Fonctions Logiques

- Il existe plusieurs facons d'ecrire une meme fonction logique.

- Alors si vous avez deux fonctions logiques, comment savoir si elles sont equivalentes ?

- Par example :

$$X = (\overline{A} + BC) \cdot (\overline{B}C) + (A\overline{C} + B) \cdot (AB)$$

$$Y = (AB) \cdot (C + AB\overline{C}) + (AB) \cdot (C + B\overline{C})$$

Fonctions Logiques

- Alors si vous avez deux fonctions logiques, comment savoir si elles sont equivalentes ?

- **Methode 1** : verification par la table de verite
  - Construire une table de verite pour chaque fonction
  - Comparer les tables ligne par ligne. **Les fonctions logiques sont equivalentes si leurs tables de verite sont les memes.**

Exercice

Verifier si les deux fonctions logiques suivantes sont eqivalentes par table de verite :

$$X = (\overline{A} + BC) \cdot (\overline{B}C) + (A\overline{C} + B) \cdot (AB)$$

$$Y = (AB) \cdot (C + AB\overline{C}) + (AB) \cdot (C + B\overline{C})$$

Fonctions Logiques

- Alors si vous avez deux fonctions logiques, comment savoir si elles sont equivalentes ?

- **Methode 1** : verification par la table de verite
  - Construire une table de verite pour chaque fonction
  - Comparer les tables ligne par ligne. **Les fonctions logiques sont equivalentes si leurs tables de verite sont les memes.**
  - **Quel est le probleme avec cette approche ?**

Fonctions Logiques

- Alors si vous avez deux fonctions logiques, comment savoir si elles sont equivalentes ?

- **Methode 2** : Representer les fonctions en forme canonique

  - Forme canonique est unique pour une fonction logique donne

  - Ainsi si deux **fonctions logiques ont les memes formes canoniques alors elles sont equivalentes.**

  - Methode moins dependante du nombre de variables...

Formes Canoniques

- On appelle forme canonique d'une fonction la forme où chaque terme de la fonction comporte toutes les variables.

- Exemple :

$$F(A, B, C) = AB\overline{C} + A\overline{C}B + \overline{A}BC$$

- Deux formes canoniques souvent utilisées :
  - **1ere forme canonique : Somme des produits (SDP)**
  - **2eme forme canonique: Produit des sommes (PDS)**

SDP - Première Forme Canonique

- Première forme canonique (forme disjonctive - OU) : somme de produits

- Exemple :

$$F(A,B,C) = \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C} + A.B.C$$

- C'est la somme des **min termes** ou une **disjonction (OU) de conjonctions (ET)**.

- Chaque terme de la fonction comporte toutes les variables !

- Question a suivre : Comment ecrire une fonction logique en forme canonique SDP ?

PDS - Deuxième Forme Canonique

- Deuxième forme canonique (conjonctive - ET): produit de sommes
- Exemple :

$$F(A,B,C)=(A+B+C)\,(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)$$

- Le produit des **max termes** ou conjonction (ET) de disjonctions (OU).

- Chaque terme de la fonction comporte toutes les variables !

- Question a suivre : Comment ecrire une fonction logique en forme canonique PDS ?

Formes Canoniques

- On peut toujours ramener n'importe qu'elle fonction logique à l'une des formes canoniques.

- Comment ecrire une fonction logique en forme canonique ?

Methode 1 : Manipulations algebriques

- Cela revient à rajouter les variables manquants dans les termes qui ne contiennent pas toutes les variables (les termes non canoniques).

- Utiliser les règles de l'algèbre de Boole :
  - Multiplier un terme avec une expression qui vaut 1 ($a+\bar{a}$)
  - Additionner à un terme avec une expression qui vaut 0 ($a.\bar{a}$)
  - Par la suite faire la distribution des termes

Exemples - SDP

$$1.\ F(A,B) = A + B$$

$$= A\,(B + \overline{B}) + B(\,A + \overline{A})$$

$$= AB + A\overline{B} + AB + \overline{A}B$$

$$= AB + A\overline{B} + \overline{A}B$$

$$2.\ F(A,B,C) = AB + C$$

Formes Canoniques

Comment ecrire une fonction logique en forme canonique ?

