Elec4A - Traitement du Signal

Filtrage et Fonctions de Transfert

Renato Martins, ICB UMR CNRS - Univ. Bourgogne Europe
UFR Sciences & Techniques - IEM, 2026

Systèmes linéaires et Convolution

- Soient deux fonctions continues *f(t)* et *g(t)*, leur convolution est définie comme :

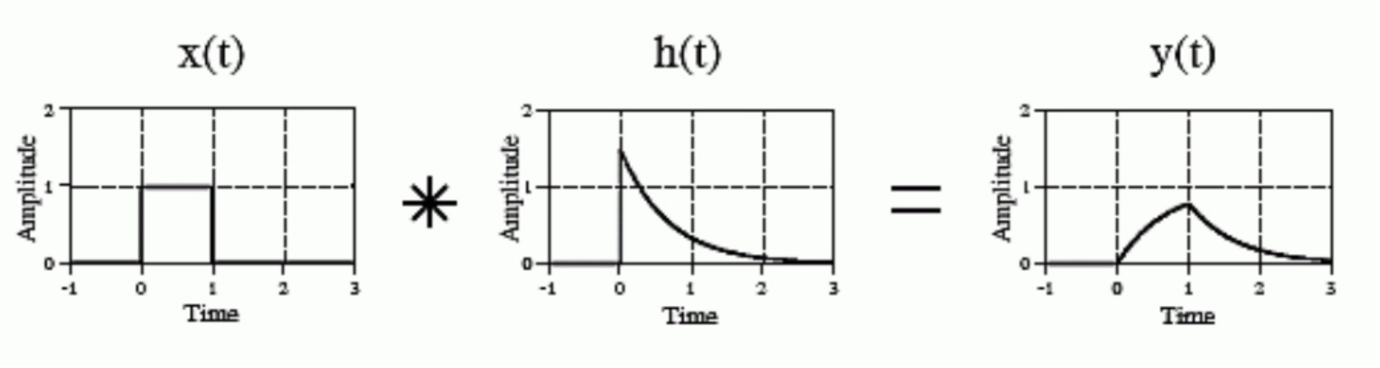
$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau)\, d\tau$$

- Interprétation :
  - f(τ) : fonction d'entrée (par exemple, un signal ou une image)
  - g(t−τ) : fonction appelée noyau ou filtre, "glissée" sur f
  - Somme pondérée des valeurs de f, influencée par le filtre g

Systèmes linéaires et Convolution

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \, d\tau$$

- La convolution modélise le fonctionnement des systèmes dynamiques linéaires (et invariants) !



- Commutative : f∗g=g∗f
- Associative : h f∗(g∗h)=(f∗g)∗h
- Linéaire : a(f∗g)+b(h∗g)=(af+bh)∗g

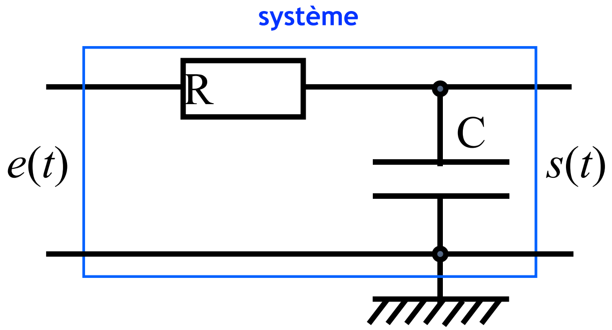
Systèmes linéaires et TF

- Equation différentielle: relie la sortie à l'entrée dans le cas le plus général

$$C.\frac{d(s-0)}{dt} + \frac{s(t)-e(t)}{R} = 0$$

d'où:

$$e(t) = s(t) + R.C.\frac{ds}{dt}$$



- Si le système est linéaire et invariant:

$$s(t) = h * e(t)$$

se démontre (un peu laborieusement) à partir de l'équation différentielle

- Si on considère le régime harmonique: signal d'entrée $e(t) = e^{j\omega t}$

$$\begin{aligned} s(t) &= h * e(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(\tau)e(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{j\omega t}.\int_{\mathbb{R}} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= e^{j\omega t}.H(\omega) \end{aligned}$$

