

ScIn1A - Science et Traitement de l'Information

Introduction aux signaux & outils de base

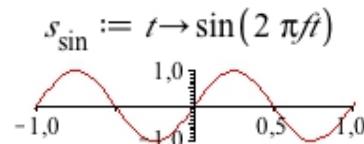
Renato Martins, ICB UMR CNRS - Univ. Bourgogne
UFR Sciences & Techniques, 2026



Les signaux

Signaux déterministes à temps continu

- la valeur du signal est connue à chaque instant
- on modélise souvent un signal d'information ou le comportement d'un système par un signal déterministe



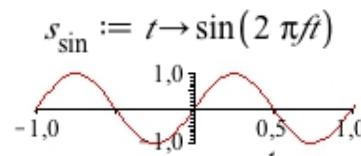
$$s_H := t \rightarrow \text{Heaviside}(t) \text{ où } \text{Heaviside} := t \rightarrow \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases}$$

$$\Pi_a := t \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} & -\frac{1}{2}a \leq t \text{ and } t < \frac{1}{2}a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Les signaux

Signaux déterministes à temps continu

- la valeur du signal (fonction) est connue à chaque instant
- on modélise souvent un signal d'information ou le comportement d'un système par un signal déterministe



$$s_H := t \rightarrow \text{Heaviside}(t) \text{ où } \text{Heaviside} := t \rightarrow \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases}$$

$$\Pi_a := t \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} & -\frac{1}{2}a \leq t \text{ and } t < \frac{1}{2}a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Caractéristiques des signaux déterministes : façon analytique ou graphique

- 1) Signaux **périodiques et apériodiques** : périodiques se reproduisent à l'identique à intervalles réguliers, faisant donc apparaître une période T
- 2) **Période et fréquence**
- 3) Fréquence vs pulsation/fréquence angulaire/vitesse angulaire
- Examples : $s = \cos(t)$ et $s = \cos(2\pi t)$

Les signaux

Signaux déterministes à temps continu

- la valeur du signal est connue à chaque instant
- on modélise souvent un signal d'information ou le comportement d'un système par un signal déterministe

$$s_{\sin} := t \rightarrow \sin(2 \pi f t)$$

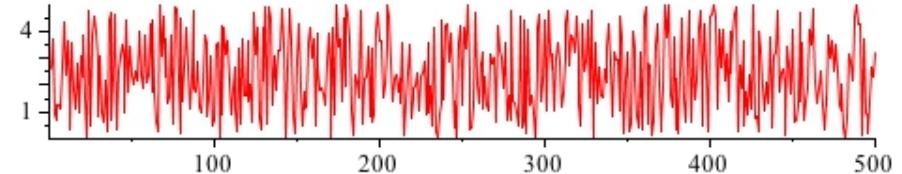
$$s_H := t \rightarrow \text{Heaviside}(t) \text{ où } \text{Heaviside} := t \rightarrow \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases}$$

$$\Pi_a := t \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} & -\frac{1}{2}a \leq t \text{ and } t < \frac{1}{2}a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Signaux aléatoires

- on prédit seulement, avec un «degré de confiance» ou probabilité, la valeur que va prendre le signal
- le bruit dans les mesures est souvent un signal aléatoire

Signaux réels: signal déterministe + signal aléatoire



Les signaux, autres exemples ?

- Signaux déterministes à temps continu
 - Signaux définis par morceaux, ex Heaviside (échelon)
 - Signaux définis par des fonctions mathématiques (sin, cos, ln, exa, etc.)
 - Signaux produits pas des systèmes (instruments de musique, machines, activité humaine, etc.)

Les signaux, autres exemples ?

- Signaux déterministes à temps continu
 - Signaux définis par morceaux, ex Heaviside (échelon)
 - Signaux définis par des fonctions mathématiques (sin, cos, ln, exa, etc.)
 - Signaux produits pas des systèmes (instruments de musique, machines, activité humaine, etc.)
- Signaux aléatoires
 - Jeux du hasard
 - Bruits (définition scientifique = aléatoires!)
 - Signaux naturels
- Signaux réels: signal déterministe + signal aléatoire
 - Tout signal réel déterministe produit par l'activité humaine et la nature contient en général une partie déterministe et une partie aléatoire

