Echantillonnage

Slides de M. Olivier Laligant - Mars 2025

Types de signaux

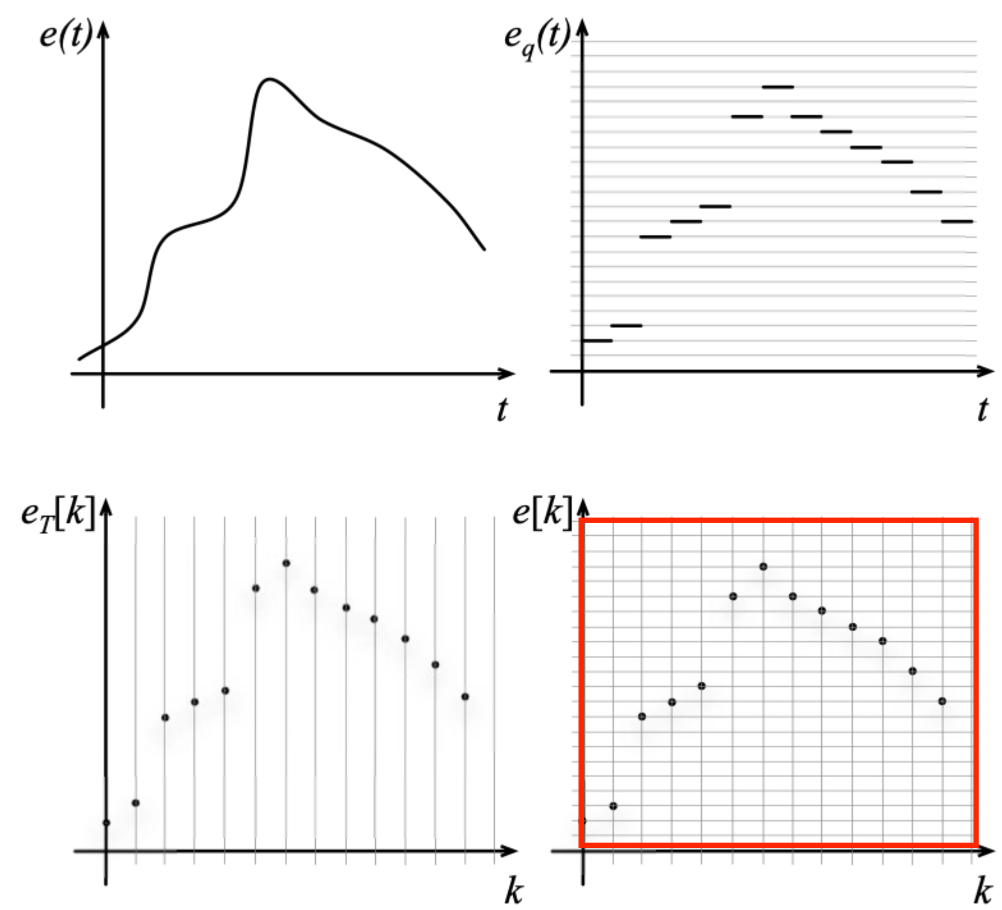
On peut distinguer quatre types de signaux en fonction de leur représentation:

le signal continu $e(t)$

le signal échantillonné $e_T[k]$

le signal quantifié $e_q(t)$

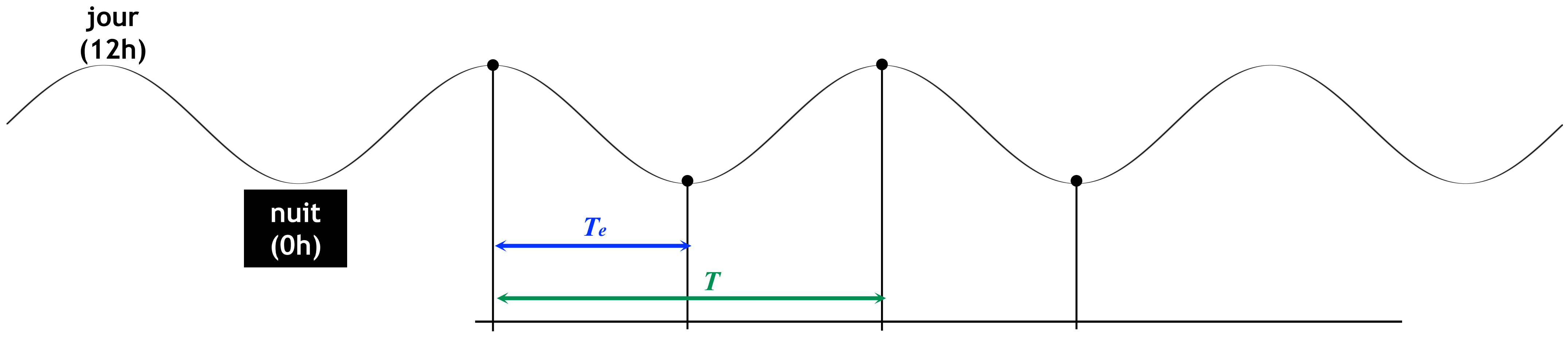
le signal discret $e[k]$, signal échantillonné et quantifié



Introduction au théorème de Shannon

Le jour et la nuit

- supposons que l'on puisse représenter par une sinusoïde l'intensité du soleil, au jour le jour, en un point de la Terre



- pour suivre le cycle jour-nuit, il suffit d'ouvrir les yeux au moins une fois le jour, une fois la nuit. Il faut donc:

$$\begin{aligned} T_e &< \frac{T}{2} \\ \frac{1}{f_e} &< \frac{1}{2f} \\ f_e &> 2f \end{aligned}$$

l'inégalité stricte garantit de détecter, au bout d'un certain temps, le signal si on début malencontreusement l'échantillonnage près d'une valeur nulle du signal

Echantillonnage

Théorème de Shannon

- soit le signal $x(t)$ que l'on échantillonne à la fréquence f_e

$$
\begin{aligned}
y(t) &= x(t).e(t) \\
&= x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_e) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t).\delta(t-kT_e) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e).\delta(t-kT_e)
\end{aligned}
$$

