

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

RENATO LOPES MOURA RA163050

Estudo sobre Inferência Fuzzy baseada em medidas de  
subsethood

CAMPINAS

2016

# 1 Definições

**Definição 1.** Seja uma função  $S : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow [0, 1]$ .  $S(A, B)$  é uma medida de subsethood se para  $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$  temos:

1.  $S(A, B) = 1 \Leftrightarrow A \subseteq B$
2.  $S(X, \emptyset) = 0$
3. Se  $A \subseteq B \subseteq C$ , então  $S(C, A) \leq S(B, A)$  e  $S(C, A) \leq S(C, B)$

**Definição 2.** A medida de subsethood de Kosko é definida da seguinte forma:

$$S_k(A, B) = \frac{\int_{x \in X} \min(\mu_A(x), \mu_B(x))}{\int_{x \in X} \mu_A(x)}$$

**Definição 3.** A medida de subsethood de Willmott é definida da seguinte forma:

$$S_w(A, B) = \frac{\int_{x \in X} \mu_B(x)}{\int_{x \in X} \max(\mu_A(x), \mu_B(x))}$$

**Definição 4.** As medidas de subsethood  $S_p^\cap$ (meet) e  $S_p^\cup$ (join) são definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_p^\cap(A, B) &= I_p(v_p(A), v_p(A \cap B)), \\ S_p^\cup(A, B) &= I_p(v_p(A \cup B), v_p(B)) \end{aligned}$$

Onde  $I_p$  denota a implicação de Goguen

$$I_p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \min(1, \frac{y}{x}) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e  $v_p$  é uma função  $\mathcal{F}(X) \rightarrow [0, 1]$  definida por:

$$v_p = \sum_{i=1}^k \frac{1 - \cos(\pi [\mu_C(x^i)]^p)}{k}, \quad X = \{x^1, \dots, x^k\}$$

## 2 Experimentos

### 2.1 Caso 1

Entrada triangular quase discreta (3.4,3.5,3.6)

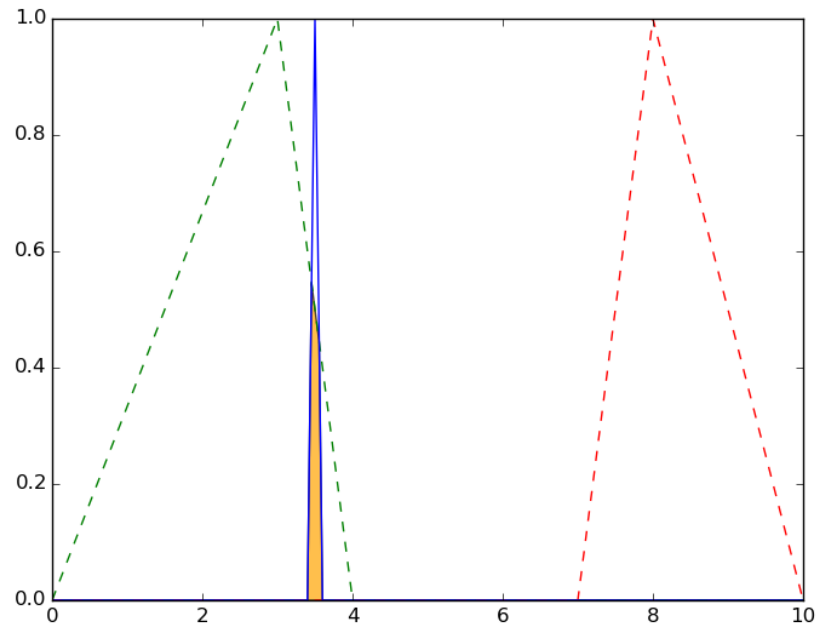


Figure 1: Entrada do caso 1

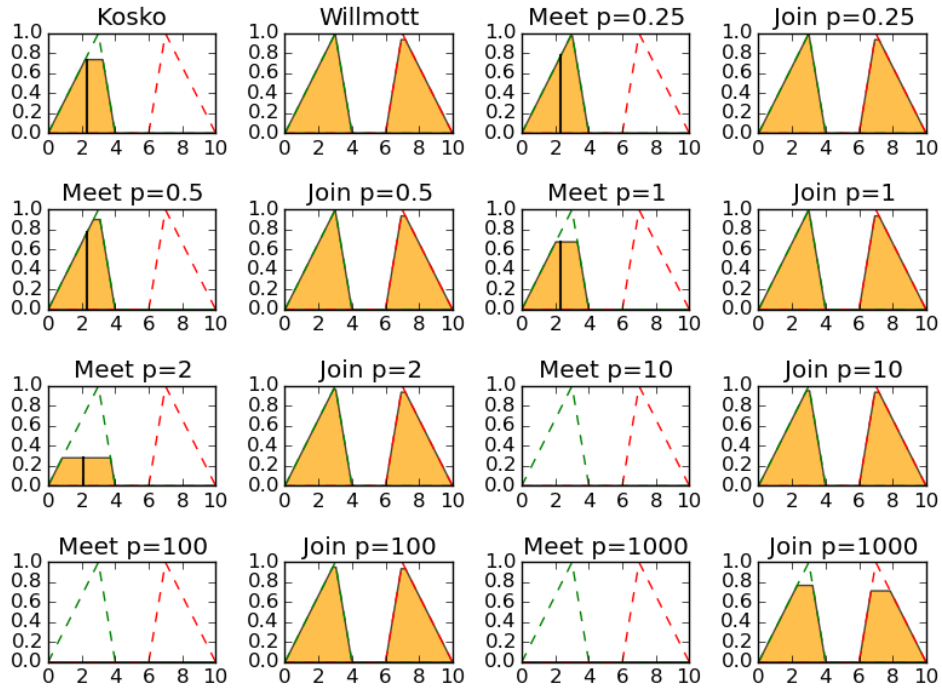


Figure 2: Resultados do caso 1

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
$S_k$	0	0.738	2.297
$S_w$	0.938	0.988	4.996
$S_{0.25}^\cap$	0	0.974	2.333
$S_{0.25}^\cup$	0.938	0.999	4.996
$S_{0.5}^\cap$	0	0.901	2.327
$S_{0.5}^\cup$	0.938	0.995	4.996
$S_1^\cap$	0	0.678	2.281
$S_1^\cup$	0.938	0.984	4.996
$S_2^\cap$	0	0.281	2.133
$S_2^\cup$	0.937	0.965	4.997
$S_{10}^\cap$	0	0	0
$S_{10}^\cup$	0.937	0.952	4.998
$S_{100}^\cap$	0	0	0
$S_{100}^\cup$	0.936	0.951	4.998
$S_{1000}^\cap$	0	0	0
$S_{1000}^\cup$	0.714	0.769	4.966