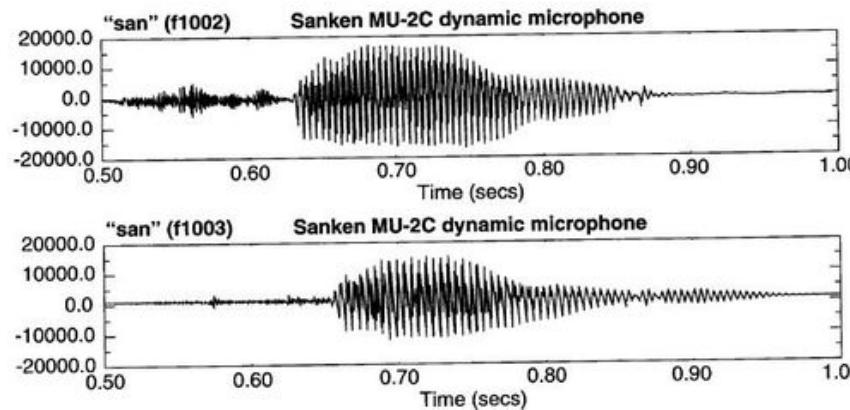
Les signaux

- Signal déterministe
 - Quand on connaît le passé, la probabilité d'apparition d'un niveau donné à l'instant t est soit nulle, soit certaine (=1)
 - Valeur future exacte du signal
- Signal déterministe : formule définissant parfaitement le signal
- Signal aléatoire : **paramètres statistiques** définissant les POSSIBILITES d'évolution
 - L'information est liée à un certain degré d'incertitude, d'aléatoire
 - Signaux aléatoires : bruit électronique, le signal de parole...

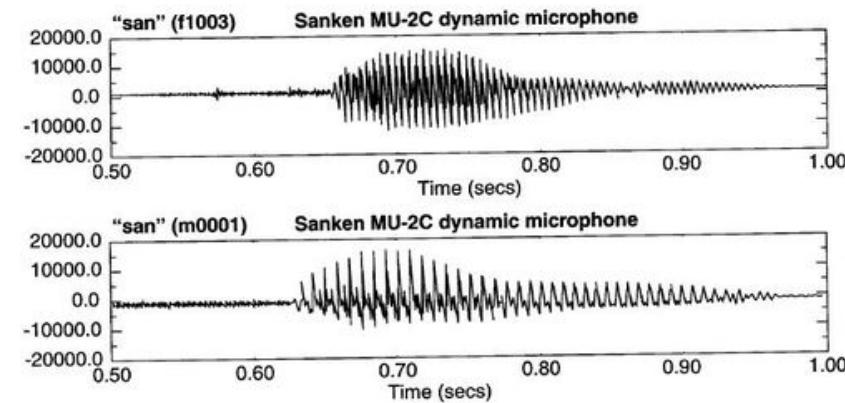
Les signaux

- Paramètres statistiques d'un signal aléatoire :
 - Moyenne, variance, autocorrélation, moments, ...
- Ces paramètres peuvent être eux mêmes aléatoires (non stationnaire)
 - Exemple : le signal de parole

Même sons, même personne,
mêmes conditions d'enregistrement

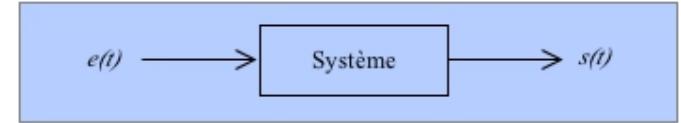


Même son, mêmes conditions d'enregistrement
deux locuteurs différents



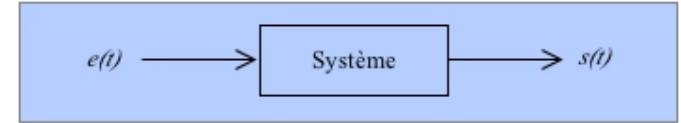
Propriétés des systèmes linéaires invariants

- Un système reçoit un signal d'entrée $e(t)$ et délivre un signal de sortie $s(t)$
 - la grandeur physique d'entrée est en général différente de celle de sortie, sauf dans le cas où le système « traite » le signal
 - exemple de système: capteur température, voltmètre, filtre, ...



Propriétés des systèmes linéaires invariants

- Un système reçoit un signal d'entrée $e(t)$ et délivre un signal de sortie $s(t)$
 - la grandeur physique d'entrée est en général différente de celle de sortie, sauf dans le cas où le système « traite » le signal
 - exemple de système: capteur température, voltmètre, filtre, ...



