Simplification Fonctions Logiques

- L'objectif de la simplification des fonctions logiques est de :
  - réduire le nombre de termes dans une fonction
  - et de réduire le nombre de variables dans un terme

- Cela afin de réduire le nombre de portes logiques utilisées
  réduire le coût du circuit

- Plusieurs méthodes existent pour la simplification :
  - Méthodes algébriques
  - Méthodes graphiques : **table de karnaugh**

Simplification Fonctions Logiques

- Examinons l'expression suivante :

$$A\,.\,B + A\,.\,\overline{B}$$

- Les deux termes possèdent les même variables. La seule différence est l'état de la variable B qui change.
- Si on applique les règles de simplification :

$$AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A$$

- Ces termes sont dites adjacents.

Simplification Fonctions Logiques

Exemples de termes adjacents

- Ces termes sont adjacents
  - $AB + \overline{A}B = B$
  - $ABC + A\overline{B}C = AC$
  - $ABCD + AB\overline{C}D = ABD$

- Ces termes ne sont pas adjacents
  - $AB + \overline{A}\overline{B}$
  - $ABC + \overline{A}B\overline{C}$
  - $ABCD + A\overline{B}C\overline{D}$

Simplification Fonctions Logiques

Description de la table de Karnaugh

- La méthode consiste à mettre en évidence par une méthode graphique (un tableau) tous les termes qui sont adjacents (qui ne différent que par l'état d'une seule variable).

- Une table de Karnaugh = table de vérité de 2^n cases avec un changement unique entre 2 cases voisines

- La méthode peut s'appliquer aux fonctions logiques de 2, 3, 4, 5 et 6 variables.

- Les tableaux de Karnaugh comportent 2^n cases (n: est le nombre de variables).

Simplification Fonctions Logiques

- Description de la table de Karnaugh

B \ A	0	1
0		
1		

Tableau à 2 variables

C \ AB	00	01	11	10
0				
1				

Tableau à 3 variables

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Tableau à 4 variables

Simplification Fonctions Logiques

- Description de la table de Karnaugh à 5 variables

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

U = 0

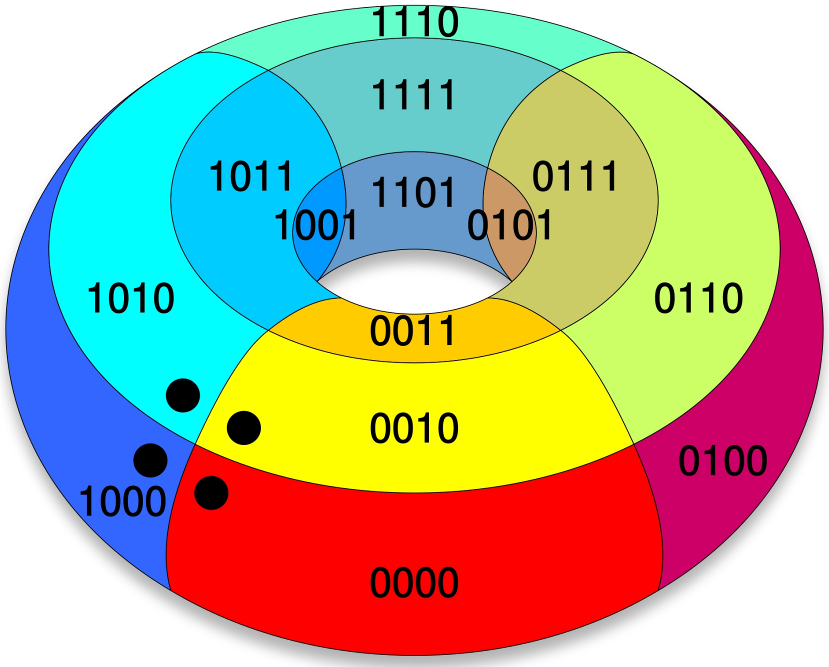
CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

U= 1

Simplification Fonctions Logiques

- Description de la table de Karnaugh

0000	0100	1100	1000
0001	0101	1101	1001
0011	0111	1111	1011
0010	0110	1110	1010



Simplification Fonctions Logiques

Simplification graphique : Table de Karnaugh

- Il faut considérer le tableau de Karnaugh comme un hyper-cylindre, en imaginant que le bord gauche du tableau de Karnaugh est collé au bord droite et de même pour les bords inférieur et supérieur.

- Pour faire des simplifications, on effectue des regroupements retangulaires de taille 2^n : (1, 2, 4, 8, 16,...)

- On peut utiliser une même case pour plusieurs groupements

- On doit prendre tous les 1 du tableau

- Les groupements de cases doivent être de taille maximale

Les groupes formés doivent être les moins nombreux possibles, mais ils doivent englober tous les 1 a intérêt à dessiner des rectangles les plus grands possibles.

Simplification graphique : Table de Karnaugh

Cette méthode est pratique jusqu'à 4 variables d'entrée, possible pour 5 et 6 mais au delà de 6 on utilise des programmes informatisés.

- Une fonction à n variables d'entrée un tableau de Karnaugh de **2^n** cases codées en Gray (adjacent= binaire réflichi).