## 2.2 Caso 2

Entrada triangular quase igual ao antecedente (0.0,3.3,4.0)

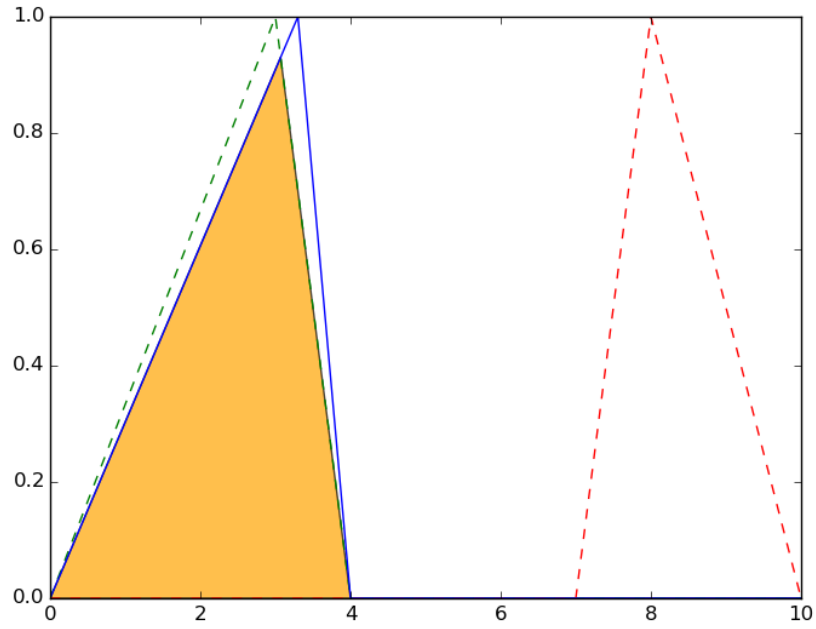


Figure 3: Entrada do caso 2

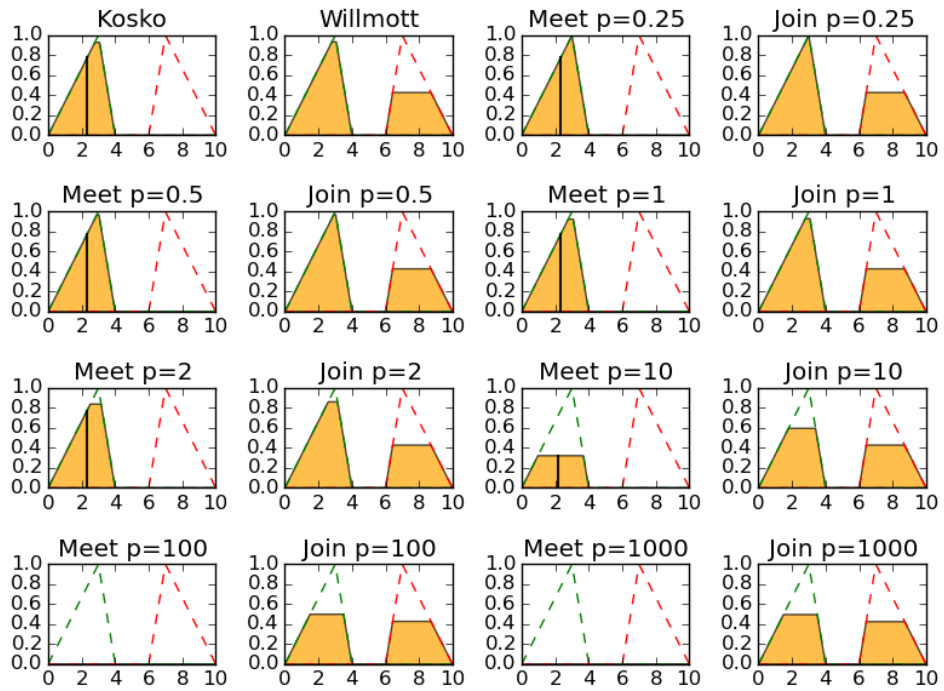


Figure 4: Resultados do caso 2

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
$S_k$	0	0.929	2.330
$S_w$	0.429	0.935	4.539
$S_{0.25}^\cap$	0	0.988	2.333
$S_{0.25}^\cup$	0.429	0.988	4.536
$S_{0.5}^\cap$	0	0.968	2.333
$S_{0.5}^\cup$	0.429	0.969	4.536
$S_1^\cap$	0	0.926	2.330
$S_1^\cup$	0.429	0.931	4.540
$S_2^\cap$	0	0.839	2.318
$S_2^\cup$	0.429	0.861	4.554
$S_{10}^\cap$	0	0.323	2.151
$S_{10}^\cup$	0.429	0.596	4.730
$S_{100}^\cap$	0	0	0
$S_{100}^\cup$	0.429	0.5	4.864
$S_{1000}^\cap$	0	0	0
$S_{1000}^\cup$	0.426	0.497	4.864

### 2.3 Caso 3

Entrada triangular com pouca intersecção (3.8,4.0,5.0)