- **Methode 2** : A partir de la **table de verite**

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- **Min termes** : un terme est vrai (1) pour seulement une seule combinaison (ET) d'entrees

- **Max termes** : un terme est faux (0) pour seulement une seule combinaison (OU) d'entrees

Table de Vérité - Mintermes et Maxtermes

A	B	C		S
0	0	0		0
0	0	1		0
0	1	0		0
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		1
1	1	0		1
1	1	1		1

$\rightarrow A+B+C$: max terme

$\rightarrow A+B+\overline{C}$: max terme

$\rightarrow A+\overline{B}+C$: max terme

$\rightarrow \overline{A}.B.C$: min terme

$\rightarrow \overline{A}+B+C$: max terme

$\rightarrow A.\overline{B}.C$: min terme

$\rightarrow A.B.\overline{C}$: min terme

$\rightarrow A.B.C$: min terme

- F = somme des min termes

$$F(A,B,C) = \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C} + A.B.C$$

- F = produit des max termes

$$F(A,B,C) = (A+B+C)\ (A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)\ (\overline{A}+B+C)$$

Exercice

- Déterminer la SDP et la PDS canoniques de la fonction F à partir de la TV suivante :

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Formes Canoniques

- Comment choisir entre la SDP et la PDS pour representer une fonction logique ?

A	b	C	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$b\bar{c}$	$\bar{a}b$	$b\bar{c}+\bar{a}b$	S
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0

Formes Canoniques

- Comment choisir entre la SDP et la PDS pour representer une fonction logique ?

- Si la TV a majoritairement de “1”s : choisir la PDS

- Si la TV a majoritairement de “0”s : choisir la SDP

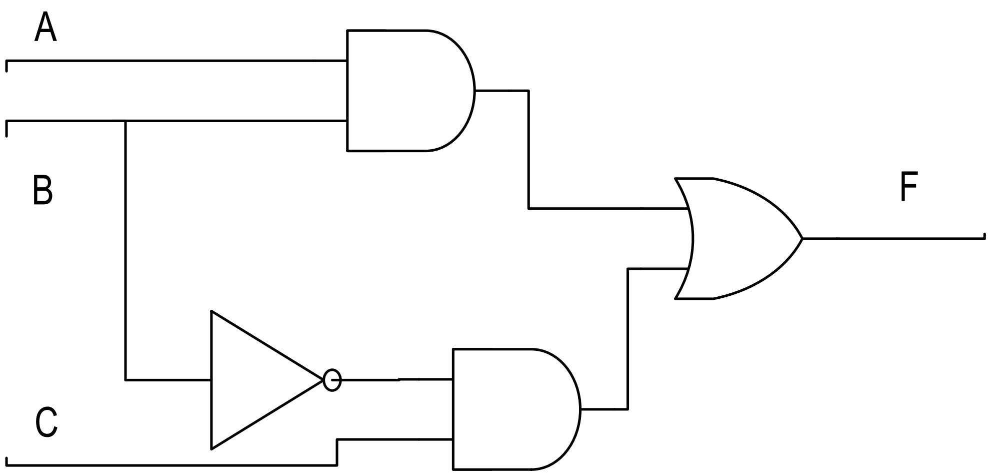
A	b	C	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$b\bar{c}$	$\bar{a}\,b$	$b\bar{c}+\bar{a}\,b$	S
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0

Logigramme

- Schéma d'un circuit logique (Logigramme) : C'est la traduction de la **fonction logique** en un schéma électronique.
- Le principe consiste à remplacer chaque opérateur logique par la porte logique qui lui correspond.

- Exemple :