- alors la TF

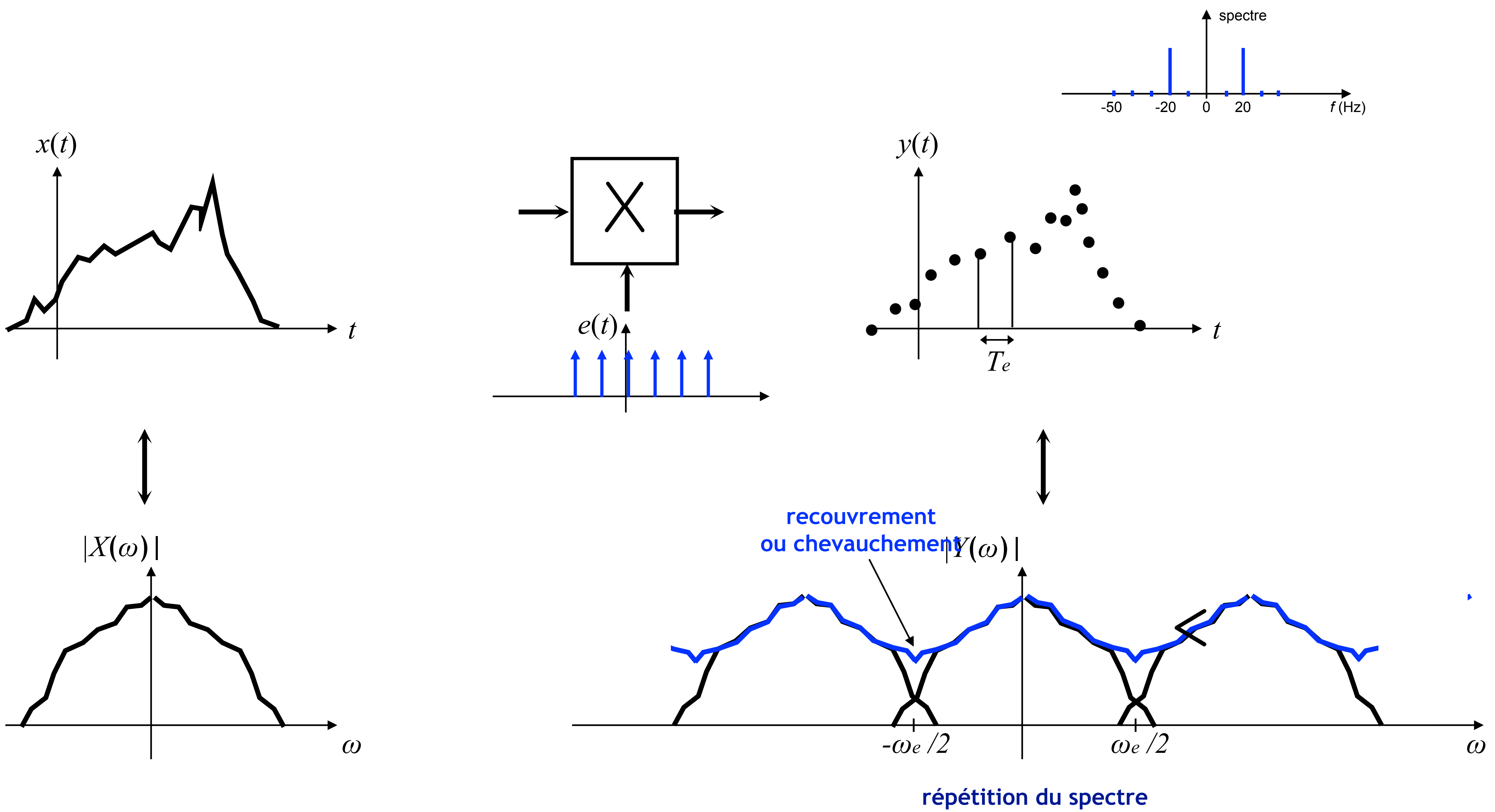
$$
\begin{aligned}
Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \omega_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n\omega_e\right) \\
&= \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta\left(\omega - n\omega_e\right) \\
&= \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_e)
\end{aligned}
$$

transformations

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_e) &\longleftrightarrow \omega_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n\omega_e\right) \\
x(t).y(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega) \\
x(t) * y(t) &\longleftrightarrow X(\omega).Y(\omega)
\end{aligned}
$$

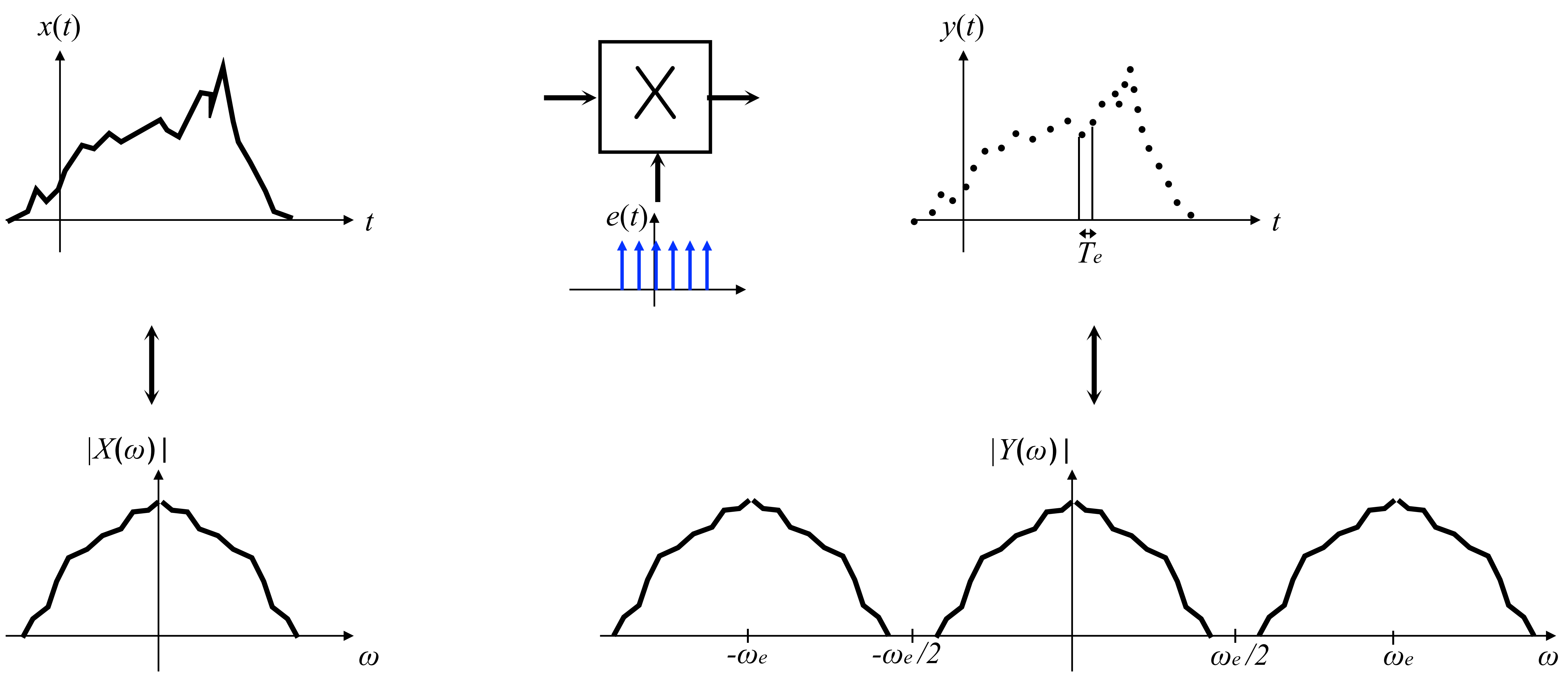
Recouvrement de spectres

- Si fréquence d’échantillonnage insuffisante



Echantillonnage

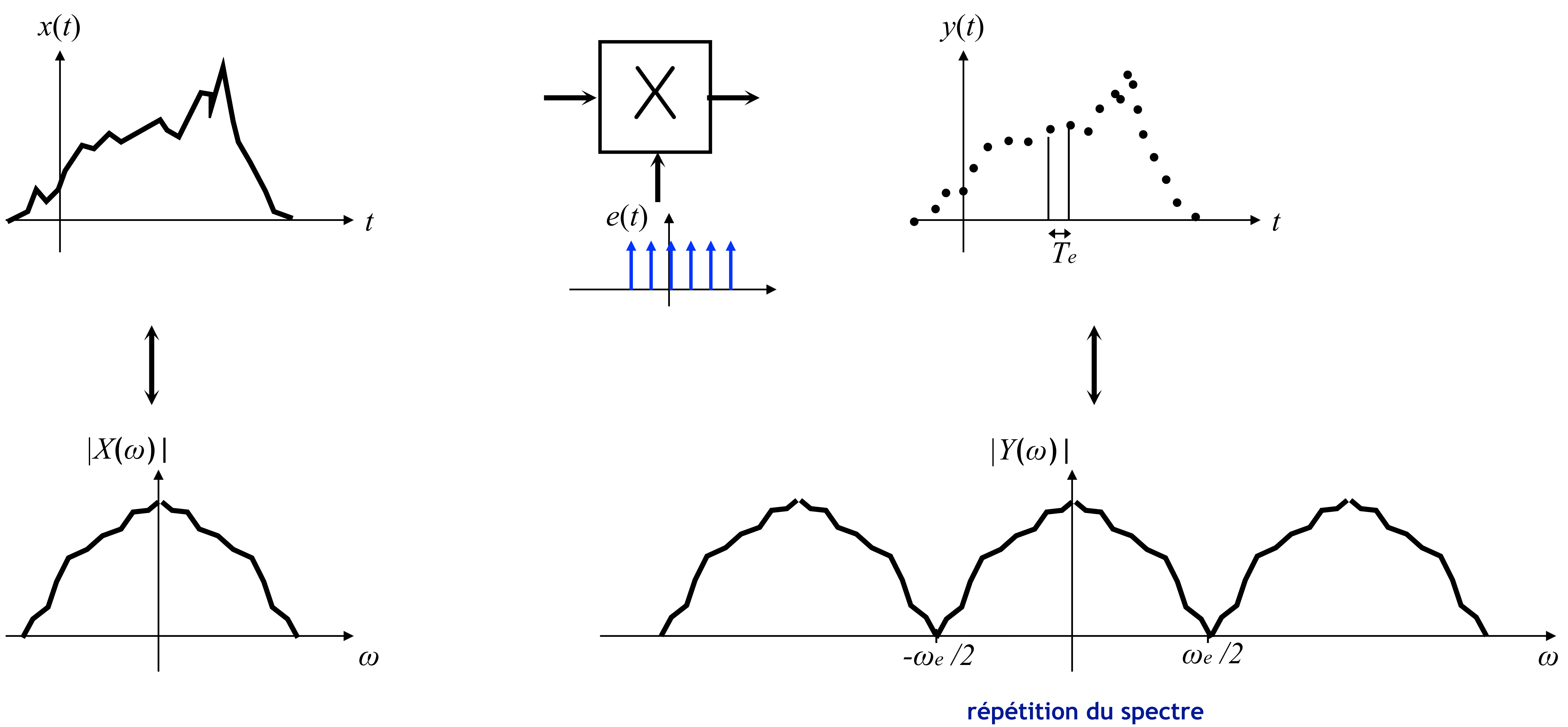
- Echantillonner, c'est rendre le spectre de fréquence périodique
- Exemple avec un signal réel quelconque $x(t)$ et sa TF $X(\omega)$



