Noções preliminares

> Anotações a partir de Topoi (R. Goldblatt) e "Mini-curso de Introdução à Teoria de Categorias com aplicações à Lógica" (M. Coniglio).

Categorias

Uma categoria C consiste de:

1. Uma coleção O de objetos;
2. Para cada par $\langle A, B\rangle$ de objetos, uma coleção de morfismos (em C) de A em B. Essa coleção denota-se $Hom_C(A, B)$;
3. Uma operação parcial $\circ$ de composição entre morfismos;
4. Para cada objeto A, um morfismo id_A tal que (1) $f \circ id_A = f$; e (2) $id_A \circ g = g$.

Na categoria **Type**, objetos são tipos *nat, list, bool,* etc, morfismos são funções

```
f : A -> B
```

onde A, B são tipos. A função identidade é definida da seguinte maneira

```
Definition id {X : Type} a : X := a.
```

e a composição da seguinte maneira

```
Definition comp
{X Y Z: Type}
(f : X -> Y) (g: Y -> Z) :=
fun a => g (f a).
```

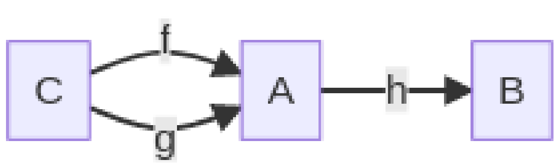
Nesta definição, f vive em $Hom_{Type}(X, Y)$ e g vive em $Hom_{Type}(Y, Z)$.

Monomorfismos

> Generaliza a noção de função injetiva.

Uma flecha $h : A \to B$ é um monomorfismo se e somente se $h \circ g = h \circ f$ implica que $g = f$ para todo $g, f : C \to A$.

Ou seja, se o seguinte diagrama comuta



então $f = g$.

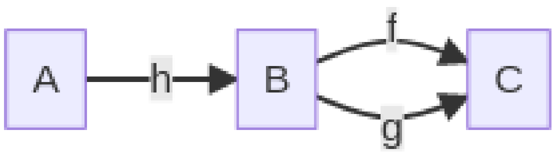
> Um monomorfismo é uma flecha que pode ser cancelada a esquerda da composição.

Epimorfismos

> Generaliza a noção de função sobrejetiva.
>
> Intuição de imagem "suficientemente grande".

Uma flecha $h : A \to B$ é um epimorfismo se e somente se $g \circ h = f \circ h$ implica que $g = f$ para todo $g, f : B \to C$.

Ou seja, se o seguinte diagrama comuta



então $f = g$.

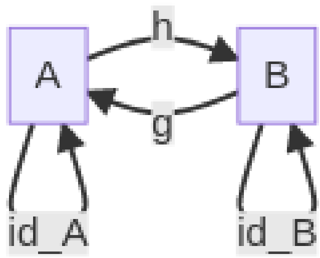
> Um epimorfismo é uma flecha que pode ser cancelada a direita da composição.

Isomorfismos

> Um isomorfismo é uma flecha que possui inversa.
>
> Quais são os critérios suficientes e necessários para existir a inversa de uma função $f : A \to B$? Se f é injetiva mas não é sobrejetiva, então $f^{-1} : B \to A$ não é uma função porque existiriam elementos do domínio B sem imagem em A; por outro lado, se f é sobrejetiva mas não é injetiva, então existiriam elementos do domínio com mais de uma imagem. Então é necessário que f seja tanto injetiva quanto sobrejetiva para possuir inversa. Será suficiente? No caso das funções na categoria **Set**, sim. No caso mais geral de morfismos em quaisquer categorias, não: em certas categorias, existem flechas que são mono e epi mas não são iso.

Uma flecha $h : A \to B$ é um isomorfismo se e somente se existe uma flecha $g : B \to A$ tal que

1. $h \circ g = id_A$; e
2. $g \circ h = id_B$.



De modo geral, g é a inversa de h, representada por h^{-1}.

Objeto inicial

Um objeto x de uma categoria C é inicial se e somente se, para cada objeto y em C, existe uma única flecha $! : x \to y$.

> Usualmente, denota-se o objeto inicial como 0. > Exemplo: o conjunto vazio $\emptyset$ é o único objeto inicial da categoria **Set**.

Objeto terminal

Um objeto x de uma categoria C é terminal se e somente se, para cada objeto y em C, existe uma única flecha $! : y \to x$.

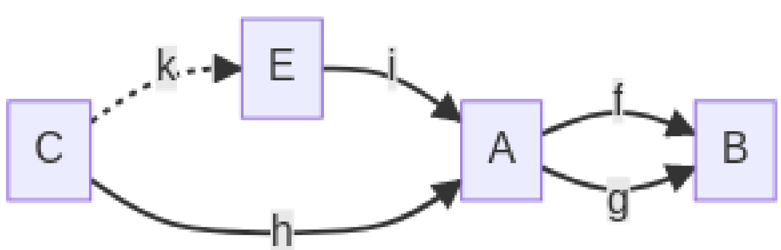
> Usualmente, denota-se o objeto terminal como 1. > Exemplo: na categoria **Set**, existem infinitos objetos terminais (isomorfos): os conjuntos unitários.

Equalizador

> O **maior lugar** em que dois morfismos coincidem.

Sejam $f, g : A \to B$ duas flechas. O equalizador de f e g é um par $\langle E, i \rangle$ tal que

1. A flecha $i : E \to A$ satisfaz $f \circ i = g \circ i$;
2. Se $\langle C, h \rangle$ é tal que $h : C \to A$ satisfaz $f \circ h = g \circ h$ então existe uma única flecha $k : C \to E$ que comuta o diagrama.

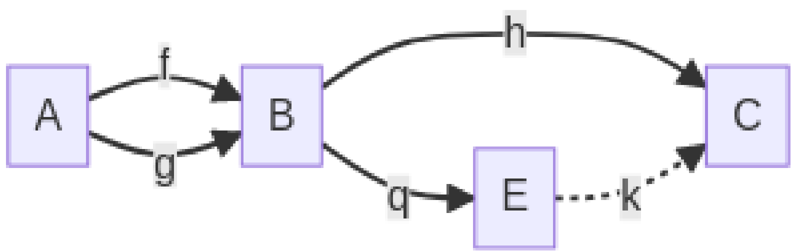


Coequalizador

O menor lugar em que dois morfismos coincidem.

Sejam $f, g : A \to B$ duas flechas. O coequalizador de f e g é um par $\langle E, q\rangle$ tal que

1. A flecha $q : B \to E$ satisfaz $q \circ f = q \circ g$;
2. Se $\langle C, h\rangle$ é tal que $h : B \to C$ satisfaz $h \circ f = h \circ g$ então existe uma única flecha $k : E \to C$ que comuta o diagrama.

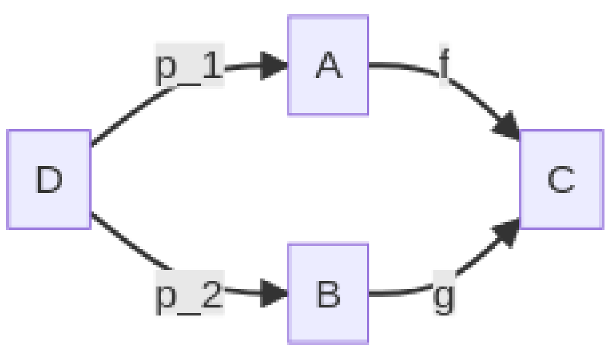


Equalizador e coequalizador são conceitos duais.

Pullback

Produto fibrado.

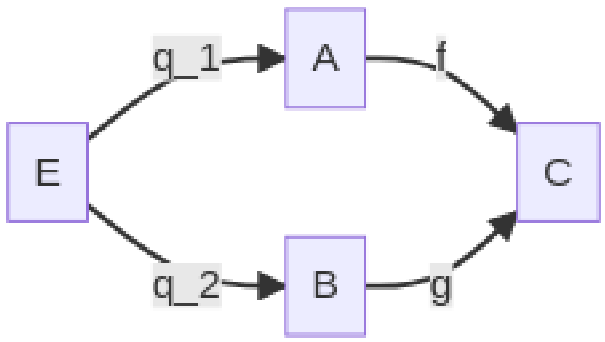
Dado um par de flechas $f : A \to C$ e $g : B \to C$, o seu **pullback** é um par $\langle D, \{p_1, p_2\}\rangle$ sendo $p_1 : D \to A$ e $p_2 : D \to B$ e tal que o diagrama abaixo comuta.



