

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

RENATO LOPES MOURA RA163050

Estudo sobre Inferência Fuzzy baseada em medidas de
subsethood

CAMPINAS

2016

1 Definições

Definição 1. Seja uma função $S : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow [0, 1]$. $S(A, B)$ é uma medida de subthood se para $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$ temos:

1. $S(A, B) = 1 \Leftrightarrow A \subseteq B$
2. $S(X, \emptyset) = 0$
3. Se $A \subseteq B \subseteq C$, então $S(C, A) \leq S(B, A)$ e $S(C, A) \leq S(C, B)$

Definição 2. A medida de subthood de Kosko é definida da seguinte forma:

$$S_k(A, B) = \frac{\int_{x \in X} \min(\mu_A(x), \mu_B(x))}{\int_{x \in X} \mu_A(x)}$$

Definição 3. A medida de subthood de Willmott é definida da seguinte forma:

$$S_w(A, B) = \frac{\int_{x \in X} \mu_B(x)}{\int_{x \in X} \max(\mu_A(x), \mu_B(x))}$$

Definição 4. As medidas de subthood S_p^\cap (meet) e S_p^\cup (join) são definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_p^\cap(A, B) &= I(v_p(A), v_p(A \cap B)), \\ S_p^\cup(A, B) &= I(v_p(A \cup B), v_p(B)) \end{aligned}$$

Onde I representa uma implicação fuzzy e v_p é uma função $\mathcal{F}(X) \rightarrow [0, 1]$ com $p \in (0, +\infty)$. Neste trabalho, utilizaremos a implicação de Goguen:

$$I(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \min(1, \frac{y}{x}) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e a seguinte função para v_p :

$$v_p(A) = \sum_{i=1}^k \frac{1 - \cos(\pi[\mu_A(x_i)]^p)}{2k}, \quad X = \{x_1, \dots, x_k\}$$

2 Modificadores de números fuzzy

Definição 5. Um *modificador fuzzy* m sobre X é uma aplicação do tipo:

$$m : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$$

tal que m é dito:

1. *Expansivo* se, para todo $A \in \mathcal{F}(X)$, $A \subseteq m(A)$, ou seja, $\mu_A(x) \leq \mu_{m(A)}(x)$, $\forall x \in X$;
2. *Restritivo* se, para todo $A \in \mathcal{F}(X)$, $A \supseteq m(A)$, ou seja, $\mu_A(x) \geq \mu_{m(A)}(x)$, $\forall x \in X$;

Proposição 1. Considere o seguinte procedimento para construção de números fuzzy modificados:

1. Centrar A em torno de 0;
2. Adicionar c a ambos os lados de $\text{supp}(A')$;
3. Calcular $f = \frac{\text{width}(\text{supp}(A'))}{\text{width}(\text{supp}(A'_c))}$;
4. Multiplicar todos os α -cortes por f ;
5. Transladar o resultado de volta.

Isto deve funcionar para todos os números fuzzy, menos números fuzzy crisp, que podem ser vistos como números fuzzy triangulares. Para $r \in \mathbb{R}$, podemos definir $r^c = (r - c; r; r + c)$.

Exemplo 1. Seja o seguinte número fuzzy $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$:

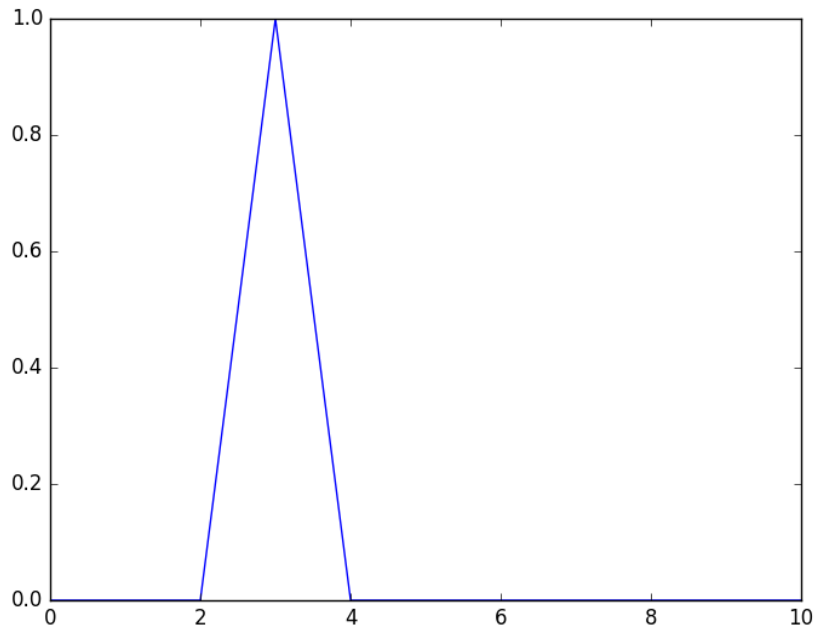


Figure 1: Número fuzzy a ser modificado.