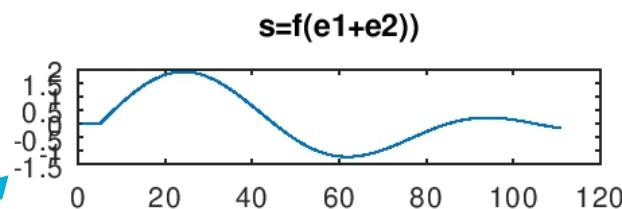
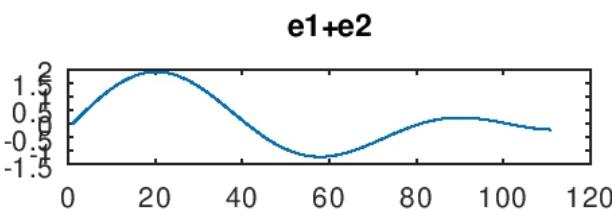
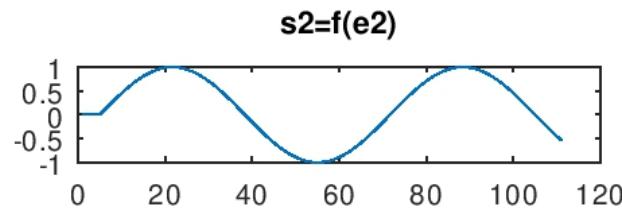
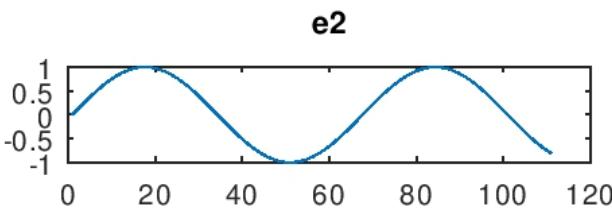
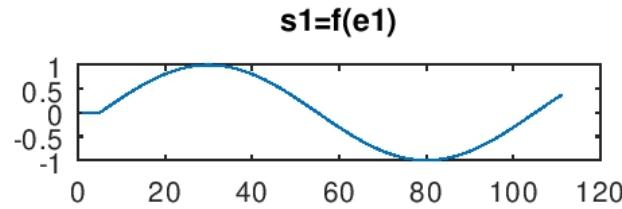
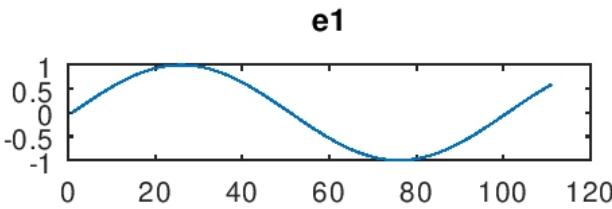
- Invariant
 - les propriétés ne varient pas dans le temps
 - par exemple, les températures ambiante ou de fonctionnement du système n'ont pas d'influence sur sa réponse

- Linéaire
 - le changement d'amplitude, par un certain facteur réel, d'un signal d'entrée induira le même facteur sur l'amplitude en sortie (1)
 - il revient au même de considérer des signaux pris séparément ou l'ensemble de ces signaux (2)
 - un amplificateur est un système linéaire tant qu'il ne fonctionne pas en régime de saturation.

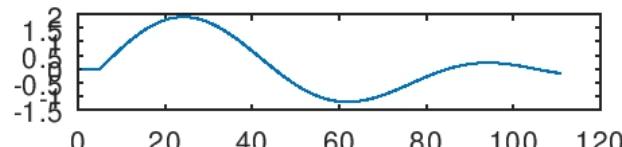
$$\begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \text{ alors } \alpha e(t) \rightarrow \alpha s(t) \\ e_1(t) \rightarrow s_1(t), e_2(t) \rightarrow s_2(t) \text{ alors } e(t) = e_1(t) + e_2(t) \rightarrow s(t) = s_1(t) + s_2(t) \end{cases}$$

Propriétés des systèmes linéaires invariants

- Exemple :

