Informatique-Electronique - AGIL Elec B

Electronique numérique :
Bases de l'Algèbre de Boole

Renato Martins, ICB UMR CNRS - Univ. Bourgogne
UFR Sciences & Techniques - IEM, 2024

Remerciements

- Les slides du cours sont basés pour la plupart sur le support gentillement mis à disposition par **Amira Bousselmi** et par de nombreuses autres personnes.

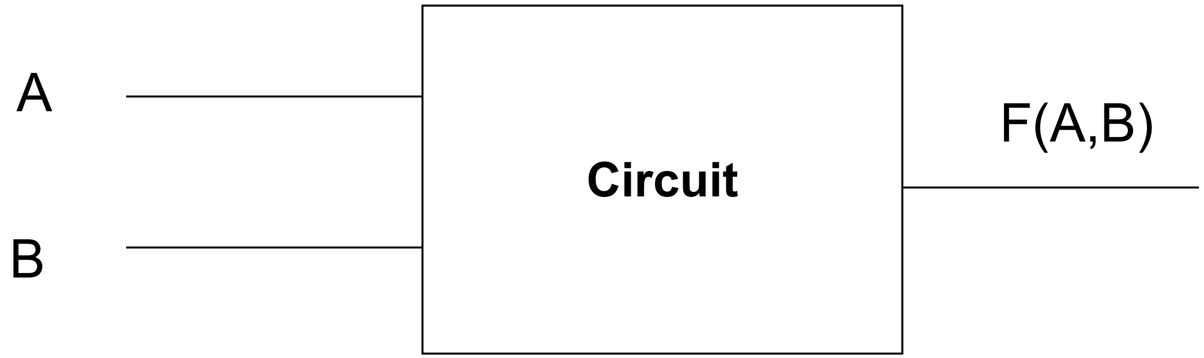
- Je n'ai pas crédité ces personnes dans la plupart des slides (ce qui n'est pas bien...mes excuses.)

Table des Matières

Chapitre 2 :
Bases de l’algèbre de Boole

Introduction

- Les machines numériques sont constituées d'un ensemble de circuits électroniques.
- Chaque circuit fournit une fonction logique bien déterminée (addition, soustraction, comparaison ,….).
- Les circuits qui réalisent les opérations logiques sont constitués portes logiques.



Introduction

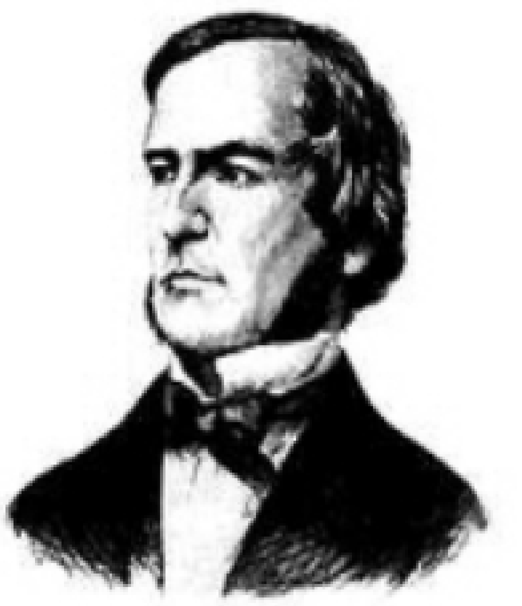
- Une fonction logique de base est réalisée à l’aide des portes logiques qui permettent d'effectuer des opérations élémentaires.
- Ces portes logiques sont aujourd'hui réalisées à l'aide de transistors.
- Pour concevoir et réaliser ce circuit on doit avoir un modèle mathématique de la fonction réalisée par ce circuit.
- Ce modèle doit prendre en considération le système binaire.