Com função de pertinência dada por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ 4 - x & \text{se } 3 < x \leq 4 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

E α -cortes dados por:

$$A^\alpha = [\alpha + 2, -\alpha + 4]$$

Aplicando o procedimento descrito na Proposição 1, temos:

- **Passo 1:** Centrar A em torno de 0.

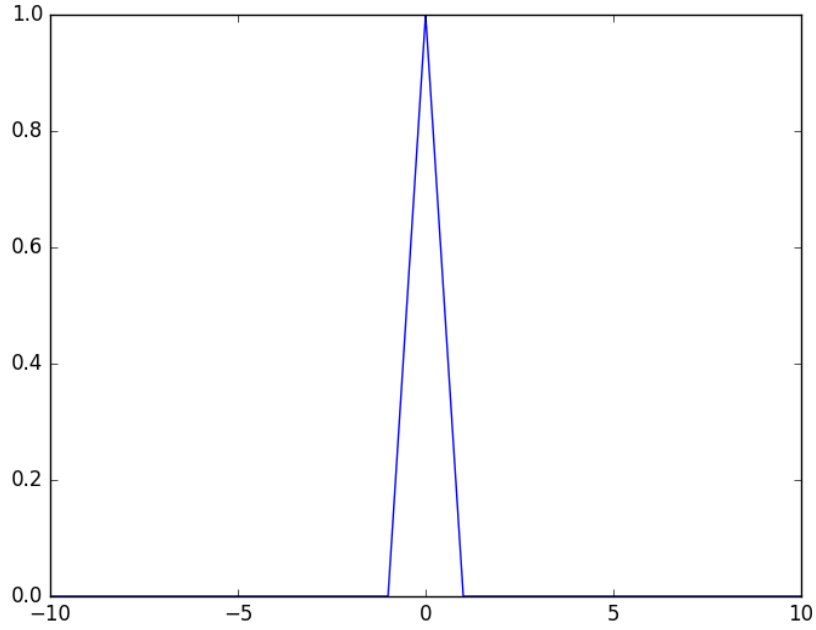


Figure 2: Número fuzzy A' centrado em 0.

- **Passo 2:** Adicionar c a ambos os lados de $\text{supp}(A')$. Considerando $c = 1$, temos:

$$\text{supp}(A') = [-1, 1] \Rightarrow \text{supp}(A'_c) = [-2, 2]$$

- **Passo 3:** Calcular $f = \frac{\text{width}(\text{supp}(A'_c))}{\text{width}(\text{supp}(A'))}$.

$$f = \frac{\text{width}(\text{supp}(A'_c))}{\text{width}(\text{supp}(A'))} = \frac{\text{width}([-2, 2])}{\text{width}([-1, 1])} = \frac{4}{2} = 2$$

- **Passo 4:** Multiplicar todos os α -cortes por f .

$$\begin{aligned} B'^\alpha &= f \cdot A'^\alpha = 2 \cdot A'^\alpha \\ &= 2 \cdot [\alpha - 1, -\alpha + 1] \\ &= [2\alpha - 2, -2\alpha + 2] \end{aligned}$$

- **Passo 5:** Transladar o resultado de volta.

Como resultado temos o seguinte número fuzzy $B \in \text{mathcal{F}}(\mathbb{R})$:

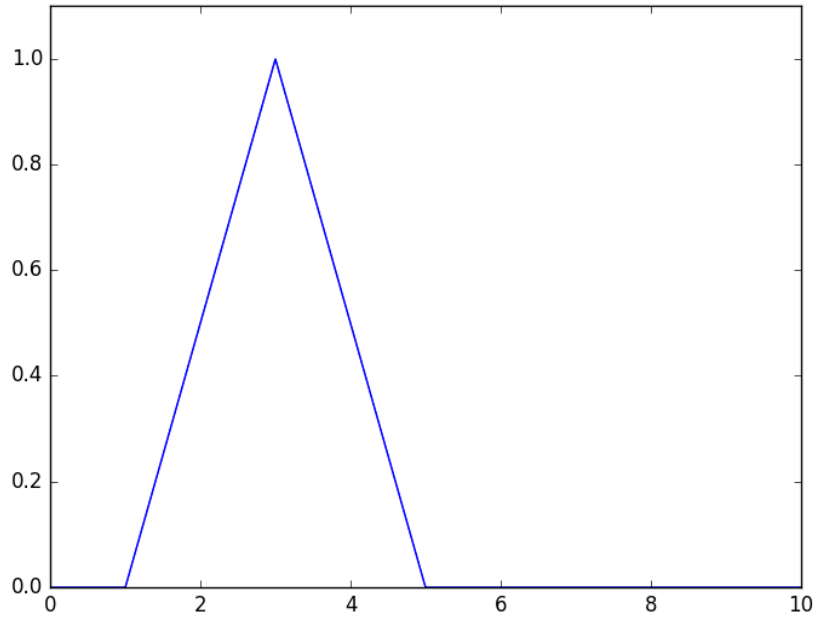


Figure 3: Número fuzzy modificado B .

Com função de pertinência dada por:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ \frac{5-x}{2} & \text{se } 3 < x \leq 5 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

E α -cortes dados por:

$$B^\alpha = [2\alpha + 1, -2\alpha + 5]$$

3 Experimentos

3.1 Caso 1

Entrada triangular quase discreta (3.4,3.5,3.6)