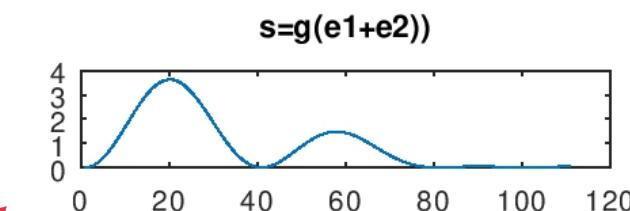
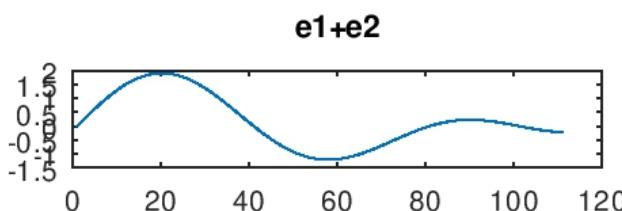
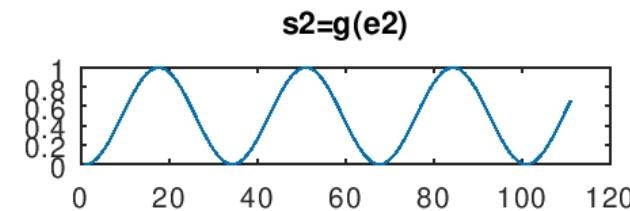
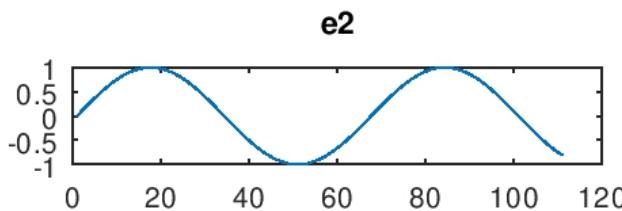
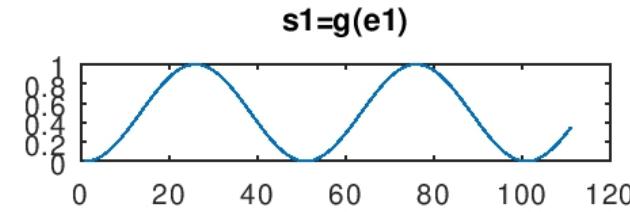
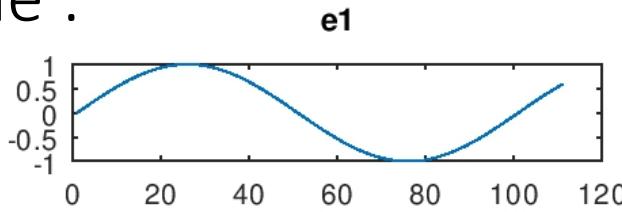


Les deux versions sont identiques
 $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$
 f est un système linéaire

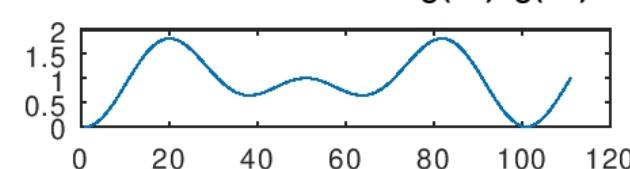


Propriétés des systèmes linéaires invariants

- Contre-exemple :



Les deux versions sont différentes
 $g(x_1+x_2) \neq g(x_1)+g(x_2)$
g n'est pas un système linéaire



Notions mathématiques de base

Parité d'un signal

- **Analyse algébrique :**

- Signal $f(x)$ est paire si : $f(-x) = f(x)$
- $f(x)$ impaire si $f(-x) = -f(x)$
- Toutes les fonctions déterministes peuvent être décomposées comme une somme d'une fonction paire et une impaire !

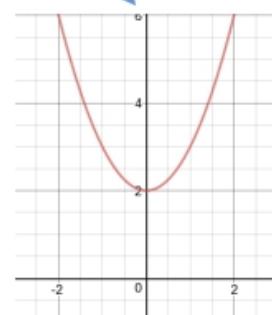
Graphical Interpretation -

- **Analyse graphique :**

Even Functions:

Have a graph that is symmetric with respect to the Y-Axis.

Y-Axis – acts like a mirror

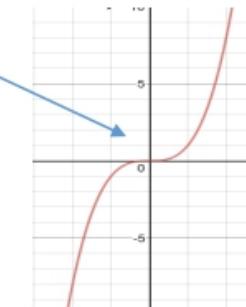


Odd Functions:

Have a graph that is symmetric with respect to the Origin.