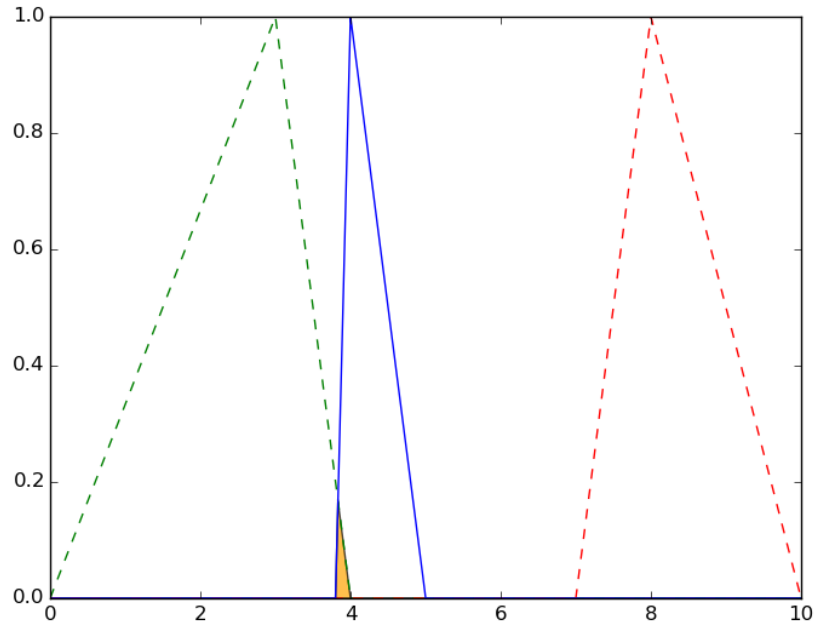


Figure 5: Entrada do caso 3

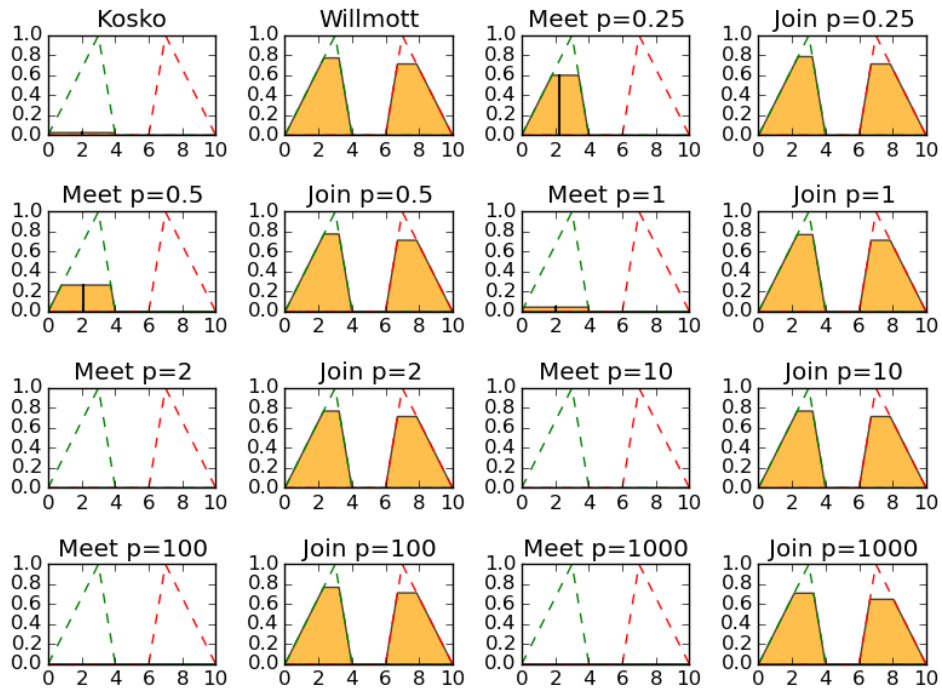


Figure 6: Resultados do caso 3

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
$S_k$	0	0.028	2.014
$S_w$	0.714	0.774	4.963
$S_{0.25}^\cap$	0	0.601	2.258
$S_{0.25}^\cup$	0.714	0.787	4.956
$S_{0.5}^\cap$	0	0.266	2.126
$S_{0.5}^\cup$	0.714	0.777	4.961
$S_1^\cap$	0	0.045	2.022
$S_1^\cup$	0.714	0.771	4.965
$S_2^\cap$	0	0.001	2
$S_2^\cup$	0.714	0.769	4.966
$S_{10}^\cap$	0	0	0
$S_{10}^\cup$	0.714	0.769	4.966
$S_{100}^\cap$	0	0	0
$S_{100}^\cup$	0.714	0.769	4.966
$S_{1000}^\cap$	0	0	0
$S_{1000}^\cup$	0.649	0.711	4.949



## 2.4 Caso 4

Entrada triangular sem intersecção mas próxima de um dos antecedentes (4.0,4.5,5.0)