Introduction

- Une fonction logique de base est réalisée à l'aide des portes logiques qui permettent d'effectuer des opérations élémentaires.
- Ces portes logiques sont aujourd'hui réalisées à l'aide de transistors.
- Pour concevoir et réaliser ce circuit on doit avoir un modèle mathématique de la fonction réalisée par ce circuit.
- Ce modèle doit prendre en considération le système binaire.
- Le modèle mathématique utilisé est celui de Boole.
- Une variable logique (booléenne) est une variable qui peut prendre soit la valeur 0 ou 1 .
- Généralement elle est exprimée par un seul caractère alphabétique en majuscule (A , B, S, …)

Algèbre de Boole

- George Boole - mathématicien anglais (1815-1864):
  - Algèbre binaire
  - De variables *booléennes* : que ne prennent que deux valeurs VRAI ou FAUX.
  - D'opérateurs décrits par une **table de vérité**
  - Et d'opérateurs réalisés par des **portes logiques**



Porte logique : OUI

- OUI : Opération suiveuse : opérateur unaire (une seule variable) qui associe au résultat la même valeur que celle de l'opérande.

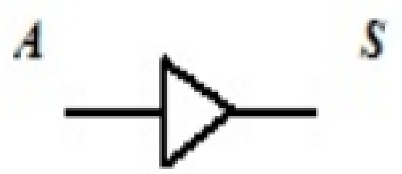
Fonction

S = F(A) = A

Table de vérité

A	S
0	0
1	1

Symbole



Porte logique : NON

- NON : Opération inverseuse : est un opérateur unaire qui à pour rôle d'inverser la valeur d'une variable .

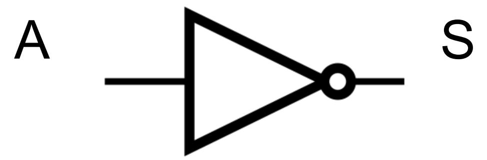
Fonction

$S = F(A) = \text{Non } A = \overline{A}$

Table de vérité

A	S
0	1
1	0

Symbole



Porte logique : OU

- Le OU est un opérateur binaire (deux variables) , a pour rôle de réaliser la somme logique entre deux variables logiques.
- Le OU fait la disjonction entre deux variables.

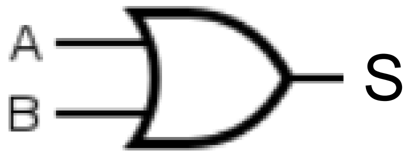
Fonction

S = F(A,B) = A +B

Table de vérité

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Symbole



Porte logique : NOR

- NOR : NON-OU : S est vrai si ni a, ni b ne sont vrais.

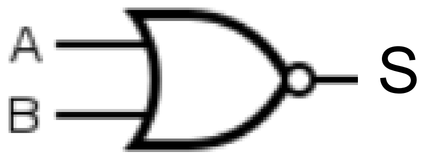
Fonction

$$S = F(A,B) = \overline{A + B}$$

Table de vérité

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Symbole



Porte logique : ET

- Le ET est un opérateur binaire (deux variables) , a pour rôle de réaliser le Produit logique entre deux variables booléennes.
- Le ET fait la Conjonction entre deux variables.

Fonction

$S = F(A,B) = A \cdot B$

Table de vérité

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Symbole

Porte logique : NAND

- NAND : NON-ET : S est vrai si A OU B est faux.

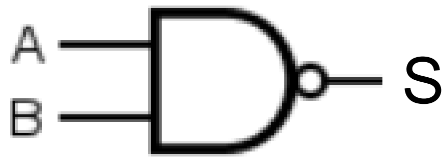
Fonction

$$S = F(A,B) = \overline{A \, . \, B}$$

Table de vérité

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Symbole



Porte logique : XOR

- XOR : OU exclusif : S est vrai si A est vrai ou B est vrai mais pas les deux.
- XOR vaut 1 si a est différent de b

Fonction

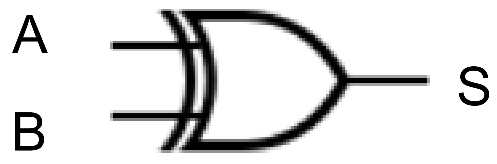
$S = F(A,B) = A \oplus B$

$= A \, . \, \overline{B} + \overline{A} \, . \, B$

Table de vérité

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Symbole



Porte logique : XNOR

- XNOR : NON OU exclusif : S vaut 1 si A = B.