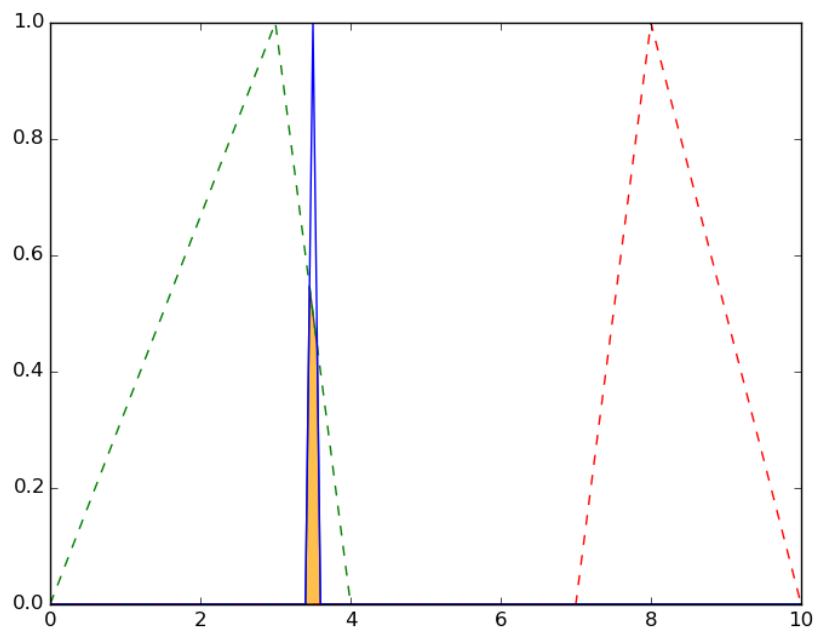


Figure 4: Entrada do caso 1

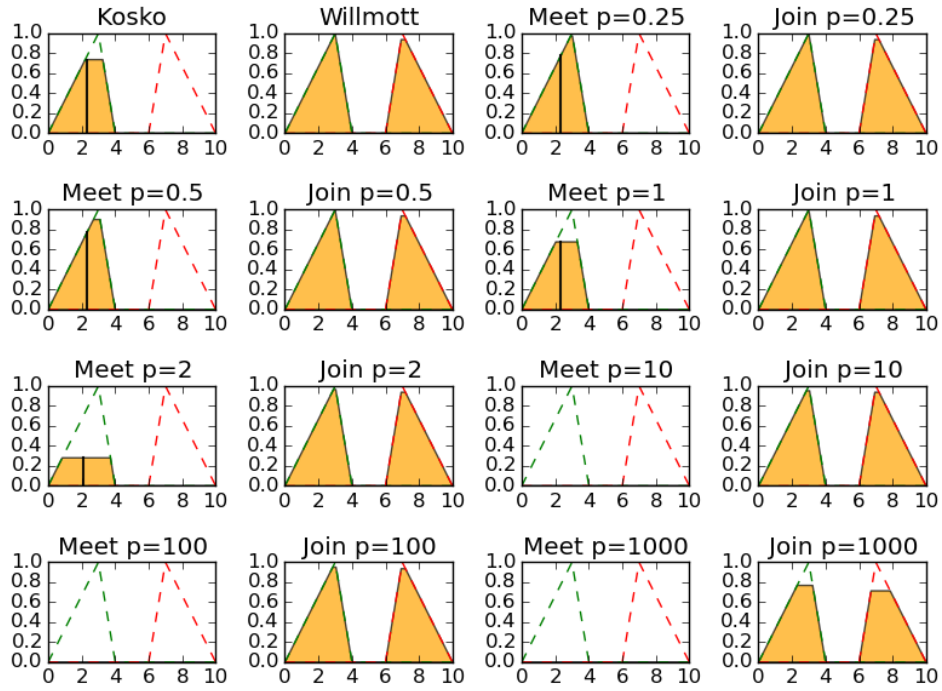


Figure 5: Resultados do caso 1

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
S_k	0	0.738	2.297
S_w	0.938	0.988	4.996
$S_{0.25}^\cap$	0	0.974	2.333
$S_{0.25}^\cup$	0.938	0.999	4.996
$S_{0.5}^\cap$	0	0.901	2.327
$S_{0.5}^\cup$	0.938	0.995	4.996
S_1^\cap	0	0.678	2.281
S_1^\cup	0.938	0.984	4.996
S_2^\cap	0	0.281	2.133
S_2^\cup	0.937	0.965	4.997
S_{10}^\cap	0	0	0
S_{10}^\cup	0.937	0.952	4.998
S_{100}^\cap	0	0	0
S_{100}^\cup	0.936	0.951	4.998
S_{1000}^\cap	0	0	0
S_{1000}^\cup	0.714	0.769	4.966

3.2 Caso 2

Entrada triangular quase igual ao antecedente (0.0,3.3,4.0)

