Elec4A - Traitement du Signal

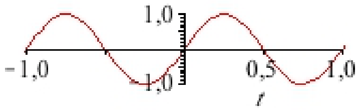
Introduction aux signaux & outils de base

Renato Martins, ICB UMR CNRS - Univ. Bourgogne
UFR Sciences & Techniques, 2026

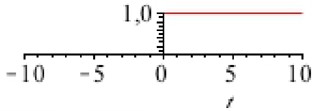
Les signaux

- Signaux déterministes à temps continu
  - la valeur du signal est connue à chaque instant
  - on modélise souvent un signal d'information ou le comportement d'un système par un signal déterministe

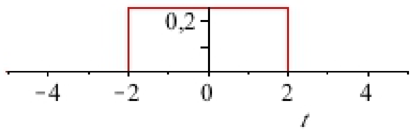
$$s_{\sin} := t \rightarrow \sin(2\,\pi f t)$$



$$s_H := t \rightarrow \mathrm{Heaviside}(t) \quad \text{où} \quad \mathrm{Heaviside} := t \rightarrow \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t \end{cases}$$



$$\Pi_a := t \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a} & -\dfrac{1}{2}\,a \le t \ \textbf{and}\ t < \dfrac{1}{2}\,a \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

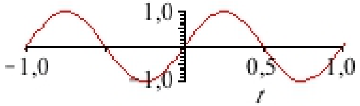


a=4

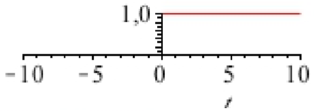
Les signaux

- Signaux déterministes à temps continu
  - la valeur du signal (fonction) est connue à chaque instant
  - on modélise souvent un signal d'information ou le comportement d'un système par un signal déterministe

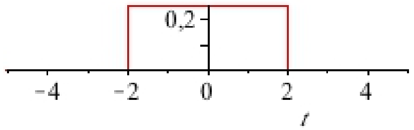
$$s_{\sin} := t \to \sin(2\,\pi f t)$$



$$s_H := t \to \mathrm{Heaviside}(t) \quad \text{où} \quad \mathrm{Heaviside} := t \to \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t \end{cases}$$



$$\Pi_a := t \to \begin{cases} \dfrac{1}{a} & -\dfrac{1}{2}\,a \le t \text{ and } t < \dfrac{1}{2}\,a \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$



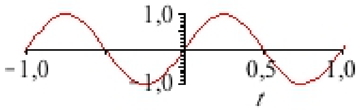
a=4

- Caractéristiques des signaux déterministes : facon analytique ou graphique
  - 1) Signaux **périodiques et apériodiques** : périodiques se reproduisent à l'identique à intervalles réguliers, faisant donc apparaître une période T
  - 2) **Période et fréquence**
  - 3) Fréquence vs pulsation/fréquence angulaire/vitesse angulaire
  - Examples : s = cos(t) et s = cos(2πt)

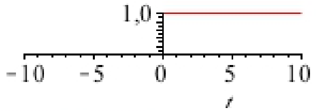
Les signaux

- Signaux déterministes à temps continu
  - la valeur du signal est connue à chaque instant
  - on modélise souvent un signal d'information ou le comportement d'un système par un signal déterministe

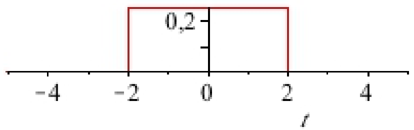
$$s_{\sin} := t \rightarrow \sin(2\,\pi f t)$$



$$s_H := t \rightarrow \mathrm{Heaviside}(t) \quad \text{où} \quad \mathrm{Heaviside} := t \rightarrow \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t \end{cases}$$



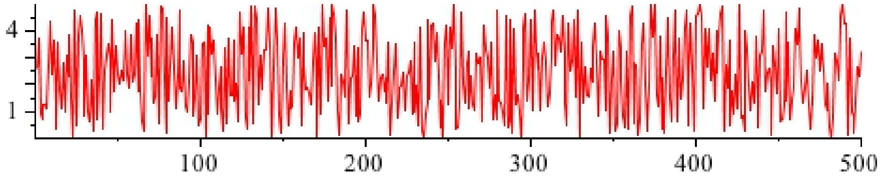
$$\Pi_a := t \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a} & -\dfrac{1}{2}\,a \le t \textbf{ and } t < \dfrac{1}{2}\,a \\ 0 & \mathit{otherwise} \end{cases}$$



a=4

- **Signaux aléatoires --> paramètres statistiques**
  - on prédit seulement, avec un «degré de confiance» ou probabilité, la valeur que va prendre le signal
  - le bruit dans les mesures est souvent un signal aléatoire

- **Signaux réels : signal déterministe + signal aléatoire**



Les signaux, autres exemples ?

- Signaux déterministes à temps continu
  - Signaux définis par morceaux, ex Heaviside (échelon)
  - Signaux définis par des fonctions mathématiques (sin, cos, ln, exa, etc.)
  - Signaux produits pas des systèmes (instruments de musique, machines, activité humaine, etc.)

