UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

RENATO LOPES MOURA RA163050

Estudo sobre Inferência Fuzzy baseada em medidas de subsethood

CAMPINAS

2016

Sumário

1 Conceitos matemáticos

Uma medida de *subsethood* avalia o grau de "inclusão" de um conjunto *fuzzy* em outro, em outras palavras é uma generalização do operador $\subseteq$ da teoria de conjuntos clássica. Neste trabalho adotaremos a seguinte definição de medida de *subsethood* proposta por Fan *et al.*[1]:

Definição 1. Seja uma função $S : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to [0,1]$. $S(A,B)$ é uma medida de *subsethood* se para $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$ temos:

1. $S(A,B) = 1 \Leftrightarrow A \subseteq B$

2. $S(X, \emptyset) = 0$

3. Se $A \subseteq B \subseteq C$, então $S(C,A) \leq S(B,A)$ e $S(C,A) \leq S(C,B)$

Definição 2. A medida de *subsethood* de Kosko é definida da seguinte forma:

$$S_k(A,B) = \frac{\int_{x\in X} min(\mu_A(x), \mu_B(x))}{\int_{x\in X} \mu_A(x)}$$

Definição 3. A medida de *subsethood* de Willmott é definida da seguinte forma:

$$S_w(A,B) = \frac{\int_{x\in X} \mu_B(x)}{\int_{x\in X} max(\mu_A(x), \mu_B(x))}$$

Definição 4. As medidas de *subsethood* $S_p^{\cap}$(meet) e $S_p^{\cup}$(join) são definidas da seguinte forma:

$$S_p^{\cap}(A,B) = I(v_p(A), v_p(A \cap B)),$$
$$S_p^{\cup}(A,B) = I(v_p(A \cup B), v_p(B))$$

Onde I representa uma implicação fuzzy e e v_p é uma função $\mathcal{F}(X) \to [0,1]$ com $p \in (0, +\infty)$. Neste trabalho, utilizaremos a implicação de Goguen:

$$I(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \min(1, \frac{y}{x}) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e a seguinte função para v_p:

$$v_p(A) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1 - cos(\pi[\mu_A(x_i)]^p)}{2k}, \quad X = \{x_1, ..., x_k\}$$

Outra importante relação entre conjuntos *fuzzy* é a medida de similaridade, que generaliza a igualdade de conjuntos da teoria de conjuntos clássica. Neste trabalho utilizaremos a definição mais comum de medida de similiraridade encontrada na literatura.

Definição 5. Uma função $SM : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to [0,1]$ é dita uma medida de similaridade se SM satisfaz as seguintes propriedades para todos $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$:

1. $SM(A,B) = SM(B,A)$
2. $SM(X,\emptyset) = 0$
3. $SM(A,A) = 1$
4. Se $A \subseteq B \subseteq C$, então $SM(A,B) \geq SM(A,C)$ e $SM(B,C) \geq SM(A,C)$

Uma das medidas de similaridade mais comumente utilizadas é a razão de Jaccard [2], definida pela seguinte expressão:

$$SM(A,B) = \frac{\int_{x \in X} min(\mu_A(x), \mu_B(x))}{\int_{x \in X} max(\mu_A(x), \mu_B(x))}$$

para $A, B \in \mathcal{F}(X)$.

2 Modificadores de números fuzzy

Definição 6. Um *modificador fuzzy* m sobre X é uma aplicação do tipo:

$$m : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$$

tal que m é dito:

1. *Expansivo* se, para todo $A \in \mathcal{F}(X), A \subseteq m(A)$, ou seja, $\mu_A(x) \leq \mu_{m(A)}(x)$, $\forall x \in X$;

2. *Restritivo* se, para todo $A \in \mathcal{F}(X), A \supseteq m(A)$, ou seja, $\mu_A(x) \geq \mu_{m(A)}(x)$, $\forall x \in X$;

Proposição 1. Considere o seguinte procedimento para construção de números fuzzy modificados:

1. Centrar A em torno de 0;

2. Adicionar c a ambos os lados de $supp(A')$;

3. Calcular $f = \frac{width(supp(A'_c))}{width(supp(A'))}$;

4. Multiplicar todos os α-cortes por f;

5. Transladar o resultado de volta.

Isto deve funcionar para todos os números fuzzy, menos números fuzzy crisp, que podem ser vistos como números fuzzy triangulares. Para $r \in \mathbb{R}$, podemos definir $r^c = (r - c; r; r + c)$.

Exemplo 1. Seja o seguinte número fuzzy $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$:

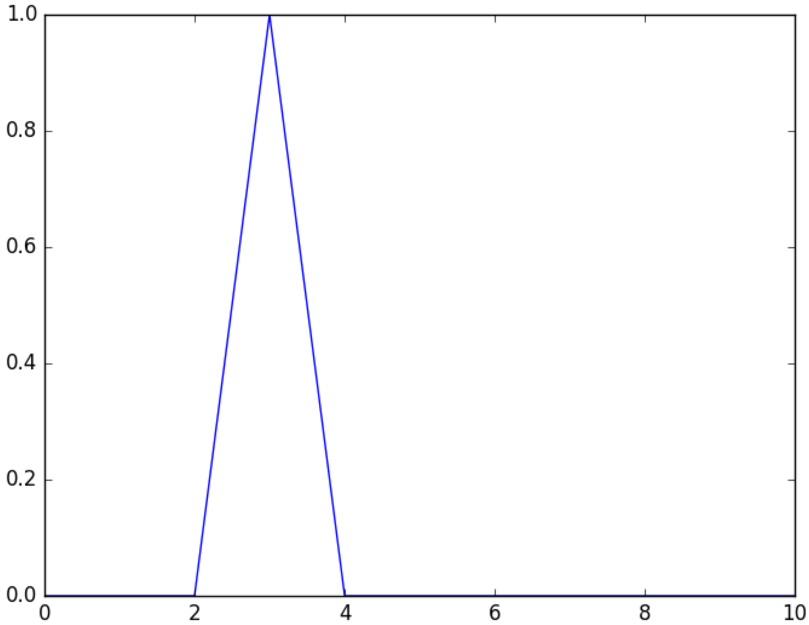

Figure 1: Número fuzzy a ser modificado.

Com função de pertinência dada por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ 4-x & \text{se } 3 < x \leq 4 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

E α-cortes dados por:

$$A^\alpha = [\alpha + 2, -\alpha + 4]$$

Aplicando o procedimento descrito na Proposição 1, temos:

- **Passo 1**: Centrar A em torno de 0.

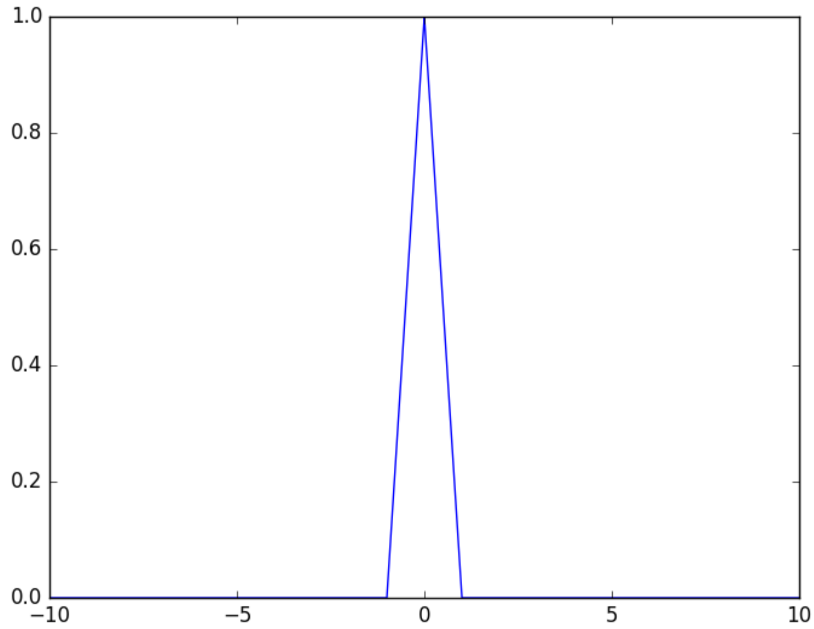

Figure 2: Número fuzzy A' centrado em 0.

