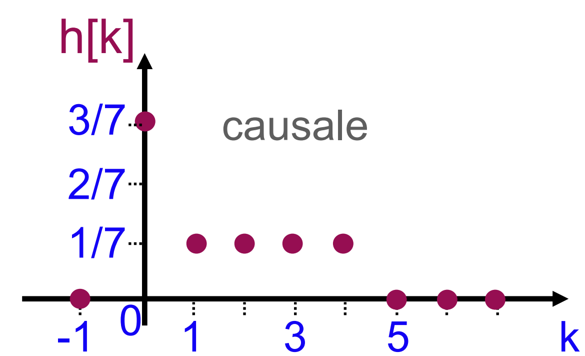
  $s[k] = (e[k-4] + e[k-3] + e[k-2] + e[k-1] + 3e[k]) \,/\, 7$

- introduisons une fonction, par choix, pour représenter les coefficients :

  $s[k] = (h[4].e[k-4] + h[3].e[k-3] + h[2].e[k-2] + h[1].e[k-1] + h[0].e[k])$

  où : $h[k] = \{\, \ldots,\ 0,\ 0,\ 0,\ \underline{3},\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots \,\} \,/\, 7$

  avec k : … -3 -2 -1 <u>0</u> 1 2 3 4 5 6 7 …



Remarques :

Pour une moyenne causale, h est nulle pour $k < 0$

$\sum_{j \in [-\infty;\, +\infty]} h[j] = 1$

Notion de convolution

- à partir de s[k] = (h[4].e[k-4] + h[3].e[k-3] + h[2].e[k-2] + h[1].e[k-1] + h[0].e[k])
  nous pouvons écrire de façon condensée puisque h est nulle ailleurs qu'en 0, 1, 2, 3, 4:

  $s[k] = \sum_{j \in [-\infty;\, +\infty]} h[j].e[k-j]$

  de façon symbolique, nous écrivons :

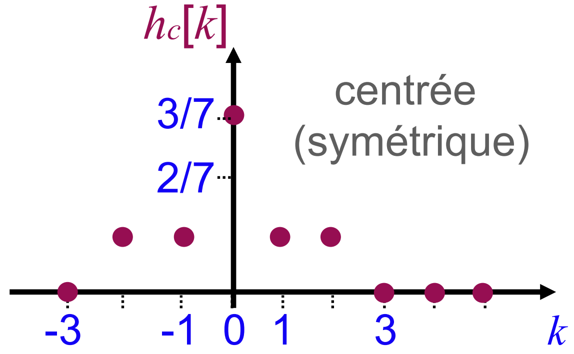
  $\boldsymbol{s[k] = (h * e)[k]}$ se lit h convolué avec e en k, ou convolution de h avec e en k

  ***** est le symbole de convolution (ne pas confondre avec le **x** en informatique)

- pour la <u>moyenne centrée pondérée sur 5 points</u> :

  où : $h_c[k]$ = { ..., 0, 1, 1, <u>3</u>, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, ... } / 7

  avec k : ... -3 -2 -1 <u>0</u> 1 2 3 4 5 6 7 ...



- il suffit donc de préciser la fonction h pour réaliser la moyenne choisie
- la fonction h représente un système (linéaire et invariant)
- le système n'est dont pas limité à la moyenne glissante/locale