répétition du spectre

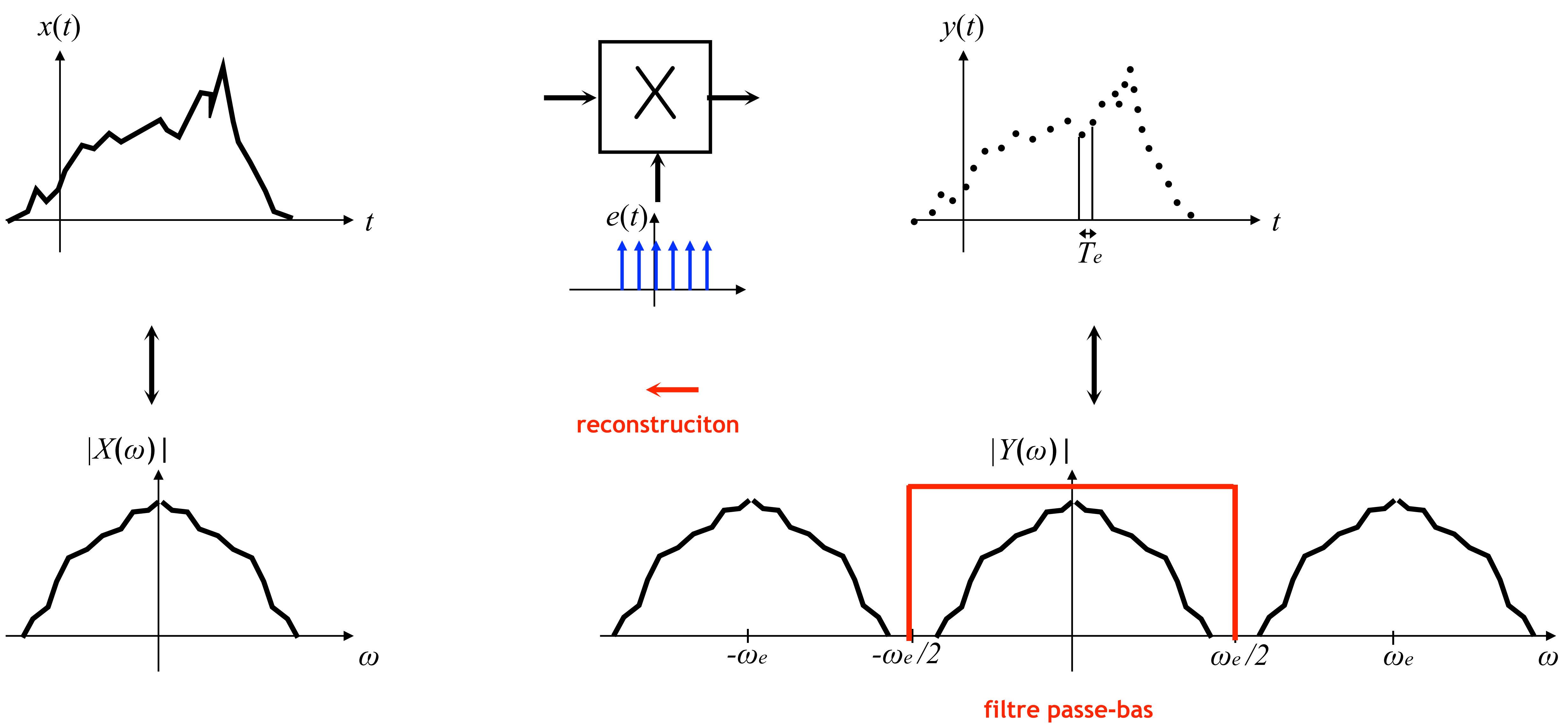
Condition de Shannon-Kotelnikov-Whittaker

- Pas de recouvrement de spectre si $f_{\max} < f_e/2$

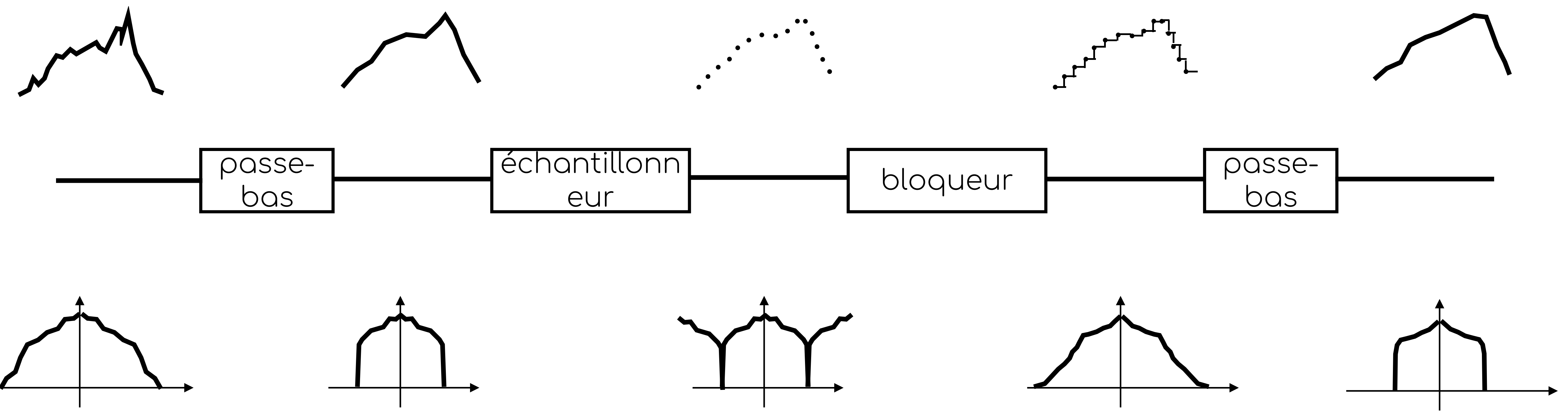


Reconstruction

- Possible si pas de recouvrement (produit dans Fourier par une fonction porte (convolution dans le temps avec la fonction sinc).