Les signaux, autres exemples ?

- Signaux déterministes à temps continu
  - Signaux définis par morceaux, ex Heaviside (échelon)
  - Signaux définis par des fonctions mathématiques (sin, cos, ln, exa, etc.)
  - Signaux produits pas des systèmes (instruments de musique, machines, activité humaine, etc.)

- Signaux aléatoires
  - Jeux du hasard
  - Bruits (définition scientifique = aléatoires!)
  - Signaux naturels

- Signaux réels: signal déterministe + signal aléatoire
  - Tout signal réel déterministe produit par l'activité humaine et la nature contient en général une partie déterministe et une partie aléatoire

Les signaux

- Signal déterministe
  - Quand on connaît le passé, la probabilité d'apparition d'un niveau donné à l'instant t est soit nulle, soit certaine (=1)
  - Valeur future exacte du signal

- Signal déterministe : formule définissant parfaitement le signal

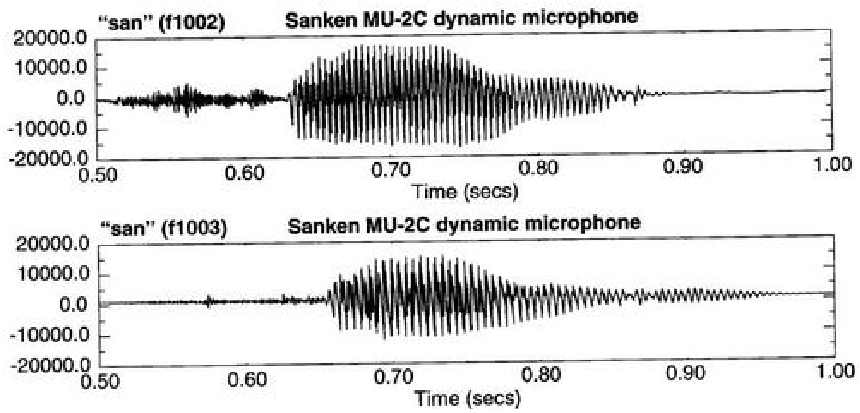
- Signal aléatoire : **paramètres statistiques** définissant les POSSIBILITES d'évolution
  - L'information est liée à un certain degré d'incertitude, d'aléatoire
  - Signaux aléatoires : bruit électronique, le signal de parole...

Les signaux

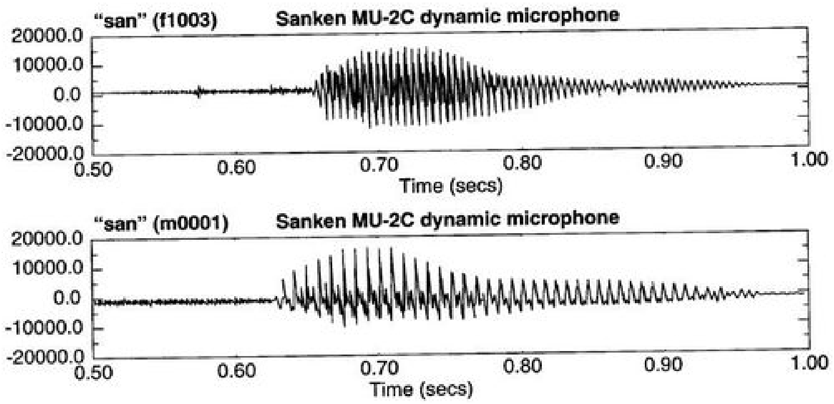
- Paramètres statistiques d’un signal aléatoire :
  - **Moyenne, variance, autocorrélation, moments, ...**

- Ces paramètres peuvent être eux mêmes aléatoires (non stationnaire)
  - Exemple : le signal de parole

Même sons, même personne,
mêmes conditions d’enregistrement

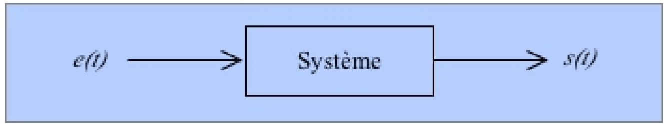


Même son, mêmes conditions d’enregistrement
deux locuteurs différents



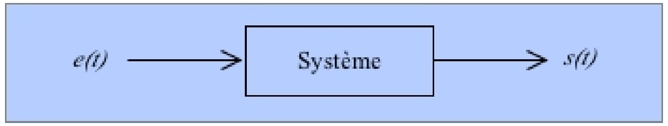
Propriétés des systèmes linéaires invariants

- Un système reçoit un signal d'entrée *e(t)* et délivre un signal de sortie *s(t)*
  - la grandeur physique d'entrée est en général différente de celle de sortie, sauf dans le cas où le système «traite» le signal
  - exemple de système: capteur température, voltmètre, filtre, ...



Propriétés des systèmes linéaires invariants

- Un système reçoit un signal d'entrée *e(t)* et délivre un signal de sortie *s(t)*
  - la grandeur physique d'entrée est en général différente de celle de sortie, sauf dans le cas où le système «traite» le signal
  - exemple de système: capteur température, voltmètre, filtre, ...