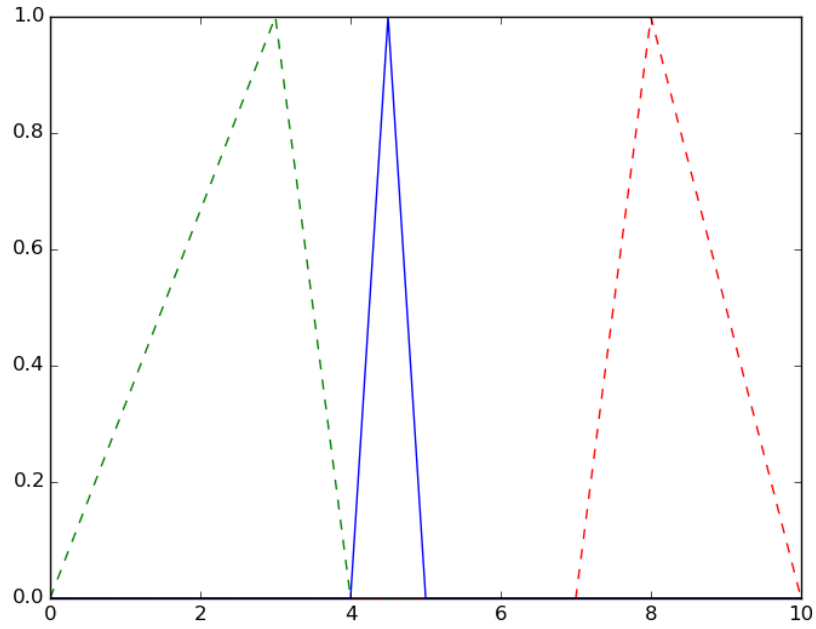


Figure 7: Entrada do caso 4

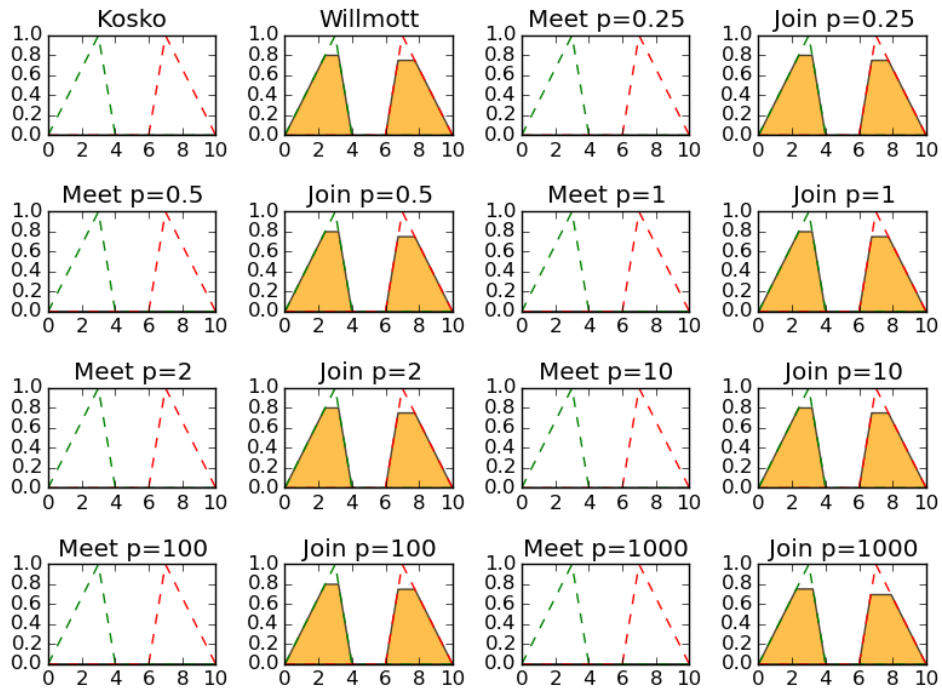


Figure 8: Resultados do caso 4

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
$S_k$	0	0	0
$S_w$	0.750	0.800	4.974
$S_{0.25}^\cap$	0	0	0
$S_{0.25}^\cup$	0.750	0.800	4.974
$S_{0.5}^\cap$	0	0	0
$S_{0.5}^\cup$	0.750	0.800	4.974
$S_1^\cap$	0	0	0
$S_1^\cup$	0.750	0.800	4.974
$S_2^\cap$	0	0	0
$S_2^\cup$	0.750	0.800	4.974
$S_{10}^\cap$	0	0	0
$S_{10}^\cup$	0.750	0.800	4.974
$S_{100}^\cap$	0	0	0
$S_{100}^\cup$	0.750	0.800	4.974
$S_{1000}^\cap$	0	0	0
$S_{1000}^\cup$	0.696	0.753	4.962

## 2.5 Caso 5

Entrada triangular equidistante dos antecedentes (5.0,5.5,6.0). Obs: notar que os antecedentes não possuem o mesmo tamanho.

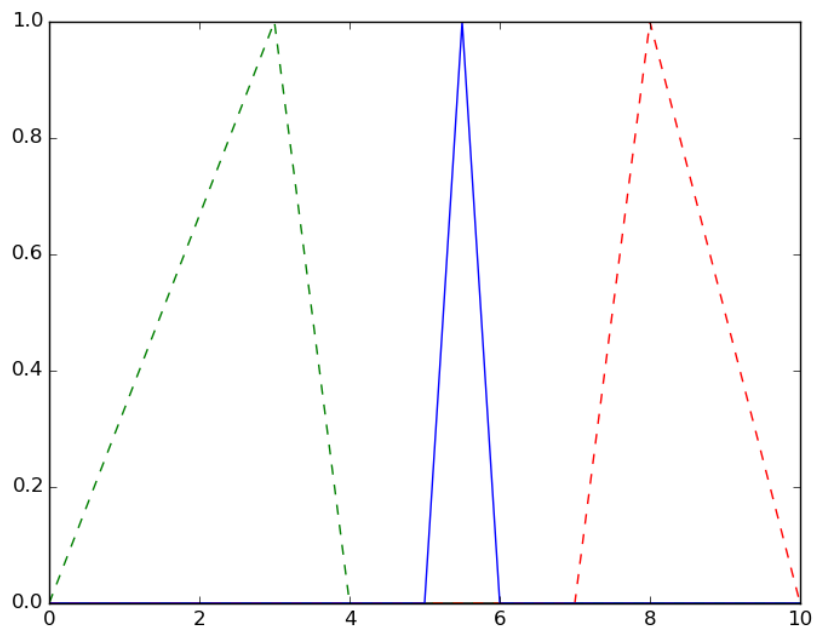


Figure 9: Entrada do caso 5

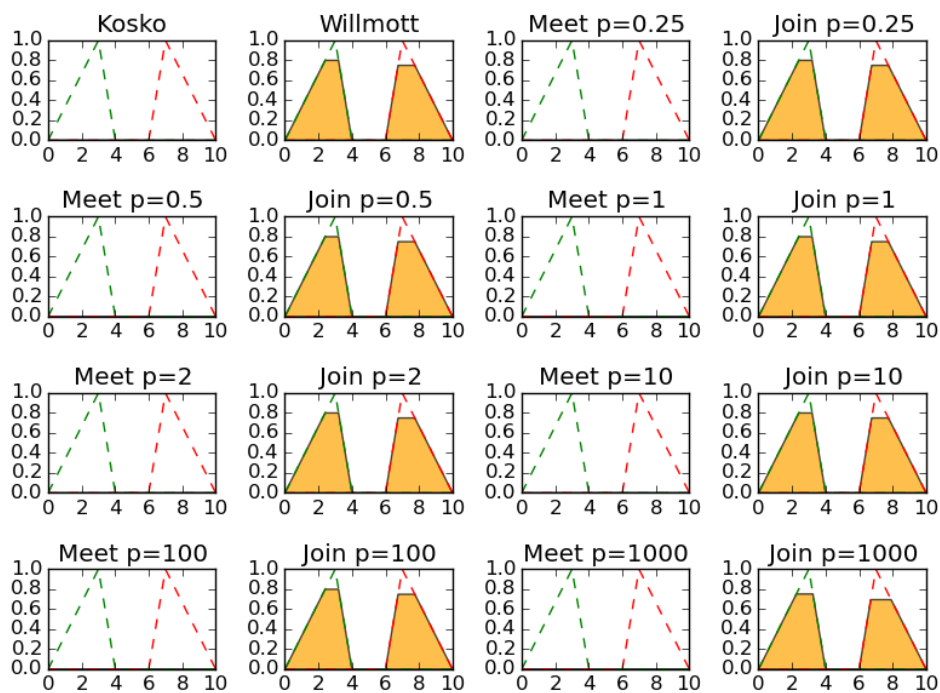


Figure 10: Resultados do caso 5

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
$S_k$	0	0	0
$S_w$	0.750	0.800	4.974
$S_{0.25}^\cap$	0	0	0
$S_{0.25}^\cup$	0.750	0.800	4.974
$S_{0.5}^\cap$	0	0	0
$S_{0.5}^\cup$	0.750	0.800	4.974
$S_1^\cap$	0	0	0
$S_1^\cup$	0.750	0.800	4.974
$S_2^\cap$	0	0	0
$S_2^\cup$	0.750	0.800	4.974
$S_{10}^\cap$	0	0	0
$S_{10}^\cup$	0.750	0.800	4.974
$S_{100}^\cap$	0	0	0
$S_{100}^\cup$	0.750	0.800	4.974
$S_{1000}^\cap$	0	0	0
$S_{1000}^\cup$	0.696	0.753	4.962

## 2.6 Comentários

- Em todos os casos, as medidas de subsethood do tipo *meet* ( $S_p^\cap$ ) com  $p \geq 10$  não apresentam valores de ativação significativos. No Caso 2, temos  $S_{10}^\cap = 0.323$  apesar de a entrada estar quase totalmente contida no antecedente. Portanto, não parece interessante considerar as medidas do tipo *meet* ( $S_p^\cap$ ) com  $p \geq 10$ .
- Também é possível notar que conforme o parâmetro  $p$  aumenta, o grau de ativação pela medida de subsethood do tipo *join* ( $S_p^\cup$ ) tende a se igualar para todas as regras. Portanto, também não parece interessante considerar as medidas do tipo *join* ( $S_p^\cup$ ) com  $p \geq 10$ .
- No Caso 1, apesar de a entrada apresentar um nível considerável de interseção com o antecedente da Regra 2 (tomate verde), as medidas de subsethood do tipo *join* ( $S_p^\cup$ ) ainda apresentam um elevado grau de ativação, em geral  $\geq 0.9$ . Desta forma, é possível concluir que para entradas com cardinalidade pequena, deve-se dar um peso maior para o grau de ativação das medidas de subsethood do tipo *meet* ( $S_p^\cap$ ).
- Nos Casos 4 e 5, pode-se notar que o grau de ativação das regras independe da localização da entrada no caso em que a interseção da entrada com os antecedentes é vazia. A medida de subsethood do tipo *join* ( $S_p^\cup$ ) considera apenas a cardinalidade dos antecedentes e da entrada, o que pode representar um problema em bases de regras esparsas.

