Université Bourgogne Europe
U.F.R. Sciences et Techniques
Licence Sciences Technologies Santé

Année: 2024 – 2025
Date: 31/03/2025
Cours: L2 - Elec4A

Contrôle Continu – Traitement du Signal

Durée 2h00 – Documents, calculatrice, ordinateur et téléphone portable ne sont pas autorisés. Une feuille manuscrite A4 recto-verso est autorisée. Cette épreuve continent 17 questions de valeur égale, dont 2 questions sont des bonus. Vous pouvez utiliser (si besoin) les formules de rappel fournies en deuxième page.

• **Exercice 1** – *Circuits et filtrage en fréquence*

On considère le filtre analogique CR en série avec entrée comme la tension $x(t)$ et la sortie, la tension $v(t)$ aux bornes de la résistance R_1. Le condensateur a une capacité électrique C_1.

1.1 Utilisez la transformée de Fourier pour obtenir la fonction de transfert $T(f)$ de ce filtre ($\frac{V(f)}{X(f)}$).

1.2 Tracez la fonction de transfert en magnitude et discutez quel type de filtre il correspond.

1.3 Vérifiez mathématiquement à quel type de filtre correspond la fonction de transfert $T_2(f) = 1 - T(f)$. Quelles modifications dans la configuration du circuit précédant (avec les mêmes composants électriques) doit-on faire pour produire un circuit qui suit T_2 ?

• **Exercice 2** – *Représentation et analyse des signaux non périodiques*

Soit la fonction $f(x)$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \max(0, \cos(x)), & \text{si } x \in [-\pi; \pi] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1 Tracez $f(x)$.

2.2 Calculer le spectre en fréquence de cette fonction. Vous pouvez utiliser (si besoin) les formules en bas de page et l'intégration par parties $\int udv = uv - \int vdu$.

• **Exercice 3** – *Représentation et analyse des signaux périodiques*

Nous allons considérer un signal continu représenté par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = |x|$ pour $x \in]-\pi, \pi]$ (étendue à $\mathbb{R}$ par périodicité). L'opérateur $|.|$ est le module, ou norme L_1, tel que pour un scalaire réel t :

$$|t| = \begin{cases} t, & \text{si } t \geq 0, \\ -t, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $n \neq 1$, on note a_n le coefficient de $\cos(n\omega x)$, $a_0/2$ le coefficient constant et b_n le coefficient de $\sin(n\omega x)$ dans la représentation de Fourier de f.

3.1 Tracez la forme du signal dans l'intervalle $x \in]-3\pi, 3\pi]$.

3.2 Étudiez la parité de f.

3.3 Quelles sont les valeurs de b_n pour $n \geq 1$?

3.4 Calculer a_n pour les cas $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$. Vous pouvez utiliser (si besoin) les formules en bas de page et l'intégration par parties $\int udv = uv - \int vdu$.

3.5 Calculer a_n pour n pair, soit $n = 2k$.

3.6 Calculer a_n pour n impair, soit $n = 2k + 1$.

• **Exercice 4** – *Représentation et analyse des signaux non périodiques*

Nous allons maintenant étudier le comportement des fenêtres temporelles dans le domaine fréquentiel.

4.1 Calculer la représentation fréquentielle (spectre) du signal porte $f_1(t)$, avec $a = 1$:

$$f_1(t) = \begin{cases} 1/a, & \text{si } t \in [-a/2; a/2] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

4.2 Calculer la représentation fréquentielle (spectre) du signal $f_2(t)$, avec $a = 1$:

$$f_2(t) = \begin{cases} 1/a, & \text{si } t \in [-a/2; 0] \\ -1/a, & \text{si } t \in [0; a/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4.3 Tracer les deux spectres en amplitude des deux fenêtres. Interprétez ces spectres en indiquant s'ils correspondent à un "passe-haut", "passe-bas" ou "passe-bande".

• **Exercice 5** – *Echantillonnage des signaux*

5.1 Quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage que vous choisiriez pour échantillonner un signal, qui a une composante en fréquence maximale f_{max}, sans perte d'information dans sa version discrète ?

5.2 Soient $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ des scalaires, quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage pour le signal $s(t) = \sin(8\pi\sigma_1 t) + \cos(14\pi\sigma_2 t)$ pour éviter des pertes ?

5.3 Idem pour le signal $s(t) = \sin(16\pi\sigma_1 t)\cos(\sigma_2 t)$.

Quelques rappels utiles :

$$\cos p + \cos q = 2\cos(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2}) \ ; \ \cos p - \cos q = -2\sin(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2}) \ ;$$
$$2\sin(a)\cos(b) = \sin(a-b) + \sin(a+b) \ ; \ 2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b) \ ;$$
$$a_0 = \tfrac{2}{T}\int_T s(x)\,dx \ ; \ a_n = \tfrac{2}{T}\int_T s(x)\cos(n\omega x)\ dx \text{ et } b_n = \tfrac{2}{T}\int_T s(x)\sin(n\omega x)\,dx, \text{ pour } n \geq 1;$$
$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{-\infty} s(x)\,e^{-i\omega x}\,dx$$

Bonne épreuve !