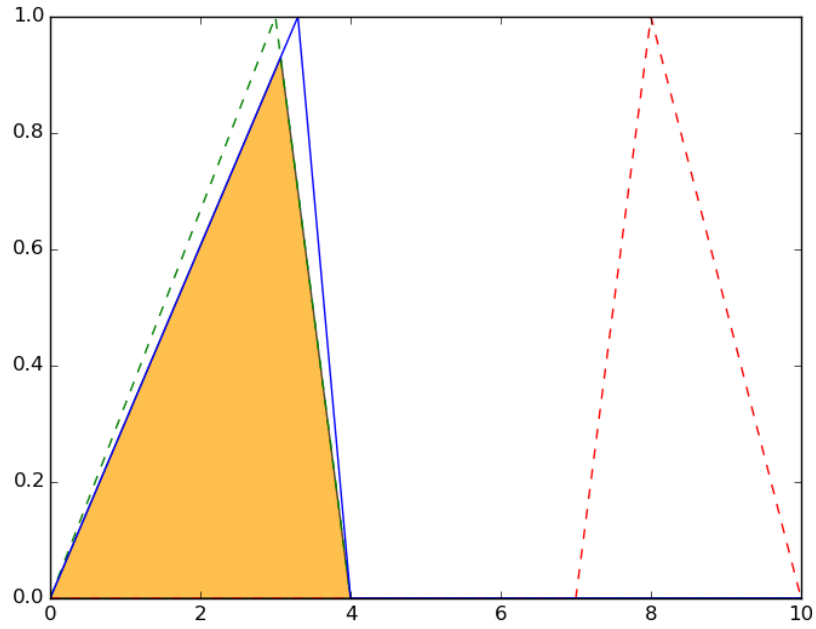


Figure 6: Entrada do caso 2

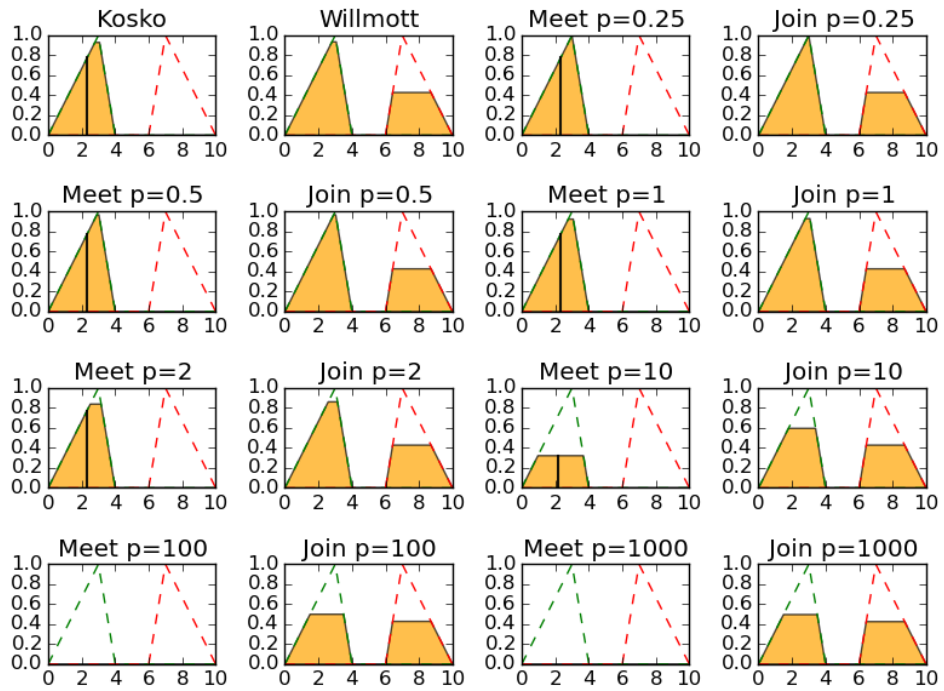


Figure 7: Resultados do caso 2

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
S_k	0	0.929	2.330
S_w	0.429	0.935	4.539
$S_{0.25}^\cap$	0	0.988	2.333
$S_{0.25}^\cup$	0.429	0.988	4.536
$S_{0.5}^\cap$	0	0.968	2.333
$S_{0.5}^\cup$	0.429	0.969	4.536
S_1^\cap	0	0.926	2.330
S_1^\cup	0.429	0.931	4.540
S_2^\cap	0	0.839	2.318
S_2^\cup	0.429	0.861	4.554
S_{10}^\cap	0	0.323	2.151
S_{10}^\cup	0.429	0.596	4.730
S_{100}^\cap	0	0	0
S_{100}^\cup	0.429	0.5	4.864
S_{1000}^\cap	0	0	0
S_{1000}^\cup	0.426	0.497	4.864

3.3 Caso 3

Entrada triangular com pouca intersecção (3.8,4.0,5.0)