### 3 Experimentos com combinação de medidas

**Proposição 1.** A média ponderada entre medidas de subthood dos tipos *meet* e *join*:

$$S_p(A, B) = \frac{\alpha S_p^\cap(A, B) + \beta S_p^\cup(A, B)}{\alpha + \beta}$$

é uma medida de subthood

*Proof.* 1.  $S(A, B) = 1 \Leftrightarrow A \subseteq B$

$$\Rightarrow: S_p(A, B) = 1$$

Suponha que  $A \not\subseteq B \Rightarrow S_p^\cap(A, B) < 1$  e  $S_p^\cup(A, B) < 1$

$$\Rightarrow \alpha S_p^\cap(A, B) < \alpha \text{ e } \beta S_p^\cup(A, B) < \beta$$

$$\Rightarrow \alpha S_p^\cap(A, B) + \beta S_p^\cup(A, B) < \alpha + \beta$$

$\Rightarrow S_p(A, B) < 1$ , o que contradiz a hipótese inicial.

Portanto,  $A \subseteq B$ .

$$\Leftarrow: A \subseteq B$$

$$\Rightarrow S_p^\cap(A, B) = 1 \text{ e } S_p^\cup(A, B) = 1$$

$$\Rightarrow \alpha S_p^\cap(A, B) + \beta S_p^\cup(A, B) = \alpha + \beta$$

$$\Rightarrow S_p(A, B) = 1$$

2.  $S(X, \emptyset) = 0$

$$S_p^\cap(X, \emptyset) = 0 \text{ e } S_p^\cup(X, \emptyset) = 0$$

$$\Rightarrow S(X, \emptyset) = \frac{\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0}{\alpha + \beta} = 0$$

3. Se  $A \subseteq B \subseteq C$ , então  $S(C, A) \leq S(B, A)$  e  $S(C, A) \leq S(C, B)$

□

### 3.1 Caso 1

Entrada triangular quase discreta (3.4,3.5,3.6)

