

Liste de Révision – Analyse et filtrage des signaux en fréquence

• **Question 1** – *Représentation spectrale*

On considère la fonction triangle $T(t)$ et la fonction porte $\Pi(t)$ définies par

$$T(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \notin [0, 2] \\ t, & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 2 - t, & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Pi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0, & \text{si } t \notin [0, 1] \end{cases}$$

1.1 Tracer $T(t)$ et calculer sa transformée de Fourier en utilisant la définition.

1.2 Sachant que $T(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$, en déduire une autre façon de calculer sa transformée de Fourier.

• **Question 2** – *Représentation et analyse des signaux périodiques*

Nous allons considérer un signal continu représenté par la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ comme la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = x \sin x$ pour $x \in]-\pi, \pi]$ (étendue à \mathbb{R} par périodicité). Pour $n \neq 1$, on note a_n le coefficient de $\cos(n\omega x)$, $a_0/2$ le coefficient constant et b_n le coefficient de $\sin(n\omega x)$ dans la représentation de Fourier de f .

2.1 Tracez la forme du signal dans l'intervalle $x \in]-\pi, \pi]$.

2.2 Étudiez la parité de f . Quelles sont les valeurs de b_n pour $n \geq 1$?

2.3 Calculer a_n pour les cas $n = 0$ et $n = 1$. Vous pouvez utiliser les formules $2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a - b) + \sin(a + b)$ et l'intégration par parties $\int u dv = uv - \int v du$.

2.4 Calculer a_n pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

• **Question 3** – *Représentation spectrale périodique II*

Soit la fonction $f(x) = \max(\sin(x), 0)$.

3.1 Tracer $f(x)$ pour deux périodes.

3.2 Donner son développement en séries de Fourier.

3.3 En déduire les sommes

$$S_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2 - 1} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2 - 1}.$$

• **Question 4** – *Filtrage*

On considère le filtre analogique RC en série avec entrée comme la tension $x(t)$ et la sortie, la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur. L'équation différentielle s'écrit alors :

$$RC \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = x(t)$$

4.1 Utilisez la transformée de Fourier pour obtenir la fonction de transfert de ce filtre en fréquence.

4.2 Tracez la fonction de transfert en magnitude et discutez quel type de filtre il correspond.