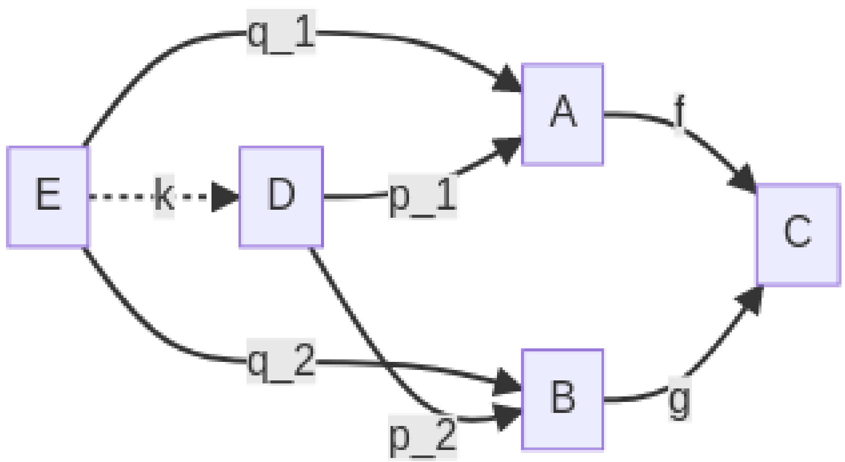
Propriedade universal do pullback

Único a menos de isomorfismo.

Seja $\langle E, \{q_1, q_2\}\rangle$ um par tal que $q_1 : E \to A$ e $q_2 : E \to B$ são morfismos que comutam o diagrama abaixo

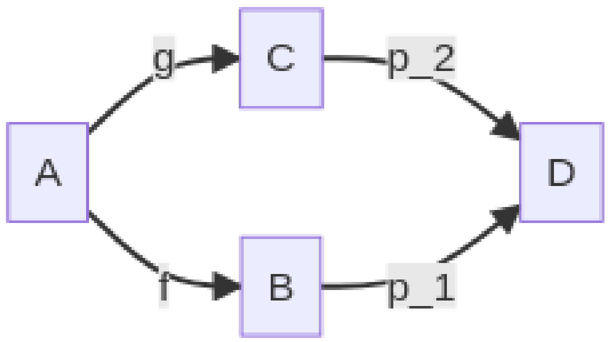


Então existe uma única flecha $k : E \to D$ que comuta o seguinte diagrama:



Pushout

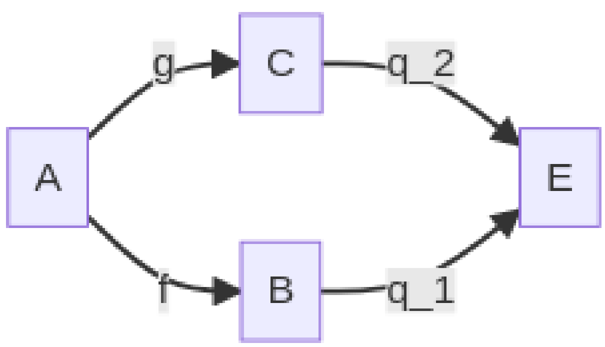
Dado um par de flechas $f : A \to B$ e $g : A \to C$, o pushout desse par é um par $\langle D, \{p_1, p_2\}\rangle$ onde $p_1 : B \to D$ e $p_2 : C \to D$ são flechas que comutam o seguinte diagrama:



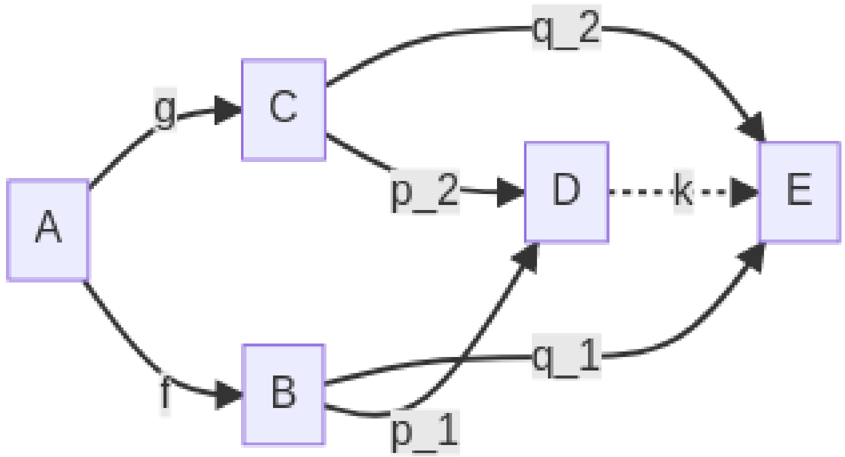
Propriedade universal do pushout

Único a menos de isomorfismo.

Seja $\langle E, \{q_1, q_2\}\rangle$ um par tal que $q_1 : B \to E$ e $q_2 : C \to E$ são morfismos que comutam o diagrama abaixo



Então existe uma única flecha $k : D \to E$ que comuta o seguinte diagrama:

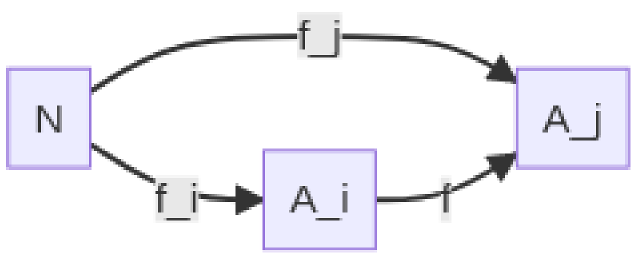


Pullback e pushout são conceitos duais.

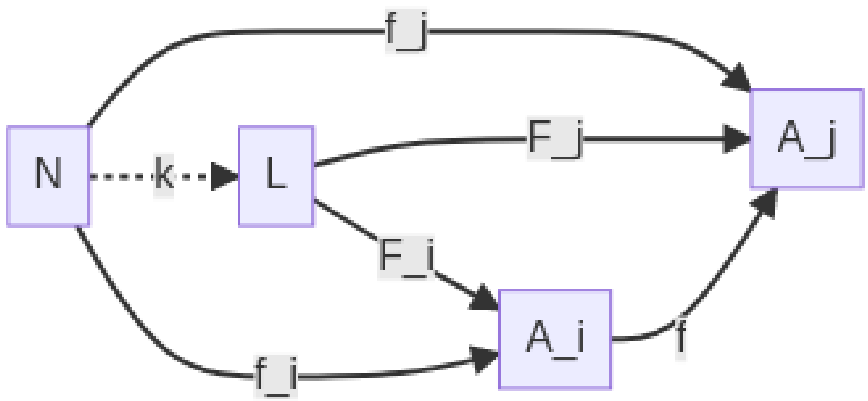
Limite

> Um diagrama em uma categoria C é um par $D = \langle O, M \rangle$ tal que $O = \{A_i\}_{i \in I}$ é uma família de objetos de C e $M \subseteq \bigcup_{i,j \in I} Hom_C(A_i, A_j)$ é um conjunto de morfismos entre objetos de O. (p. 34, apostila)

Um cone para um diagrama $D = \langle O, M \rangle$ numa categoria C é um objeto N de C junto com uma família $\{f_i\}_{i \in I}$ tal que cada $f_i : N \to A_i$ é um morfismo em C que comuta para todo $f \in M$.

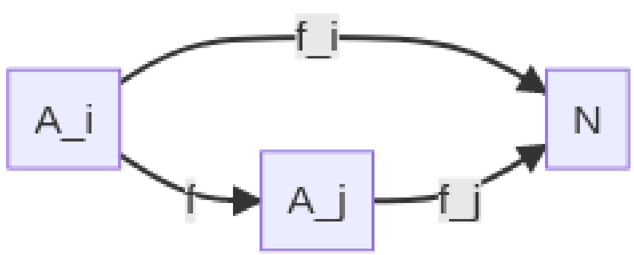


Um limite para um diagrama D é um cone $\langle L, \{F_i\}_{i \in I} \rangle$ tal que, dado qualquer outro cone $\langle N, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$ para o diagrama D, existe uma única flecha $k : N \to L$ tal que $F_i \circ k = f_i$ para todo $i \in I$.