- **Passo 2**: Adicionar c a ambos os lados de $supp(A')$. Considerando c $= 1$, temos:

$$supp(A') = [-1, 1] \Rightarrow supp(A'_c) = [-2, 2]$$

- **Passo 3**: Calcular $f = \frac{width(supp(A'_c))}{width(supp(A'))}$.

$$f = \frac{width(supp(A'_c))}{width(supp(A'))} = \frac{width([-2, 2])}{width([-1, 1])} = \frac{4}{2} = 2$$

- **Passo 4**: Multiplicar todos os α-cortes por f.

$$\begin{aligned} B'^{\alpha} &= f \cdot A'^{\alpha} = 2 \cdot A'^{\alpha} \\ &= 2 \cdot [\alpha - 1, -\alpha + 1] \\ &= [2\alpha - 2, -2\alpha + 2] \end{aligned}$$

- **Passo 5**: Transladar o resultado de volta.

  Como resultado temos o seguinte número fuzzy $B \in mathcalF(\mathbb{R})$:

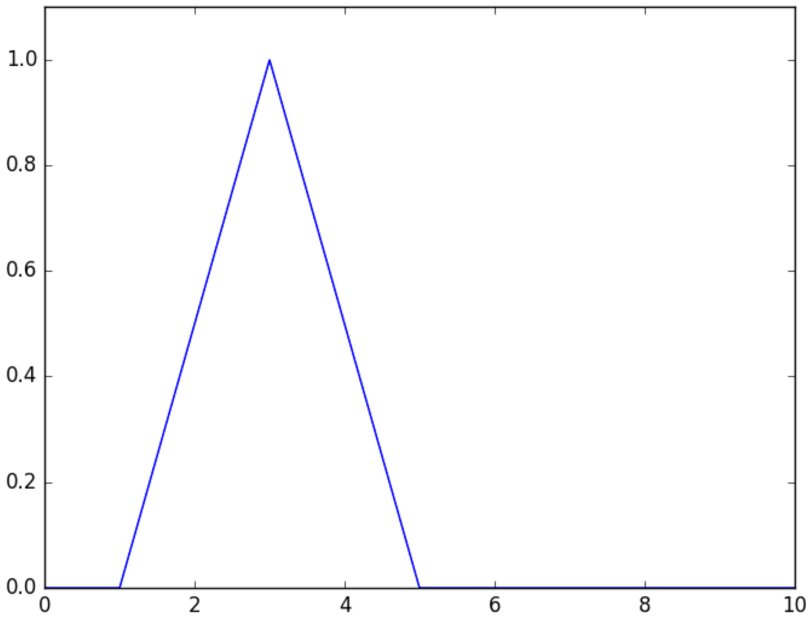

Figure 3: Número fuzzy modificado B.

Com função de pertinência dada por:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ \frac{5-x}{2} & \text{se } 3 < x \leq 5 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

E α-cortes dados por:

$$B^\alpha = [2\alpha + 1, -2\alpha + 5]$$

3 Experimentos

3.1 Caso 1

Entrada triangular quase discreta (3.4,3.5,3.6)