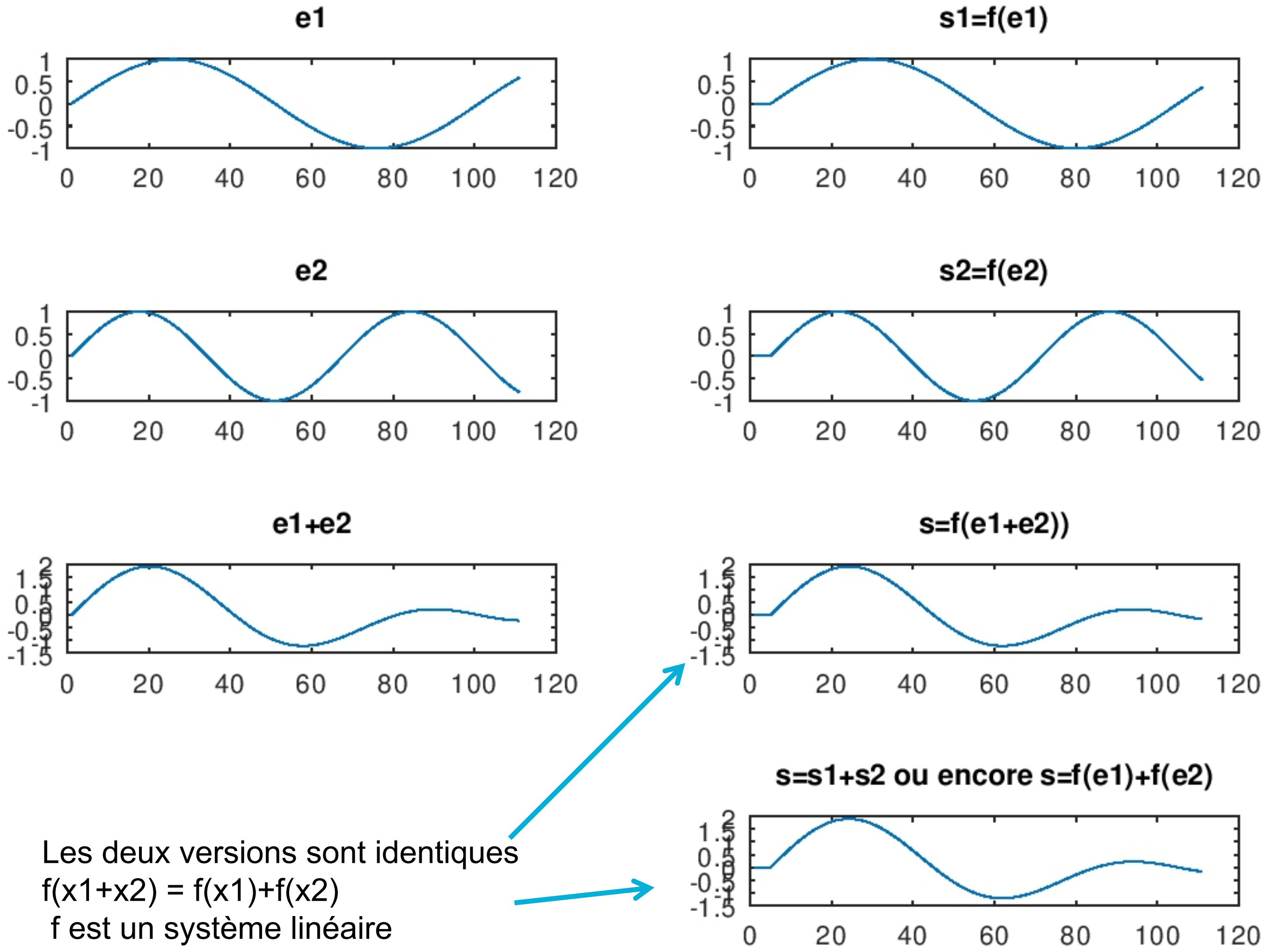


- Invariant
  - les propriétés ne varient pas dans le temps
  - par exemple, les températures ambiante ou de fonctionnement du système n'ont pas d'influence sur sa réponse
- Linéaire
  - le changement d'amplitude, par un certain facteur réel, d'un signal d'entrée induira le même facteur sur l'amplitude en sortie (1)
  - il revient au même de considérer des signaux pris séparément ou l'ensemble de ces signaux (2)
  - un amplificateur est un système linéaire tant qu'il ne fonctionne pas en régime de saturation.

$$\begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R},\ alors\ \alpha e(t) \rightarrow \alpha s(t) \\ e_1(t) \rightarrow s_1(t),\ e_2(t) \rightarrow s_2(t) \quad alors \quad e(t) = e_1(t) + e_2(t) \rightarrow s(t) = s_1(t) + s_2(t) \end{cases}$$