$$F(A,B,C) = A.B + \overline{B}.C$$



Exercice

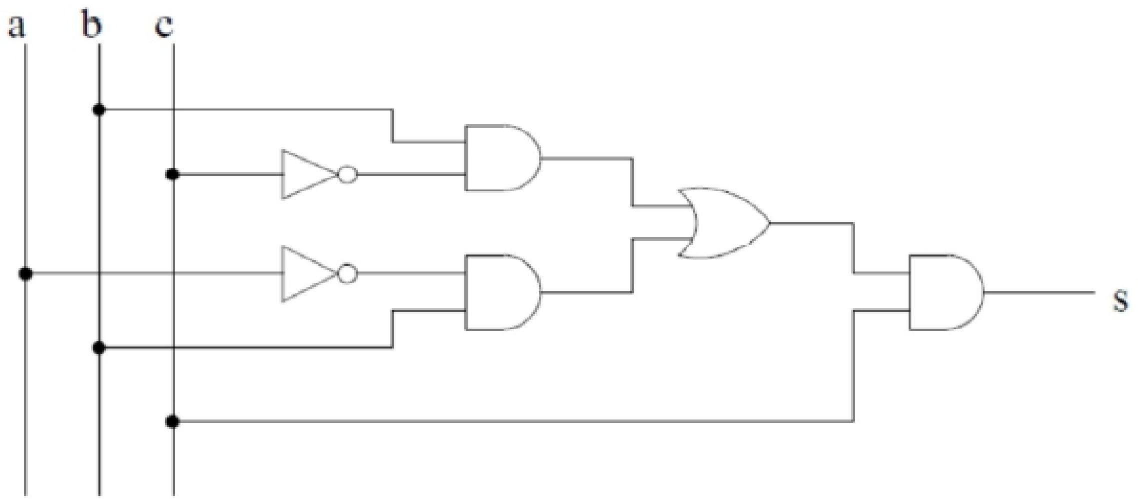
- Donner le logigramme des fonctions suivantes

$$F(A,B,C)=(A+B).(A+\overline{C})$$

$$F(A,B,C)=(A+B).(\overline{A}+C).(B+\overline{C})$$

Exercice

- Soit le circuit logique de la fonction de sortie S :



1. Trouver la table de vérité correspondante à S.
2. Donner la première forme canonique de S (SDP).
3. Tracer le logigramme de S en forme canonique SDP.

Simplification Fonctions Logiques

- L'objectif de la simplification des fonctions logiques est de :
  - réduire le nombre de termes dans une fonction
  - et de réduire le nombre de variables dans un terme

- Cela afin de réduire le nombre de portes logiques utilisées
  réduire le coût du circuit

- Plusieurs méthodes existent pour la simplification :
  - Méthodes algébriques
  - Méthodes graphiques : **table de karnaugh**

Simplification Fonctions Logiques

- Examinons l'expression suivante :

$$A\;.\;B + A\;.\;\overline{B}$$

- Les deux termes possèdent les même variables. La seule différence est l'état de la variable B qui change.
- Si on applique les règles de simplification :

$$AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A$$

- Ces termes sont dites adjacents.

Simplification Fonctions Logiques

Exemples de termes adjacents

- Ces termes sont adjacents
  - $AB + \overline{A}B = B$
  - $ABC + A\overline{B}C = AC$
  - $ABCD + AB\overline{C}D = ABD$

- Ces termes ne sont pas adjacents
  - $AB + \overline{A}\,\overline{B}$
  - $ABC + \overline{A}B\overline{C}$
  - $ABCD + A\overline{B}C\overline{D}$

Simplification Fonctions Logiques

Description de la table de Karnaugh

- La méthode consiste à mettre en évidence par une méthode graphique (un tableau) tous les termes qui sont adjacents (qui ne différent que par l'état d'une seule variable).

- Une table de Karnaugh = table de vérité de 2^n cases avec un changement unique entre 2 cases voisines

- La méthode peut s'appliquer aux fonctions logiques de 2, 3, 4, 5 et 6 variables.

- Les tableaux de Karnaugh comportent 2^n cases (n: est le nombre de variables).