- A partir de table de vérité ou formes canoniques PDS ou expressions logiques quelconques, on peut établir le tableau de Karnaugh

Simplification Fonctions Logiques

- Passage de la table de vérité à la table de Karnaugh

A	B	C	S
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

C \ AB	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

Simplification Fonctions Logiques

Passage de la forme canonique à la table de Karnaugh

- Si la fonction logique est donnée sous la SDP canonique, alors sa représentation est directe : chaque terme correspond à une seule case qui doit être mise à 1.

- Si la fonction logique est donnée sous la PDS canonique, alors sa représentation est directe : pour chaque terme lui correspond une seule case qui doit être mise à 0.

Exemples

$$F1(A,B,C) = \sum (1,2,5,7)$$

C \ AB	00	01	11	10
0		1		
1	1		1	1

$$F2(A,B,C) = \prod (0,2,6,3)$$

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	0	
1		0		

Méthode de Simplification

1. Remplir le tableau à partir de la table de vérité.
2. Faire des regroupements : des regroupements de 16,8,4,2,1
3. Les mêmes termes peuvent participer à plusieurs regroupements.
4. Dans un regroupement :
   - qui contient un seule terme on peut pas éliminer de variables.
   - Dans un regroupement qui contient deux termes on peut éliminer une variable (celle qui change d'état).
   - Dans un regroupement de 4 termes on peut éliminer deux variables
   - ……………….

L'expression logique finale est la réunion (somme) des groupements après simplification et élimination des variables qui changent d'état.

Simplification Fonctions Logiques

Simplification graphique : Table de Karnaugh

Exemples de simplification

- Regroupement de deux cases adjacentes

A \ BC	$\overline{B}\,\overline{C}$(00)	$\overline{B}C$(01)	BC(11)	$B\overline{C}$(10)
$\overline{A}$(0)	0	0	1	0
A(1)	0	1	1	1

$G_1=ABC+A\overline{B}C=AC$

$G_2=\overline{A}BC+ABC=BC$

$G_3=ABC+AB\overline{C}=AB$

$$\boxed{MAJ(A,B,C)=G_1+G_2+G_3=AB+BC+AC}$$

La réunion de deux cases adjacentes contenant 1 chacune élimine une seule variable cell change d'état en passant d'une case à l'autre.

Fonction F_3

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$(00)	$\overline{C}D$(01)	CD(11)	$C\overline{D}$(10)
$\overline{A}\,\overline{B}$(00)	1	0	1	1
$\overline{A}B$(01)	1	0	0	0
AB(11)	1	1	1	1
$A\overline{B}$(10)	1	0	1	1

$F_{3(A,B,C,D)}=\overline{C}\,\overline{D}+AB+\overline{B}C$

Deux variables disparaissent quand on regroupe 4 cases adjacentes, on peut alors remplacer la somme des 4 cases (4 mintermes à 4 variables chacun) par un seul terme qui comporte que 2 variables uniquement.

Simplification Fonctions Logiques

Simplification graphique : Table de Karnaugh

Exemples de simplification

➢ Regroupement de deux cases adjacentes

A \ BC	$\overline{B}\overline{C}(00)$	$\overline{B}C(01)$	$BC(11)$	$B\overline{C}(10)$
$\overline{A}(0)$	0	0	1	0
$A(1)$	0	1	1	1

$G_1=ABC+A\overline{B}C=AC$

$G_2=\overline{A}BC+ABC=BC$

$G_3=ABC+AB\overline{C}=AB$

$\boxed{MAJ(A,B,C)=G_1+G_2+G_3=AB+BC+AC}$

La réunion de deux cases adjacentes contenant 1 chacune élimine une seule variable cell change d'état en passant d'une case à l'autre.

➢ Regroupement de 4 cases adjacentes

Fonction F_1

AB \ CD	$\overline{C}\overline{D}(00)$	$\overline{C}D(01)$	$CD(11)$	$C\overline{D}(10)$
$\overline{A}\overline{B}(00)$	0	0	0	1
$\overline{A}B(01)$	1	1	0	1
$AB(11)$	1	1	0	1
$A\overline{B}(10)$	0	0	0	1

$F_{1(A,B,C,D)}=B\overline{C}+C\overline{D}$

Fonction F_2

AB \ CD	$\overline{C}\overline{D}(00)$	$\overline{C}D(01)$	$CD(11)$	$C\overline{D}(10)$
$\overline{A}\overline{B}(00)$	1	0	0	1
$\overline{A}B(01)$	0	0	0	0
$AB(11)$	1	0	0	1
$A\overline{B}(10)$	1	0	0	1

$F_{2(A,B,C,D)}=A\overline{D}+\overline{B}\overline{D}$

Fonction F_3

AB \ CD	$\overline{C}\overline{D}(00)$	$\overline{C}D(01)$	$CD(11)$	$C\overline{D}(10)$
$\overline{A}\overline{B}(00)$	1	0	1	1
$\overline{A}B(01)$	1	0	0	0
$AB(11)$	1	1	1	1
$A\overline{B}(10)$	1	0	1	1

$F_{3(A,B,C,D)}=\overline{C}\overline{D}+AB+\overline{B}C$

Deux variables disparaissent quand on regroupe 4 cases adjacentes, on peut alors remplacer la somme des 4 cases (4 mintermes à 4 variables chacun) par un seul terme qui comporte que 2 variables uniquement.