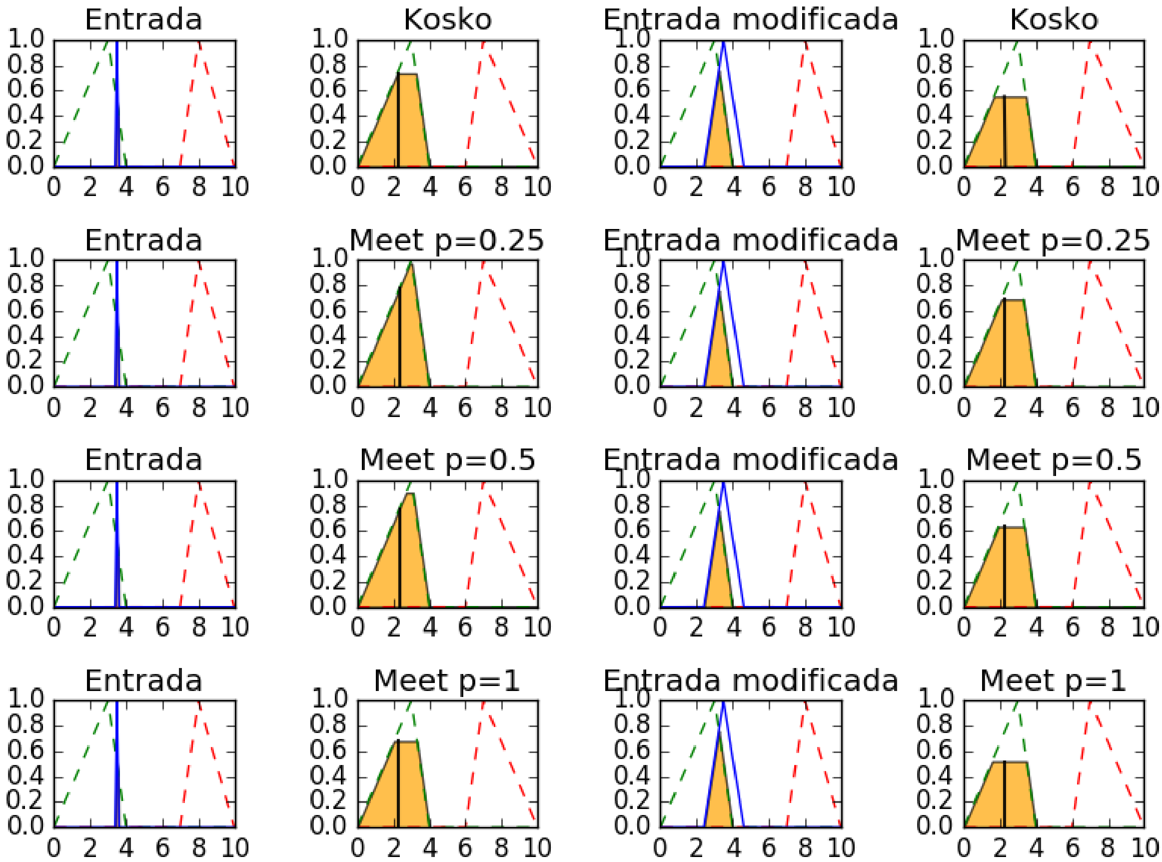

Figure 4: Resultados do caso 1 para $c = 1$

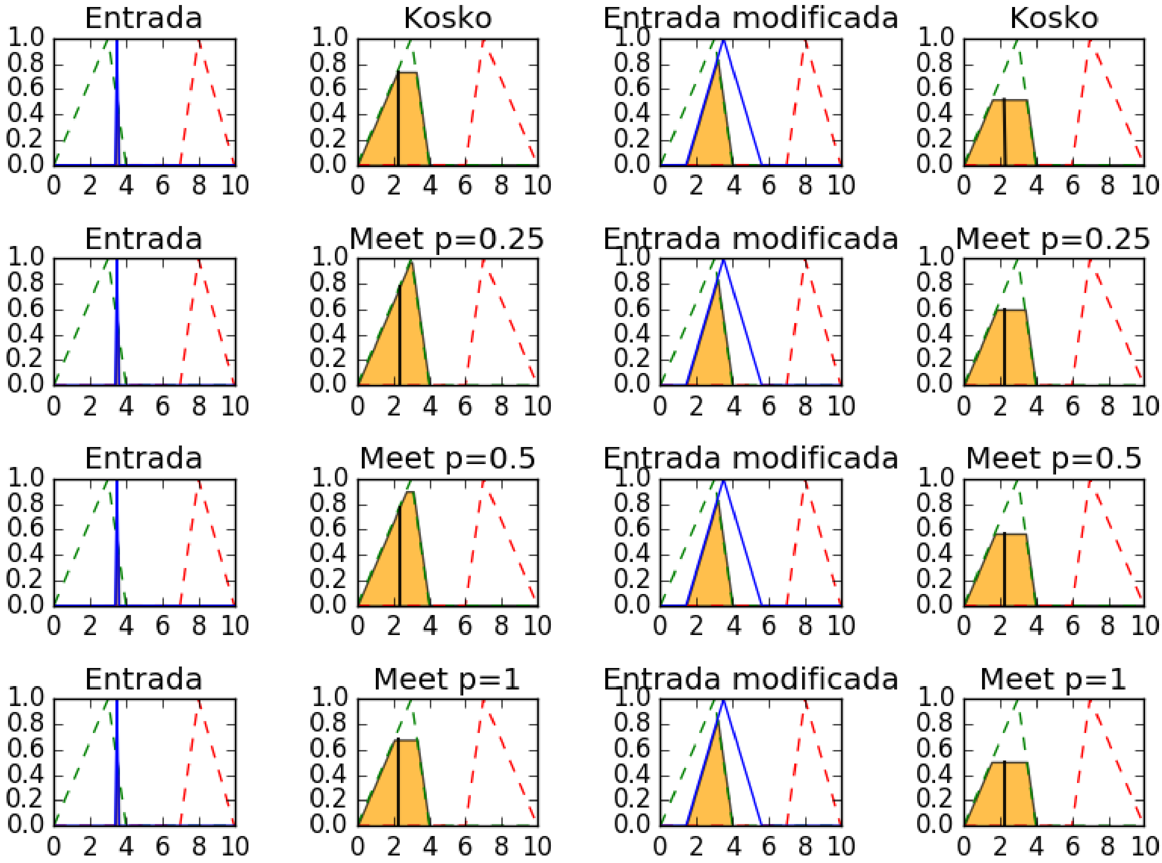

Figure 5: Resultados do caso 1 para $c = 2$

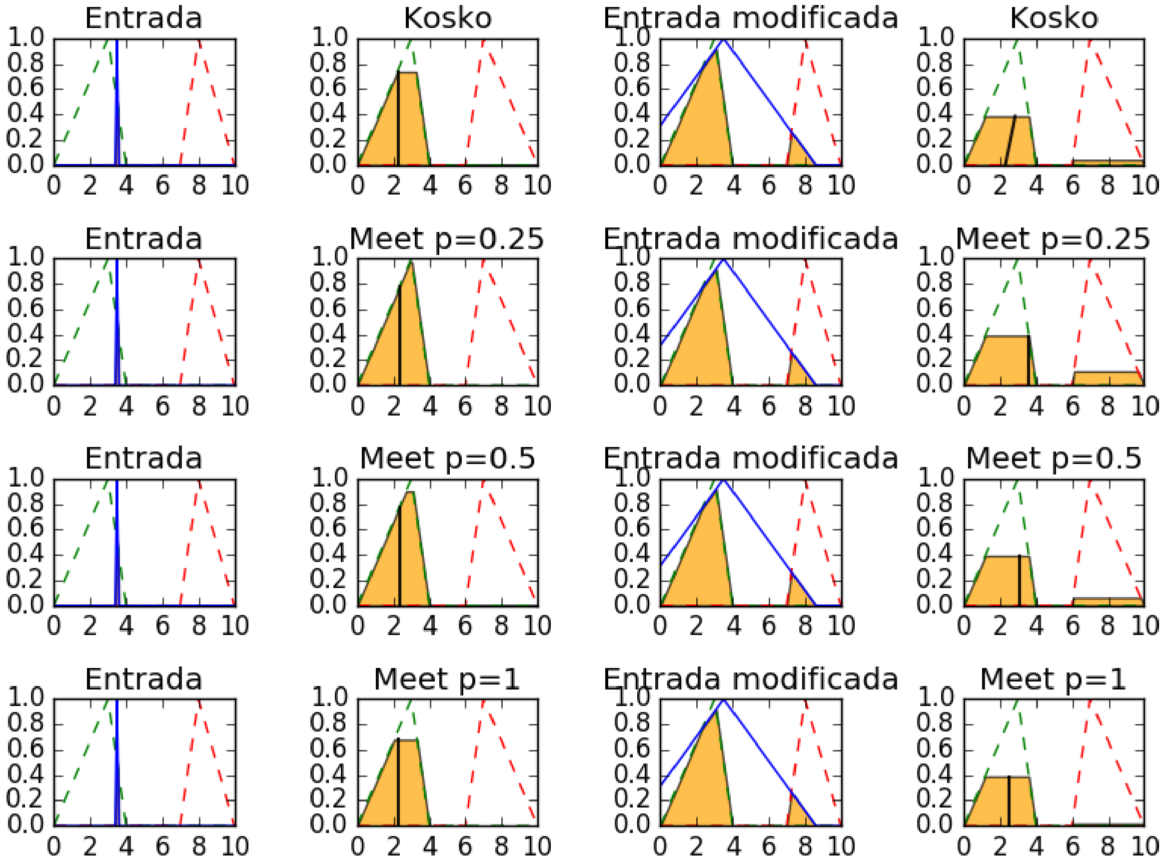

Figure 6: Resultados do caso 1 para $c = 5$

3.2 Caso 2

Entrada triangular quase igual ao antecedente (0.0,3.3,4.0)