Propriétés des systèmes linéaires invariants

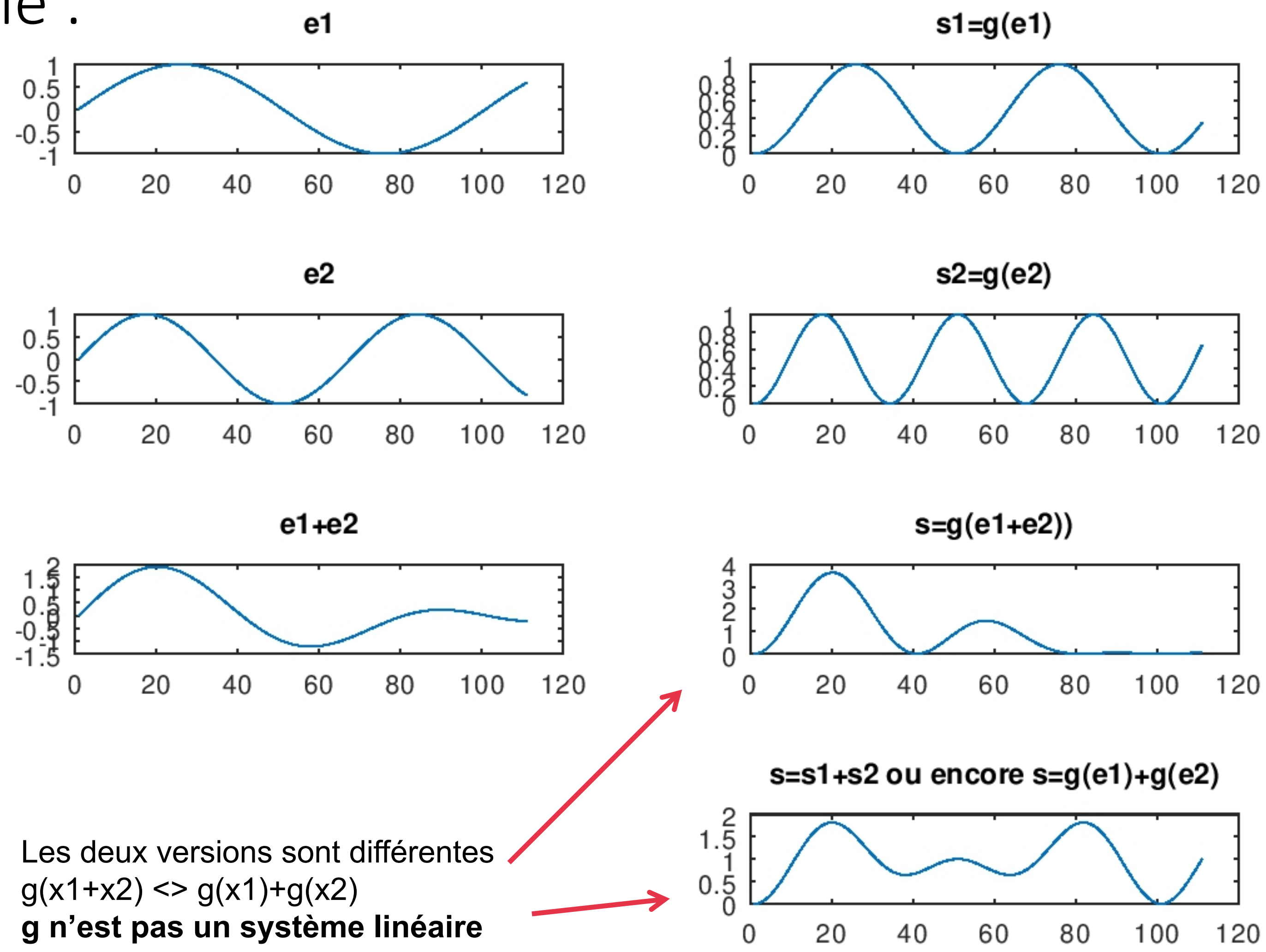
- Exemple :



Les deux versions sont identiques
f(x1+x2) = f(x1)+f(x2)
f est un système linéaire

Propriétés des systèmes linéaires invariants

- Contre-exemple :