Simplification Fonctions Logiques

- Description de la table de Karnaugh

B \ A	0	1
0		
1		

Tableau à 2 variables

C \ AB	00	01	11	10
0				
1				

Tableau à 3 variables

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Tableau à 4 variables

Simplification Fonctions Logiques

- Description de la table de Karnaugh à 5 variables

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

U = 0

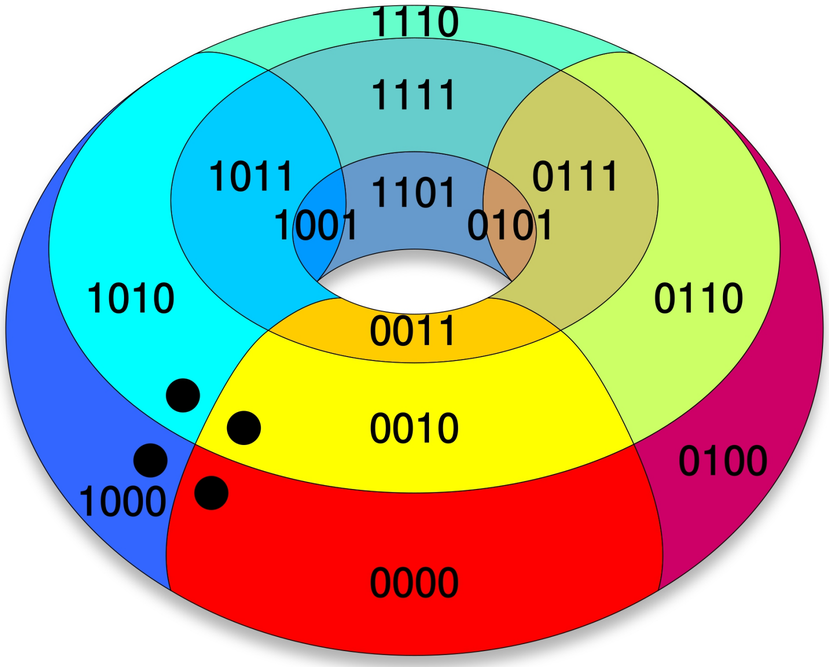
CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

U= 1

Simplification Fonctions Logiques

- Description de la table de Karnaugh

0000	0100	1100	1000
0001	0101	1101	1001
0011	0111	1111	1011
0010	0110	1110	1010



Simplification Fonctions Logiques

Simplification graphique : Table de Karnaugh

- Il faut considérer le tableau de Karnaugh comme un hyper-cylindre, en imaginant que le bord gauche du tableau de Karnaugh est collé au bord droite et de même pour les bords inférieur et supérieur.

- Pour faire des simplifications, on effectue des regroupements retangulaires de taille 2^n : (1, 2, 4, 8, 16,...)

- On peut utiliser une même case pour plusieurs groupements

- On doit prendre tous les 1 du tableau

- Les groupements de cases doivent être de taille maximale

Les groupes formés doivent être les moins nombreux possibles, mais ils doivent englober tous les 1 a intérêt à dessiner des rectangles les plus grands possibles.

Simplification Fonctions Logiques

Simplification graphique : Table de Karnaugh

Cette méthode est pratique jusqu'à 4 variables d'entrée, possible pour 5 et 6 mais au delà de 6 on utilise des programmes informatisés.

- Une fonction à n variables d'entrée un tableau de Karnaugh de **2**^{n} cases codées en Gray (adjacent= binaire réflichi).

- A partir de table de vérité ou formes canoniques PDS ou expressions logiques quelconques, on peut établir le tableau de Karnaugh

Simplification Fonctions Logiques

- Passage de la table de vérité à la table de Karnaugh

A	B	C	S
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

C \ AB	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

Simplification Fonctions Logiques

Passage de la forme canonique à la table de Karnaugh

- Si la fonction logique est donnée sous la SDP canonique, alors sa représentation est directe : chaque terme correspond à une seule case qui doit être mise à 1.

- Si la fonction logique est donnée sous la PDS canonique, alors sa représentation est directe : pour chaque terme lui correspond une seule case qui doit être mise à 0.

Exemples

$$F1(A,B,C)=\sum(1,2,5,7)$$

C \ AB	00	01	11	10
0		1		
1	1		1	1

$$F2(A,B,C)=\prod\ (0,2,6,3)$$

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	0	
1		0		

Méthode de Simplification

1. Remplir le tableau à partir de la table de vérité.
2. Faire des regroupements : des regroupements de 16,8,4,2,1
3. Les mêmes termes peuvent participer à plusieurs regroupements.
4. Dans un regroupement :
   - qui contient un seule terme on peut pas éliminer de variables.
   - Dans un regroupement qui contient deux termes on peut éliminer une variable (celle qui change d'état).
   - Dans un regroupement de 4 termes on peut éliminer deux variables
   - ……………….

L'expression logique finale est la réunion (somme) des groupements après simplification et élimination des variables qui changent d'état.