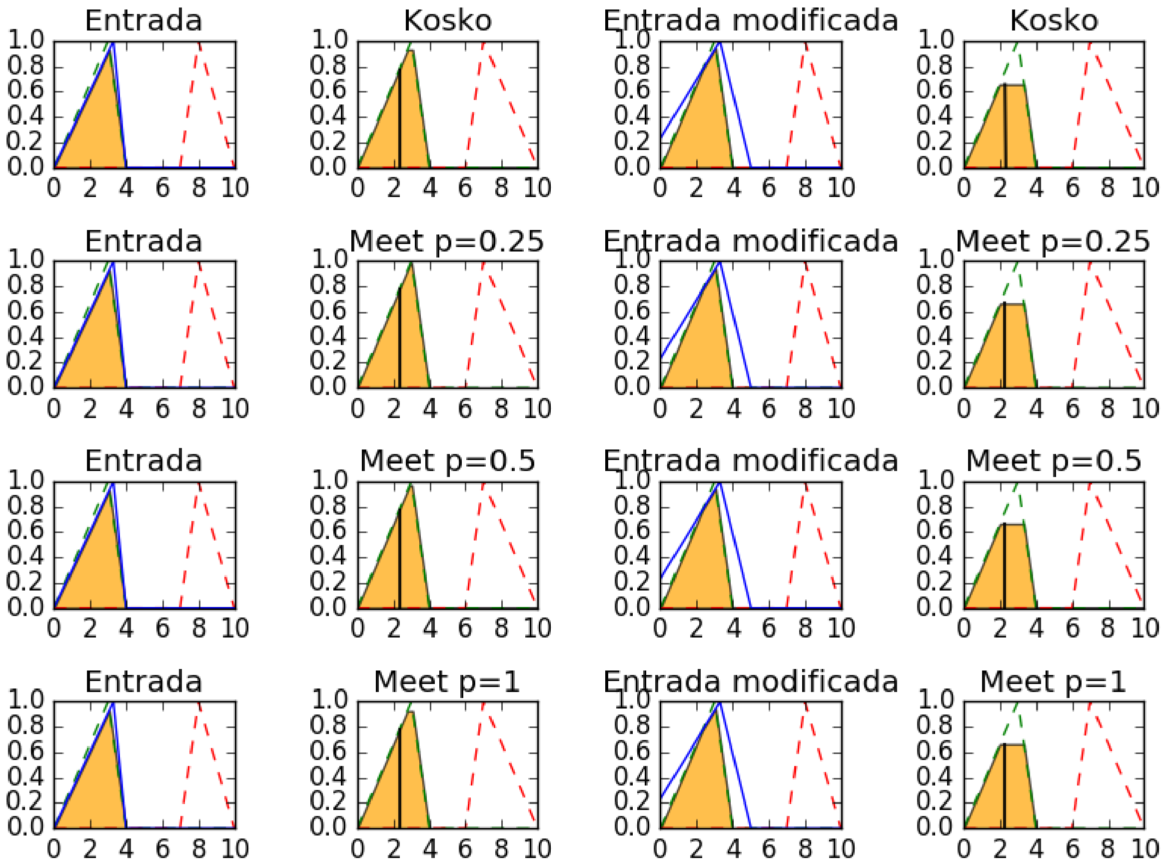

Figure 7: Resultados do caso 2 para $c = 1$

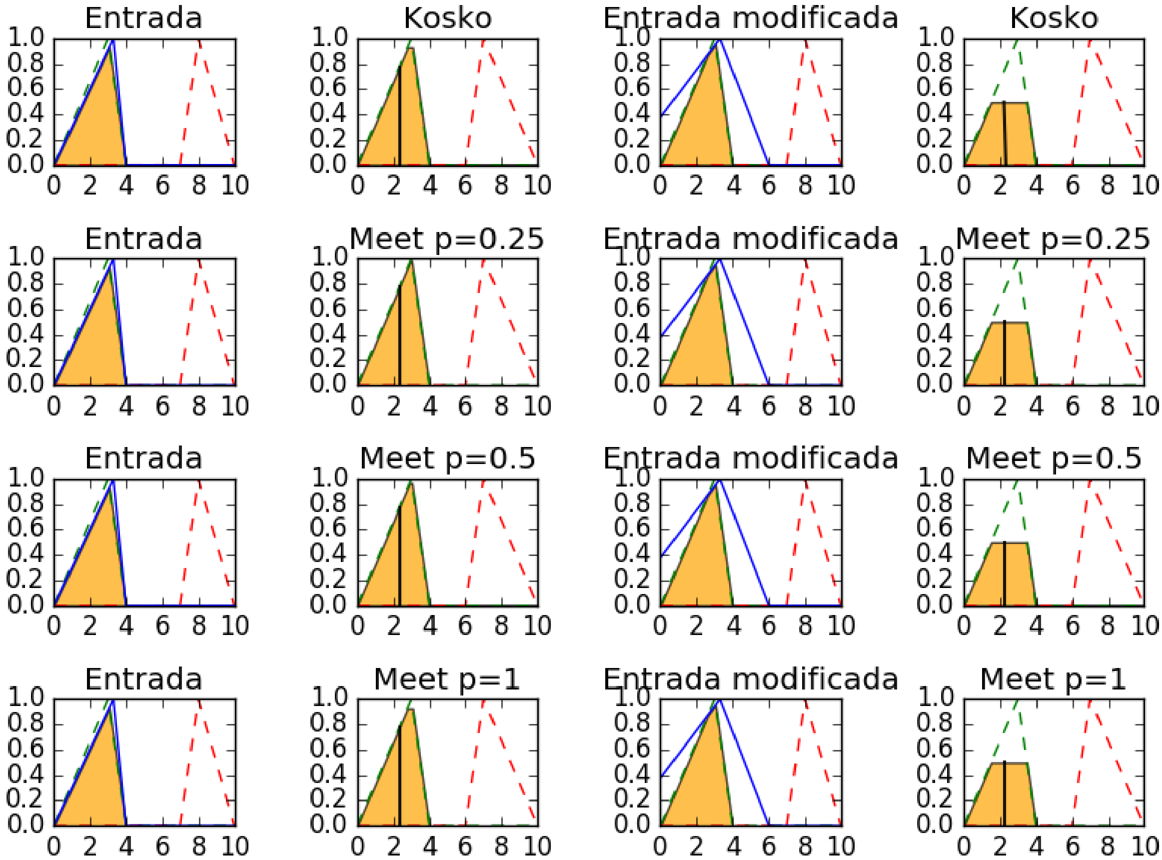

Figure 8: Resultados do caso 2 para $c = 2$

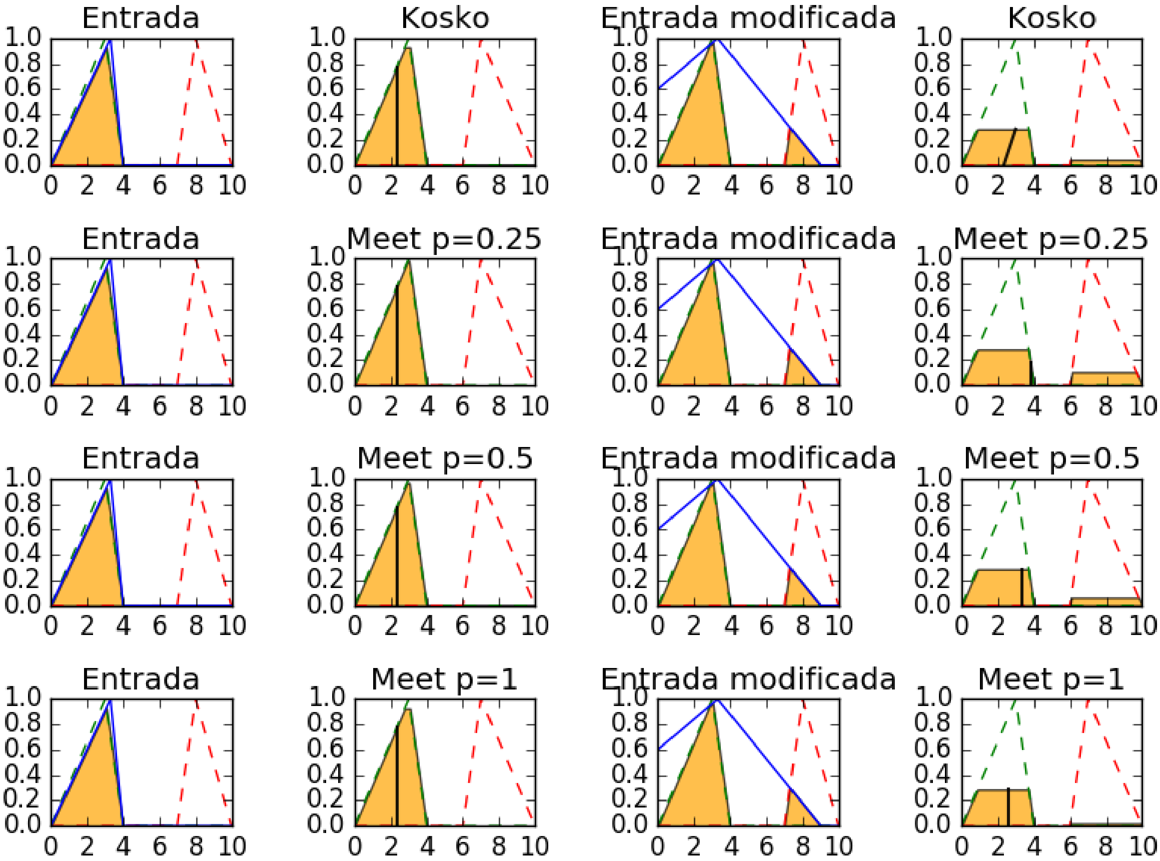

Figure 9: Resultados do caso 2 para $c = 5$

3.3 Caso 3

Entrada triangular com pouca intersecção (3.8,4.0,5.0)