$H(\omega)$ est la TF de la réponse impulsionnelle du système $h(t)$

Fonction de transfert ou transmittance

- Un système est décrit par une équation différentielle
- Dans le cas du système linéaire invariant:

  on décompose un signal dans la base de Fourier et on obtient sa description dans cette base (via les coefficients complexes)

  - la réponse du système à ce signal peut être vu comme la somme des réponses à ces signaux élémentaires de la base de Fourier
  - l'équation différentielle peut alors se mettre sous la forme d'une fraction de deux polynômes de la variable fréquence: c'est la fonction de transfert H
  - la fonction de base $e^{j\omega t}$ est une fonction propre du système linéaire: si l'entrée est un signal de la base, le système modifie simplement les paramètres amplitude et phase du signal

$$\begin{aligned} s(t) &= H(\omega).e^{j\omega t} \\ &= A(\omega).e^{j\omega t+\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

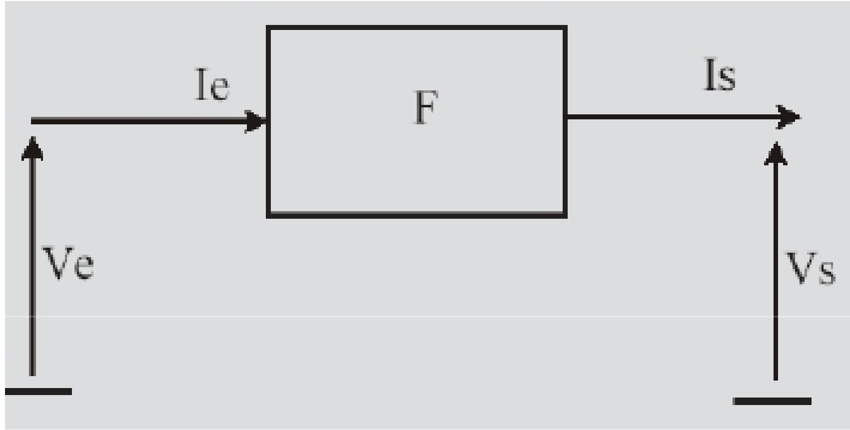
  - pour un signal sinusoïdal en entrée, le comportement du système (si réel) est le même (une sinusoïde est une combinaison de fonctions $e^{j\omega t}$):

$$s(t) = A(\omega).cos\,(\omega t + \varphi(\omega))$$

  et que cos soit un signal réel ou une composante d'un signal réel obtenu par décomposition...

Fonction de transfert ou transmittance

- La fonction de transfert exprime la relation entre la grandeur de sortie et la grandeur d'entrée en **fréquence du système**.
- Elle peut être en courant (Is/Ie) , en tension (Vs/Ve), en impédance (Vs/Ie), etc.



$$F = \frac{V_s}{V_e}$$

- **Gain** est le rapport entre la grandeur du signal de sortie et du signal d'entrée, son unité est le décibel (dB):