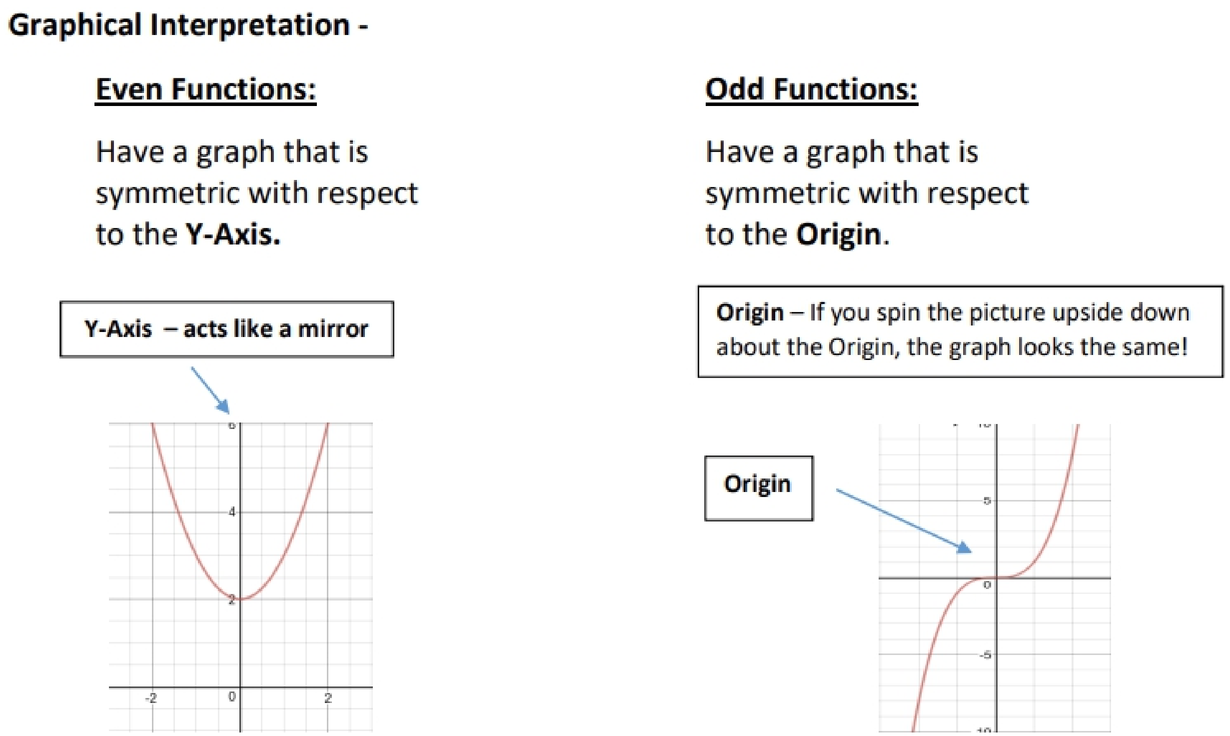
Les deux versions sont différentes
g(x1+x2) <> g(x1)+g(x2)
g n’est pas un système linéaire

Notions mathématiques de base

Parité d'un signal

- **Analyse algébrique :**
  - Signal f(x) est paire si : $f(-x) = f(x)$
  - f(x) impaire si $f(-x) = -f(x)$
  - Toutes les fonctions deterministes peuvent etre décomposées comme comme une somme d'une fonction paire et une impaire !

- **Analyse graphique :**



Parité d'un signal

- Analyse algébrique ou graphique

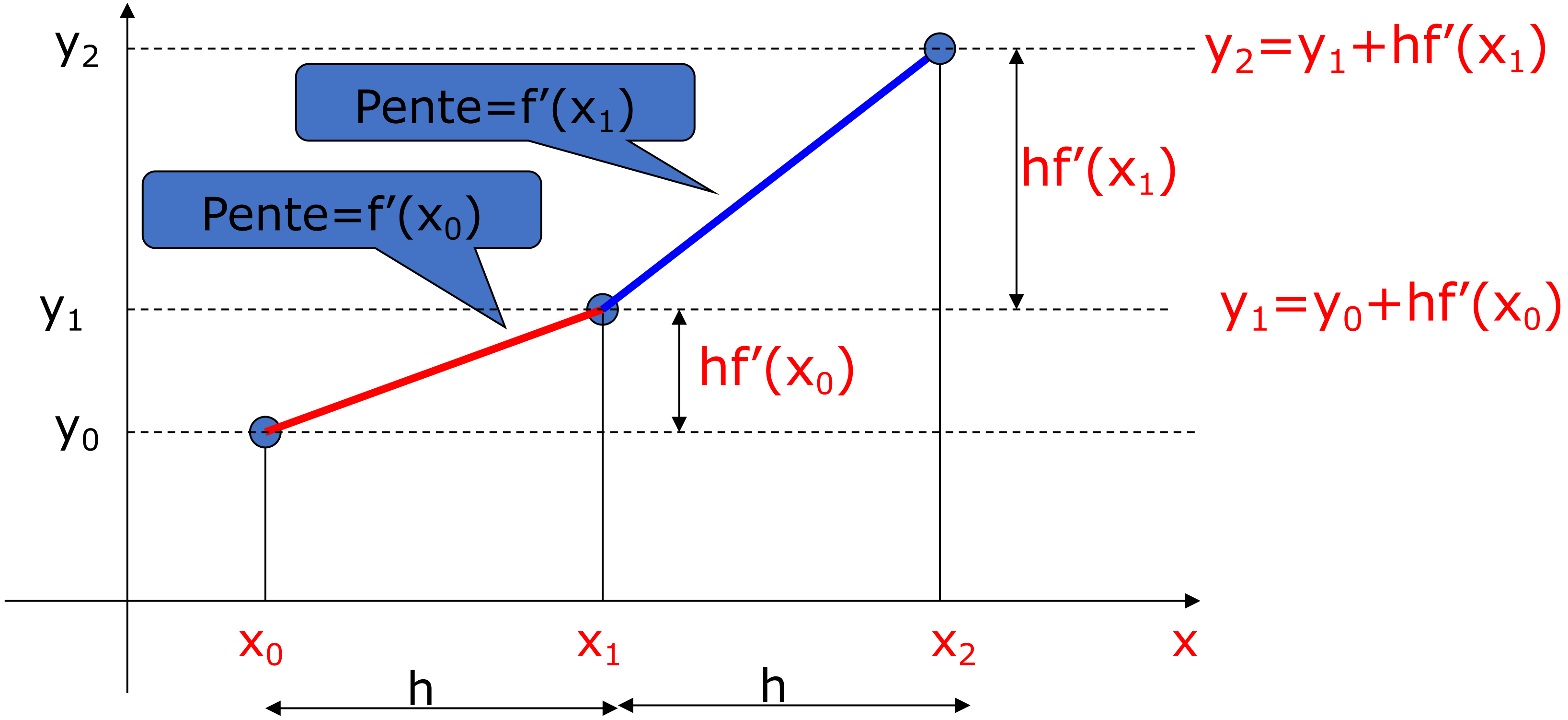
  - Trouver la parité de facon algebrique (essayer de dessiner graphiquement ensuite) :