Simplification Fonctions Logiques

Simplification graphique : Table de Karnaugh

Exemples de simplification

➢ Regroupement de deux cases adjacentes

A \ BC	$\bar{B}\bar{C}$(00)	$\bar{B}C$(01)	BC(11)	$B\bar{C}$(10)
$\bar{A}$(0)	0	0	1	0
A(1)	0	1	1	1

$G_1=ABC+A\bar{B}C=AC$

$G_2=\bar{A}BC+ABC=BC$

$G_3=ABC+AB\bar{C}=AB$

$\boxed{MAJ(A,B,C)=G_1+G_2+G_3=AB+BC+AC}$

La réunion de deux cases adjacentes contenant 1 chacune élimine une seule variable cell change d'état en passant d'une case à l'autre.

Fonction F_3

AB \ CD	$\bar{C}\bar{D}$(00)	$\bar{C}D$(01)	CD(11)	$C\bar{D}$(10)
$\bar{A}\bar{B}$(00)	1	0	1	1
$\bar{A}B$(01)	1	0	0	0
AB(11)	1	1	1	1
$A\bar{B}$(10)	1	0	1	1

$F_{3(A,B,C,D)}=\bar{C}\bar{D}+AB+\bar{B}C$

Deux variables disparaissent quand on regroupe 4 cases adjacentes, on peut alors remplacer la somme des 4 cases (4 mintermes à 4 variables chacun) par un seul terme qui comporte que 2 variables uniquement.

Simplification Fonctions Logiques

Simplification graphique : Table de Karnaugh

Exemples de simplification

➤ Regroupement de deux cases adjacentes

A \ BC	$\overline{B}\,\overline{C}$(00)	$\overline{B}C$(01)	BC(11)	$B\overline{C}$(10)
A(0)	0	0	1	0
A(1)	0	1	1	1

$G_1=ABC+A\overline{B}C=AC$

$G_2=\overline{A}BC+ABC=BC$

$G_3=ABC+AB\overline{C}=AB$

$\boxed{MAJ(A,B,C)=G_1+G_2+G_3=AB+BC+AC}$

La réunion de deux cases adjacentes contenant 1 chacune élimine une seule variable cell change d'état en passant d'une case à l'autre.

Fonction F_3

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$(00)	$\overline{C}D$(01)	CD(11)	$C\overline{D}$(10)
$\overline{A}\,\overline{B}$(00)	1	0	1	1
$\overline{A}B$(01)	1	0	0	0
AB(11)	1	1	1	1
$A\overline{B}$(10)	1	0	1	1

$F_{3(A,B,C,D)}=\overline{C}\,\overline{D}+AB+\overline{B}C$

Deux variables disparaissent quand on regroupe 4 cases adjacentes, on peut alors remplacer la somme des 4 cases (4 mintermes à 4 variables chacun) par un seul terme qui comporte que 2 variables uniquement.

➤ Regroupement de 4 cases adjacentes

Fonction F_1

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$(00)	$\overline{C}D$(01)	CD(11)	$C\overline{D}$(10)
$\overline{A}\,\overline{B}$(00)	0	0	0	1
$\overline{A}B$(01)	1	1	0	1
AB(11)	1	1	0	1
$A\overline{B}$(10)	0	0	0	1

$F_{1(A,B,C,D)}=B\overline{C}+C\overline{D}$

Fonction F_2

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$(00)	$\overline{C}D$(01)	CD(11)	$C\overline{D}$(10)
$\overline{A}\,\overline{B}$(00)	1	0	0	1
$\overline{A}B$(01)	0	0	0	0
AB(11)	1	0	0	1
$A\overline{B}$(10)	1	0	0	1