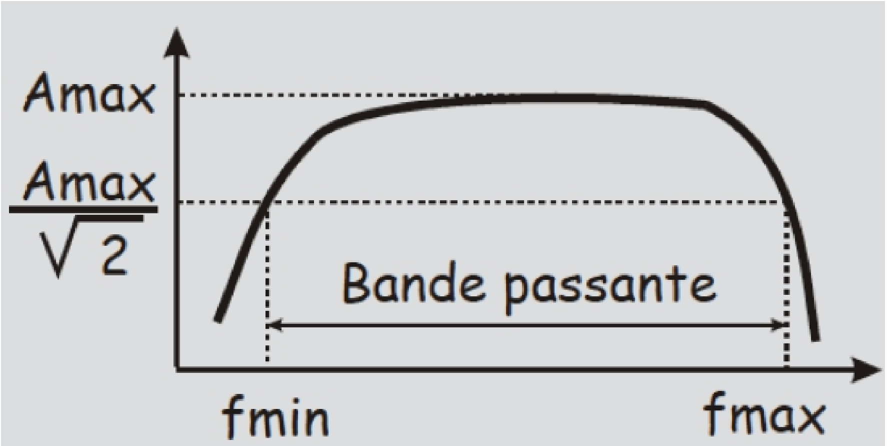
$$G_v = 20\log\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = 20\log \mathrm{F}$$

Fonction de transfert ou transmittance

Bande passante :

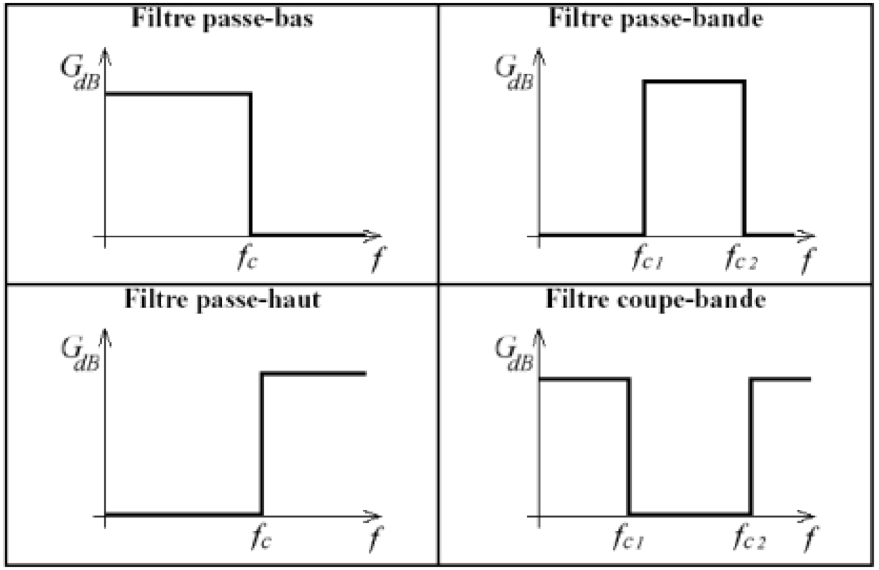
- La bande passante est calculée à partir de la différence entre une fréquence haute (fmax) et une fréquence basse (fmin).

- Les deux fréquences sont prises pour une atténuation par rapport au maximum de $\frac{1}{\sqrt{2}}\ (-3dB)$



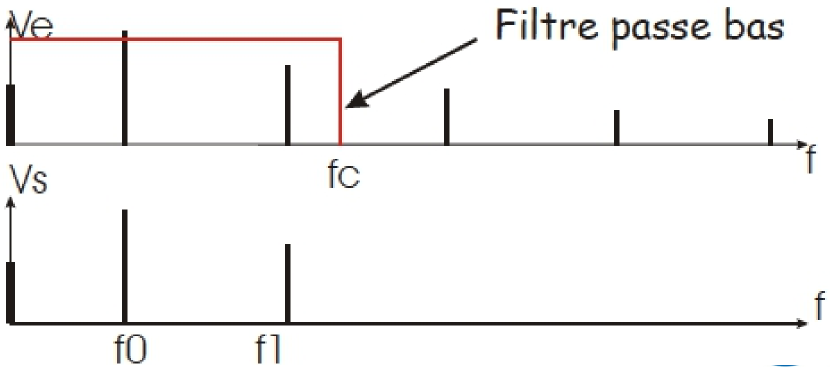
Filtres et fonction de transfert

Types de filtre en fréquence :



Filtre passe-bas :