    1. $f(x) = x^3 - x^2 + 4x + 2$
    2. $f(x) = -x^2 + 10$
    3. $f(x) = x^3 + 4x$
    4. $f(x) = -x^3 + 5x - 2$
    5. $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2} + 4$
    6. $f(x) = |x + 4|$
    7. $f(x) = |x| + 4$
    8. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$
    9. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
    10. $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$

  - Et pour les signaux périodiques ? (e.g. sin(x), cos(x), ...)

Notions de dérivée

- Dérivée des fonctions : notion géométrique <u>et analytique</u>



- La dérivée d'une fonction en un point **mesure la variation** (la pente de la tangente) à la fonction en ce point

Notions de dérivée

- Dérivée est définie comme la limite du **taux de variation** de la fonction sur un point.

- Définition analytiques :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Importance : définit le **taux de variation (croissance/décroissance)** de la fonction/signal

- Quelques examples ...

Notions de dérivée

Quelques exemples :

- 1) Fonctions polynomiales :
- 2) Trigonométriques :
- 3) Exponentielle, logarithmique, ... :

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'	Intervalles de dérivabilité
$f(x) = k$ (constante réelle)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[$ $]-\infty; 0[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$]0; +\infty[$ $]-\infty; 0[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	selon les valeurs de l'exposant α, voir les dérivées précédentes
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ $\left]\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$

Notions de dérivée

Quelques opérateurs importants :

- 1) Règle de la chaîne (composition) : Si $y = f(g(x)), \quad y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- 2) Règle du produit : $(uv)' = u'v + uv'$
- 3) Règle du quotient (division) : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- 4) Calcul de la dérivée avec la définition analytique

(Théorème de l'Hôpital) :

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \pm\infty$$

$$\text{et si } g'(x) \neq 0,$$

$$\text{alors } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

, si le limite de droite existe.

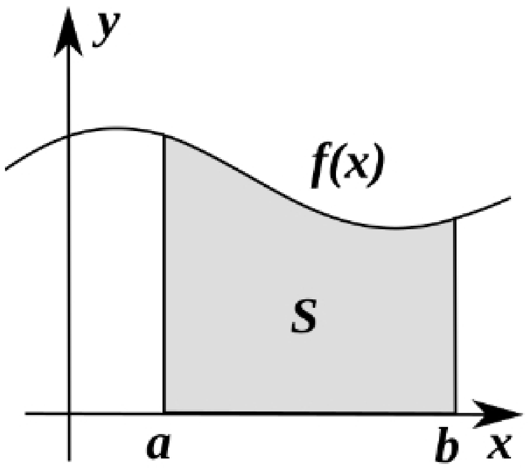
Notions d’intégrale (Riemann)

- **Intégrale :** opération **inverse de la dérivée**

- Trouver une **fonction primitive** F(x) laquelle sa dérivée est la fonction f(x) :

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$



- **Intégrale :** géométriquement c’est l’aire de la fonction/signal

- Quelques exemples :

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Notions d'intégrale (Riemann)

- Intégrale : bien plus complexe que la dérivée (**c'est un art…**)

- Outils importants :

  - 1) **Intégration par parties** (produit des fonctions) : $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

  - 2) **Intégration par substitution** (composition de fonctions) : $u = g(x) \qquad du = g'(x)\,dx$

- Exemple : $\int 2x\cos(x^2)\,dx$

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

$$\begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \end{cases}$$

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \int \cos(u)\,du = \sin(u) + C = \sin(x^2) + C$$