Chaîne numérique



filtrage anti-repliement

pas de recouvrement

bloqueur: porte dans *t*, soit *sinc* dans Fourier

filtrage pour éliminer les fréquences créées par le bloqueur

possibilité de correction numérique pour annuler l'effet du bloqueur

TFD

Une première définition

- on échantillonne le signal

$$S(\omega) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]e^{-j\omega kT_e}$$

- Problèmes:
  - somme infinie
  - S est continue alors que s est discrète

- Cette définition n'est donc pas adaptée aux signaux discrets en pratique

La TFD

- On limite la somme à N points $\Rightarrow$ on applique donc une fenêtre sur le signal
- Partant de N points dans le domaine spatial, on arrive à N points dans le domaine fréquentiel $\Rightarrow$ le pas fréquentiel est donc $\Delta f = f_e / N;$ puisque $f \in [-fe/2; fe/2]$ (en réalité $[-fe/2; fe/2[$)

$$
\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} s[k] e^{-j2\pi.n.\Delta f.kT_e} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} s[k] e^{-j2\pi.n.\frac{f_e}{N} f.kT_e} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} s[k] e^{-j2\pi.\frac{n.k}{N}}
\end{aligned}
$$

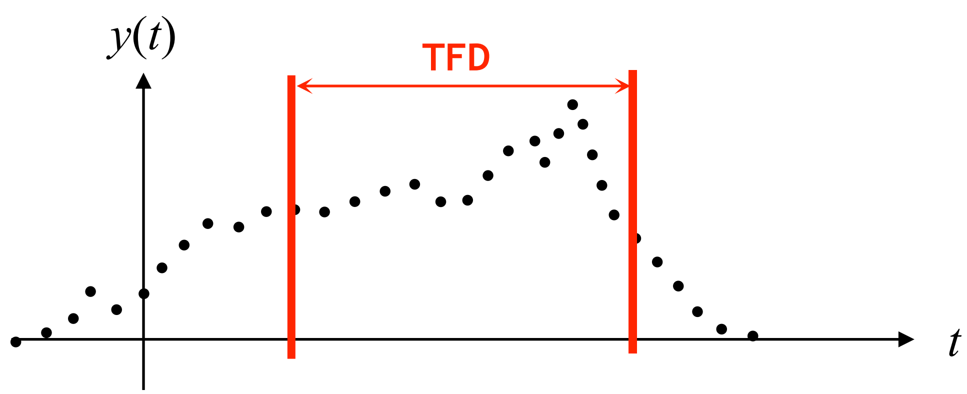
$n \in [-N/2; N/2\text{-}1]$

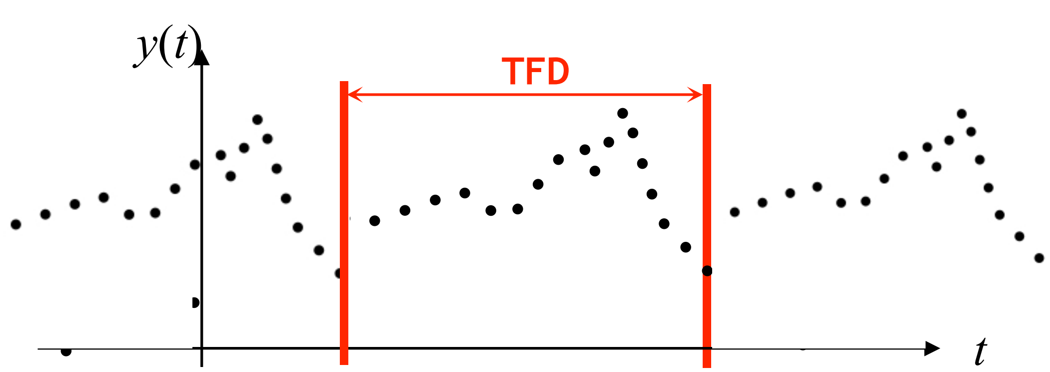
- La TFD est inversible

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) e^{j2\pi.\frac{n.k}{N}}$$

TFD

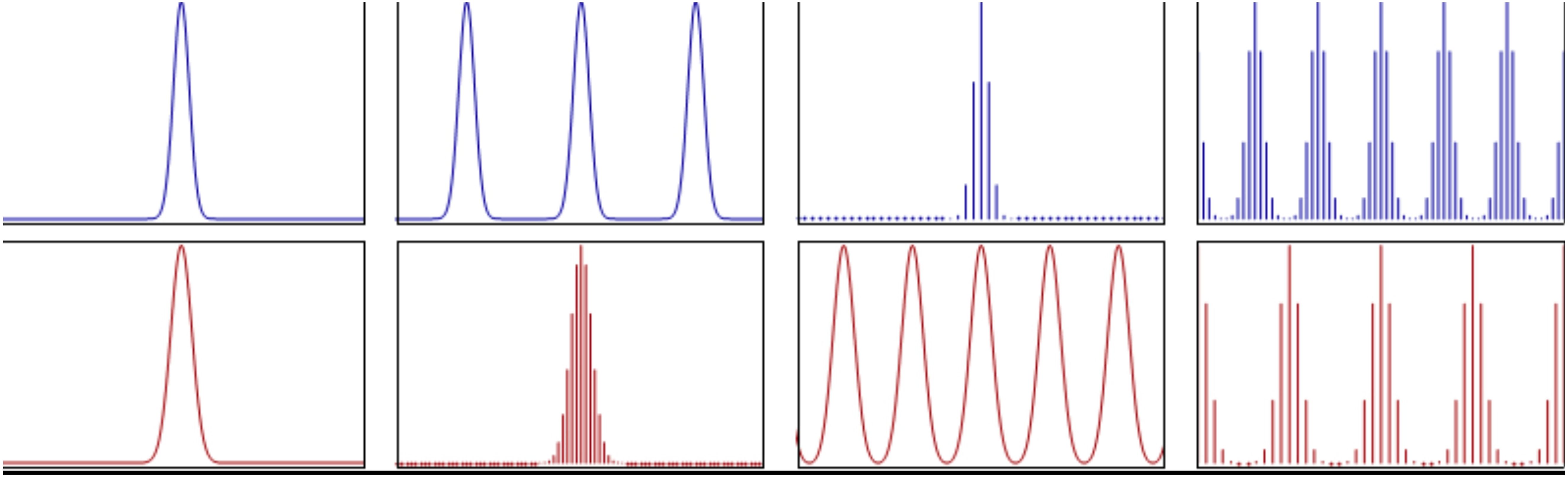
- La TFD donne un contenu fréquentiel correspondant à un signal périodique





Ce signal rendu périodique par la TFD présente souvent des discontinuités.
Ces discontinuités induisent des spectres hautes fréquences

Echantillonnage et périodicité



Echantillonnage et périodicité

signal continu apériodique $\overset{\text{TF}}{\longleftrightarrow}$ continu apériodique