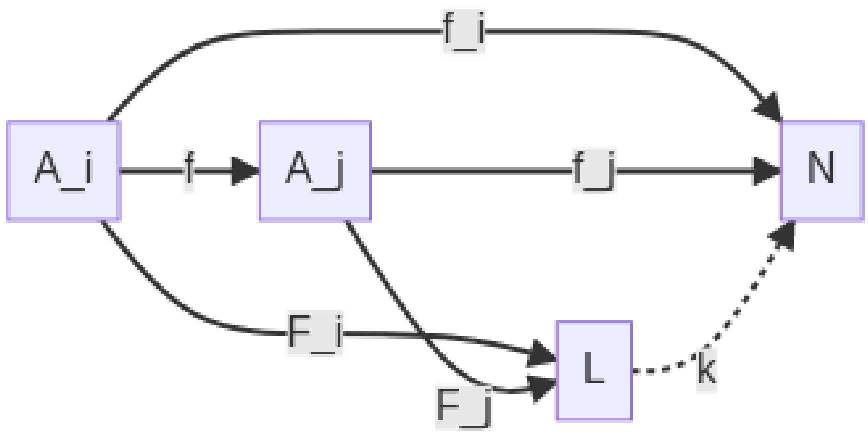


Colimite

Primeiro, definimos o dual do cone. Um *cocone* de um diagrama D é um par $\langle N, \{f_i\}_{i\in I}\rangle$ tal que $f_i : A_i \to C$ é um morfismo em C que comuta o seguinte diagrama:



Um colimite de D é um cocone $\langle L, \{F_i\}_{i\in I}\rangle$ tal que, dado qualquer outro cocone $\langle N, \{f_i\}_{i\in I}\rangle$, existe uma única flecha $k : L \to N$ tal que $k \circ F_i = f_i$ para todo $i \in I$.



Uma categoria C é completa se todo diagrama possui um limite. C é cocompleta se todo diagrama possui um colimite.

Produtos

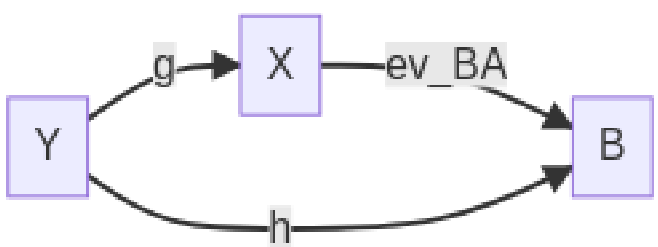
Coprodutos

Exponenciação

Generaliza a noção de "espaço de funções de A em B".

Seja C uma categoria com produtos binários. O exponencial de dois objetos A e B é um par $\langle B^A, ev_{BA} \rangle$, onde $ev_{BA} : B^A \times A \to B$ é tal que, para todo objeto C e flecha $f : C \times A \to B$, existe uma única flecha $\bar{f} : C \to B^A$ tal que $ev_{BA} \circ (\bar{f} \times id_A) = f$. Ou seja, o seguinte diagrama comuta.

Chamaremos o conjunto $B^A \times A$ de X, $C \times A$ de Y e o morfismo $\bar{f} \times id_A$ de g.



Em uma categoria localmente pequena como **Set**, B^A corresponde ao conjunto de todos os morfismos dessa categoria. Isto é, ao conjunto $Hom_C(A, B)$.

Em **Set**, portanto, B^A é o conjunto de todas as funções $f : A \to B$.

Para provar isso, precisamos mostrar que existe uma bijeção entre $Hom(C, Hom(A, B))$ e $Hom(C \times A, B)$.

Uma categoria com exponenciais é uma *categoria cartesiana fechada*.

Funtores

Um funtor F é um morfismo que leva de uma categoria X para outra categoria Y preservando a estrutura original, isto é,

1. Para cada objeto a de X, existe um objeto $F(a)$ correspondente em Y;
2. Para cada morfismo $f : a \to b$, um morfismo $F(f) : F(a) \to F(b)$, tal que:
    1. $F(id_a) = id_{F(a)}$;
    2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, sempre que a composição existe.

Quando $X = Y$, F é um **endofuntor**.

> **id** é um exemplo de endofuntor.

Para ilustrar, considere o tipo parametrizado *Maybe* definido abaixo.

```
Inductive Maybe (X : Type) :=
| Some (a : X)
| None.

Check Some nat 2.
: Maybe nat
```

Observe que *Maybe* não é um tipo, mas um construtor de tipos.

```
Check Maybe.
: Type -> Type
```

Para um morfismo F ser um funtor, além de F mapear objetos (no caso, tipos) de um tipo a outro, F deve mapear todos os morfismos entre os objetos daquele tipo. Por exemplo, seja f um morfismo

```
f : nat -> bool
```

Para isso, definimos a função de ordem superior **fmap** abaixo

```
Definition fmap
{X Y : Type}
(f : X -> Y)
: Maybe X -> Maybe Y :=
fun (a : Maybe X) =>
match a with
| Some _ b => Some Y (f b)
| None _ => None _
end.
```

De modo mais geral, podemos definir a classe dos endofuntores na categoria *Type* da seguinte maneira

```
Class Functor
(X Y : Type)
(f : Type -> Type) :=
{
  fmap2 : (X -> Y) -> f X -> f Y
}.
```

Sendo o funtor Maybe um caso particular (instância)

```
Instance MaybeMap {X Y : Type} :
Functor X Y Maybe :=
{
  fmap2 f a :=
    match a with
    | Some _ b => Some _ (f b)
    | None _ => None _
    end
}.
```

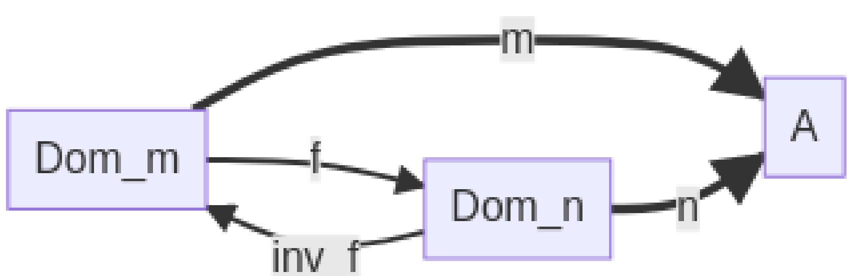
Subobjeto

> Generaliza a noção de subconjunto

Seja C uma categoria e B um objeto de C. Um subobjeto de B é um monomorfismo $m : A \hookrightarrow B$ com codomínio B.

> Fixe um objeto A de uma categoria pequena C. Definimos a seguinte relação no conjunto de monomorfismos com co-domínio A : $m \sim n$ sse existe um isomorfismo $f : Dom(m) \to Dom(n)$ tal que $m = n \circ f$. (p. 43, apostila)

O seguinte diagrama comuta

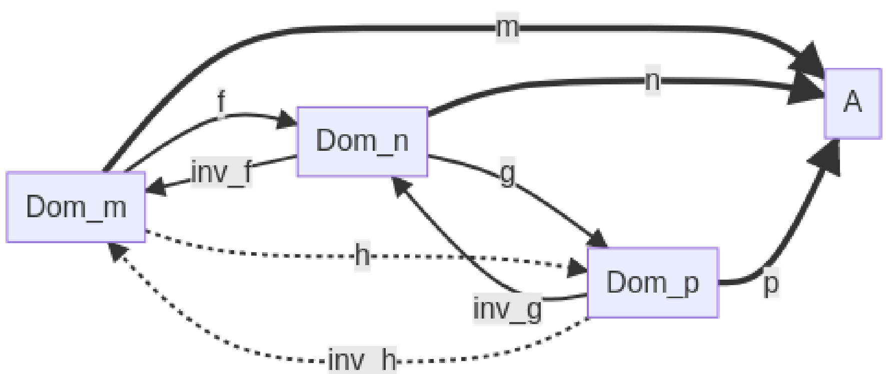


A relação $\sim$ é uma relação de equivalência.

Uma relação de equivalência $\equiv$ possui as seguintes propriedades: 1. $a \equiv a$ (reflexividade); 2. $a \equiv b \Rightarrow b \equiv a$ (simetria); 3. $a \equiv b$ e $b \equiv c$ então $a \equiv c$ (transitividade). $>$ Para todo morfismo m, $m \sim m$ ($\sim$ é reflexivo). Sabemos que $m \sim m$ se e somente se existe um isomorfismo $f : Dom(m) \to Dom(m)$. Tome $f = id_{Dom(m)}$. Sabemos que $id_A^{-1} = id_A$, para todo A. Portanto, $id_{Dom(m)}$ é um isomorfismo. Além disso, $m = m \circ id_{Dom(m)} \Rightarrow m = m$.