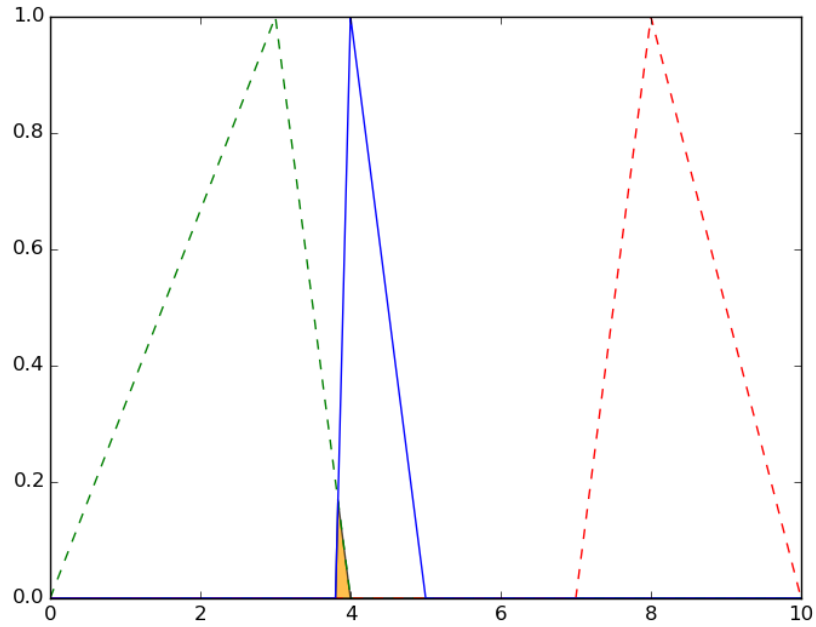


Figure 8: Entrada do caso 3

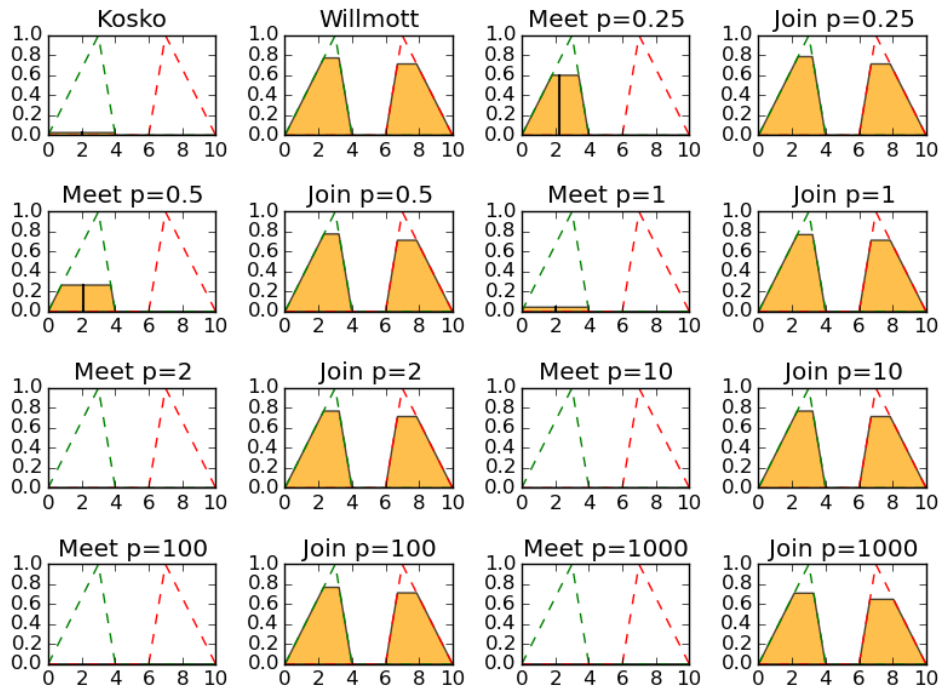


Figure 9: Resultados do caso 3

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
S_k	0	0.028	2.014
S_w	0.714	0.774	4.963
$S_{0.25}^\cap$	0	0.601	2.258
$S_{0.25}^\cup$	0.714	0.787	4.956
$S_{0.5}^\cap$	0	0.266	2.126
$S_{0.5}^\cup$	0.714	0.777	4.961
S_1^\cap	0	0.045	2.022
S_1^\cup	0.714	0.771	4.965
S_2^\cap	0	0.001	2
S_2^\cup	0.714	0.769	4.966
S_{10}^\cap	0	0	0
S_{10}^\cup	0.714	0.769	4.966
S_{100}^\cap	0	0	0
S_{100}^\cup	0.714	0.769	4.966
S_{1000}^\cap	0	0	0
S_{1000}^\cup	0.649	0.711	4.949

3.4 Caso 4

Entrada triangular sem intersecção mas próxima de um dos antecedentes (4.0,4.5,5.0)