Numéros complexes

- Complex numbers :

$$i \equiv \sqrt{-1} \qquad i^2 = -1$$

Define $z = x + iy$

$$|z|^2 = zz^* = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$$

Polar representation

$$z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi) = \rho\, e^{i\phi}$$

- Functions of complex variables :

$$f(z) = \Re(f(z)) + i\Im(f(z)) \equiv u(x,y) + iv(x,y)$$

- Derivatives: (Cauchy-Riemann equations)

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{\partial u(z)}{\partial x} + i\frac{\partial v(z)}{\partial x} \qquad \frac{\partial f(z)}{i\partial y} = \frac{\partial u(z)}{i\partial y} + i\frac{\partial v(z)}{i\partial y} = \frac{\partial v(z)}{\partial y} - i\frac{\partial u(z)}{\partial y}$$

Argue that $\dfrac{df}{dz} = \dfrac{\partial f(z)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(z)}{i\partial y} \Rightarrow \dfrac{\partial u(z)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(z)}{\partial y}$ and $\dfrac{\partial v(z)}{\partial x} = -\dfrac{\partial u(z)}{\partial y}$

Propriétés des signaux (suite...)

Puissances et énergies des signaux

- Moyenne d'un signal

Moyenne sur un intervalle

Soit un signal $s(t)$ (périodique ou non). Sa valeur *moyenne* sur un intervalle $[t_1\,;\,t_2] \subset \mathbb{R}$ est définie par

$$m(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s(t)\mathrm{d}t$$

Puissances et énergies des signaux

- Moyenne d'un signal

Moyenne d'un signal périodique

Si l'on suppose que $s(t)$ est périodique de période T_p, sa moyenne sur tout l'horizon de temps est égale à sa moyenne sur une une période, à savoir

$$m = \langle s \rangle = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t)\mathrm{d}t, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Il est classique de considérer $t_0 = 0$ ou $t_0 = -\frac{T_p}{2}$.

Puissances et énergies des signaux

- Moyenne d'un signal

Moyenne d'un signal apériodique

Si $s(t)$ st apériodique, l'astuce consiste à considérer qu'il est en fait périodique, mais de période infinie. Il vient :

$$m = \langle s \rangle = \lim_{T_p \to \infty} \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t)\mathrm{d}t$$

Puissances et énergies des signaux

- Energie d'un signal

Énergie d'un signal sur un intervalle

Soit un signal $s(t)$ (périodique ou non). Son *énergie sur un intervalle* $[t_1 ; t_2] \subset \mathbb{R}$ est définie par

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t)\mathrm{d}t$$

Il s'agit d'une notion mathématique.

Puissances et énergies des signaux

- Puissance d'un signal

Puissance instantanée

Soit un signal $s(t)$ (périodique ou non). La *puissance instantanée* de $s(t)$ a déjà été définie par :

$$p(t) = s^2(t).$$

C'est le carré du signal. Elle s'exprime en Watts (W) uniquement si elle correspond à une vraie puissance au sens physique. C'est un signal à part entière.

Puissances et énergies des signaux

- Puissance d'un signal

Puissance moyenne sur un intervalle

Soit un signal $s(t)$ (périodique ou non). La *puissance moyenne* de $s(t)$ sur un *intervalle* $[t_1 ; t_2] \subset \mathbb{R}$ est définie par

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) \mathrm{d}t$$

C'est une moyenne, donc une valeur constante égale à

$$P(t_1, t_2) = \frac{E(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}. \tag{1}$$

Puissances et énergies des signaux

- Un signal dont la **puissance moyenne est finie** et non nulle a une **énergie totale infinie**.

- Un signal à énergie totale finie a une puissance moyenne nulle (sur tout l'horizon de temps).

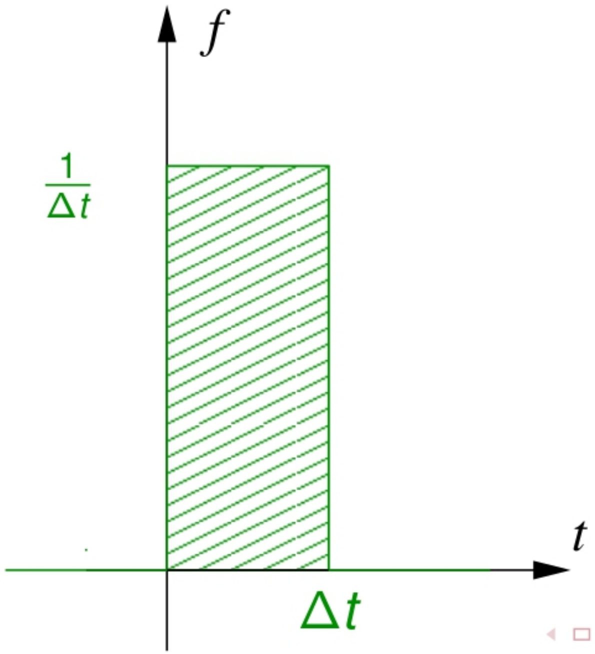
- Si $E < +\infty$, on dit que le signal est à **énergie finie**. En pratique, c'est le cas de tous les signaux physiquement réalisables non-périodiques. Un signal à énergie finie a une puissance moyenne totale nulle.