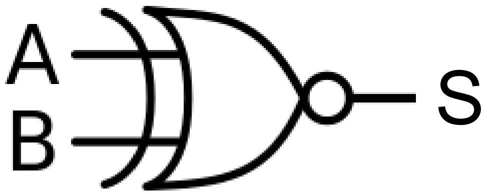
Fonction

$S = F(A,B) = \overline{A \oplus B}$

Table de vérité

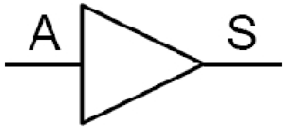
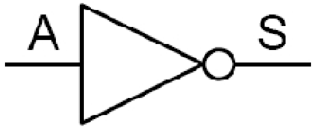
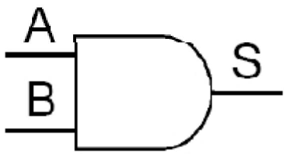
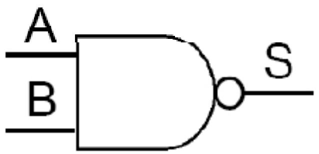
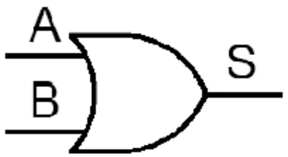
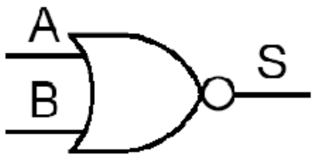
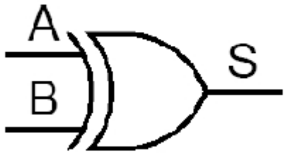
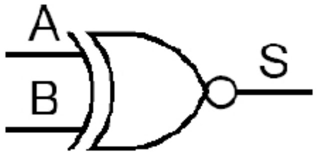
A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Symbole



Recap des notations et portes

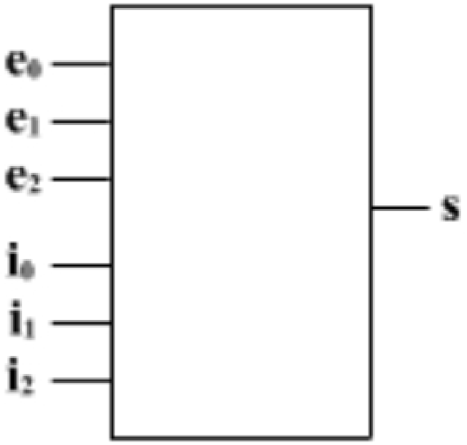
Notation Américaine

Désignation	*Symbole*	*Désignation*	*Symbole*
Identité		NOT (NON)	
AND (ET)		NAND (NON ET)	
OR (OU inclusif)		NOR (NON OU)	
XOR (OU exclusif)		XNOR (NON OU exclusif)	

Exercices

Comparateur

Le comparateur est un circuit qui compare deux mots de n bits. En sortie, un bit indique le résultat de la comparaison : 1 s'il y a égalité entre les deux codes présents à l'entrée, 0 si ces codes sont différents.

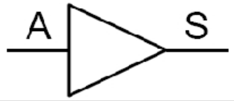
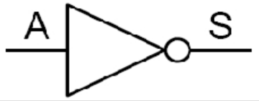
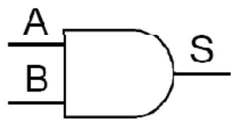
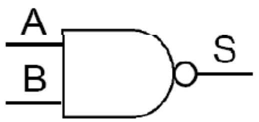
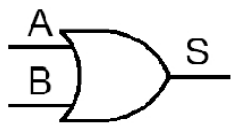
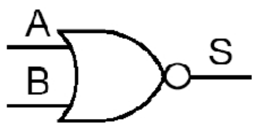