Origin – If you spin the picture upside down about the Origin, the graph looks the same!

Origin

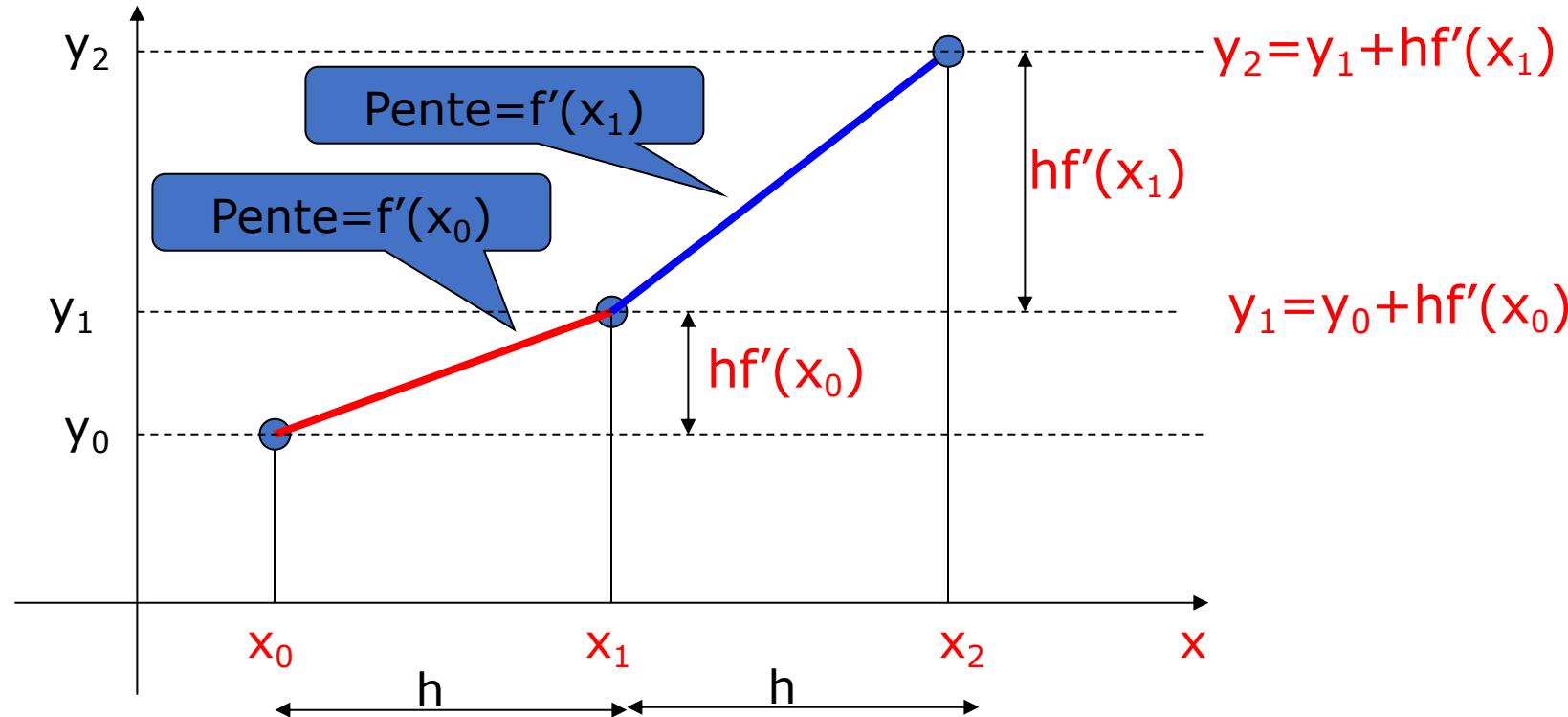


Parité d'un signal

- Analyse algébrique ou graphique
 - Trouver la parité de façon algébrique (essayer de dessiner graphiquement ensuite) :
 1. $f(x) = x^3 - x^2 + 4x + 2$
 2. $f(x) = -x^2 + 10$
 3. $f(x) = x^3 + 4x$
 4. $f(x) = -x^3 + 5x - 2$
 5. $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2} + 4$
 6. $f(x) = |x + 4|$
 7. $f(x) = |x| + 4$
 8. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$
 9. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
 10. $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$
 - Et pour les signaux périodiques ? (e.g. $\sin(x)$, $\cos(x)$, ...)