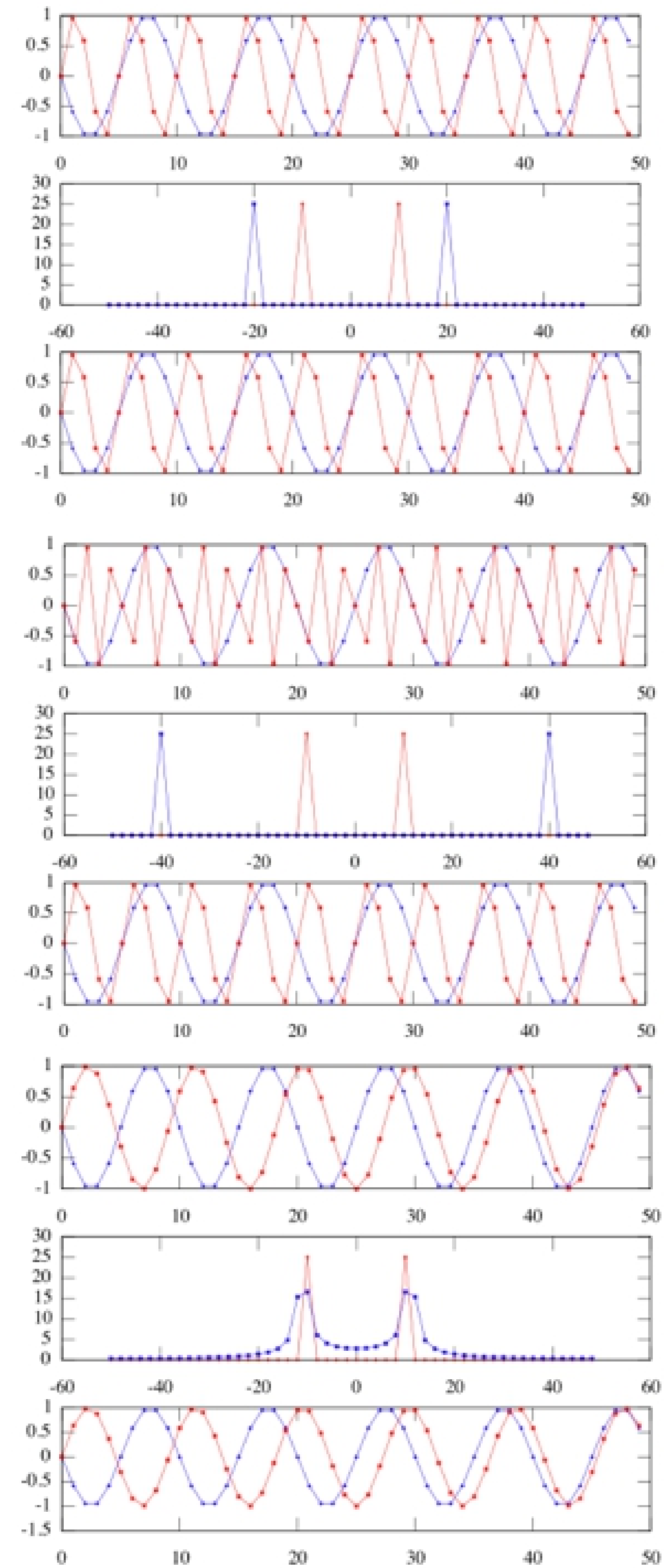
signal continu périodique $\overset{\text{série de F}}{\longleftrightarrow}$ discret apériodique

signal discret apériodique $\overset{\text{TF(SD)}}{\longleftrightarrow}$ continu périodique

signal discret périodique $\overset{\text{TFD}}{\longleftrightarrow}$ discret périodique

Exemples de TFD

N=50pts, pas temporel Te=1/fe = 0.1s, pas fréquentiel : fe/N = 2Hz



fe=100
f1=10
f2=20

Module TFD

Reconstruction

fe=100
f1=10
f2=60

Module TFD

Reconstruction du signal avec la fréquence vue ds Fourier (60-(60-40)) -> 40!

fe=100
f1=10
f2=11

Module TFD

Reconstruction

FILTRAGE

Fonction de transfert ou transmittance

- Un système est décrit par une équation différentielle
- Dans le cas du système linéaire invariant:
  - on décompose un signal dans la base de Fourier et on obtient sa description dans cette base (via les coefficients complexes)
  - la réponse du système à ce signal peut être vu comme la somme des réponses à ces signaux élémentaires de la base de Fourier
  - l'équation différentielle peut alors se mettre sous la forme d'une fraction de deux polynômes de la variable fréquence: c'est la fonction de transfert H
  - la fonction de base $e^{j\omega t}$ est une fonction propre du système linéaire: si l'entrée est un signal de la base, le système modifie simplement les paramètres amplitude et phase du signal

$$\begin{aligned} s(t) &= H(\omega).e^{j\omega t} \\ &= A(\omega).e^{j\omega t+\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

  - pour un signal sinusoïdal en entrée, le comportement du système (si réel) est le même (une sinusoïde est une combinaison de fonctions $e^{j\omega t}$):

$$s(t) = A(\omega).cos\left(\omega t + \varphi(\omega)\right)$$

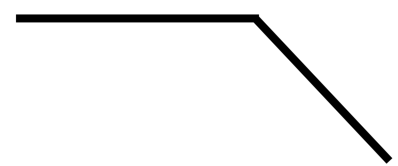
et que cos soit un signal réel ou une composante d'un signal réel obtenu par décomposition...

Fonction de transfert ou transmittance

Systèmes du 1er ordre

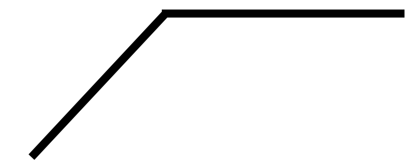
$$H_{B1}(\omega) = K\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

passe-bas



$$H_{H1}(\omega) = K\frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

passe-haut



asymptotes du module dans le plan de Bode
20 $\log_{10}$ $|H(\omega)|$ en fonction de $\log_{10}\omega$

Systèmes du 2ème ordre

$$H_{B2}(\omega) = K\frac{1}{1+2zj\frac{\omega}{\omega_c}-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

passe-bas

$$H_{H2}(\omega) = K\frac{-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}{1+2zj\frac{\omega}{\omega_c}-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

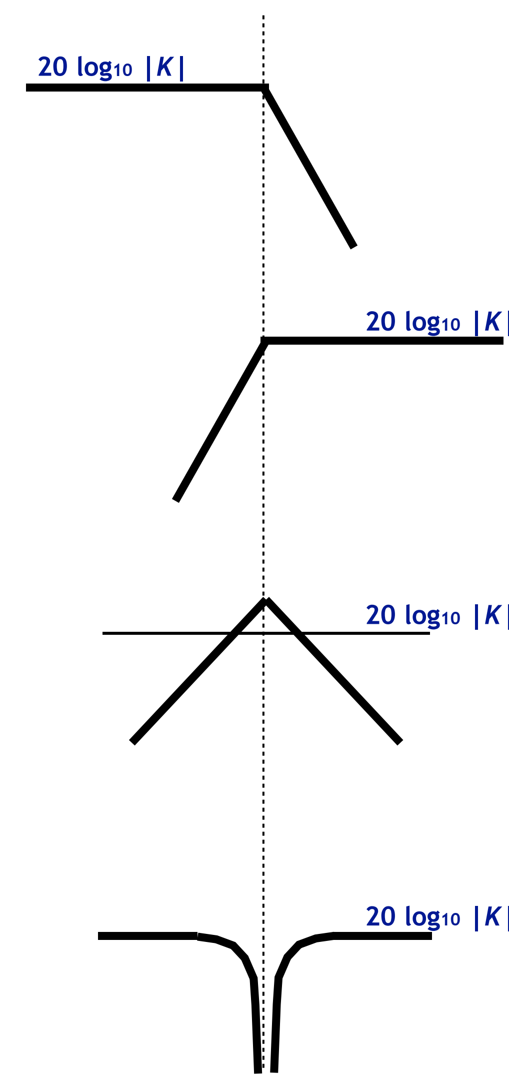
passe-haut

$$H_{P2}(\omega) = K\frac{2zj\frac{\omega}{\omega_c}}{1+2zj\frac{\omega}{\omega_c}-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

passe-bande

$$H_{C2}(\omega) = K\frac{1-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}{1+2zj\frac{\omega}{\omega_c}-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