$S = 1$ si

$e_1 = i_1$

et $e_2 = i_2$

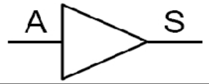
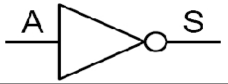
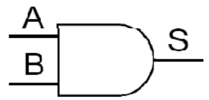
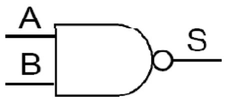
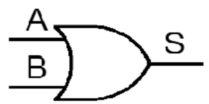
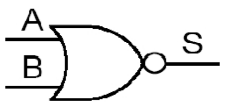
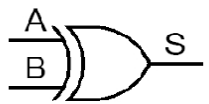
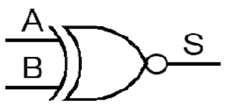
et $e_3 = i_3$

Désignation	*Symbole*	*Désignation*	*Symbole*
Identité		NOT (NON)	
AND (ET)		NAND (NON ET)	
OR (OU inclusif)		NOR (NON OU)	
XOR (OU exclusif)		XNOR (NON OU exclusif)	

Exercices

Proposer un circuit avec portes logiques pour le démi additionneur avec table de vérité suivant :

	somme	retenue
0+0	0	0
0+1	1	0
1+1	0	1

Désignation	*Symbole*	*Désignation*	*Symbole*
Identité		NOT (NON)	
AND (ET)		NAND (NON ET)	
OR (OU inclusif)		NOR (NON OU)	
XOR (OU exclusif)		XNOR (NON OU exclusif)	

Fonction logique

- C'est une fonction qui relie N variables logiques avec un ensemble d'opérateurs logiques de base.

- La valeur d'une fonction logique est égale à 1 ou 0 selon les valeurs des variables logiques.

- Si une fonction logique possède N variables logiques 2^n combinaisons la fonction possède 2^n valeurs.

- Les 2^n combinaisons sont représentées dans une table qui s'appelle table de vérité (TV).

Exemple fonction logique

- La fonction possède 3 variables --> 2^3 combinaisons

$$F(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.C$$

$$F(0,0,0) = \overline{0}.\overline{0}.0 + \overline{0}.0.0 + 0.\overline{0}.0 + 0.0.0 = 0$$
$$F(0,0,1) = \overline{0}.\overline{0}.1 + \overline{0}.0.1 + 0.\overline{0}.1 + 0.0.1 = 1$$
$$F(0,1,0) = \overline{0}.\overline{1}.0 + \overline{0}.1.0 + 0.\overline{1}.0 + 0.1.0 = 0$$
$$F(0,1,1) = \overline{0}.\overline{1}.1 + \overline{0}.1.1 + 0.\overline{1}.1 + 0.1.1 = 1$$
$$F(1,0,0) = \overline{1}.\overline{0}.0 + \overline{1}.0.0 + 1.\overline{0}.0 + 1.0.0 = 0$$
$$F(1,0,1) = \overline{1}.\overline{0}.1 + \overline{1}.0.1 + 1.\overline{0}.1 + 1.0.1 = 1$$
$$F(1,1,0) = \overline{1}.\overline{1}.0 + \overline{1}.1.0 + 1.\overline{1}.0 + 1.1.0 = 0$$
$$F(1,1,1) = \overline{1}.\overline{1}.1 + \overline{1}.1.1 + 1.\overline{1}.1 + 1.1.1 = 1$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Une table de vérité

Fonctions logiques

- Axiomes

(A_1) : $A = 0$ si $A \neq 1$	$(A_{1'})$: $A = 1$ si $A \neq 0$
(A_2) : si $A = 0$ alors $\overline{A} = 1$	$(A_{2'})$: si $A = 1$ alors $\overline{A} = 0$
(A_3) : $0 . 0 = 0$ et	$1 + 1 = 1$
$1 . 1 = 1$ et	$0 + 0 = 0$
$1 . 0 = 0 . 1 = 0$ et	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$