Notions de dérivée

- Dérivée des fonctions : notion géométrique et analytique



- La dérivée d'une fonction en un point **mesure la variation** (la pente de la tangente) à la fonction en ce point

Notions de dérivée

- Dérivée est définie comme la limite du **taux de variation** de la fonction sur un point.
- Définition analytiques :
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
- Importance : définit le **taux de variation (croissance/décroissance)** de la fonction/signal
- Quelques exemples ...

Notions de dérivée

Quelques exemples :

- 1) Fonctions polynomiales :
- 2) Trigonométriques :
- 3) Exponentielle, logarithmique, ... :

Dérivées des fonctions usuelles		
Fonction f	Fonction dérivée f'	Intervalles de dérivable
$f(x) = k$ (constante réelle)	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	\mathbb{R}
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	\mathbb{R}
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[$ $]-\infty; 0[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$)	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$]0; +\infty[$ $]-\infty; 0[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	selon les valeurs de l'exposant α , voir les dérivées précédentes
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	\mathbb{R}
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	\mathbb{R}
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	\mathbb{R}
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$

Notions de dérivée

Quelques opérateurs importants :

- 1) Règle de la chaîne (composition) : Si $y = f(g(x))$, $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- 2) Règle du produit : $(uv)' = u'v + uv'$
- 3) Règle du quotient (division) : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- 4) Calcul de la dérivée avec la définition analytique

(Théorème de l'Hôpital) : Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ou $\pm \infty$
et si $g'(x) \neq 0$, , si le limite de droite existe.

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Notions d'intégrale (Riemann)

- **Intégrale** : opération inverse de la dérivée
- Trouver une **fonction primitive** $F(x)$ laquelle sa dérivée est la fonction $f(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

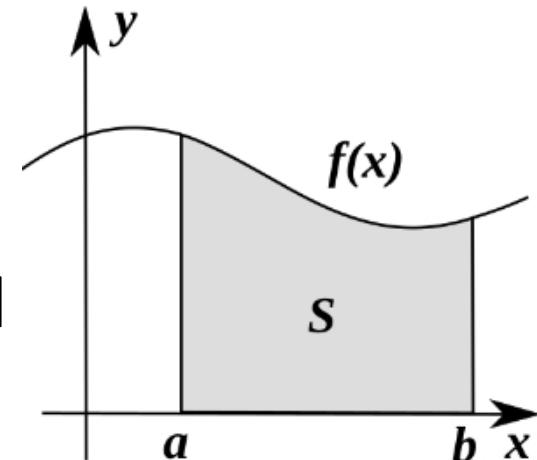
- **Intégrale** : géométriquement c'est l'aire de la fonction/signal

- Quelques exemples :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$



Notions d'intégrale (Riemann)

- Intégrale : bien plus complexe que la dérivée (**c'est un art...**)

- Outils importants :

- 1) **Intégration par parties** (produit des fonctions) :

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

- 2) **Intégration par substitution** (composition de fonctions) : $u = g(x)$ $du = g'(x) \, dx$

- Exemple :

$$\int 2x \cos(x^2) \, dx$$

$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx = \int f(u) \, du$$

$$\begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x \, dx \end{cases}$$

$$\int 2x \cos(x^2) \, dx = \int \cos(u) \, du = \sin(u) + C = \sin(x^2) + C$$

Propriétés des signaux (suite...)

Puissances et énergies des signaux

- Moyenne d'un signal

Moyenne sur un intervalle

Soit un signal $s(t)$ (périodique ou non). Sa valeur *moyenne* sur un intervalle $[t_1; t_2] \subset \mathbb{R}$ est définie par

$$m(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s(t) dt$$

Puissances et énergies des signaux

- Moyenne d'un signal

Moyenne d'un signal périodique

Si l'on suppose que $s(t)$ est périodique de période T_p , sa moyenne sur tout l'horizon de temps est égale à sa moyenne sur une une période, à savoir

$$m = \langle s \rangle = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0 + T_p} s(t) dt, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}.$$

Il est classique de considérer $t_0 = 0$ ou $t_0 = -\frac{T_p}{2}$.