$F_{2(A,B,C,D)}=A\overline{D}+\overline{B}\,\overline{D}$

➤ Regroupement de 8 cases adjacentes

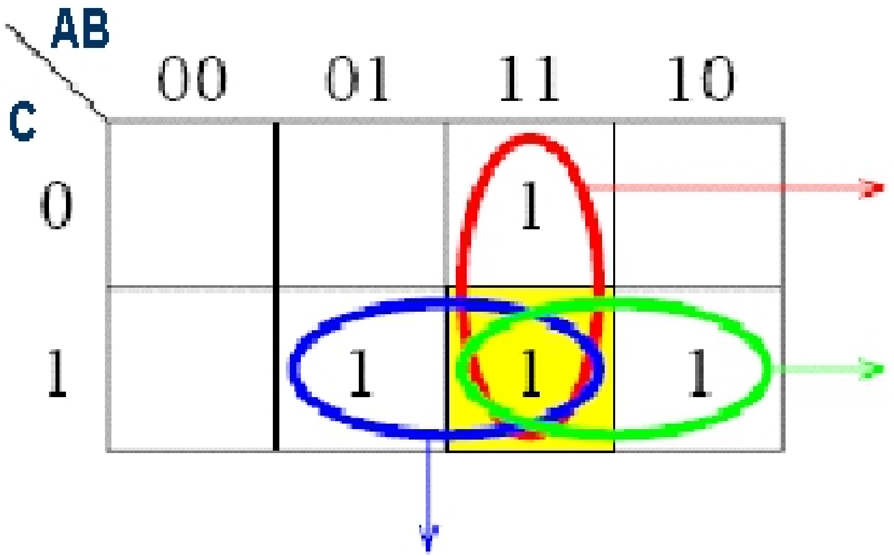
Fonction F_4

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$(00)	$\overline{C}D$(01)	CD(11)	$C\overline{D}$(10)
$\overline{A}\,\overline{B}$(00)	1	0	0	1
$\overline{A}B$(01)	1	0	0	1
AB(11)	1	0	0	1
$A\overline{B}$(10)	1	0	0	1

$F_{4(A,B,C,D)}=\overline{D}$

- En effectuant ainsi les groupements, on élimine les variables qui changent d'état et on conserve celles qui restent fixes

Méthode de Simplification



$$ABC + AB\overline{C} = AB$$

$$ABC + A\overline{B}C = AC$$

$$\overline{A}BC + ABC = BC$$

$$F(A,B,C) = AB + AC + BC$$

Méthode de Simplification

Exemple : 3 variables

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	1

$$F(A,B,C) = ?$$

Méthode de Simplification

Exemple : 3 variables

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	1

$$F(A,B,C) = C + AB$$

Exemple : 4 variables

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	1	0	0

$$F(A,B,C,D) = \overline{C}.D + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C.\overline{D}$$

Exercice

W

cd \ a b	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	0	0	0
10	1	0	0	0

Méthode de Simplification

Exemple : 4 variables

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	1
11				1
10	1			1

$$F(A,B,C,D) = A\overline{B} + \overline{B}\,\overline{D} + \overline{B}CD$$

Méthode de Simplification

Exemple 4 : 5 variables

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			
01	1		1	
11	1		1	
10	1			

U = 0

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			
01	1			1
11	1			1
10	1	1		

U= 1

$$F(A,B,C,D,U) = \overline{A}\,\overline{B} + A.B.D.\overline{U} + \overline{A}.C.\overline{D}.U + A.\overline{B}.D.U$$

Exercices

Trouver la forme simplifiée des fonctions pour les deux tables suivantes :

C \ AB	00	01	11	10
0	X	1	1	1
1	1		1	1

CD \ AB	00	01	11	10
00	1		1	1
01				
11				
10	1	1	1	1

Exercice 2

A partir de la table de Karnaugh:

- 1) Trouver les formes SDP et PDS canoniques
- 2) La fonction logique simplifiee

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

Exercice 3

N		a b			
		0 0	0 1	1 1	1 0
c d	0 0	1	1	1	1
	0 1	1	1	1	1
	1 1	0	1	1	0
	1 0	0	1	1	0

N		a b			
		0 0	0 1	1 1	1 0
c d	0 0	1	1	1	1
	0 1	1	1	1	1
	1 1	0	1	1	0
	1 0	0	1	1	0

N		a b			
		0 0	0 1	1 1	1 0
c d	0 0	1	1	1	1
	0 1	1	1	1	1
	1 1	0	1	1	0
	1 0	0	1	1	0

$$N = b + \bar{c}$$

Commentaires

- Pour faire l'étude d'une foction logiue et la réalisation d'un circuit il faut suivre le étapes suivantes :
  - Il faut définir les variables d'entrée.
  - Il faut définir les variables de sortie.
  - Etablir la table de vérité.
  - Ecrire les équations algébriques des sorties (à partir de la table de vérité).
  - Definir les formes canoniques.
  - Effectuer des simplifications (algébrique ou par Karnaugh).
  - Faire le schéma avec un minimum de portes logiques.