➢ Regroupement de 8 cases adjacentes

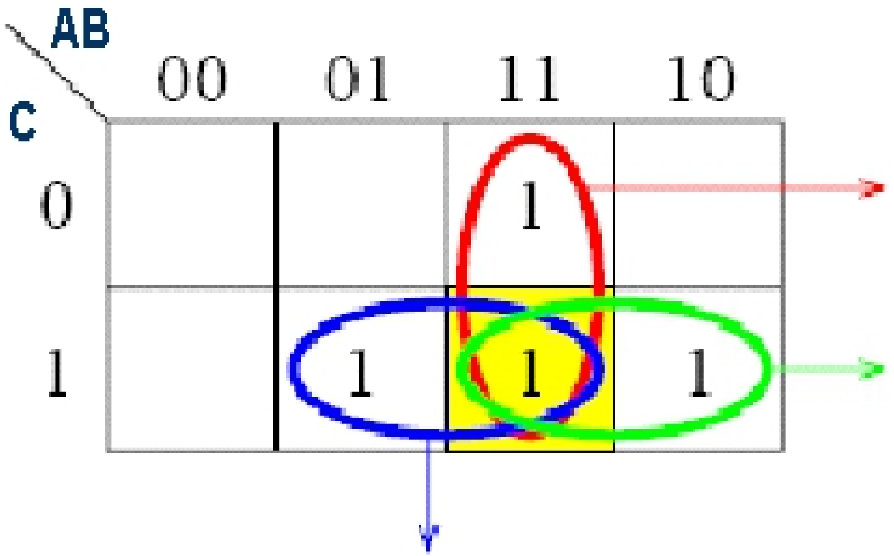
Fonction F_4

AB \ CD	$\overline{C}\overline{D}(00)$	$\overline{C}D(01)$	$CD(11)$	$C\overline{D}(10)$
$\overline{A}\overline{B}(00)$	1	0	0	1
$\overline{A}B(01)$	1	0	0	1
$AB(11)$	1	0	0	1
$A\overline{B}(10)$	1	0	0	1

$F_{4(A,B,C,D)}=\overline{D}$

- En effectuant ainsi les groupements, on élimine les variables qui changent d'état et on conserve celles qui restent fixes

Méthode de Simplification



$$ABC + AB\overline{C} = AB$$

$$ABC + A\overline{B}C = AC$$

$$\overline{A}BC + ABC = BC$$

$$F(A,B,C) = AB + AC + BC$$

Méthode de Simplification

Exemple : 3 variables

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	1

$$F(A,B,C) = ?$$

Méthode de Simplification

Exemple : 3 variables

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	1

$$F(A,B,C) = C + AB$$

Méthode de Simplification

Exemple : 4 variables

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	1	0	0

$$F(A,B,C,D) = \overline{C}.D + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C.\overline{D}$$

Exercice

W

cd \ a b	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	0	0	0
10	1	0	0	0

Méthode de Simplification

Exemple : 4 variables

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	1
11				1
10	1			1

$$F(A,B,C,D) = A\overline{B} + \overline{B}\,\overline{D} + \overline{B}CD$$

Méthode de Simplification

Exemple 4 :   5 variables

U = 0

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			
01	1		1	
11	1		1	
10	1			

U= 1

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			
01	1			1
11	1			1
10	1	1		

$$F(A,B,C,D,U) = \overline{A}\,\overline{B} + A.B.D.\overline{U} + \overline{A}.C.\overline{D}.U + A.\overline{B}.D.U$$

Trouver la forme simplifiée des fonctions pour les deux tables suivantes :

C \ AB	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1		1	1

CD \ AB	00	01	11	10
00	1		1	1
01				
11				
10	1	1	1	1

Exercice 2

A partir de la table de Karnaugh:

- 1) Trouver les formes SDP et PDS canoniques
- 2) La fonction logique simplifiee

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

Exercice 3

N		ab			
		00	01	11	10
cd	00	1	1	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	1	1	0
	10	0	1	1	0

N		ab			
		00	01	11	10
cd	00	1	1	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	1	1	0
	10	0	1	1	0

N		ab			
		00	01	11	10
cd	00	1	1	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	1	1	0
	10	0	1	1	0

$$N = b + \bar{c}$$

Commentaires

- Pour faire l'étude d'une foction logiue et la réalisation d'un circuit il faut suivre le étapes suivantes :
  - Il faut définir les variables d'entrée.
  - Il faut définir les variables de sortie.
  - Etablir la table de vérité.
  - Ecrire les équations algébriques des sorties (à partir de la table de vérité).
  - Definir les formes canoniques.
  - Effectuer des simplifications (algébrique ou par Karnaugh).
  - Faire le schéma avec un minimum de portes logiques.