Para todo m, n, se $m \sim n$ então $n \sim m$. Assuma que $m \sim n$. Então existe um isomorfismo $f : Dom(m) \to Dom(n)$ tal que (A) $m = n \circ f$. Precisamos mostrar que existe um isomorfismo de $Dom(n)$ a $Dom(m)$. Tome f^{-1} (cuja inversa é f). Precisamos mostrar que (B) $n = m \circ f^{-1}$. Substituindo A em B, temos que $n = (n \circ f) \circ f^{-1} \Rightarrow n = n \circ (f \circ f^{-1}) \Rightarrow n = n$.

Transitividade. Sejam m, n, p três morfismos. Queremos mostrar que, se $m \sim n$ e $n \sim p$ então $m \sim p$. Isso é equivalente a mostrar que existe um isomorfismo $h : Dom(m) \to Dom(p)$ que comuta o diagrama abaixo.

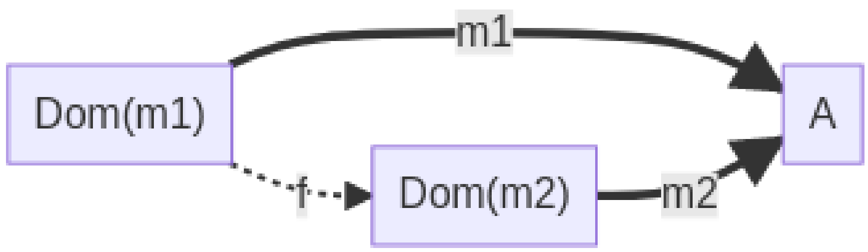


Tome $h = g \circ f$. Claramente, $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, portanto, h é isomorfismo. Resta mostrar que $m = p \circ h$. Sabemos que $m = n \circ f$ e $n = p \circ g$. Fazendo as substituições, obtemos $(p \circ g) \circ f = p \circ h \Rightarrow p \circ (g \circ f) = p \circ h$. Por hipótese, $h = g \circ f$, portanto, $p \circ h = p \circ h$.

Chamaremos de $Sub(A)$ ao conjunto de classes de equivalência $[m]$ de monomorfismos $m : Dom(m) \hookrightarrow A$.

Seja $[m_i] \in Sub(A)$. Para $i = (1, 2)$, dizemos que $[m_1] \leq [m_2]$ sse existe um morfismo $f : Dom(m_1) \to Dom(m_2)$ tal que $m_1 = m_2 \circ f$. Observe que cada m_i é um monomorfismo que sai de $Dom(m_i)$ e vai para A. A flecha f não precisa ser monomorfismo.

Ou seja, o seguinte diagrama comuta.

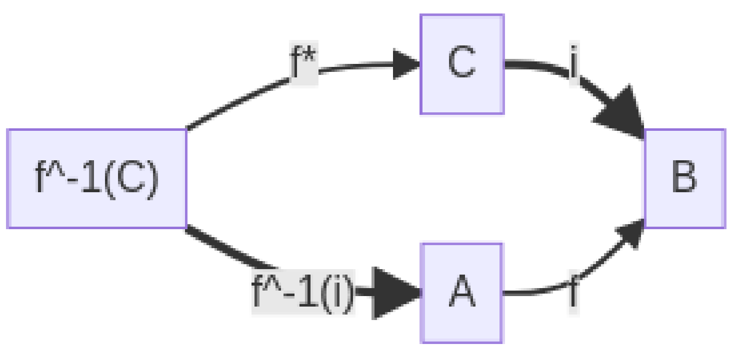


Em particular, temos que $[m_n] \leq [m_n]$, para todo $n \in I$ (tome $f = id_{Dom(m_n)}$, indução em n).

$\langle Sub(A), \leq \rangle$ é uma ordem parcial. Ou seja: reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Anti-simetria: se $[m_1] \leq [m_2]$ e $[m_2] \leq [m_1]$, então $[m_1] = [m_2]$.

$\langle Sub(A), \leq \rangle$ é uma álgebra de Heyting.

Imagem inversa Um subobjeto pode ter imagem inversa. Seja $f : A \to B$ um morfismo e $i : C \hookrightarrow B$ um subobjeto de B, a *imagem inversa de i por f* é o monomorfismo $f^{-1}(i) : f^{-1}(C) \hookrightarrow A$ dado pelo seguinte pullback:



Mostrar que é pullback.

Classificador de subobjetos

A função característica de um conjunto $S \subseteq A$ é uma função $\chi_S : A \to 2$ tal que

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

> Existe uma bijeção entre os subconjuntos S de A [ou seja, $P(A)$] e as suas funções características. (p. 45, apostila)
>
>> Por essa razão, o conjunto das partes é por vezes denotado por 2^A. Lembrando que 2^A corresponde ao conjunto de todas as funções $f : A \to 2$ na categoria **Set**.

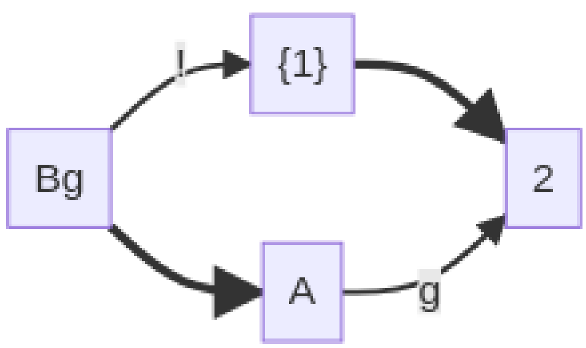
Ainda dentro da categoria **Set**, considere $g : A \to 2$ e defina $B_g = \{x \in A : g(x) = 1\}$, isto é, o conjunto de todos os elementos em A tais que $g(x) = 1$. Nesse caso, a função característica de B_g é a própria g, já que

$$\chi_{B_g}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B_g \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ou seja: mesmos outputs para os mesmos inputs.

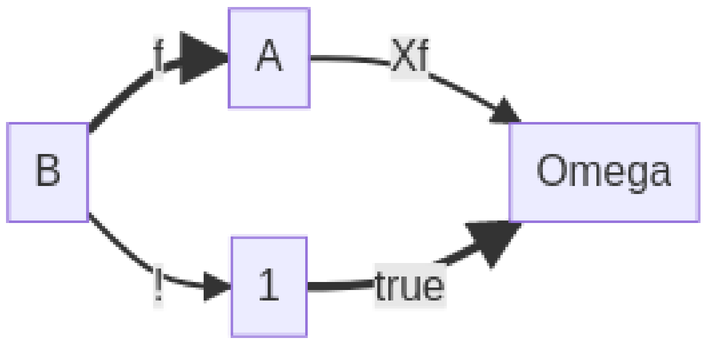
> Para todo $x \in A$, $\chi_{B_g}(x) = 1$ se e somente se $g(x) = 1$. > Por definição, se $g(x) = 1$, então $x \in B_g$. Mas, se $x \in B_g$, então $\chi_{B_g}(x) = 1$. Similarmente para a ida.

Observe que $g^{-1} : 2 \to A$ é uma função que, dado um elemento de $2 = \{0, 1\}$, manda para o elemento de A correspondente de tal modo que $g^{-1} \circ g = id_A$ e $g \circ g^{-1} = id_2$. Dado que $\chi_{B_g} = g$, temos que $B_g = g^{-1}(\{1\})$ [a imagem da inversa da função característica de B_g restrita a $\{1\}$]. Ou seja, o diagrama abaixo é um pullback.



Generalizando para qualquer categoria, obtemos a noção de *classificador de subobjeto*. Seja C uma categoria com objeto terminal $\mathbf{1}$. Um classificador de subobjetos para C é um par $\langle \Omega, true \rangle$ tal que Ω é um objeto de C e $true : 1 \to \Omega$ é um morfismo de C que satisfaz a seguinte propriedade:

> Para cada monomorfismo $f : B \hookrightarrow A$, existe um único morfismo $\chi_f : A \to \Omega$ tal que o diagrama abaixo é um pullback. (p. 46, apostila)



No livro Topoi, essa propriedade é chamada de *Axioma* Ω (p. 81). A flecha χ_f é chamada de flecha característica do monomorfismo f.

Topos

> pp. 49-50, apostila.