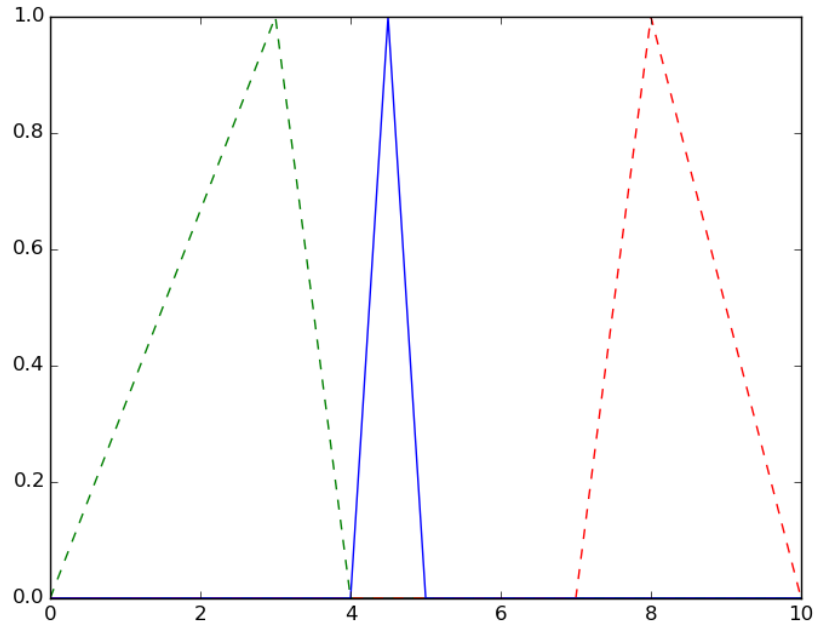


Figure 10: Entrada do caso 4

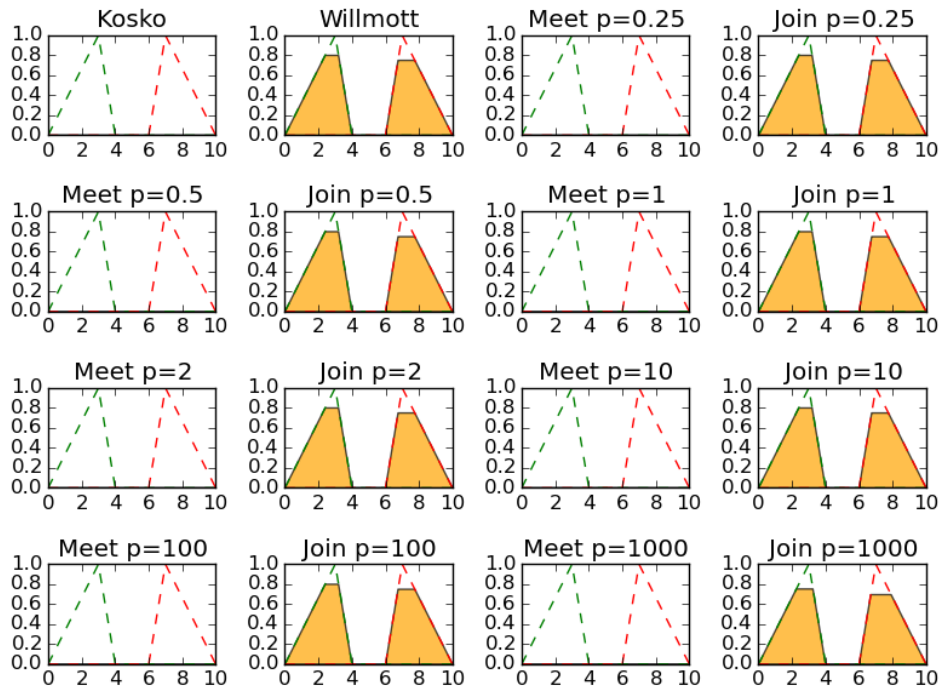


Figure 11: Resultados do caso 4

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
S_k	0	0	0
S_w	0.750	0.800	4.974
$S_{0.25}^\cap$	0	0	0
$S_{0.25}^\cup$	0.750	0.800	4.974
$S_{0.5}^\cap$	0	0	0
$S_{0.5}^\cup$	0.750	0.800	4.974
S_1^\cap	0	0	0
S_1^\cup	0.750	0.800	4.974
S_2^\cap	0	0	0
S_2^\cup	0.750	0.800	4.974
S_{10}^\cap	0	0	0
S_{10}^\cup	0.750	0.800	4.974
S_{100}^\cap	0	0	0
S_{100}^\cup	0.750	0.800	4.974
S_{1000}^\cap	0	0	0
S_{1000}^\cup	0.696	0.753	4.962

3.5 Caso 5

Entrada triangular equidistante dos antecedentes (5.0,5.5,6.0). Obs: notar que os antecedentes não possuem o mesmo tamanho.