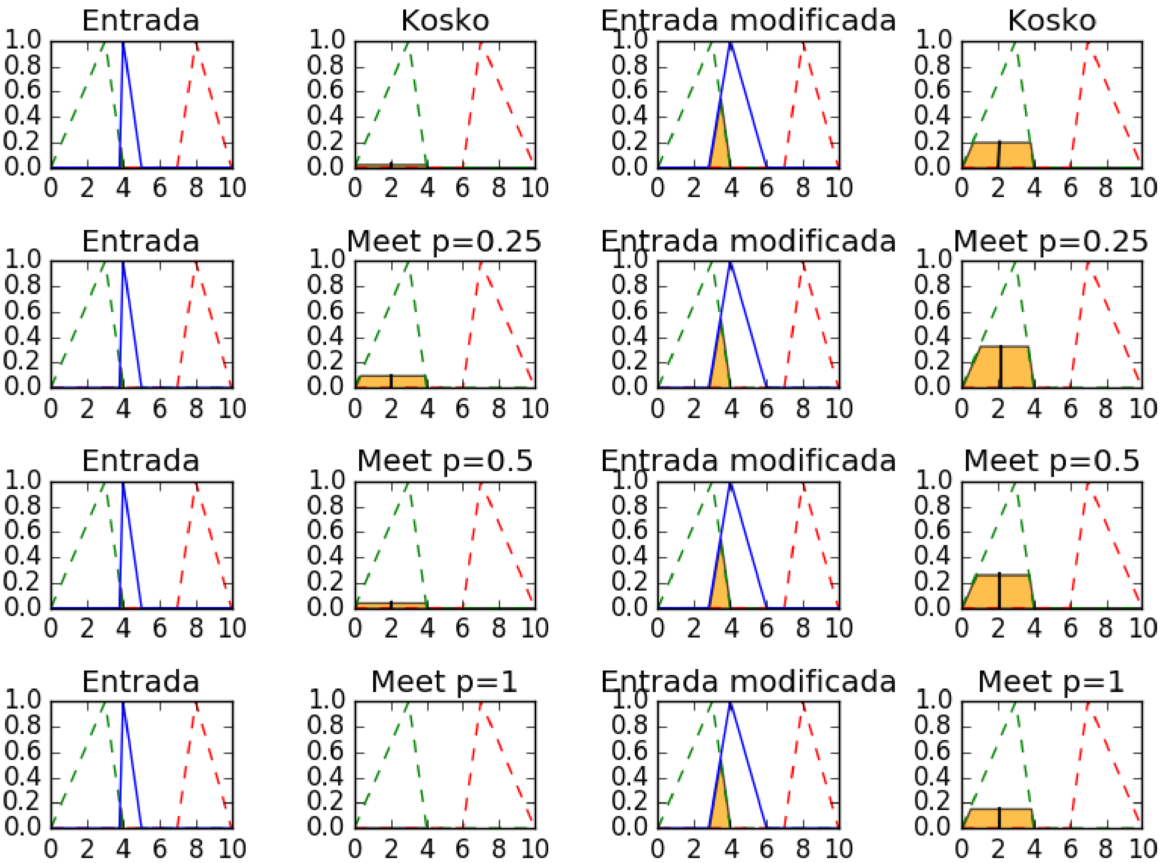

Figure 10: Resultados do caso 3 para $c = 1$

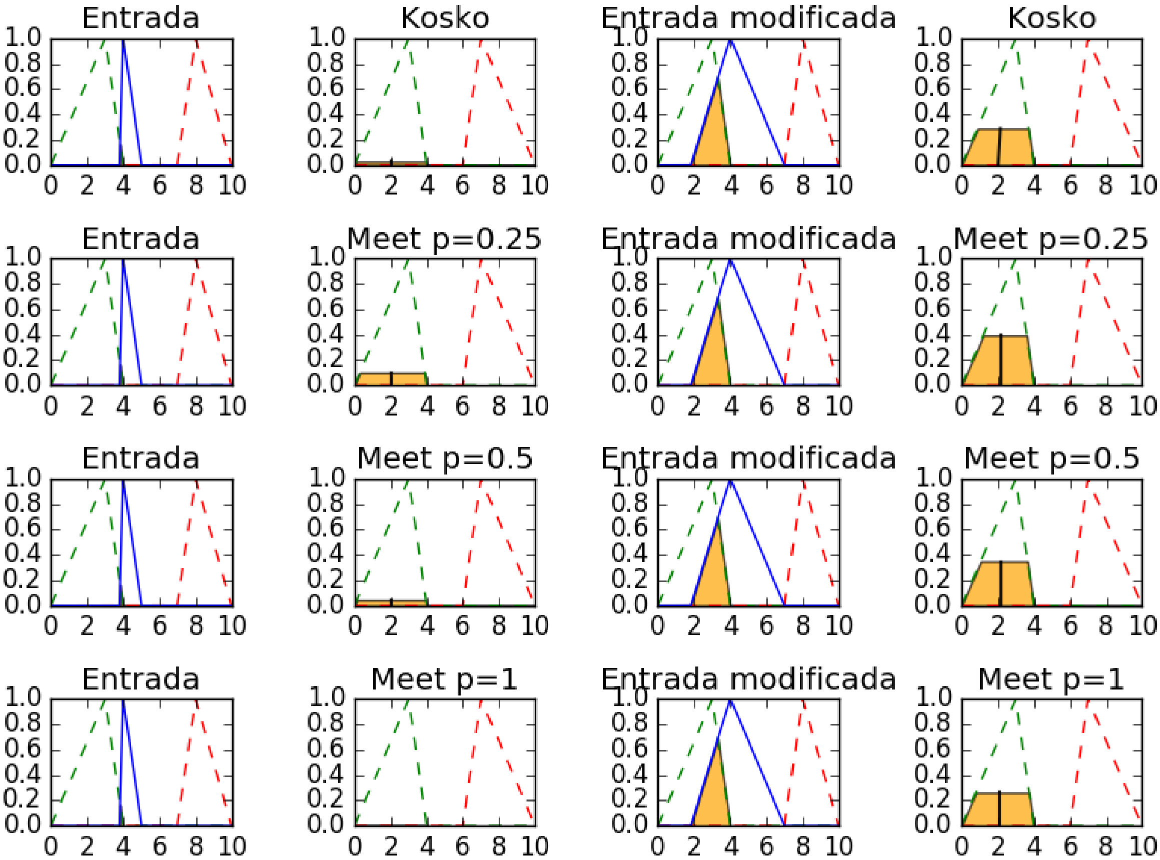

Figure 11: Resultados do caso 3 para $c = 2$

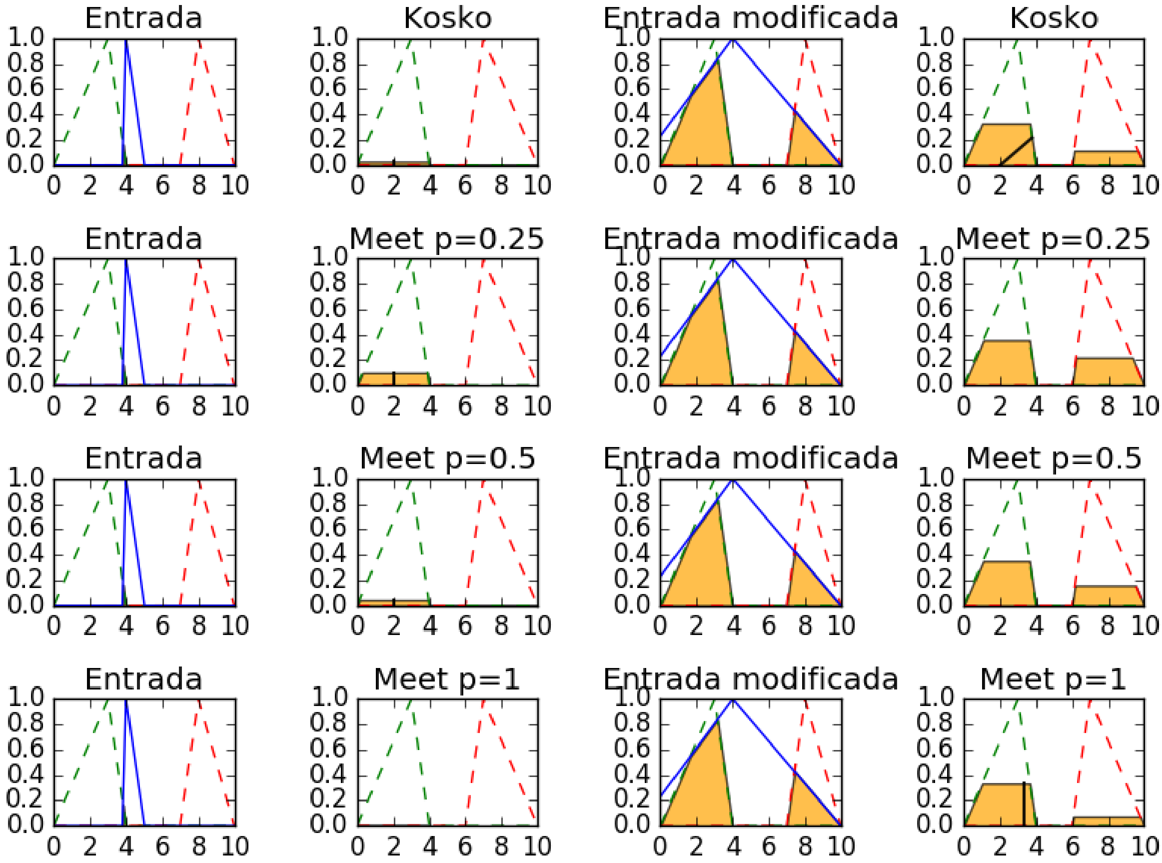

Figure 12: Resultados do caso 3 para $c = 5$

3.4 Caso 4

Entrada triangular sem intersecção mas próxima de um dos antecedentes (4.0,4.5,5.0)