Um **topos** é uma categoria C que satistaz as seguintes condições:

1. C é finitamente completa.
2. C é finitamente cocompleta.
3. C tem classificador de subobjetos.
4. C tem exponenciação.

ou

1. C tem objeto terminal.
2. C tem pullback
3. C tem classificador de subobjetos.
4. C tem exponenciação.

Além disso,

> Uma categoria C é um topos se e somente se C é cartesiana fechada e tem classificador de subobjetos.
>
> **Teorema fundamental dos topos**. Se C é um topos e $A \in |C|$, então $C \downarrow A$ é um topos.

Reticulado

Um reticulado é um conjunto R equipado com duas operações binárias, **meet** ($a \sqcap b$) e **join** ($a \sqcup b$), com relação as quais valem as seguintes identidades para todos elementos $a, b, c \in R$:

Comutatividade

1. $a \sqcap b = b \sqcap a$;
2. $a \sqcup b = b \sqcup a$;

Associatividade

3. $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$;
4. $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$;

Absorção

5. $a \sqcup (a \sqcap b) = a$;
6. $a \sqcap (a \sqcup b) = a$;

Idempotência

7. $a \sqcup a = a$;
8. $a \sqcap a = a$.

Ordem

Uma ordem em um reticulado R é uma relação entre elementos a, b de R, denotada por $a \sqsubseteq b$ (a é menor ou igual a b). Essa relação respeita os seguintes axiomas.

1. $\forall a : a \sqsubseteq a$ [Reflexividade]
2. $\forall a, b : a \sqsubseteq b \wedge b \sqsubseteq a \rightarrow a = b$ [Anti-simetria]
3. $\forall a, b, c : a \sqsubseteq b \wedge b \sqsubseteq c \rightarrow a \sqsubseteq c$ [Transitividade]

Álgebra de Heyting

(cap. 8)

Proposta em 1930 por Arend Heyting, trata-se de um sistema axiomático da lógica proposicional que gera como teoremas aquelas, e apenas aquelas, "sentenças que são válidas de acordo com a *concepção intuicionista da verdade*" (p. 177).

> (p.177-178, sec 8.2) > Of course the intuitionist only accepts formal systems as **imperfect tools** for description and communication. He leaves open the possibility that his intuitive deliberations will one day reveal as yet unheard of principles of reasoning. According to Heyting, 'in principle it is impossible to set up a formal system which would be equivalent to intuitionist mathematics … it can never be proved with mathematical rigour that the system of axioms really embraces every valid method of proof.'

Limite superior e limite inferior

Primeiro, precisamos ampliar o sentido da relação $\sqsubseteq$, que foi definida anteriormente apenas para pares de elementos. Nesse contexto, $x \sqsubseteq y$ denota **y é maior que x** (ou **x é menor ou igual a x**). Na extensão que será feita nesta seção, permitiremos que os parâmetros sejam conjuntos. Queremos que $A \sqsubseteq x$ denote **x é limite superior do conjunto A** e $x \sqsubseteq A$ denote **x é limite inferior do conjunto A**. Para isso, quantificaremos sobre o conjunto de elementos.

Seja A um sub-conjunto de um reticulado $R = (L, \sqsubseteq)$ e x um elemento de R. Definimos:

1. **Limite superior** ($A \sqsubseteq x$)

$$\forall y(y \in A \to y \sqsubseteq x)$$

2. **Limite inferior** ($x \sqsubseteq A$)

$$\forall y(y \in A \to x \sqsubseteq y)$$

A partir dessa extensão, poderemos definir limite superior mínimo e limite inferior máximo.

> Seja A um subconjunto de um reticulado $R = (L, \sqsubseteq)$, e $x \in L$. Dizemos que x é um **limite superior** de A ($A \sqsubseteq x$), se, para todo $y \in A$, $y \sqsubseteq x$. > Ou seja, x é limite superior de A se x for limite superior de todos os elementos de A.

Se, além disso, $x \sqsubseteq z$ para todo $A \sqsubseteq z$ (ou seja, todo limite superior de A é um limite superior de x), então x é minimal, que chamaremos de **limite superior mínimo** (l.s.min).

> Diremos que x é o **maior elemento** de A se $x \in A$ e x é l.s.min de A.

Exercícios

Exercício 1

> *A possui no máximo um limite superior mínimo.* >**Prova:** Supõe que x é um limite superior mínimo de A. Então, além de $A \sqsubseteq x$, x é minimal. Agora supõe que existe outro limite superior mínimo de $A \sqsubseteq x'$. Por definição, para todo $A \sqsubseteq z$, temos que $x' \sqsubseteq z$. Como $A \sqsubseteq x$, temos que $x' \sqsubseteq x$. De maneira análoga, como x é minimal, temos que $x \sqsubseteq x'$. Logo, $x = x'$ (por anti-simetria).

Exercício 2

> Defina **limite inferior máximo**. >Seja A um sub-conjunto de um reticulado $R_L = (L, \sqsubseteq)$ e $x \in L$. Diremos que $x \sqsubseteq A$ (x é um limite inferior de A) se, e somente se, $x \sqsubseteq y$ para todo $y \in A$. Se, além disso, $z \sqsubseteq x$ para todo $z \sqsubseteq A$, então x é um limite inferior máximo.

Exercício 3

> *Um limite inferior máximo de A é o maior elemento do conjunto de limites inferiores de A.* > **Prova:** Seja x um limite inferior máximo de A. Precisamos mostrar que (1) x é um elemento do conjunto de limites inferiores de A (chamaremos de Ω); e (2) x é l.s.min de Ω. Como x é l.i.max de A, em particular x é um limite inferior de A e, portanto, temos que $x \in \Omega$. Resta mostar que x é l.s.min de Ω, ou seja: (2.a) $\Omega \sqsubseteq x$; e (2.b) $\forall z$, se $\Omega \sqsubseteq z$, então $x \sqsubseteq z$. Sabemos que $\Omega \sqsubseteq x$ sse $y \sqsubseteq x$ para todo $y \in \Omega$. Por definição, x é o l.i.max de A; logo, para todo limite inferior de A (chamemos de z), vale que $z \sqsubseteq x$. Ora, Ω é justamente o conjunto de limites inferiores de A, portanto, para todo $x' \in \Omega$, temos que $x' \sqsubseteq x$ (2.a).

Exercício 4

> Defina o **menor elemento** de A. > Diremos que x é o **menor elemento** de A se: > 1. $x \in A$; > 2. x é l.i.min de A.
>
> Exemplo: considere o reticulado conjunto das partes de X $(P(X), \subseteq)$. Nesse reticulado, o menor elemento é o conjunto vazio ($\emptyset$); e o maior elemento é X.

Complemento

O **complemento** (ou **pseudo-complemento**, já que pode ser uma operação não-booleana [a depender do reticulado]) de um elemento a de um reticulado $R = (L, \sqsubseteq)$, denotado por $\bar{a}$, é o maior elemento disjunto de a:

$$\bar{a} = max(x \in L \mid a \sqcap x = 0)$$

> Isso implica que, no exemplo do reticulado do conjunto das partes, $A \cap \bar{A} = \emptyset$ [porque disjunto] e, sempre que $A \cap B = \emptyset$, então $B \subseteq \bar{A}$ [porque maximal].

Um reticulado R tal que todo elemento de R possui um pseudo-complemento é um **reticulado pseudo-complementado**.

Exercício 5

> b é o maior disjunto de a precisamente quando b satisfaz a condição:

(C) $\forall x \in L, x \sqsubseteq b \Leftrightarrow a \sqcap x = 0$.

> Supõe que b satisfaz a condição (C). Então temos que mostrar que b é o maior disjunto de a. Considere o conjunto Ω de todos os $x \sqsubseteq b$, isto é, o conjunto dos limites inferiores de b. Por definição, b é um limite superior de Ω. Para obter minimalidade, observe que $\sqsubseteq$ é transitivo. Portanto, b é l.s.min de Ω. Como, além disso, $b \in \Omega$, temos que b é o maior elemento de Ω, por definição. Além disso, por hipótese ($\Leftarrow$), todos os disjuntos de a estão no conjunto b. Portanto, b é o maior disjunto de a.