Fonctions logiques

- **Théorèmes**
  - Fonctions à une variable

(T_1) : $A + 0 = A$	$(T_{1'})$: $A \,.\, 1 = A$	(Eléments neutres)
(T_2) : $A + 1 = 1$	$(T_{2'})$: $A \,.\, 0 = 0$	(Eléments absorbants)
(T_3) : $A + A = A$	$(T_{3'})$: $A \,.\, A = A$	(Idempotence)
(T_4) : $\overline{\overline{A}} = A$ (Involution)		
(T_5) : $A + \overline{A} = 1$	$(T_{5'})$: $A \,.\, \overline{A} = 0$	

Fonctions logiques

- **Théorèmes**
  - Fonctions à deux variables

(T_6) :	$A + B = B + A$	$(T_{6'})$:	$A \,.\, B = B \,.\, A$	(Commutativité)
(T_7) :	$A + AB = A$	$(T_{7'})$:	$A.(A + B) = A$	(Absorption)
(T_8) :	$A + \overline{A}\,B = A + B$	$(T_{8'})$:	$A.(\overline{A} + B) = A.B$	(Absorption)
(T_9) :	$AB + A\overline{B} = A$	$(T_{9'})$:	$(A + B)(A + \overline{B}) = A$	(Absorption)

Fonctions logiques

- **Théorèmes**
  - Fonctions 3 variables

$(T_{10}) : A+(B+C) = (A+B)+C$	$(T_{10'}) : A.(B.C) = (A.B).C$	(Associativité)
$(T_{11}) : A+(B.C) = (A+B).(A+C)$	$(T_{11'}) : A.(B+C) = (A.B)+(A.C)$	(Distributivité)
$(T_{12}) : AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$	$(T_{12'}) : (A+B).(\overline{A}+C).(B+C) = (A+B)(\overline{A}+C)$	

Fonctions logiques

- **Théorème de Morgan**

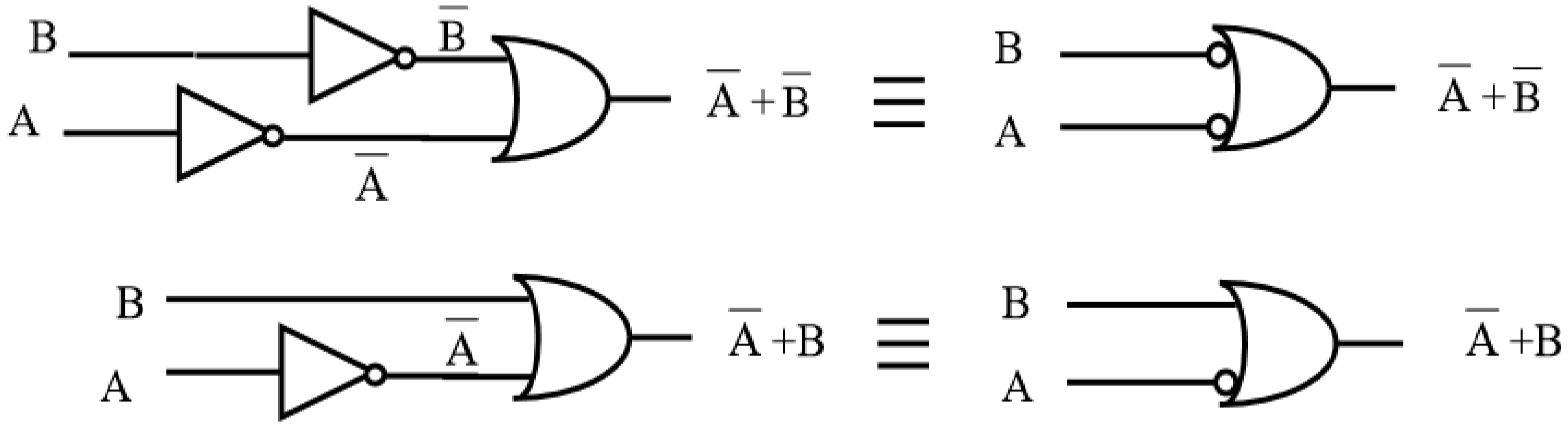
$$\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A.B} = \overline{A}+\overline{B} \ \text{(2 variables)}$$

$$\overline{A+B+C} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} \quad \text{et} \quad \overline{A.B.C} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C} \ \text{(3 variables)}$$

$$\overline{A+B+C+\ldots} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.... \quad \text{et} \quad \overline{A.B.C.....} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+....$$