réjecteur

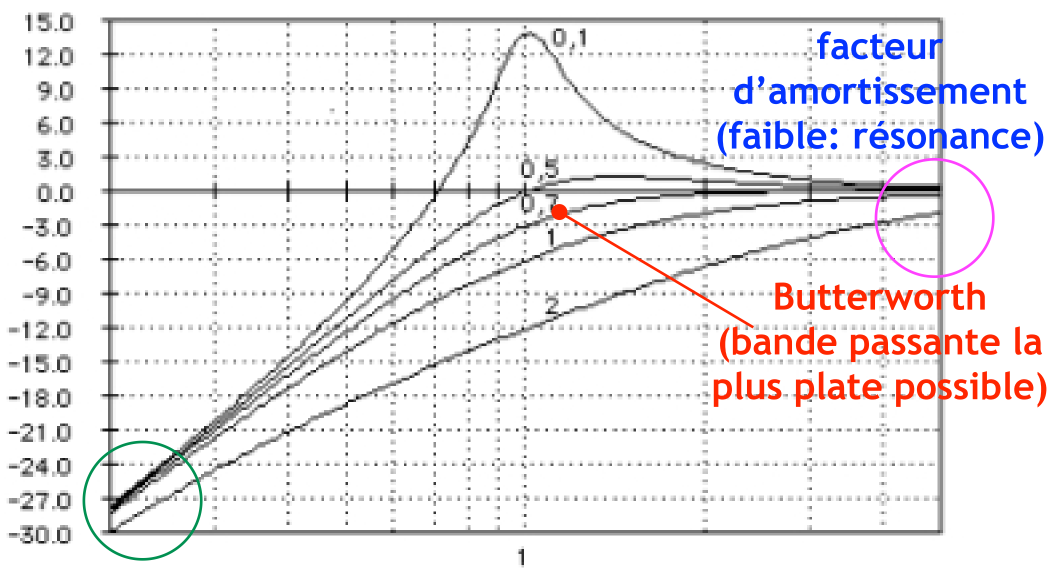


Fonction de transfert ou transmittance

- Courbes du module dans le plan de Bode

passe-haut ordre 2

ici K=1

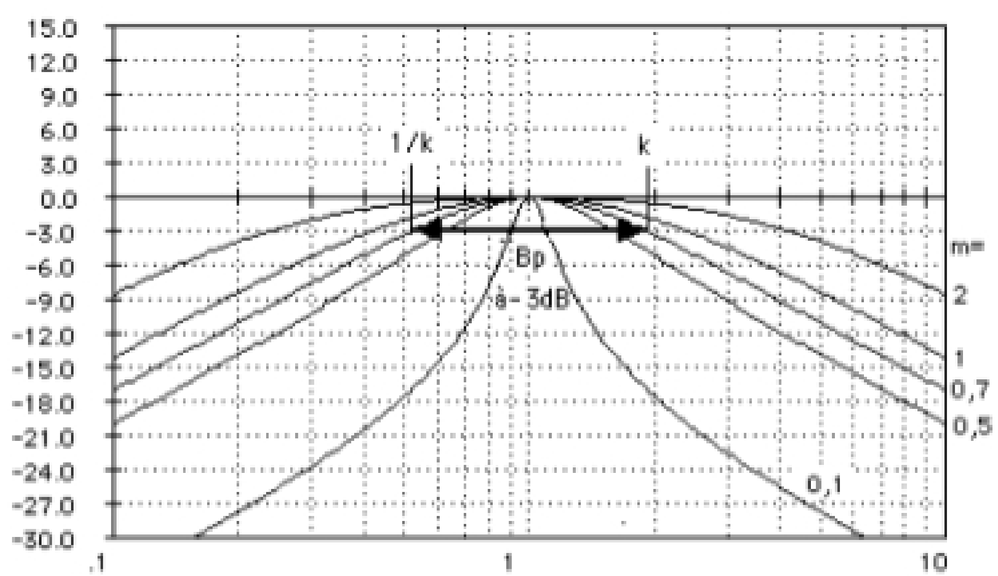


$$H_{H2}(\omega) = K\frac{-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}{1 + 2zj\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

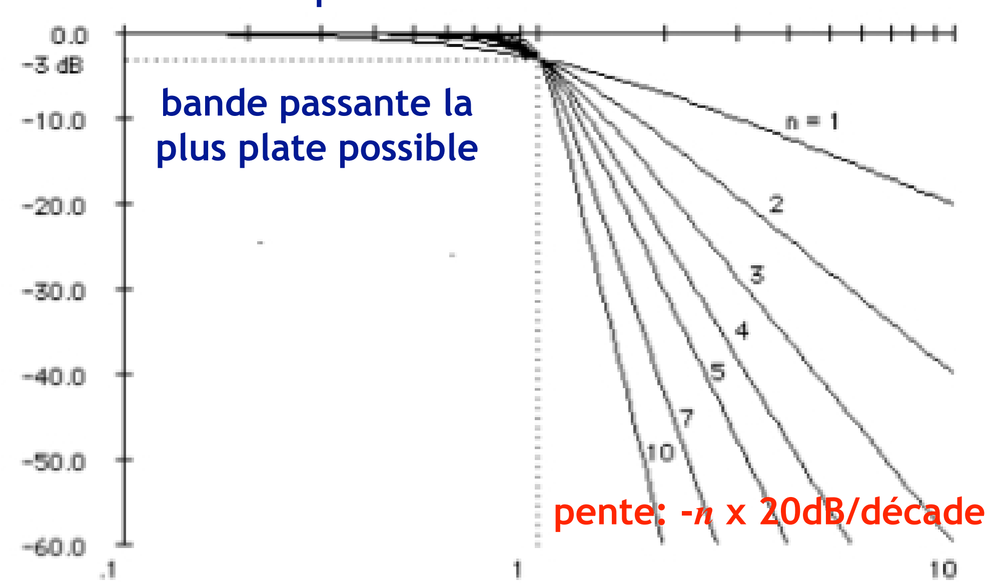
termes prépondérants quand ω→0

termes prépondérants quand ω→∞

passe-bande ordre 2



passe-bas ordre n de Butterworth



Fonction de transfert ou transmittance

- Etude et représentation des fonctions de transfert: le plan de Bode
  - soit la forme générale du filtre passe-bas d'ordre n

$$H_{Bn}(\omega) = K\frac{1}{1+d_1 j\omega + d_2(j\omega)^2 + d_3(j\omega)^3 + \ldots d_n(j\omega)^n} \qquad (d_k \geq 0)_{k\in\{1,2,3,\ldots n\}}$$

- si $\omega \longrightarrow 0$: $H_{Bn}(\omega)_{\omega\to 0} \approx K\frac{1}{1} = K$
- si $\omega \longrightarrow \infty$: $H_{Bn}(\omega)_{\omega\to\infty} \approx K\frac{1}{d_n(j\omega)^n} \to 0$

  - on obtient deux asymptotes dans le plan de Bode ($20 log_{10}\,|H(\omega)|$, $log_{10}\,(\omega)$):

$$\begin{aligned} a_1(\omega) &= 20\log_{10}|K| \\ a_2(\omega) &= 20\log_{10}|K| - 20\log_{10}(d_n\omega^n) \\ &= 20\log_{10}|K| - 20n\log_{10}\left(\frac{\omega}{d_n^{-\frac{1}{n}}}\right) \\ &= 20\log_{10}|K| - 20n\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \end{aligned}$$

Fonction de transfert ou transmittance

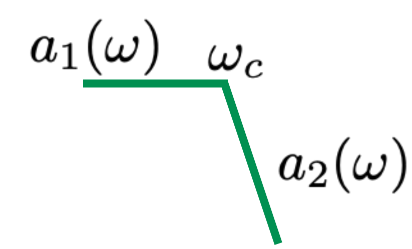
- Etude et représentation des fonctions de transfert: le plan de Bode

$$H_{Bn}(\omega) = K\frac{1}{1+d_1 j\omega + d_2(j\omega)^2 + d_3(j\omega)^3 + \ldots d_n(j\omega)^n}$$