Exemplos Dados $A, B \in D$, definimos

1. Complemento: $\bar{A} = \{x \mid x \in D \text{ e } x \notin A\}$
2. Intersecção: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$
3. União: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

O conjunto das partes $P(D)$, junto com as operações $\cap, \cup, \bar{}$, "exibem a estrutura daquilo que entendemos por ... Álgebra booleana" (cap. 6, pag. 125)

> These algebras, to be defined shortly, are intimately connected with the classical account of logical truth. (p. 125)

No reticulado do conjunto das partes $R = (P(D), \subseteq)$, $\bar{A}$ é o pseudo-complemento de A. Para provar isso, temos que mostrar que, para todo elemento x de $P(D)$, se x está contido no complemento de A, então x é disjunto de A. Além disso, se x é disjunto de A, então x está contido no complemento de A ($\bar{A}$ é maximal). Ou seja:

$$\forall x \in P(D), x \subseteq \bar{A} \Leftrightarrow A \cap x = \emptyset$$

> Assuma que $x \subseteq \bar{A}$. Nesse caso, todo elemento de x está em $\bar{A}$. Pela definição de complemento, $\bar{A}$ não possui nenhum elemento de A. São, portanto, disjuntos. Por definição de sub-conjunto, não existe nenhum elemento em x além daqueles que estão em $\bar{A}$; em particular, não existe nenhum elemento de A em x, isto é, x e A também são disjuntos. Para a volta, assuma que $A \cap x = \emptyset$. Observe que o complemento contém todos os elementos que não estão em A, já que pega todos os elementos do universo (D) que não pertencem a A. Portanto, se A é disjunto de x, então x deve estar contido em $\bar{A}$.

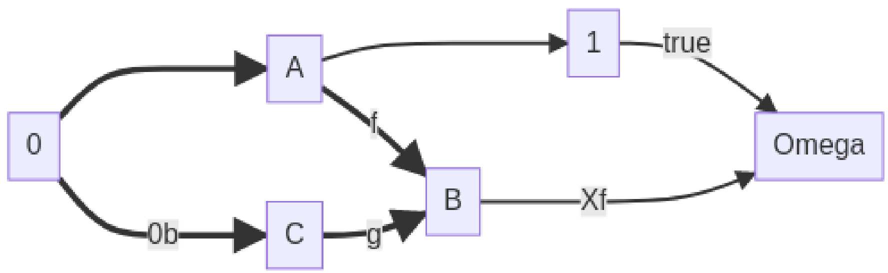
Sub(A)

> p. 180[197]

Em $Sub(A)$ de qualquer topos, o pseudo-complemento de um morfismo $f : A \to B$ é um morfismo $\bar{f} : \bar{A} \to B$.

Para provar isso, precisamos mostrar que $g \subseteq \bar{f}$ sse $f \cap g \simeq 0_B$

Supõe que $f \cap g \simeq 0_B$. Isso é o mesmo que dizer que o diagrama formado pelas flechas em negrito é um pullback.



Definição formal

A noção de pseudo-complemento pode ser generalizada para qualquer b. O **pseudo-complemento de a relativo a b**, também conhecido como $a \Rightarrow b$, é definido como o maior c tal que $a \sqcap c \sqsubseteq b$.

> Um reticulado com pseudo-complemento relativo é chamado de reticulado pseudo-complementado (r.p.c)

Observe que o pseudo-complemento de a é o r.p.c de a relativo a $\perp$ (isto é, $a \Rightarrow \perp$). Contudo, a definição de r.p.c não requer a existência de $\perp$ no reticulado.

> Uma **álgebra de Heyting** (**AH**) é um reticulado r.p.c $\Omega = \langle H, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup \rangle$ com $\perp$, onde $\neg, \Rightarrow$ são funções $H \to H$ tais que - $a \Rightarrow b = max\{x \mid a \sqcap x \sqsubseteq b\}$ - $\neg a = (a \Rightarrow \perp) = max\{x \mid a \sqcap x = \perp\}$ - $a \sqcap b = max\{x \mid x \sqsubseteq a \text{ e } x \sqsubseteq b\}$ - $a \sqcup b = min\{x \mid a \sqsubseteq x \text{ e } b \sqsubseteq x\}$

Uma álgebra de Heyting é **completa** (**AHC**) quando todo subconjunto de Ω possui l.s.max e l.i.min. Em particular, como sabemos, Ω é subconjunto de si próprio, e portanto possui l.s.max, o qual chamaremos de $\top$.

Além das leis usuais de um reticulado (listadas na seção sobre reticulados), observe que, em uma álgebra de Heyting, $\perp$ é o neutro do $\sqcup$ e $\top$ o neutro do $\sqcap$. Isto é, valem as seguintes identidades para qualquer a

- $a \sqcap \top = a$
- $a \sqcup \perp = a$

> Para Ω ser booleana é suficiente que valide $a \Rightarrow b = \neg a \sqcup b$. Observe que, se isso é o caso, então $a \Rightarrow a$ seria igual a $\neg a \sqcup a$. Mas $a \Rightarrow a = \top$ e, portanto, Ω validaria o princípio do terceiro excluído.

Conjuntos Heyting-valorados

Linguagem

Alfabeto

Lembramos que, usualmente, em uma linguagem de primeira ordem temos o seguinte alfabeto.

1. Um conjunto enumerável $\{v_1, v_2, ...\}$ de variáveis;
2. Um conjunto de constantes $\{a, b, c, \dots, a_1, \dots, b_2, ...\}$;
3. Conectivos proposicionais $\wedge, \vee, \sim, \supset$;
4. Símbolos de quantificação $\forall, \exists$;
5. Um conjunto de símbolos relacionais $\{R_0, R_1, ...\}$;
6. Um conjunto de símbolos funcionais $\{f_0, f_1, ...\}$
7. Símbolo de identidade $\approx$;
8. Parênteses), (.

A partir do qual as sentenças são construídas da maneira usual.

Semântica algébrica

Podemos providenciar uma semântica intuicionista para a lógica intuicionista proposicional (IL) a partir de uma álgebra de Heyting Ω. Para isso, mapeamos os conectivos da linguagem para os operadores do reticulado e dizemos que uma sentença A é Ω-válida ($[[A]]_\Omega$) quando $[[A]]_\Omega = \top$ para toda valoração $[[\cdot]]$. Partindo dessa caracterização, obtemos correção e completude com relação a IL, isto é,

$$[[A]]_\Omega \text{ se e somente se } \vdash_{IL} A$$

Para mais detalhes, [Goldblatt, p. 185].

Na seção 8.9, Goldblatt explora os Ω-conjuntos. Como veremos, os Ω-conjuntos formam uma categoria. Mais do que isso, são um topos a partir do qual podemos definir uma semântica para os quantificadores.

Dois princípios

> (cap. 11, sec. 9, pp. 274–..).

(A) Tudo que é igual a algo que existe, existe

> To be equal is to be.

Seja C um topos e $c \in |C|$ um objeto de C. Podemos compreender c como um objeto "set-like" **parcialmente existente** (*partially existent*) ou como **realmente existente** (*actually existent*). O fato de que o objeto c é **realmente existente** é expresso por $\mathbf{E(c)}$

1. $\mathbf{E(c)} \equiv \exists v(v \approx \mathbf{c})$

Ou seja, “tudo que é igual a algo que existe, existe”.

> Observe que **E** é um predicado e a variável ligada v na expressão varia entre os elementos parcialmente existentes de um conjunto Ω. Como veremos mais tarde, esse conjunto admite uma álgebra de Heyting.

O segundo princípio formalizado por Goldblatt é

(B) Igualdade implica existência

É necessário que dois elementos existam para que eles possam ser iguais um ao outro.

Em outras palavras, “igualdade implica existência”. Formalizando:

2. $v \approx w \supset E(v) \wedge E(w)$

Podemos derivar (A) a partir de (B). Tome $v = w$ em (2),

$$v \approx v \supset E(v) \wedge E(v) \tag{1}$$

$$v \approx v \supset E(v) \tag{2}$$

Por essa razão, chamaremos $\approx$ de **equivalência forte** ou simplesmente **igualdade**.

Dois sentidos para “sameness”

Bicondicional $\equiv$. Relação entre fórmulas.

$$A \equiv B \Leftrightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A)$$

Onde A e B são fórmulas válidas.

Equivalência enfraquecida $\approxeq$. Relação entre objetos. Dois elementos v e w são **fracamente equivalentes** quando: **(a)** nenhum deles existe; ou **(b)** quando ambos existem e são iguais.

3. $v \approxeq w \equiv (E(v) \vee E(w) \supset v \approx w)$

> Essa noção de equivalência enfraquecida “não diferencia os elementos com respeito a sua inexistência”. Se dois elementos não existem eles são fracamente equivalentes.

Equivalência forte entre v e w implica existência real de ambos. Além disso, implica a equivência fraca, por (3). Observamos também que equivalência fraca e existência real de v e w implica equivalência forte, por (2) e (3).

Em suma, $\approx$ e $\approxeq$ são duas relações simétricas: é possível descrever a igualdade em termos da equivalência fraca (assumindo existência forte).

