Université Bourgogne Europe — Licence Sciences Technologies Santé

UFR Sciences et Techniques

L2 – Elec4A

**TD 2** – *Représentation des signaux 1D continus en fréquence*

• **Question 1** – *Opérations et manipulations trigonométriques de base*

**1.1** Vérifiez les relations suivantes :

$$\sin(a)\cos(b) = 1/2(\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

$$\sin(a)\sin(b) = 1/2(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

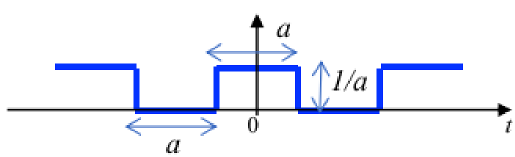
$$\cos(a)\cos(b) = 1/2(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

**1.2** Vérifiez que $\cos(n\pi) = -1$ pour $n$ impaire, i.e., avec $n = (2k+1)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

**1.3** Ensuite vérifiez que $\cos(n\pi) = 1$ pour $n$ paire, i.e., avec $n = (2k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$, et ainsi que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

• **Question 2** – *Représentation spectrale – signal continu et périodique*

Soit la signal carrée symétrique périodique comme indiquée dans la figure suivante :




**2.1** Étudiez la parité de $f$.

**2.2** Pour $n \neq 1$, on note $a_n$ le coefficient de $\cos(n\omega x)$, $a_0/2$ le coefficient constant et $b_n$ le coefficient de $\sin(n\omega x)$ dans la représentation de Fourier. Donnez son développement en séries de Fourier avec $a = 1$.

**2.3** Tracez la magnitude des quatre premières composantes du spectre de ce signal, i.e., $0 \leq n \leq 3$.

• **Question 3** – *Représentation spectrale – signal continu et périodique*

Nous allons considérer un signal continu représenté par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme la fonction $2\pi$-périodique définie par $f(x) = x \sin x$ pour $x \in \,]-\pi, \pi]$ (étendue à $\mathbb{R}$ par périodicité). Pour $n \neq 1$, on note $a_n$ le coefficient de $\cos(n\omega x)$, $a_0/2$ le coefficient constant et $b_n$ le coefficient de $\sin(n\omega x)$ dans la représentation de Fourier de $f$.

**3.1** Tracez la forme du signal dans l'intervalle $x \in \,]-2\pi, 2\pi]$.

**3.2** Étudiez la parité de $f$. Quelles sont les valeurs de $b_n$ pour $n \geq 1$ ?

**3.3** Calculez $a_0$ et $a_n$ pour le cas $n = 1$.

**3.4** Calculez $a_n$ pour $n \geq 2$.

**3.5** Tracez la magnitude des cinq premières composantes du spectre de ce signal, i.e., avec $0 \leq n \leq 4$.

**3.6** (**) En déduire la valeur de la somme

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} - \frac{1}{24} + \dots$$

• **Question 4** – *Représentation spectrale – signal continu et périodique*

Soit la fonction $f(x) = \max(\sin(x), 0)$.

**4.1** Tracez $f(x)$ pour deux périodes. Quelle est la fréquence de $f(x)$ ?

**4.2** Étudiez la parité de $f$.

**4.3** Pour $n \neq 1$, on note $a_n$ le coefficient de $\cos(n\omega x)$, $a_0/2$ le coefficient constant et $b_n$ le coefficient de $\sin(n\omega x)$ dans la représentation de Fourier de $f$. Donnez son développement en séries de Fourier.

**4.4** (**) En déduire les sommes

$$S_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2-1} \text{ et } S_2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1}.$$

• **Question 5** – *Représentation spectrale – signaux continus apériodiques*

On considère les signaux donnés par la fonction porte $\Pi(t)$ et triangle $T(t)$ définies par

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [-1/2, 1/2] \\ 0, & \text{si } t \notin [-1/2, 1/2] \end{cases} \quad \text{et} \quad T(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \notin [-1, 1] \\ t+1, & \text{si } -1 < t \leq 0 \\ 1-t, & \text{si } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

**5.1** Tracez $\Pi(t)$ et calculer sa transformée de Fourier en utilisant la définition.

**5.2** Tracez la magnitude du spectre de $\Pi(t)$.

**5.3** Tracez $T(t)$ et calculer sa transformée de Fourier en utilisant la définition.

**5.4** Tracez la magnitude du spectre de $T(t)$.

**5.5** Sachant que $T(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$, en déduire une autre façon de calculer la transformée de Fourier de $T(t)$.

---

Quelques rappels utiles :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_T s(x)\,dx \;;\; a_n = \frac{2}{T}\int_T s(x)\cos(n\omega x)\,dx \text{ et } b_n = \frac{2}{T}\int_T s(x)\sin(n\omega x)\,dx, \text{ pour } n \geq 1;$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)\,e^{-j\omega x}\,dx; s(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(w)\,e^{j\omega x}\,dw$$

$$\int u dv = uv - \int v du.$$