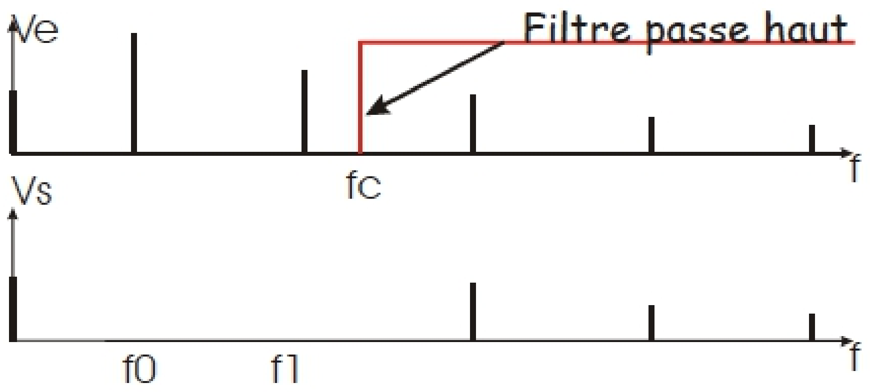
- Un filtre passe-bas laisse passer les fréquences basses et atténue (ou supprime) les fréquences élevées.
- Tant que la fréquence du signal d'entrée est inférieure à la fréquence de coupure (fc), le signal d'entrée passe vers la sortie.

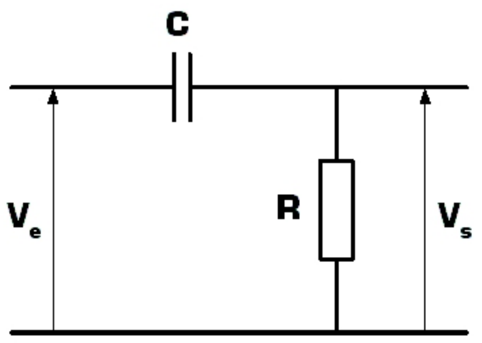


Filtres et fonction de transfert

Filtre passe-haut :

- Un filtre passe-haut laisse passer les fréquences élevées et atténue (ou supprime) les fréquences basses.
- Les fréquences inférieures à la fréquence de coupure sont atténuées et supprimées.



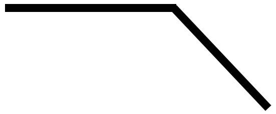


Filtres et fonction de transfert

- Systèmes du 1er ordre

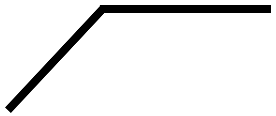
$$H_{B1}(\omega) = K\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

passe-bas



$$H_{H1}(\omega) = K\frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

passe-haut



- Systèmes du 2ème ordre

asymptotes du module dans le plan de Bode
20 log10 $|H(\omega)|$ en fonction de log10 ω

$$H_{B2}(\omega) = K\frac{1}{1+2zj\frac{\omega}{\omega_c}-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

passe-bas

$$H_{H2}(\omega) = K\frac{-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}{1+2zj\frac{\omega}{\omega_c}-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

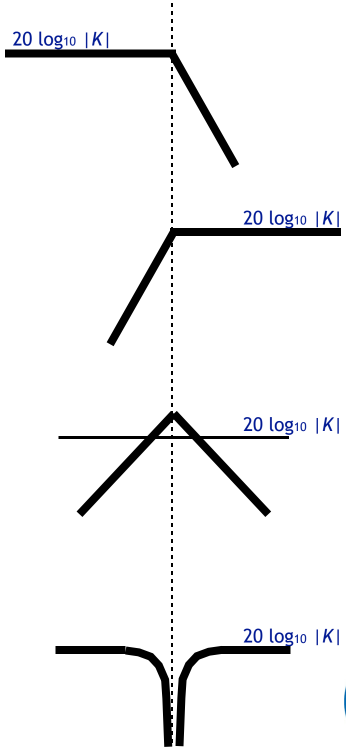
passe-haut

$$H_{P2}(\omega) = K\frac{2zj\frac{\omega}{\omega_c}}{1+2zj\frac{\omega}{\omega_c}-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