4. $v \approx w \equiv (v \approxeq w) \wedge (E(v) \wedge E(w))$

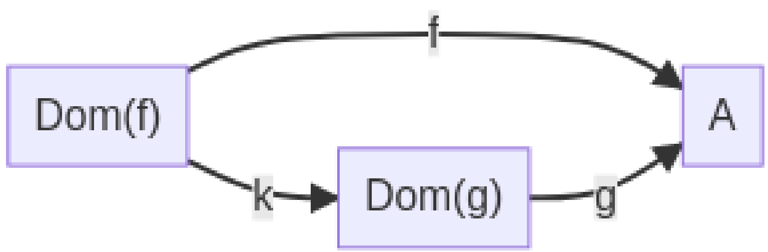
Ou seja, dois elementos v e w são idênticos se, e somente se, ambos existem e são fracamente equivalentes.

Exemplos

Bn(I)

> Observe que $Bn(I) = Set \downarrow I$, onde $Set \downarrow I$ denota a categoria onde os objetos são os morfismos $m : A \to I$ da categoria **Set** (ou seja, os morfismos de **Set** com co-domínio I). Como **Set** é um topos, pelo teorema fundamental dos topos, $Bn(I)$ é um topos.

Categoria dos bundles (fibrados). Objetos são funções $f : A \to I$. Um morfismo $\bar{k} : f \to g$ entre um objeto f e outro objeto g é uma função $k : Dom(f) \to Dom(g)$ tal que o diagrama abaixo comuta:



> Objetos de $Bn(I)$ são famílias de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ disjuntos dois a dois. (p. 51, Apostila)

Sejam f e g dois elementos parciais de um bundle $A \to I$ sobre um conjunto I. Seja $A = \{A_i \mid i \in I\}$. Definimos a medida de igualdade entre f e g como o conjunto

$$[[f \approx g]] = \{i \in I \mid f(i) = g(i)\}$$

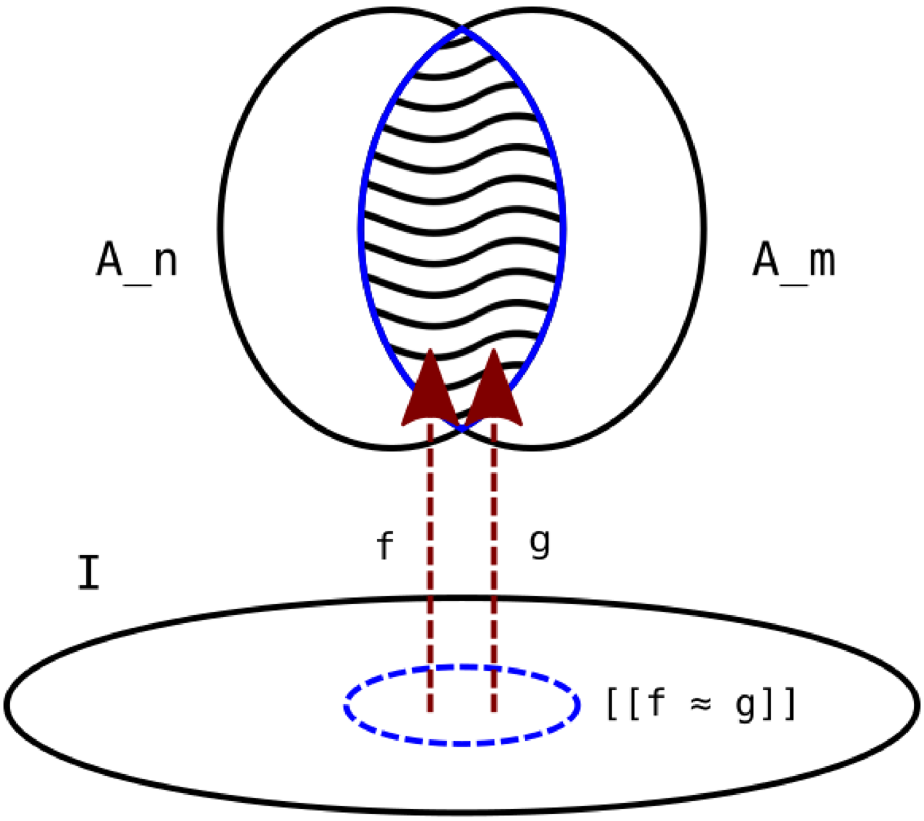


Figura 1. - Medida de igualdade entre objetos de um bundle.

Como ilustrado pela **Figura 1**, os morfismos f e g são iguais na medida em que suas imagens coincidem. Ou seja, em um extremo, $A_n = A_m$ e f e g são, portanto, iguais. No outro extremo não existe ponto de contato entre f e g, isto é, $A_n \cap A_m = \emptyset$ e $[[f \approx g]] = 0$. Observe que

$$[[f \approx g]] \subseteq Dom(f) \cap Dom(g)$$

Ou seja, o conjunto de $i \in I$ nos quais f e g coincidem pega exclusivamente aquele i que pertence simultaneamente aos domínios de f e g. Além disso,

$$[[f \approx g]] \subseteq [[E(f)]] \cap [[E(g)]]$$

E, portanto,

$$[[f \approx f]] = \{i \in I \mid f(i) = f(i)\} = Dom(f) = [[E(f)]]$$

Em outras palavras, $[[f \approx f]]$ é a própria medida de existência de f. Para obter a equivalência fraca, observamos primeiro que $\bar{A} \cup B = A \Rightarrow B$ em $P(I)$. Então aplicamos (3) e obtemos

$$[[v \approxeq w]] = \overline{(Dom(f) \cup Dom(g))} \cup [[f \approx g]]$$

que é equivalente a

$$\overline{([[E(f)]] \cup [[E(g)]])} \cup [[f \approx g]]$$

Isto é, f e g são fracamente equivalentes se e somente se nenhuma delas existe (não podem ser definidas) ou podem ser definidas e concordam (são fortemente equivalentes).

Top(I)

Conjuntos Ω-valorados

p. 276-..

Um conjunto Ω-valorado é um par $\langle A, [[\cdot]]\rangle$, onde A é uma coleção de elementos parciais, e $[[\cdot]]$ uma medida alébrica Heyting-valorada do grau de igualdade (*equality*) entre cada $x, y \in A$.

A medida dessa igualdade é expressa, em uma álgebra de Heyting completa, pelo valor de verdade denotado por

$$[[x \approx y]]_A$$

Essa função possui algumas restrições, como veremos a seguir. Antes, fazemos o seguinte lembrete.

> Uma Álgebra de Heyting Completa (**AHC**) é uma álgebra de Heyting na qual todo sub-conjunto $A \subseteq \Omega$ possui um "limite superior mínimo" (*least upper bound*), denotado por $\sqcup A$, e um "limite inferior máximo" (*greatest lower bound*), denotado por $\sqcap A$.

Definição formal

Seja $(\Omega, \sqsubseteq)$ uma **AHC**. Um conjunto Ω-valorado é um conjunto $A \in \Omega$ equipado de uma função $[[\cdot]] : A \times A \to \Omega$ tal que, para todo $x, y, z \in A$, vale que

1. $[[x \approx y]]_A \sqsubseteq [[y \approx x]]_A$;
2. $[[x \approx y]]_A \sqcap [[y \approx z]]_A \sqsubseteq [[x \approx z]]_A$.

Onde (1) e (2) são as contrapartidas algébricas da reflexividade da relação de identidade e da transitividade, respectivamente. Isto é, validam em Ω as fórmulas

- $(x \approx y) \supset (y \approx x)$
- $(x \approx y) \wedge (y \approx z) \supset (x \approx z)$

Além disso, definimos

$$[[x \cong y]]_A = ([[Ex]]_A \sqcup [[Ey]]_A) \Rightarrow [[x \approx y]]_A$$

onde $[[Ex]]_A = [[x \approx x]]_A$ e $[[Ey]]_A = [[y \approx y]]_A$.

Considere a seguinte **AHC**: $\mathcal{H}_0 = \langle \{\perp, \top\}, \subseteq, \cup, \cap, \Rightarrow, 0, 1 \rangle$. Um conjunto Ω-valorado, nesse caso, pode ser $\langle \top, \delta \rangle$ ou $\langle \perp, \delta' \rangle$.

Exercícios

Prove que as seguintes condições valem para qualquer conjunto Ω-valorado.

Denotamos $[[x \approx y]]_A$ como $\delta(x, y)$, onde δ é uma função $\delta : A \times A \to \Omega$, sendo $\delta(x, x) = [[Ex]]_A$.