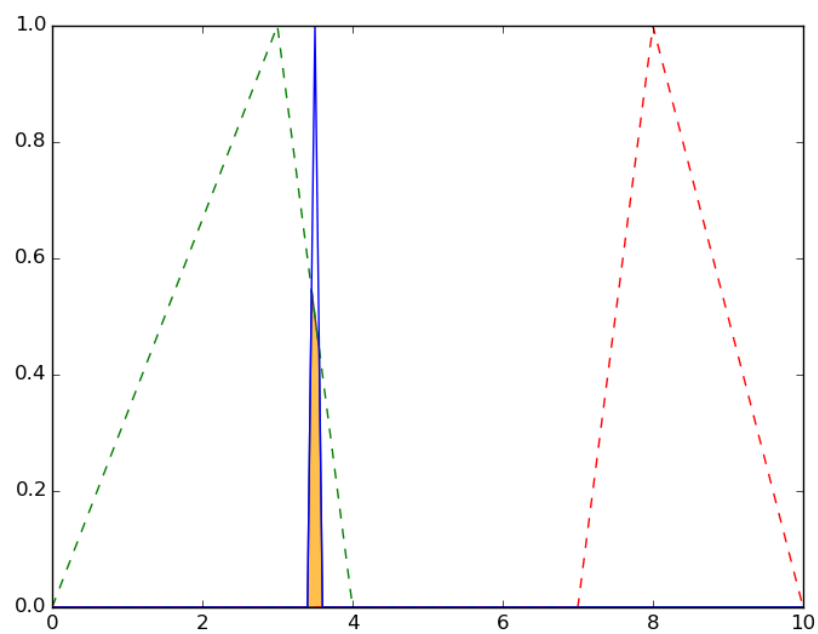


Figure 11: Entrada do caso 1

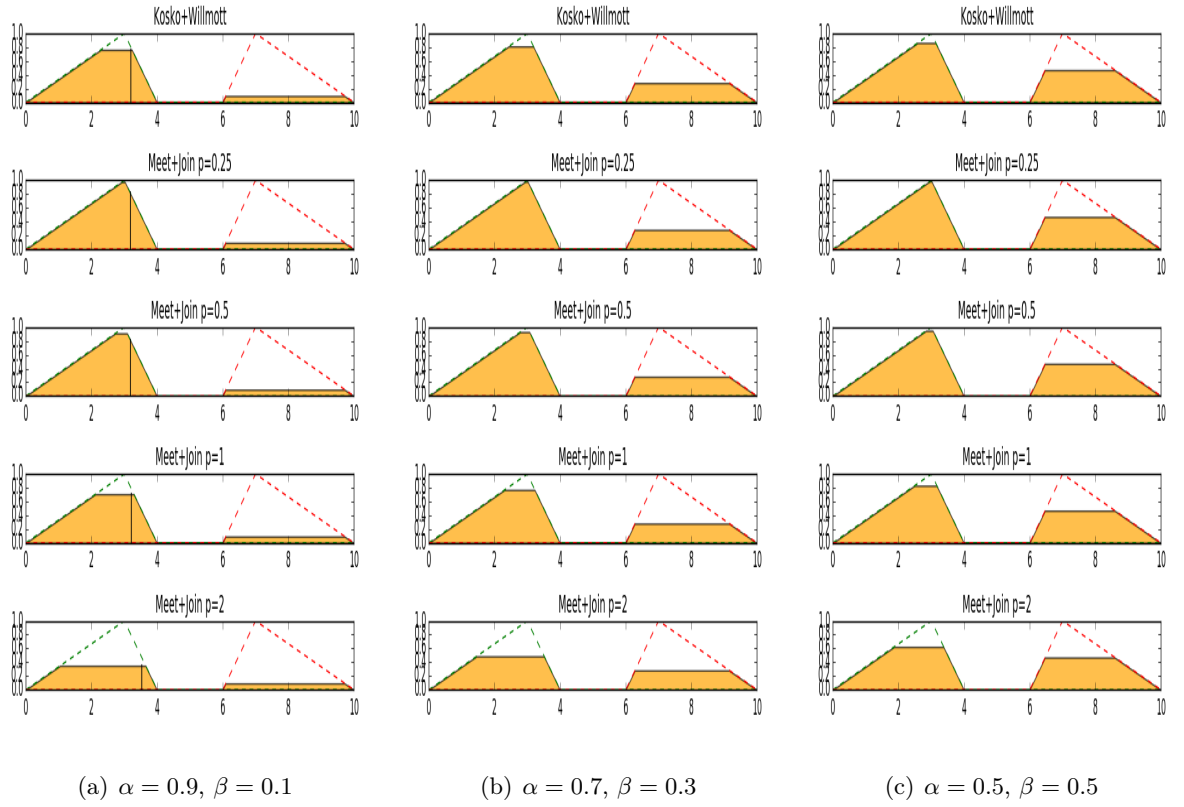


Figure 12: Resultados do caso 1

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
$0.9S_k + 0.1S_w$	0.094	0.763	3.203
$0.9S_{0.25}^\cap + 0.1S_{0.25}^\cup$	0.094	0.977	3.186
$0.9S_{0.5}^\cap + 0.1S_{0.5}^\cup$	0.094	0.911	3.187
$0.9S_1^\cap + 0.1S_1^\cup$	0.094	0.708	3.215
$0.9S_2^\cap + 0.1S_2^\cup$	0.094	0.350	3.532
$0.7S_k + 0.3S_w$	0.281	0.813	4.167
$0.7S_{0.25}^\cap + 0.3S_{0.25}^\cup$	0.281	0.981	4.137
$0.7S_{0.5}^\cap + 0.3S_{0.5}^\cup$	0.281	0.929	4.140
$0.7S_1^\cap + 0.3S_1^\cup$	0.281	0.769	4.184
$0.7S_2^\cap + 0.3S_2^\cup$	0.281	0.486	4.456
$0.5S_k + 0.5S_w$	0.469	0.863	4.632
$0.5S_{0.25}^\cap + 0.5S_{0.25}^\cup$	0.469	0.986	4.613
$0.5S_{0.5}^\cap + 0.5S_{0.5}^\cup$	0.469	0.948	4.616
$0.5S_1^\cap + 0.5S_1^\cup$	0.469	0.831	4.642
$0.5S_2^\cap + 0.5S_2^\cup$	0.469	0.623	4.781



### 3.2 Caso 2

Entrada triangular quase igual ao antecedente (0.0,3.3,4.0)