$$a_1(\omega) = 20\log_{10}|K|$$

$$a_2(\omega) = 20\log_{10}|K| - 20n\log_{10}\frac{\omega}{\omega_c}$$

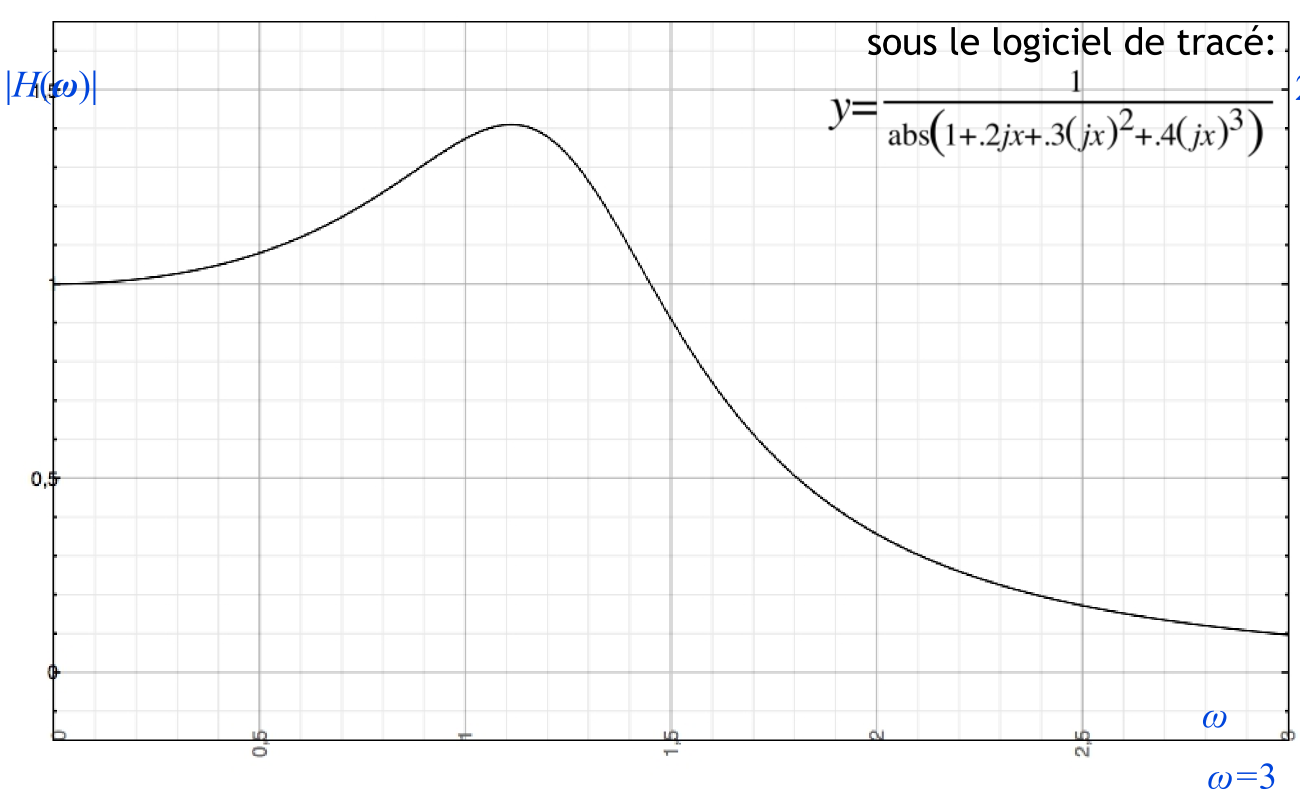
caractéristiques directement lisible dans le plan de Bode



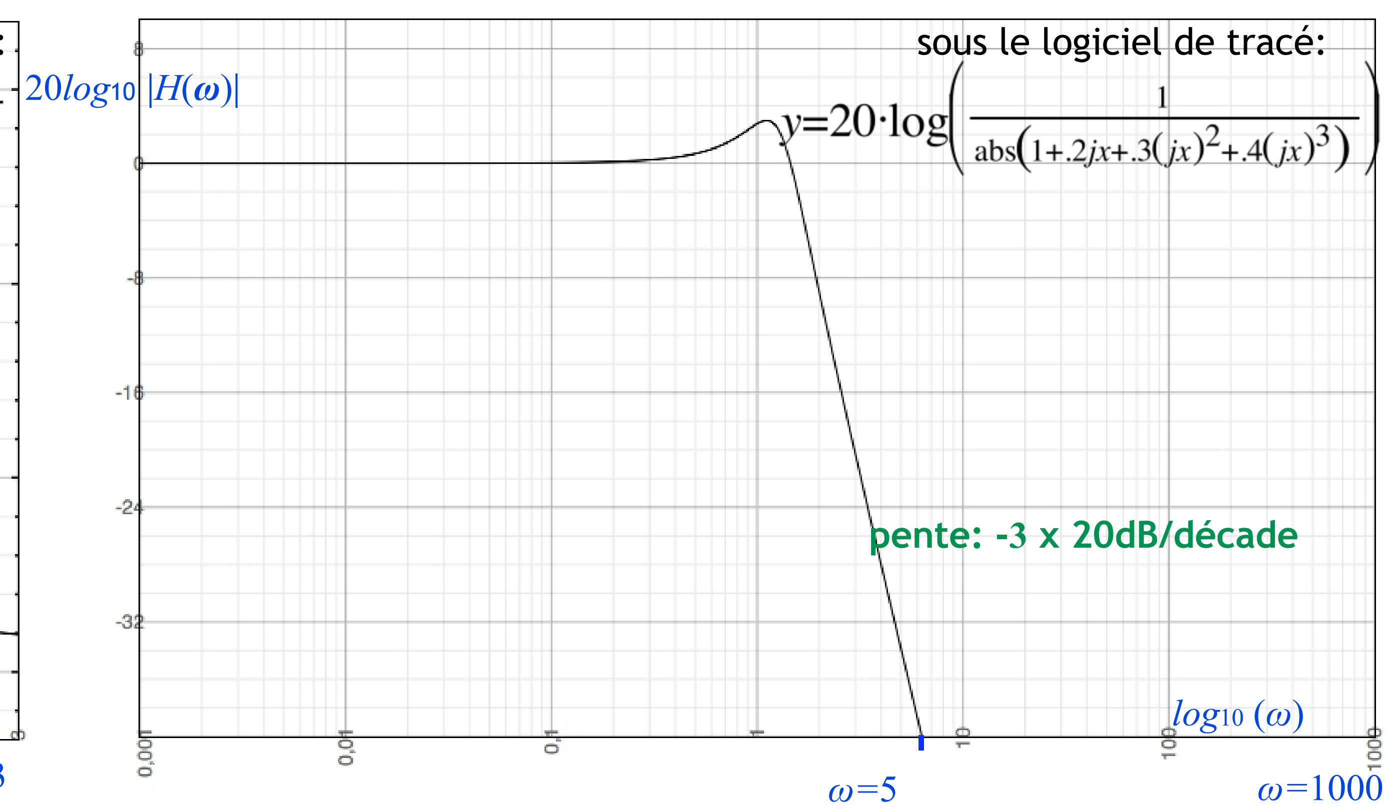
pente: -n x 20dB/décade

- Exemple ordre 3 (filtre quelconque)