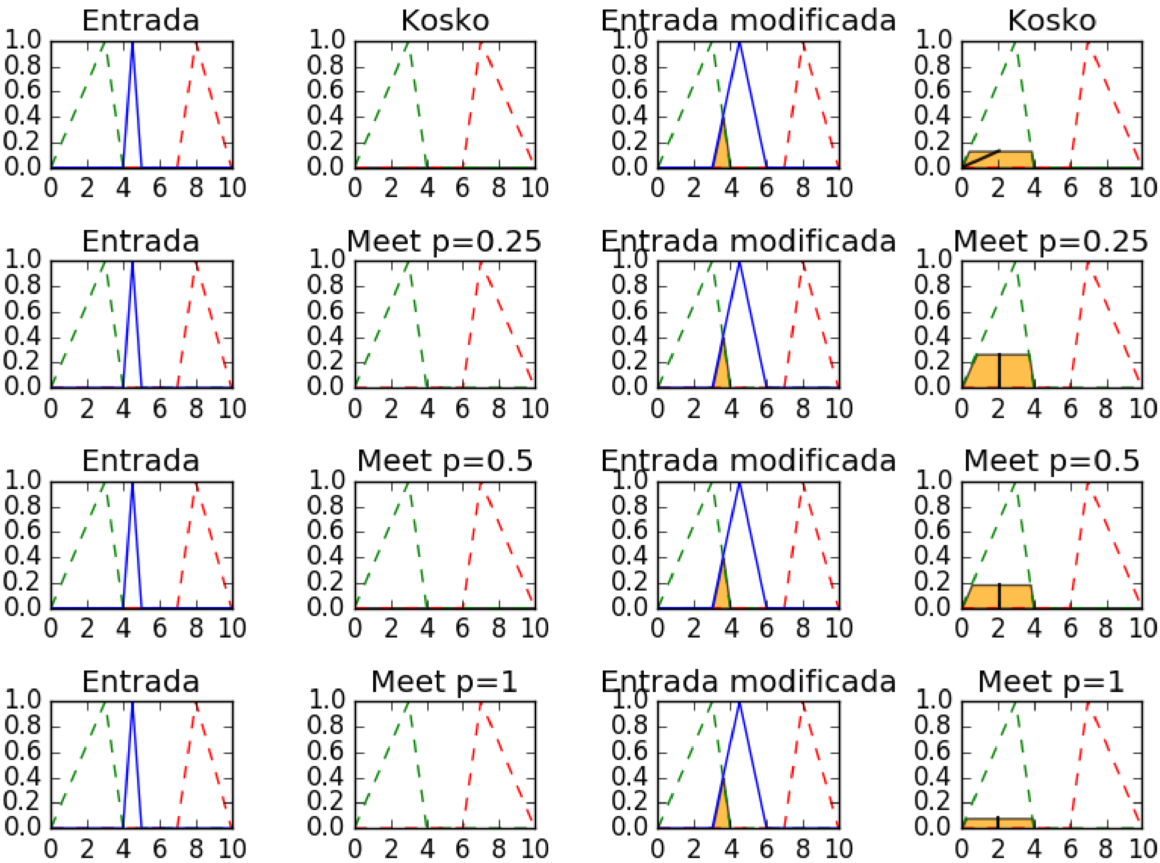

Figure 13: Resultados do caso 4 para $c = 1$

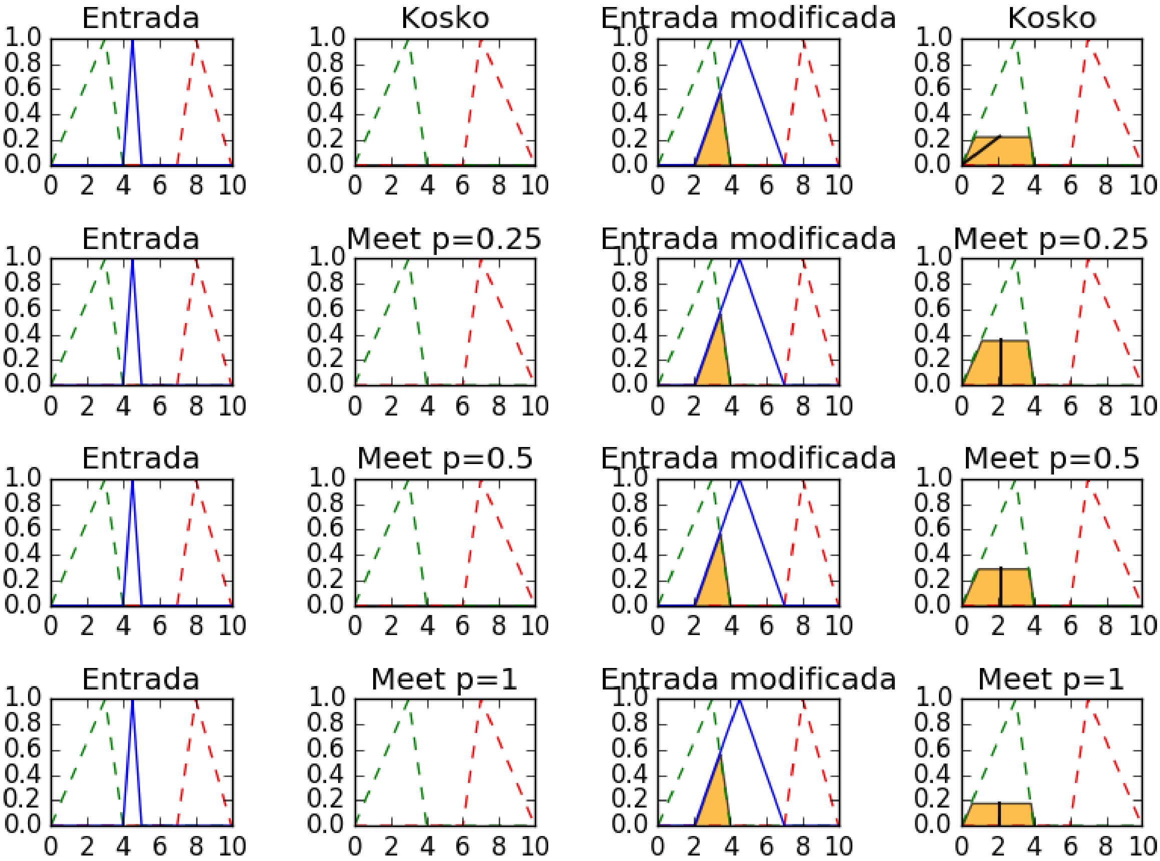

Figure 14: Resultados do caso 4 para $c = 2$

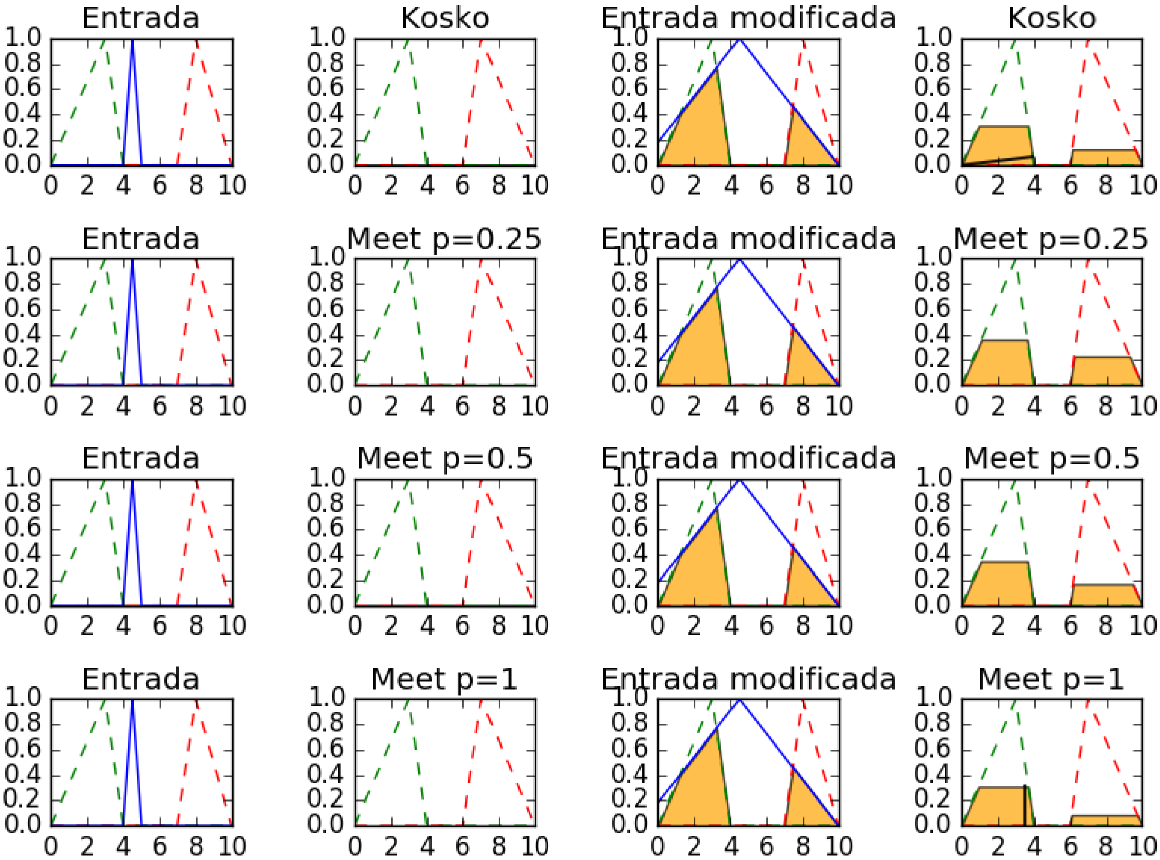

Figure 15: Resultados do caso 4 para $c = 5$

3.5 Caso 5

Entrada triangular equidistante dos antecedentes (5.0,5.5,6.0). Obs: notar que os antecedentes não possuem o mesmo tamanho.