Puissances et énergies des signaux

- Moyenne d'un signal

Moyenne d'un signal apériodique

Si $s(t)$ st apériodique, l'astuce consiste à considérer qu'il est en fait périodique, mais de période infinie. Il vient :

$$m = \langle s \rangle = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t) dt$$

Puissances et énergies des signaux

- Energie d'un signal

Énergie d'un signal sur un intervalle

Soit un signal $s(t)$ (périodique ou non). Son *énergie sur un intervalle* $[t_1; t_2] \subset \mathbb{R}$ est définie par

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt$$

Il s'agit d'une notion mathématique.

Puissances et énergies des signaux

- Puissance d'un signal

Puissance instantanée

Soit un signal $s(t)$ (périodique ou non). La *puissance instantanée* de $s(t)$ a déjà été définie par :

$$p(t) = s^2(t).$$

C'est le carré du signal. Elle s'exprime en Watts (W) uniquement si elle correspond à une vraie puissance au sens physique. C'est un signal à part entière.

Puissances et énergies des signaux

- Puissance d'un signal

Puissance moyenne sur un intervalle

Soit un signal $s(t)$ (périodique ou non). La *puissance moyenne* de $s(t)$ sur un *intervalle* $[t_1; t_2] \subset \mathbb{R}$ est définie par

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt$$

C'est une moyenne, donc une valeur constante égale à

$$P(t_1, t_2) = \frac{E(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}. \quad (1)$$

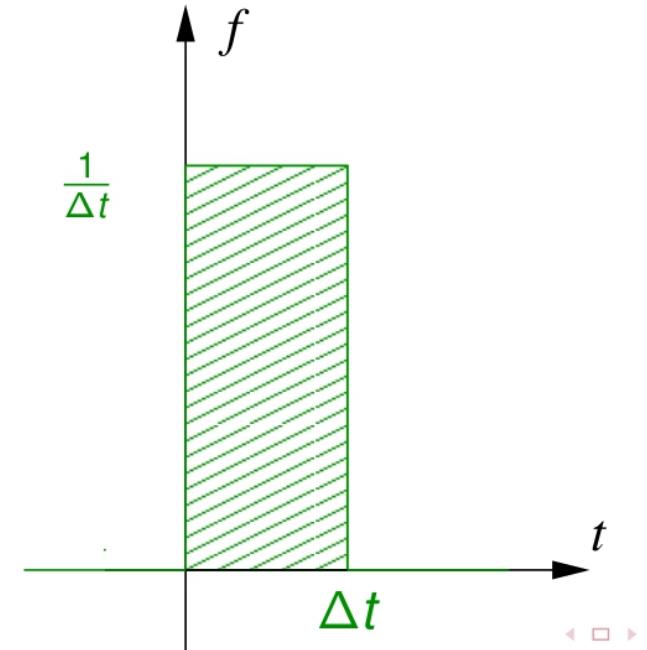
Puissances et énergies des signaux

- Un signal dont la **puissance moyenne est finie** et non nulle a une **énergie totale infinie**.
- Un signal à énergie totale finie a une puissance moyenne nulle (sur tout l'horizon de temps).
- Si $E < +\infty$, on dit que le signal est à **énergie finie**. En pratique, c'est le cas de tous les signaux physiquement réalisables non-périodiques. Un signal à énergie finie a une puissance moyenne totale nulle.
- **Deux cas courants :**
 - Signaux périodiques : énergie totale infinie, puissance moyenne totale finie
 - Signaux limites dans le temps : énergie totale finie, puissance moyenne totale nulle

Signaux continus et discrets

Signal Impulsion

- Un signal étrange et utile : **Impulsion (ou delta) de Dirac** !
- Soit l'impulsion rectangulaire définissant une surface (hachurée) égale à 1