plan linéaire

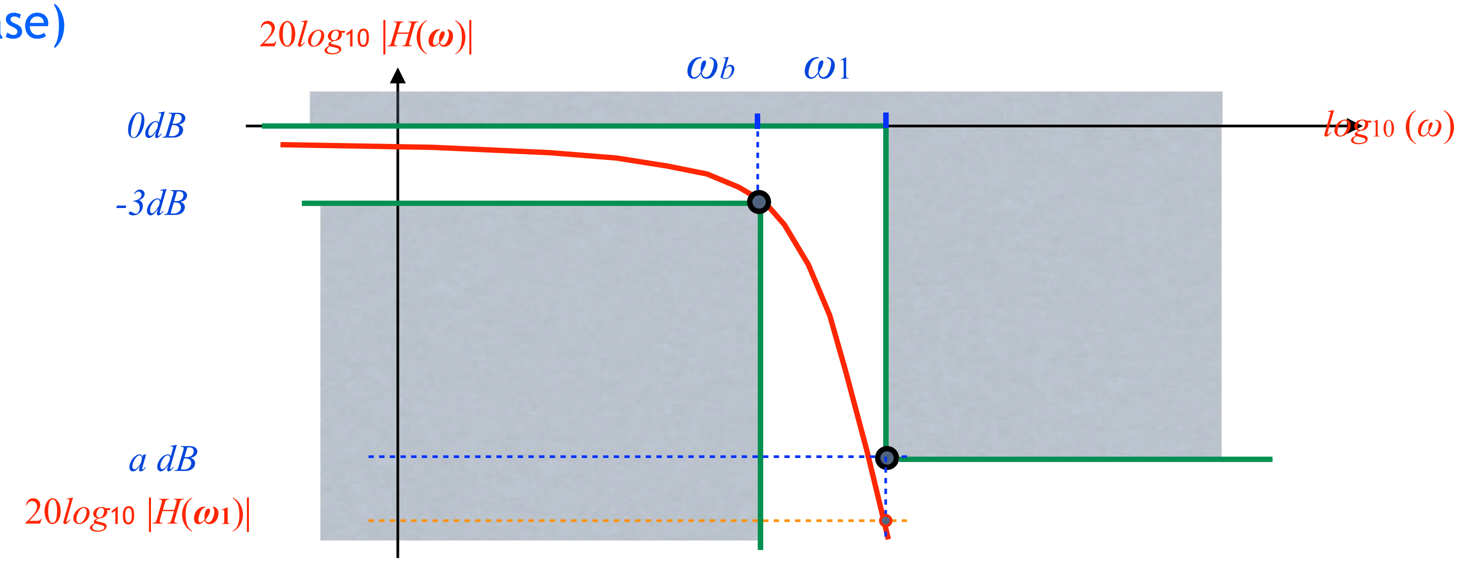


plan de Bode



Familles de filtres

- Comment déterminer et construire un filtre ?
  - déterminer la fonction de transfert (cas passe-bas):
    - on dessine un gabarit dans lequel doit s'inscrire le module de la fonction de transfert (ou la phase)



    - on choisit la famille du filtre: Butterworth, Tchebychev, Bessel, etc
    - si Butterworth : on impose par exemple que le module passe par le point (ω_b ,$-3dB$). On a alors $\omega_b = \omega_c$.
    - le module de la fonction de transfert doit vérifier la condition suivante:

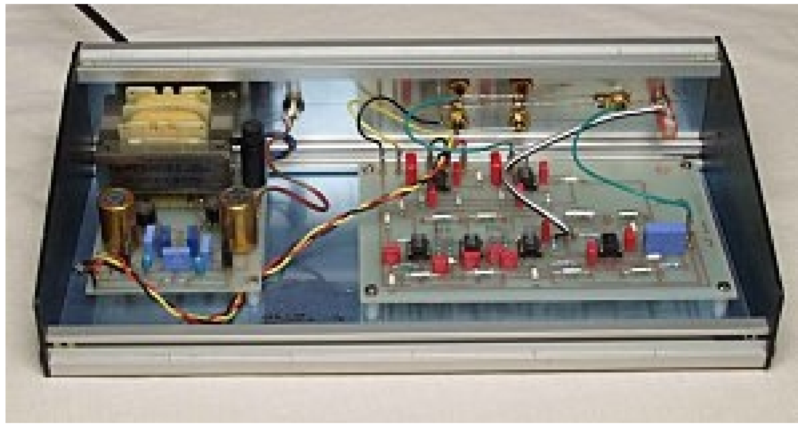
$$20 \log_{10} |H(\omega_1)| < a \qquad a \text{ en dB}$$

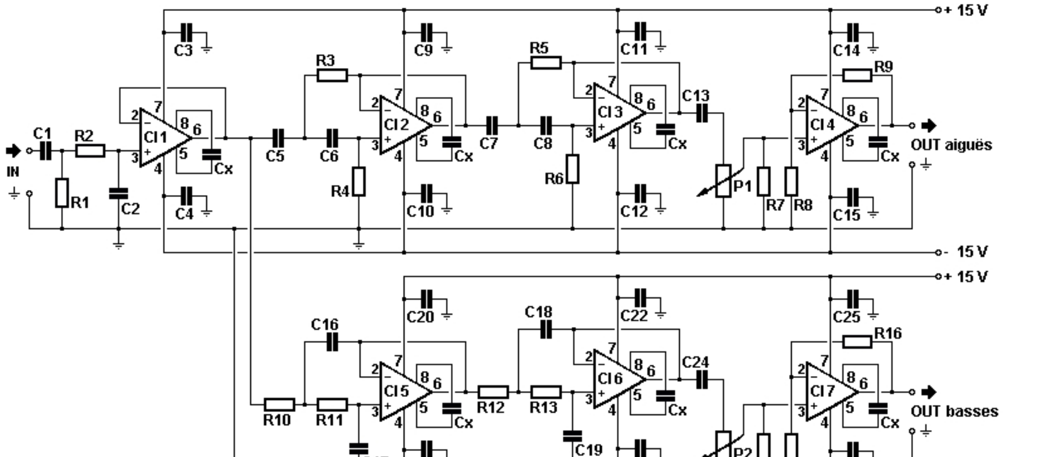
    - on en déduit la forme de la fonction de transfert (connaissant certaines contraintes liées à la famille, par exemple avec Butterworth *bande passante la plus plate possible*, c'est-à-dire annulation des dérivées successives du module en $\omega=0$ sauf la dernière à l'ordre n, ordre du filtre ou de la fonction de transfert)

Familles de filtres

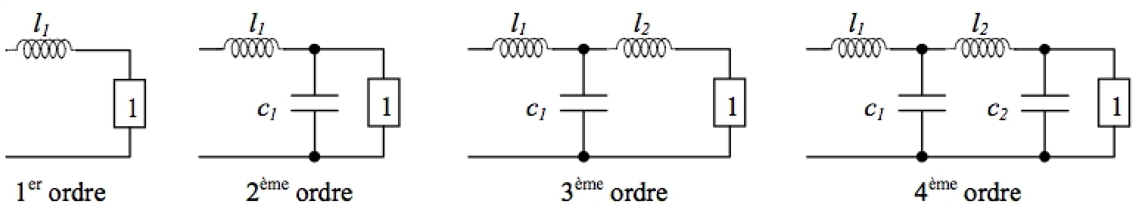
- Comment déterminer et construire un filtre ?
  - déterminer la fonction de transfert (autres cas que le passe-bas):
    - on se ramène à l'étude d'un passe-bas par des transformations de fréquences. Par exemple le passe-bas est le symétrique du passe-haut
  - construire le filtre, cas du filtre actif:
    - ce filtre nécessite une source d'énergie autre que celle du signal
    - on décompose en cellules d'ordre 2 et éventuellement d'ordre 1 (n impair)
    - on consulte le catalogue des circuits de cellules d'ordre 2 (et d'ordre 1)
    - il existe des circuits intégrés pour synthétiser des filtres d'ordre élevé (8 par exemple)
  - construire le filtre, cas du filtre passif:
    - ce filtre fonctionne avec l'énergie du signal
    - on consulte le catalogue des circuits ou on applique une méthodologie de décomposition de la fonction de transfert en composants élémentaires en association série ou parallèle
    - remarque: on se ramène à un filtre autre que passe-bas par transformation de fréquence

filtre actif, notez l'alimentation





filtre passif



Familles de filtres

- Filtres de Butterworth
  - Filtres qui ont la bande passante la plus plate possible en module
  - La fréquence de coupure définit une des limites de la bande passante ($\omega_b = \omega_c$)
- Filtres de Tchebychev (ordre 2 à ∞)
  - Filtres qui ont la bande de transition la plus courte : atténue rapidement
  - Très oscillants : on définit la bande passante en fonction du taux d'ondulation dans cette bande passante
  - $\omega_b \neq \omega_c$
- Filtres de Bessel
  - Temps de propagation sensiblement constant dans la bande passante
  - Pas d'oscillations (transitoires) car réponse amortie

Familles de filtres

- Filtres d'ordre 2 de Butterworth, Tchebychev et Bessel avec même fréquence de coupure
  - Butterworth, z=√2/2
  - Tchebychev ondulation BP 1dB, z=0.52275
  - Bessel, z=√3/2

$$H_{B2}(\omega) = K\frac{1}{1+2zj\frac{\omega}{\omega_c}-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$