- **Deux cas courants :**
  - Signaux périodiques : énergie totale infinie, puissance moyenne totale finie
  - Signaux limites dans le temps : énergie totale finie, puissance moyenne totale nulle

Signaux continus et discrets

Signal Impulsion

- Un signal étrange et utile : **Impulsion (ou delta) de Dirac !**
- Soit l'impulsion rectangulaire définissant une surface (hachurée) égale à 1

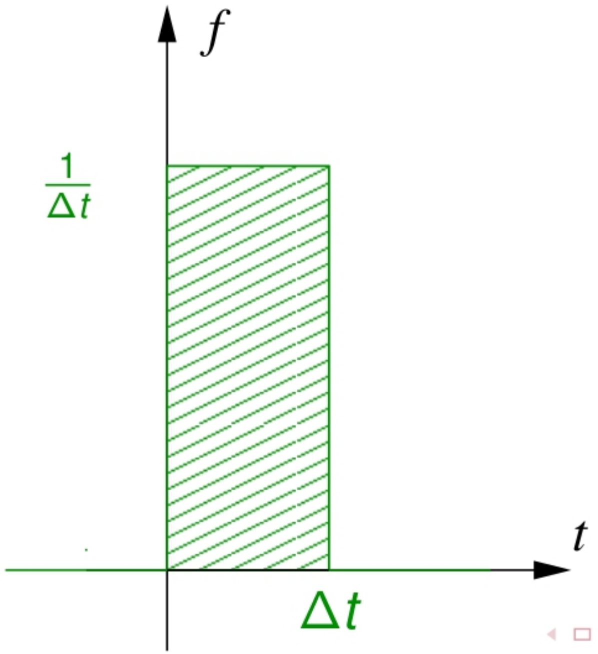


Signal Impulsion

- Un signal étrange et utile : **Impulsion (ou delta) de Dirac !**
- Soit l'impulsion rectangulaire définissant une surface (hachurée) égale à 1

Pour définir l'*impulsion de Dirac*, il faut faire tendre Δt vers 0 et donc $\frac{1}{\Delta t}$ vers l'infini. L'impulsion devient donc infiniment fine, infiniment haute et de surface 1. On note une telle impulsion $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1.$$



Signaux continus et discrets

- Les deux types de signaux temporels :

▸ **Continu :** signal connu à chaque instant t

$$\boxed{x(t) \text{ avec } t \in \mathbb{R}}$$

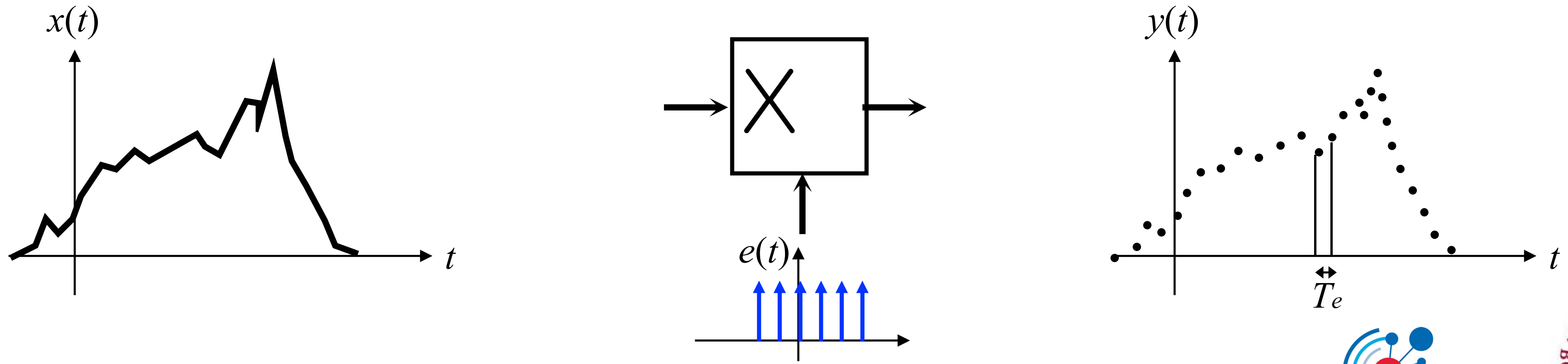
t : temps (souvent exprimé en secondes)
Ex : onde électromagnétique, signal électrique, ...

▸ **Discret :** signal connu uniquement à certains instants t_n

$$\boxed{x_n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}}$$

n : échantillon (sans unité)
Ex : taux de précipitations enregistré chaque jour, cours de la bourse enregistré chaque heure, ...

- **Signal discret :** convolution du signal continu avec une série **impulsions (peigne de Dirac)**



Signaux continus et discrets

On peut distinguer quatre types de signaux en fonction de leur représentation:

le signal continu $e(t)$

le signal échantillonné $e_T[k]$

le signal quantifié $e_q(t)$

le signal discret $e[k]$, signal échantillonné et quantifié