passe-bande

$$H_{C2}(\omega) = K\frac{1-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}{1+2zj\frac{\omega}{\omega_c}-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

réjecteur

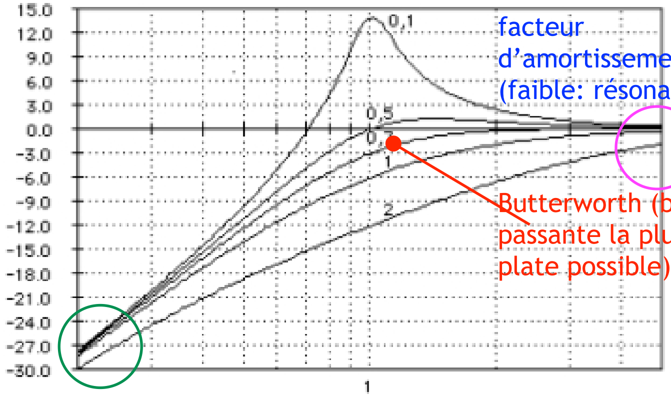


Fonction de transfert ou transmittance

- Courbes du module dans le plan de Bode

passe-haut ordre 2

ici K=1



facteur d'amortissement (faible: résonance)

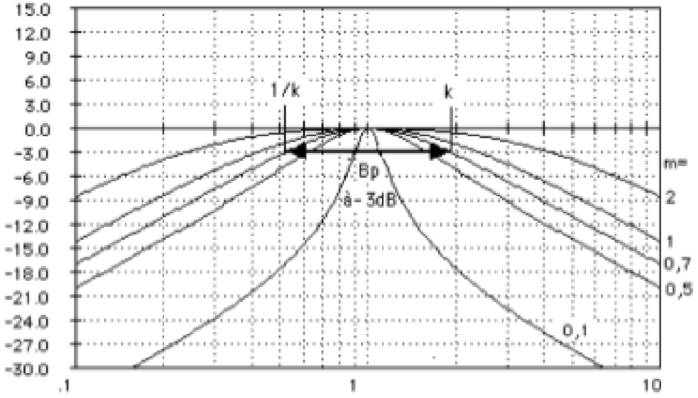
Butterworth (bande passante la plus plate possible)

$$H_{H2}(\omega) = K\frac{-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}{1+2zj\frac{\omega}{\omega_c}-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

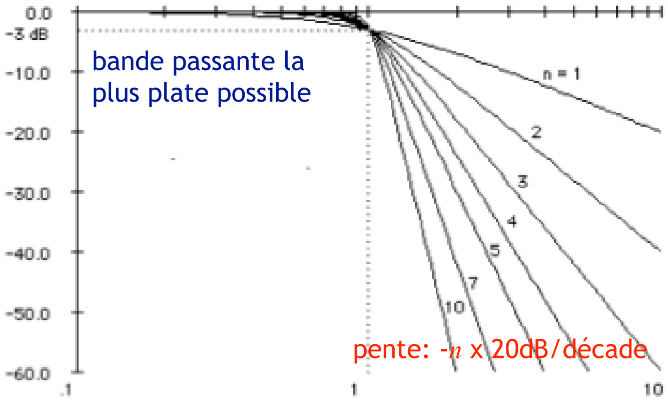
termes prépondérants quand ω→0

termes prépondérants quand ω→∞

passe-bande ordre 2



passe-bas ordre n de Butterworth



bande passante la plus plate possible

pente: -n x 20dB/décade

Fonction de transfert ou transmittance

- Etude et représentation des fonctions de transfert: le plan de Bode
  - soit la forme générale du filtre **passe-bas** d'ordre n

$$H_{Bn}(\omega) = K\frac{1}{1+d_1 j\omega + d_2(j\omega)^2 + d_3(j\omega)^3 + ...d_n(j\omega)^n} \qquad (d_k \geq 0)_{k\in\{1,2,3,...n\}}$$