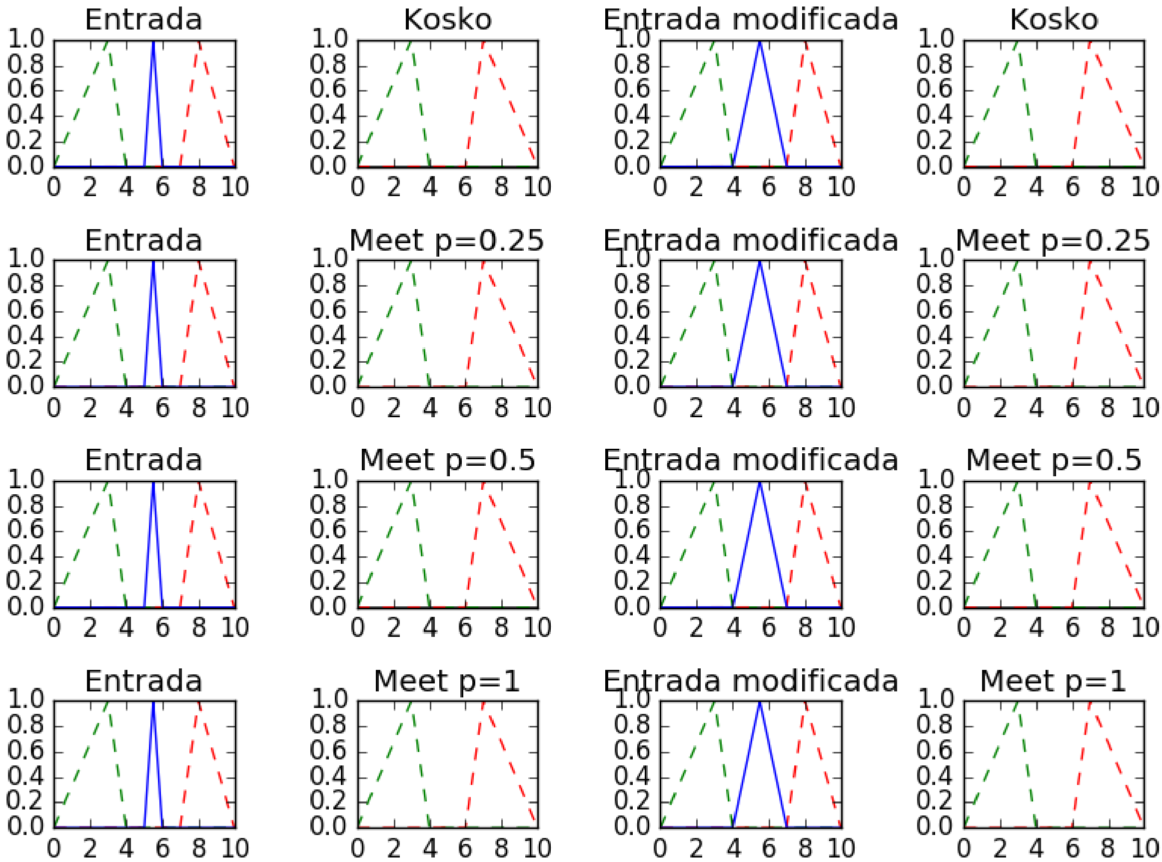

Figure 16: Resultados do caso 5 para $c = 1$

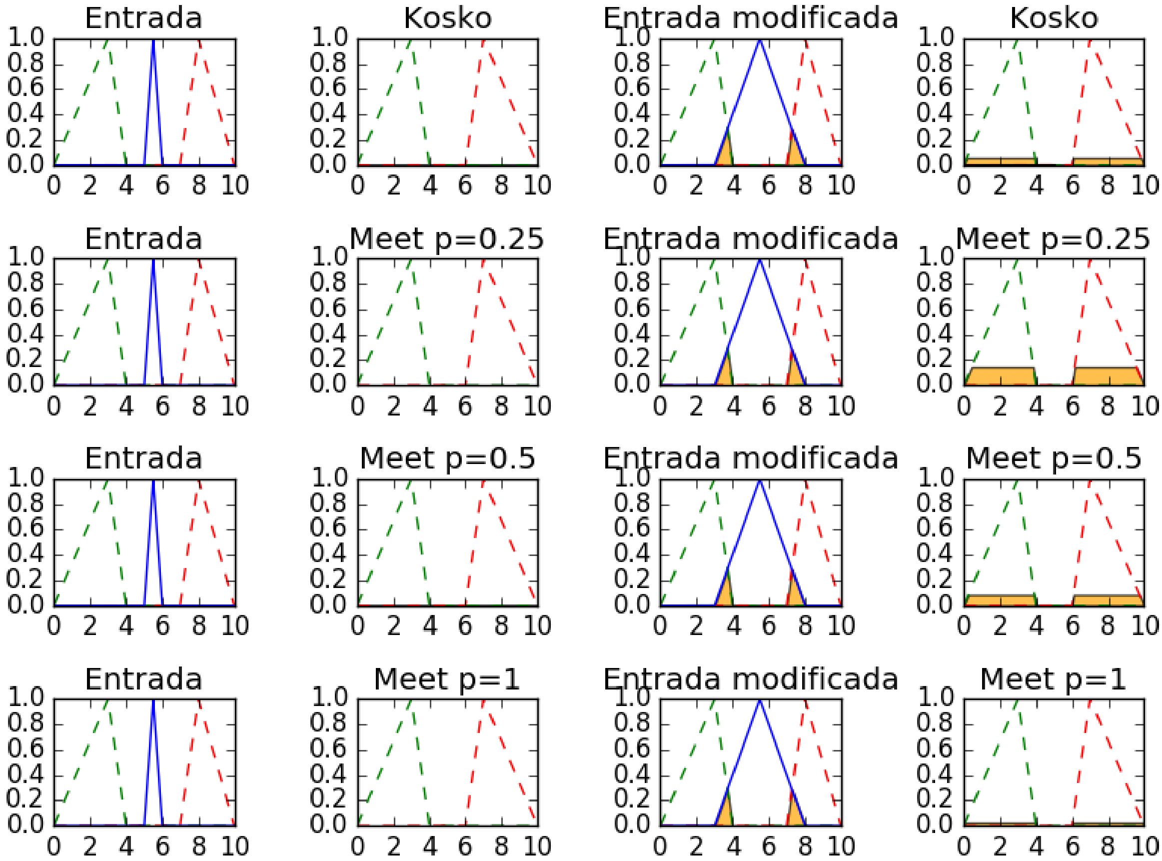

Figure 17: Resultados do caso 5 para $c = 2$

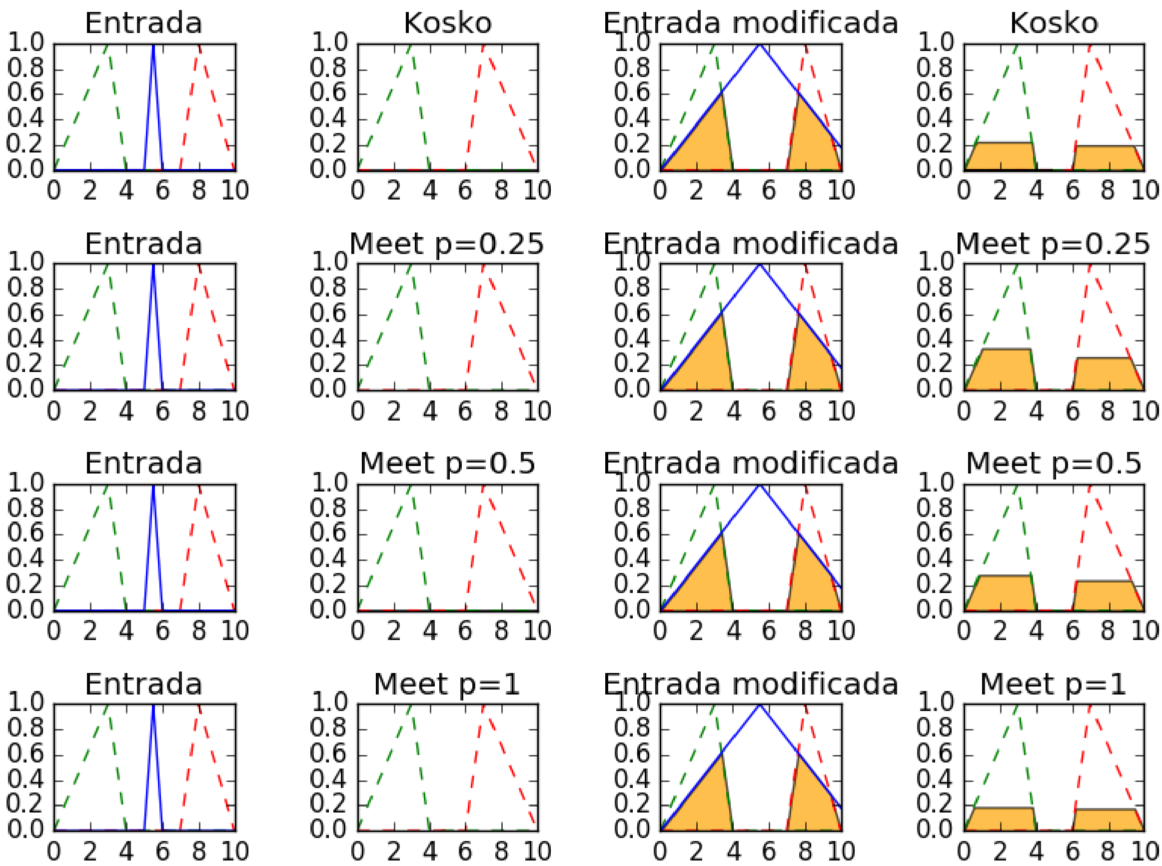

Figure 18: Resultados do caso 5 para $c = 5$

References

[1] J. Fan, W. Xie, and J. Pei. ?Subsethood measure: new definitions?. In: Fuzzy Sets and Systems 106.2 (Sept. 1999), pp. 201?209.

[2] P. Jaccard, Nouvelles recherches sur la distribution florale, (1908).