Mostre que, para todo A, $\delta(x, y) \sqsubseteq [[Ex]]$.

$$\delta(x,y) \sqsubseteq \delta(y,x) \text{ [Simet. } \delta] \tag{3}$$
$$\delta(x,y) \sqsubseteq \delta(x,y) \text{ [Refl. } \sqsubseteq] \tag{4}$$
$$\delta(x,y) \sqsubseteq \delta(x,y) \sqcap \delta(y,x) \text{ [(1) e (2)]} \tag{5}$$
$$\delta(x,y) \sqcap \delta(y,x) \sqsubseteq \delta(x,x) \text{ [Trans. } \delta] \tag{6}$$
$$\delta(x,y) \sqsubseteq \delta(x,x) \text{ [Trans. } \sqsubseteq \text{ (1), (3) e (4)]} \tag{7}$$

Semântica Ω-valorada Obtemos uma semântica intuicionista a partir de Ω definindo, para cada $p, q \in \Omega$

$$[[p \approx q]]_\Omega = (p \Rightarrow q) \sqcap (q \Rightarrow p)$$

onde os elementos de Ω são interpretados como valores de verdade. Em particular, $\perp$ significa o menor elemento de Ω (zero) e $\top$ significa o maior elemento de Ω (um).

Exercícios Mostre que, para qualquer álgebra de Heyting Ω,

$[[Ep]]_\Omega = \top$

$$[[Ep]]_\Omega =_{def} [[p \approx p]]_\Omega \tag{8}$$
$$[[p \approx p]]_\Omega =_{def} p \Leftrightarrow p \tag{9}$$
$$p \Rightarrow p =_{def} max\{c \mid c \sqcap p \sqsubseteq p\} \tag{10}$$
$$= \top \text{ (Já que } \top \sqcap p = p.\text{)} \tag{11}$$

$[[p \approx \top]]_\Omega = p$

$$[[p \approx \top]]_\Omega =_{def} p \Leftrightarrow \top \tag{12}$$
$$p \Leftrightarrow \top =_{def} (p \Rightarrow \top) \sqcap (\top \Rightarrow p) \tag{13}$$
$$\text{(A) } p \Rightarrow \top =_{def} max\{c \mid c \sqcap p \sqsubseteq \top\} \tag{14}$$
$$= \top \tag{15}$$
$$\text{(B) } \top \Rightarrow p =_{def} max\{c \mid c \sqcap \top \sqsubseteq p\} \tag{16}$$
$$= p \tag{17}$$
$$\therefore \top \sqcap p = p \tag{18}$$

$[[p \approx \bot]]_\Omega = \neg p$

$$[[p \approx \bot]]_\Omega =_{def} (p \Rightarrow \bot) \sqcap (\bot \Rightarrow p) \tag{19}$$
$$\text{(A) } p \Rightarrow \bot =_{def} max\{c \mid c \sqcap p \sqsubseteq \bot\} \tag{20}$$
$$=_{def} \neg p \tag{21}$$
$$\text{(B) } \bot \Rightarrow p =_{def} max\{c \mid c \sqcap \bot \sqsubseteq p\} \tag{22}$$
$$=_{def} \top \tag{23}$$
$$\therefore \neg p \sqcap \top = \neg p \tag{24}$$

Categoria Ω-set

Os Ω-conjuntos formam uma categoria na qual os objetos são pares $X = \langle A, [[\cdot]]\rangle$, onde $[[\cdot]] : A \times A \to \Omega$ é o morfismo identidade de X (mostraremos isso mais tarde). De modo mais geral, uma flecha de A em B é uma função $f : A \times B \to \Omega$ que satisfaz as seguintes propriedades

$$[[x \approx x']]_A \sqcap f(\langle x, y\rangle) \sqsubseteq f(\langle x', y\rangle) \tag{25}$$
$$f(\langle x, y\rangle) \sqcap [[y \approx y']]_B \sqsubseteq f(\langle x, y'\rangle) \tag{26}$$
$$f(\langle x, y\rangle) \sqcap f(\langle x, y'\rangle) \sqsubseteq [[y \approx y']]_B \tag{27}$$
$$[[x \approx x]]_A = \bigsqcup\{f(\langle x, y\rangle) : y \in B\} \tag{28}$$

Denotamos $f(\langle x, y \rangle)$ como $[[f(x) \approx y]]$. Observe que as duas primeiras condições correspondem a lei da "indistinguibilidade dos iguais" [extensionalidade] e validam em Ω as fórmulas

$$(x \approx x') \wedge (f(x) \approx y) \supset (f(x') \approx y)$$

i.e, se dois objetos x e x' são iguais (em A) e $f(x)$ é igual a y, então $f(x')$ é igual a y (em outras palavras, aplicar f sobre o mesmo input produz o mesmo output). Reciprocamente,

$$(f(x) \approx y) \wedge (y \approx y') \supset (f(x) \approx y')$$

i.e, se $f(x)$ [f aplicada a x] é igual a y e y é igual a y' (em B), então $f(x)$ é igual a y'. Colocando de outro modo, f não distingue inputs iguais.

A terceira sentença corresponde a condição de unicidade do output. Isto é,

$$(f(x) \approx y) \wedge (f(x) \approx y') \supset (y \approx y')$$

Conforme ilustrado na Figura 2, essa condição corresponde a própria funcionalidade de f. Isto é, à exigência de que só exista um único output para um mesmo input de f.

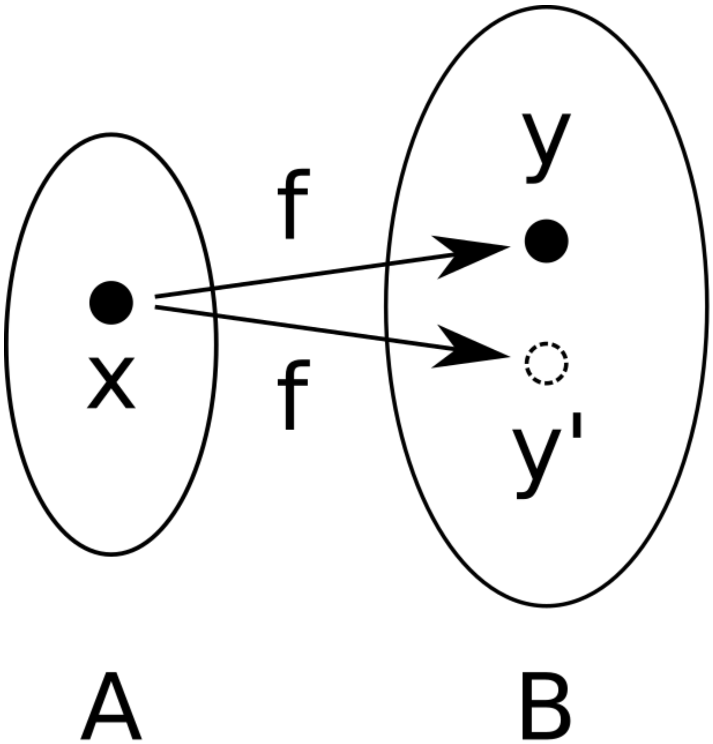


Figura 2. - Funcionalidade da flecha f. Observe que, para que f seja função, é necessário que y seja igual a y'. Caso contrário, um mesmo input teria dois outputs diferentes.

Por fim, a última condição corresponde a totalidade da função f em Ω. Isto é, valida a sentença "todo $x \in A$ possui uma f-imagem $y \in B$" (f é uma função total).

Considere a sentença "existe um $x \in A$ tal que $P(x)$"

$$\bigsqcup\{[[P(x)]] \mid x \in A\}$$

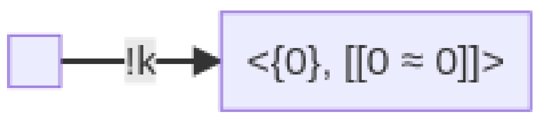
Dualmente, podemos definir o quantificador universal "para todo $x \in A$, $P(x)$" como

$$\bigsqcap\{[[P(x)]] \mid x \in A\}$$

Composição de flechas A composição de flechas é feita da seguinte maneira.

$[[\cdot]] : A \times A \to \Omega$ é o morfismo identidade de A id_A.

A categoria Ω-set é um topos.



Objeto terminal

onde a flecha $k : A \to 1$ é dada por $[[f(x) \approx 0]] = [[Ex]]$

Produto

Pullback

Subobjeto

Classificador de subobjeto