    - si $\omega \to 0$:

$$H_{Bn}(\omega)_{\omega\to 0} \approx K\frac{1}{1} = K$$

    - si $\omega \to \infty$:

$$H_{Bn}(\omega)_{\omega\to\infty} \approx K\frac{1}{d_n(j\omega)^n} \to 0$$

  - on obtient deux asymptotes dans le plan de Bode ($20log_{10}|\mathrm{H}(\omega)|$, $log_{10}(\omega)$):

$$\begin{aligned} a_1(\omega) &= 20\log_{10}|K| \\ a_2(\omega) &= 20\log_{10}|K| - 20\log_{10}(d_n\omega^n) \\ &= 20\log_{10}|K| - 20n\log_{10}\left(\frac{\omega}{d_n^{-\frac{1}{n}}}\right) \\ &= 20\log_{10}|K| - 20n\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \end{aligned}$$

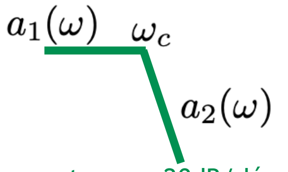
Fonction de transfert ou transmittance

- Etude et représentation des fonctions de transfert: le plan de Bode

$$H_{Bn}(\omega) = K\frac{1}{1 + d_1 j\omega + d_2(j\omega)^2 + d_3(j\omega)^3 + ...d_n(j\omega)^n}$$

$$a_1(\omega) = 20\log_{10}|K|$$
$$a_2(\omega) = 20\log_{10}|K| - 20n\log_{10}\frac{\omega}{\omega_c}$$

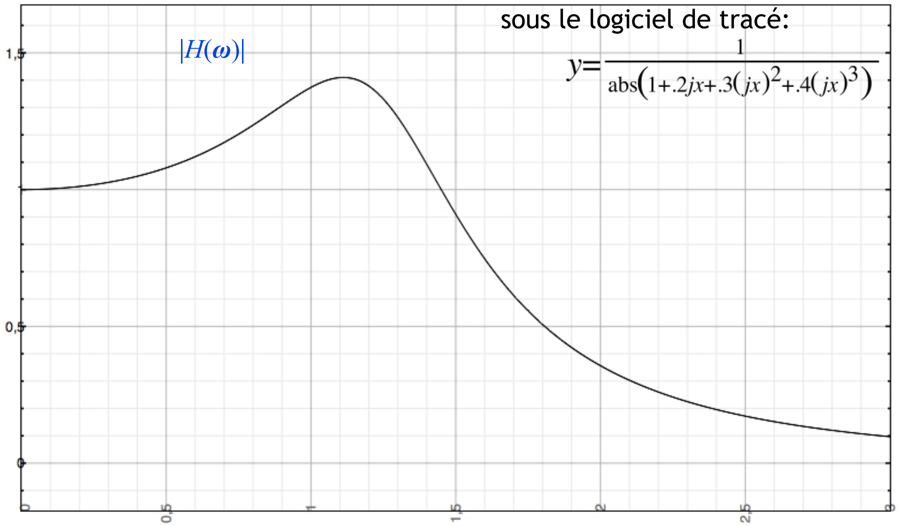
caractéristiques directement lisible
dans le plan de Bode