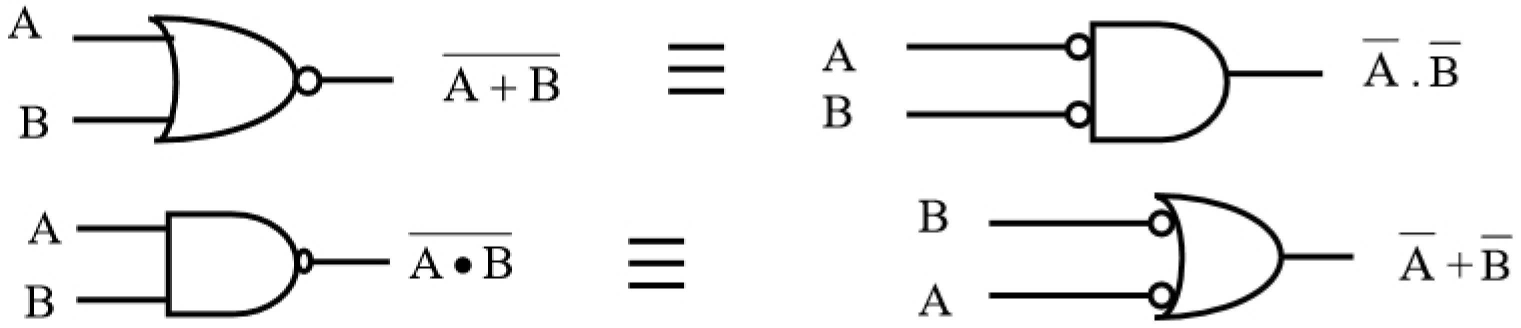
Fonctions logiques

- AUTRES OPERATEURS LOGIQUES



Fonctions logiques

- AUTRES OPERATEURS LOGIQUES



Exercise

Simplifiez les fonctions suivantes :

1. $AB+A(B+C)+B(B+C)$
2. $[A\overline{B}(C+BD)+\overline{AB}]C$
3. $\overline{AB+AC}+\overline{AB}C$
4. $ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C$
5. $\overline{ab}(a+\overline{b})(a+b)$
6. $\overline{X+\overline{\overline{Y}}(Z+\overline{\overline{X}})}$

(T_1) :	$A+0=A$	$(T_{1'})$:	$A\,.\,1=A$	(Eléments neutres)
(T_2) :	$A+1=1$	$(T_{2'})$:	$A\,.\,0=0$	(Eléments absorbants)
(T_3) :	$A+A=A$	$(T_{3'})$:	$A\,.\,A=A$	(Idempotence)
(T_4) :	$\overline{\overline{A}}=A$ (Involution)			
(T_5) :	$A+\overline{A}=1$	$(T_{5'})$:	$A\,.\,\overline{A}=0$	

$$F_1 = a.(a+b)$$

$$F_2 = (a+b).(\overline{a}+b)$$

$$F_3 = a.b+\overline{c}+c.(\overline{a}+\overline{b})$$

$$F_4 = (a.\overline{b}+c).(a+\overline{b}).c$$

$$F_5 = (a+b).c+a.(b+c)+b$$

$$F_6 = (a+b+c).(a+b+c)+a.b+b.c$$

$$F_7 = a+a.b.c+\overline{a}.b.c+\overline{a}.b+a.d+a.\overline{d}$$

$$F_8 = a+\overline{a}.b+\overline{a}.\overline{b}.c+\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.d+\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d}.e$$

$$F_9 = (a+b).(a+b.c)+\overline{a}.\overline{b}+\overline{a}.\overline{c}$$