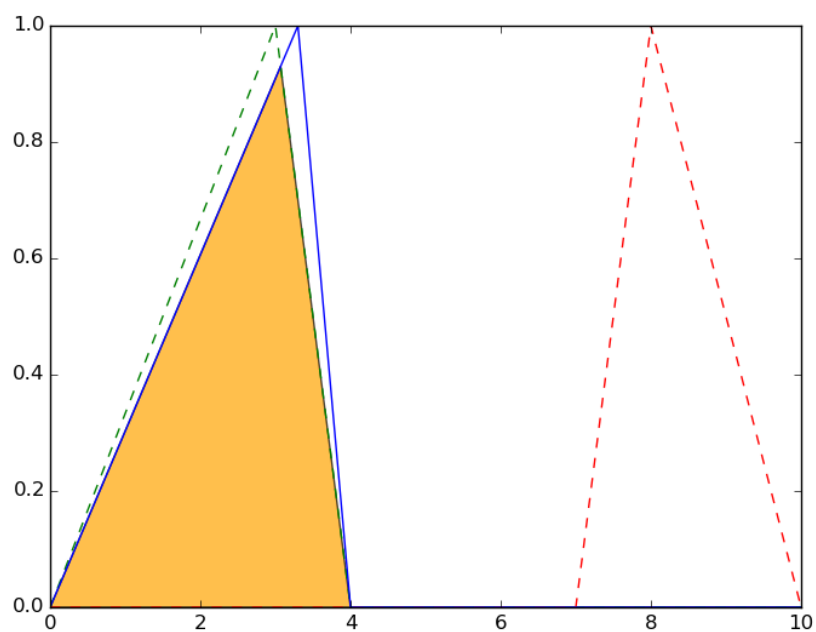


Figure 13: Entrada do caso 2

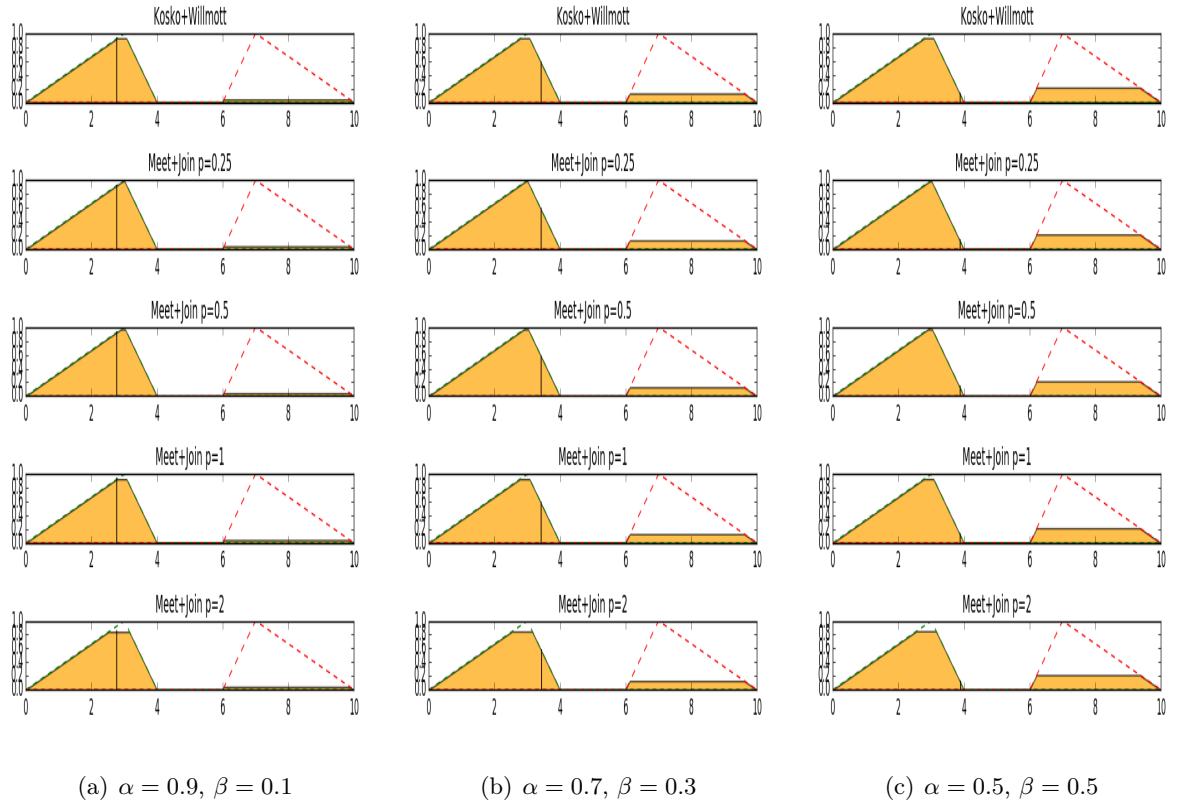


Figure 14: Resultados do caso 2

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
$0.9S_k + 0.1S_w$	0.043	0.930	2.769
$0.9S_{0.25}^\cap + 0.1S_{0.25}^\cup$	0.043	0.988	2.770
$0.9S_{0.5}^\cap + 0.1S_{0.5}^\cup$	0.043	0.968	2.770
$0.9S_1^\cap + 0.1S_1^\cup$	0.043	0.926	2.769
$0.9S_2^\cap + 0.1S_2^\cup$	0.043	0.841	2.767
$0.7S_k + 0.3S_w$	0.129	0.931	3.422
$0.7S_{0.25}^\cap + 0.3S_{0.25}^\cup$	0.129	0.988	3.420
$0.7S_{0.5}^\cap + 0.3S_{0.5}^\cup$	0.129	0.969	3.421
$0.7S_1^\cap + 0.3S_1^\cup$	0.129	0.927	3.422
$0.7S_2^\cap + 0.3S_2^\cup$	0.129	0.846	3.430
$0.5S_k + 0.5S_w$	0.214	0.932	3.876
$0.5S_{0.25}^\cap + 0.5S_{0.25}^\cup$	0.214	0.988	3.873
$0.5S_{0.5}^\cap + 0.5S_{0.5}^\cup$	0.214	0.969	3.874
$0.5S_1^\cap + 0.5S_1^\cup$	0.214	0.928	3.877
$0.5S_2^\cap + 0.5S_2^\cup$	0.214	0.850	3.889

### 3.3 Caso 3

Entrada triangular com pouca intersecção (3.8,4.0,5.0)