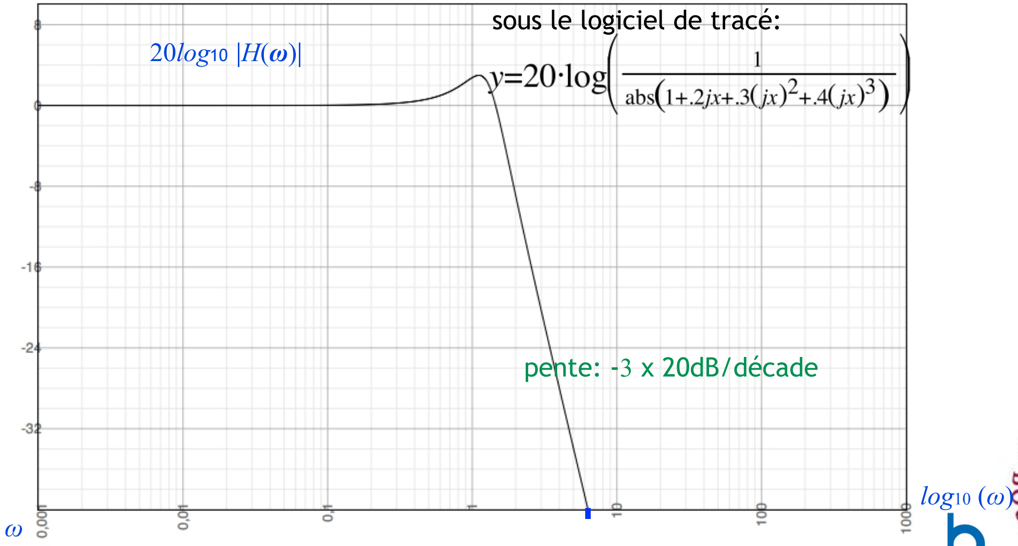
pente: -n x 20dB/décade

- Exemple ordre 3 (filtre quelconque)

plan linéaire

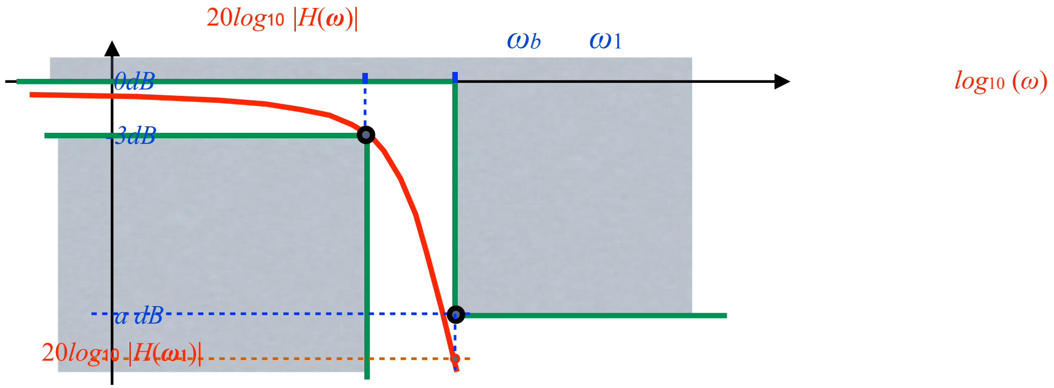


plan de Bode



Familles de filtres

- Comment déterminer et construire un filtre ?
  - déterminer la fonction de transfert (cas passe-bas):
    - on dessine un gabarit dans lequel doit s'inscrire le module de la fonction de transfert (ou la phase)



    - on choisit la famille du filtre: Butterworth, Tchebychev, Bessel, etc
    - si Butterworth : on impose par exemple que le module passe par le point (ω_b ,$-3dB$). On a alors $\omega_b = \omega_c$.
    - le module de la fonction de transfert doit vérifier la condition suivante:

$$20 \log_{10} |H(\omega_1)| < a \text{ en dB}$$

    - on en déduit la forme de la fonction de transfert (connaissant certaines contraintes liées à la famille, par exemple avec Butterworth *bande passante la plus plate possible*, c'est-à-dire annulation des dérivées successives du module en $\omega=0$ sauf la dernière à l'ordre n, ordre du filtre ou de la fonction de transfert)