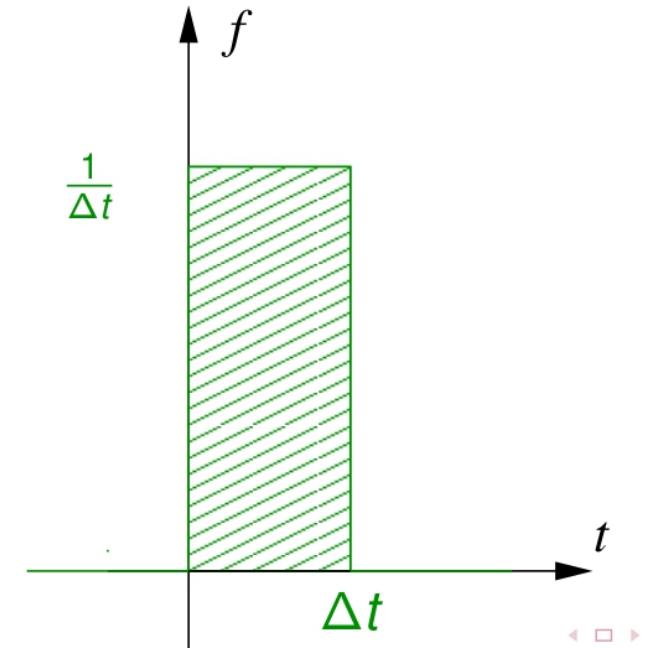


Signal Impulsion

- Un signal étrange et utile : **Impulsion (ou delta) de Dirac** !
- Soit l'impulsion rectangulaire définissant une surface (hachurée) égale à 1

Pour définir l'*impulsion de Dirac*, il faut faire tendre Δt vers 0 et donc $\frac{1}{\Delta t}$ vers l'infini. L'impulsion devient donc infiniment fine, infiniment haute et de surface 1. On note une telle impulsion $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$



Signaux continus et discrets

- Les deux types de signaux temporels :

► **Continu** : signal connu à chaque instant t

$$x(t) \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

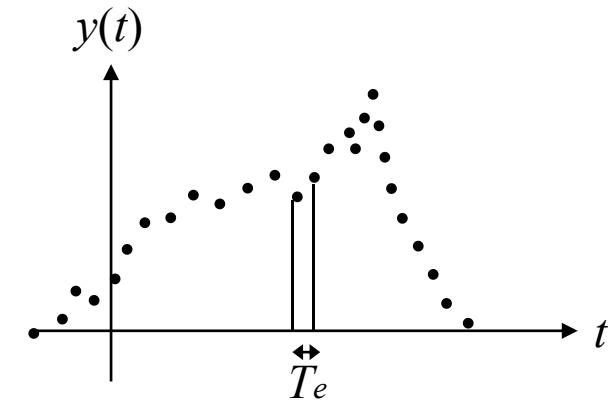
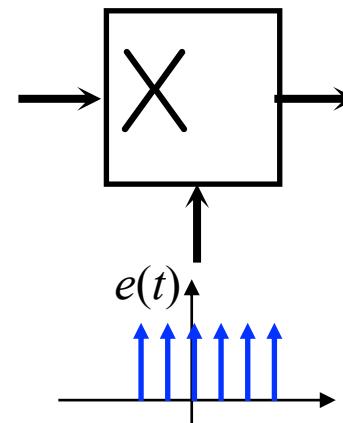
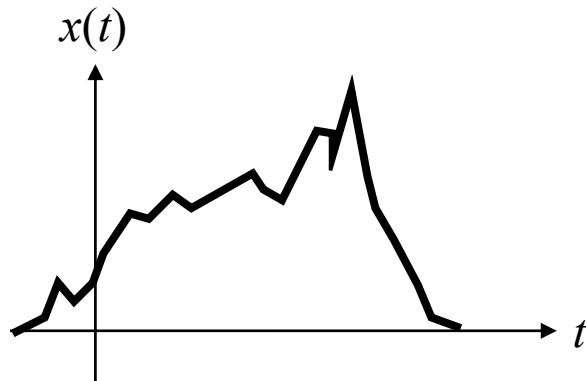
t : temps (souvent exprimé en secondes)
Ex : onde électromagnétique, signal électrique, ...

► **Discret** : signal connu uniquement à certains instants t_n

$$x_n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

n : échantillon (sans unité)
Ex : taux de précipitations enregistré chaque jour, cours de la bourse enregistré chaque heure, ...

- Signal discret : convolution du signal continu avec une série impulsions (peigne de Dirac)



Signaux continus et discrets

On peut distinguer quatre types de signaux en fonction de leur représentation:

le signal continu $e(t)$

le signal échantillonné $e_T[k]$

le signal quantifié $e_q(t)$

le signal discret $e[k]$, signal échantillonné et quantifié