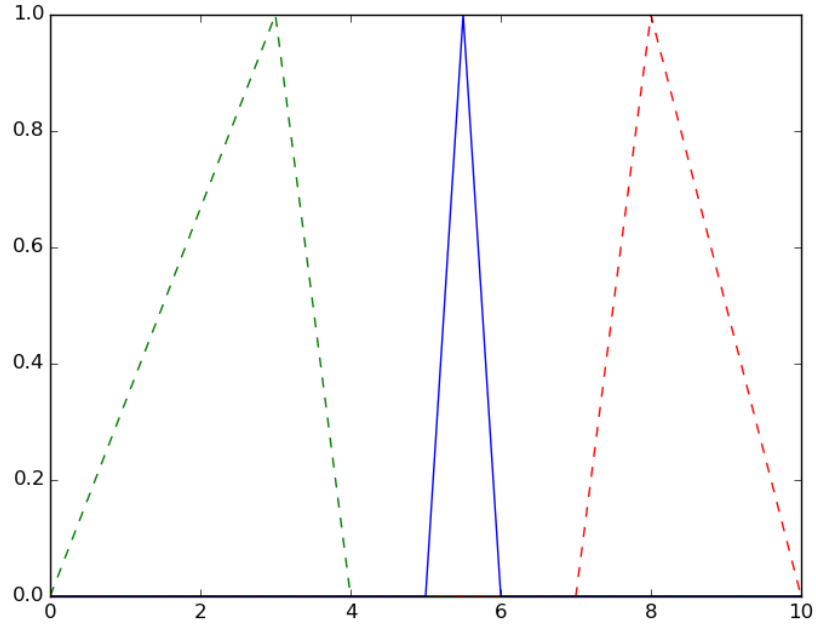


Figure 12: Entrada do caso 5

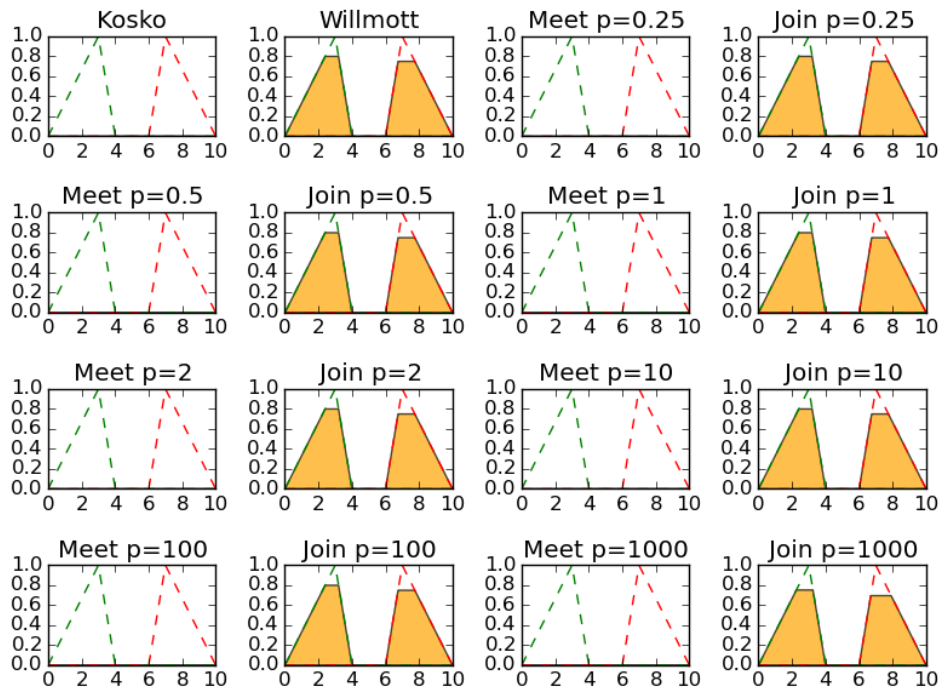


Figure 13: Resultados do caso 5

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
S_k	0	0	0
S_w	0.750	0.800	4.974
$S_{0.25}^\cap$	0	0	0
$S_{0.25}^\cup$	0.750	0.800	4.974
$S_{0.5}^\cap$	0	0	0
$S_{0.5}^\cup$	0.750	0.800	4.974
S_1^\cap	0	0	0
S_1^\cup	0.750	0.800	4.974
S_2^\cap	0	0	0
S_2^\cup	0.750	0.800	4.974
S_{10}^\cap	0	0	0
S_{10}^\cup	0.750	0.800	4.974
S_{100}^\cap	0	0	0
S_{100}^\cup	0.750	0.800	4.974
S_{1000}^\cap	0	0	0
S_{1000}^\cup	0.696	0.753	4.962

3.6 Comentários

- Em todos os casos, as medidas de subthood do tipo *meet* (S_p^\cap) com $p \geq 10$ não apresentam valores de ativação significativos. No Caso 2, temos $S_{10}^\cap = 0.323$ apesar de a entrada estar quase totalmente contida no antecedente. Portanto, não parece interessante considerar as medidas do tipo *meet* (S_p^\cap) com $p \geq 10$.
- Também é possível notar que conforme o parâmetro p aumenta, o grau de ativação pela medida de subthood do tipo *join* (S_p^\cup) tende a se igualar para todas as regras. Portanto, também não parece interessante considerar as medidas do tipo *join* (S_p^\cup) com $p \geq 10$.
- No Caso 1, apesar de a entrada apresentar um nível considerável de interseção com o antecedente da Regra 2 (tomate verde), as medidas de subthood do tipo *join* (S_p^\cup) ainda apresentam um elevado grau de ativação, em geral ≥ 0.9 . Desta forma, é possível concluir que para entradas com cardinalidade pequena, deve-se dar um peso maior para o grau de ativação das medidas de subthood do tipo *meet* (S_p^\cap).
- Nos Casos 4 e 5, pode-se notar que o grau de ativação das regras independe da localização da entrada no caso em que a interseção da entrada com os antecedentes é vazia. A medida de subthood do tipo *join* (S_p^\cup) considera apenas a cardinalidade dos antecedentes e da entrada, o que pode representar um problema em bases de regras esparsas.

References

- [1] Barros, L. C. de, Bassanezi, R. C. *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*. Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), (2006).