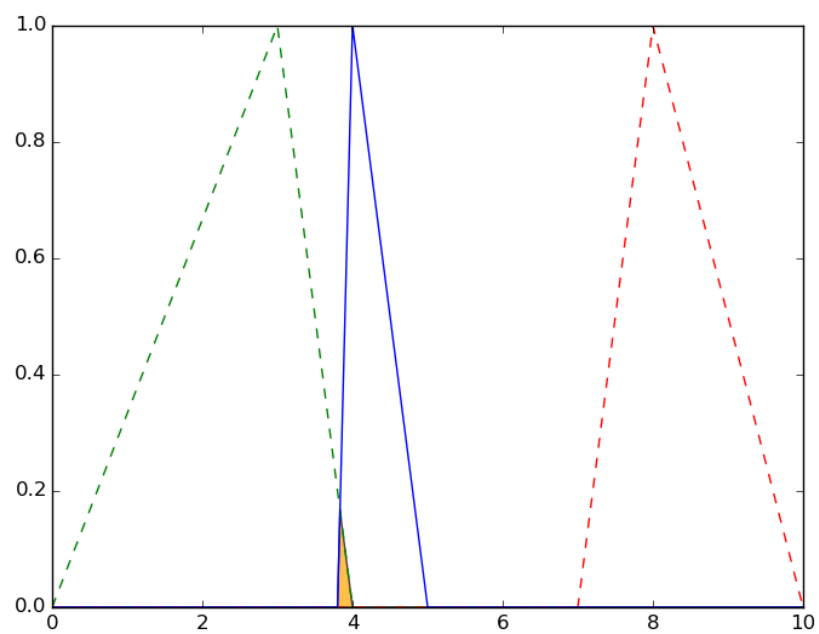


Figure 15: Entrada do caso 3

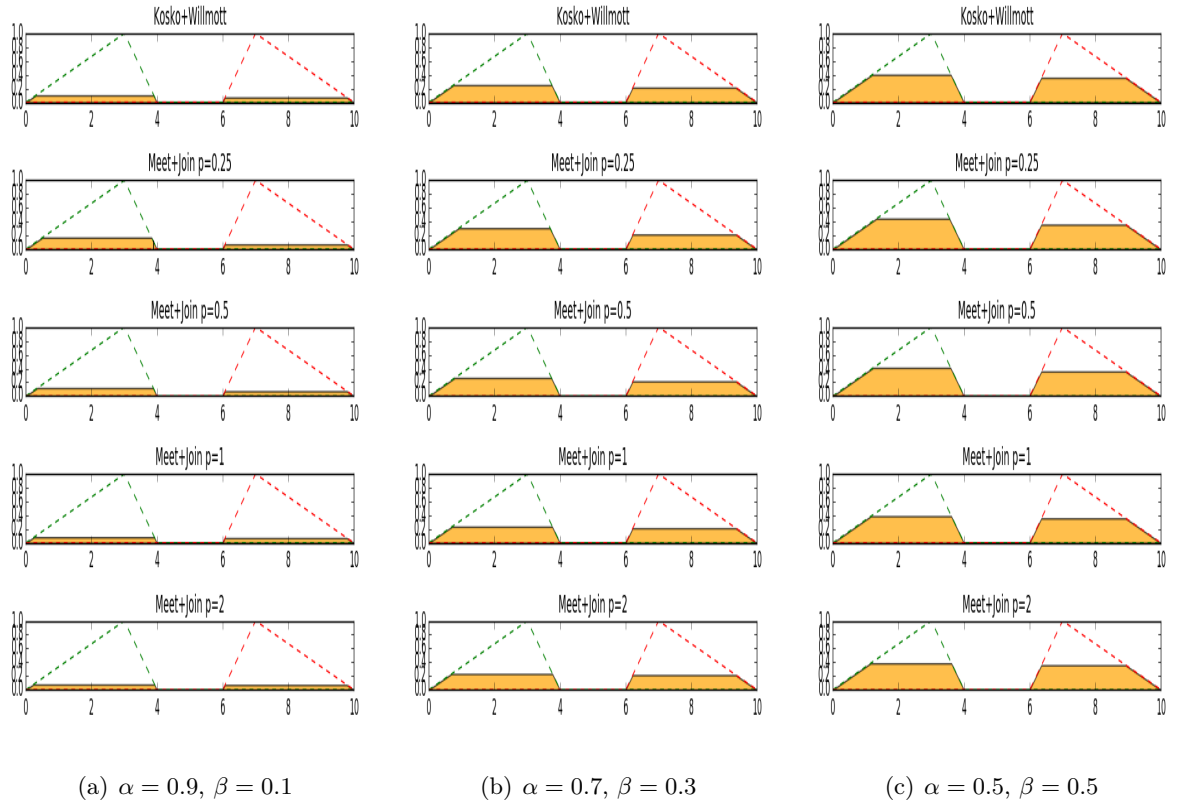


Figure 16: Resultados do caso 3

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
$0.9S_k + 0.1S_w$	0.071	0.102	4.507
$0.9S_{0.25}^\cap + 0.1S_{0.25}^\cup$	0.071	0.169	3.893
$0.9S_{0.5}^\cap + 0.1S_{0.5}^\cup$	0.071	0.118	4.322
$0.9S_1^\cap + 0.1S_1^\cup$	0.071	0.084	4.776
$0.9S_2^\cap + 0.1S_2^\cup$	0.071	0.077	4.892
$0.7S_k + 0.3S_w$	0.214	0.252	4.808
$0.7S_{0.25}^\cap + 0.3S_{0.25}^\cup$	0.214	0.307	4.585
$0.7S_{0.5}^\cap + 0.3S_{0.5}^\cup$	0.214	0.264	4.750
$0.7S_1^\cap + 0.3S_1^\cup$	0.214	0.236	4.881
$0.7S_2^\cap + 0.3S_2^\cup$	0.214	0.231	4.909
$0.5S_k + 0.5S_w$	0.357	0.401	4.884
$0.5S_{0.25}^\cap + 0.5S_{0.25}^\cup$	0.357	0.444	4.788
$0.5S_{0.5}^\cap + 0.5S_{0.5}^\cup$	0.357	0.411	4.860
$0.5S_1^\cap + 0.5S_1^\cup$	0.357	0.389	4.913
$0.5S_2^\cap + 0.5S_2^\cup$	0.357	0.385	4.924

### 3.4 Caso 4

Entrada triangular sem intersecção mas próxima de um dos antecedentes (4.0,4.5,5.0)

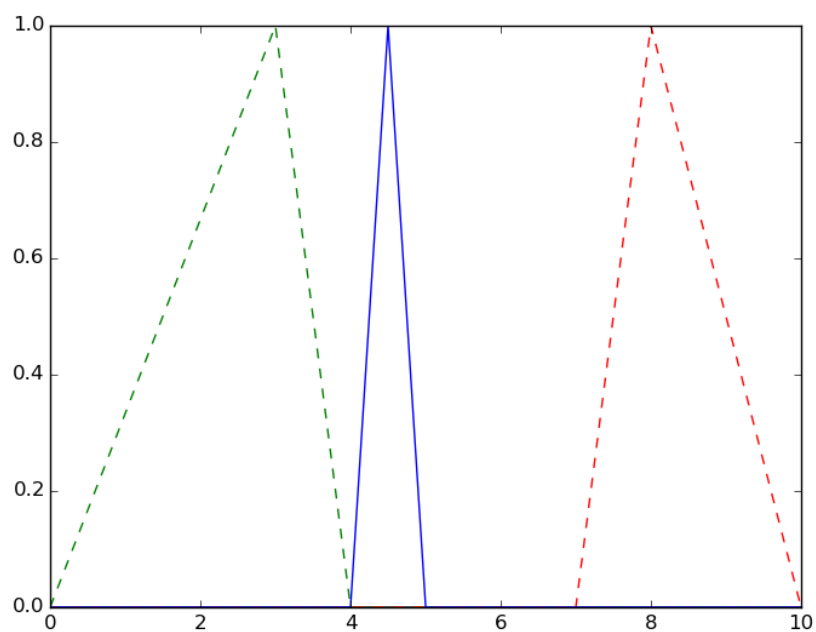


Figure 17: Entrada do caso 4

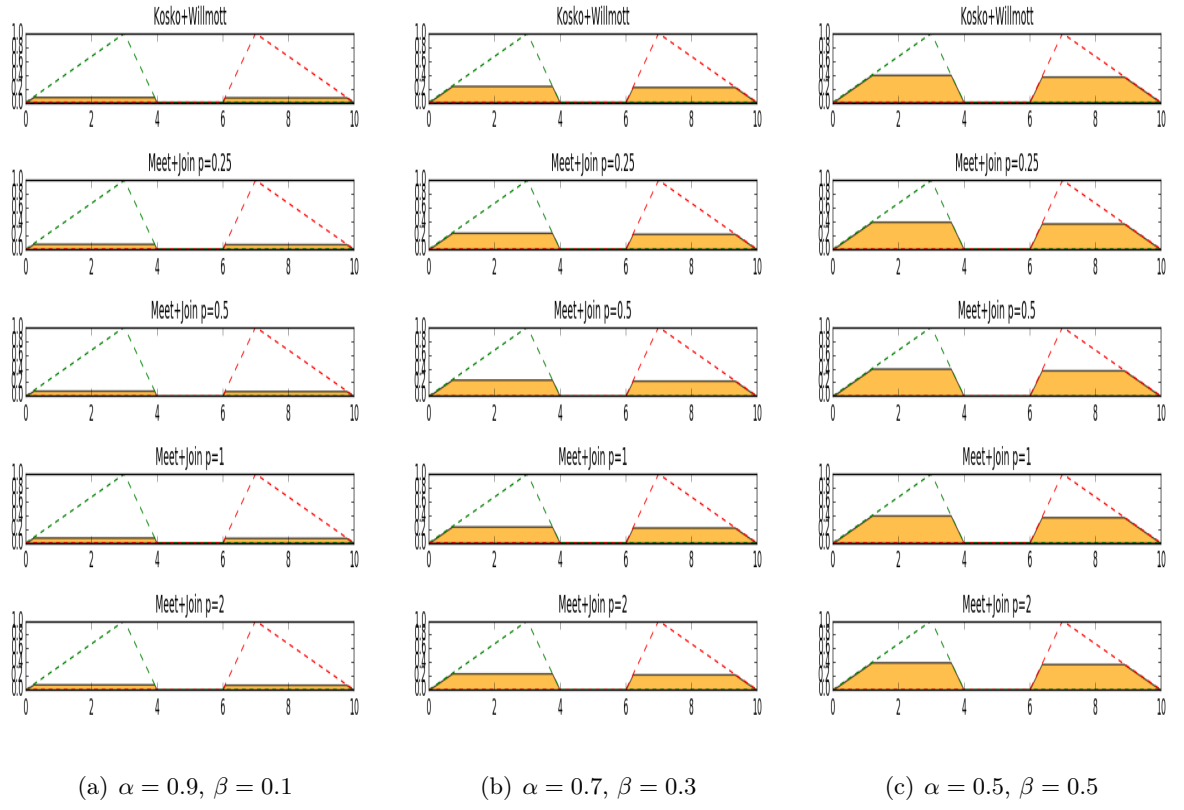


Figure 18: Resultados do caso 4

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
$0.9S_k + 0.1S_w$	0.075	0.080	4.910
$0.9S_{0.25}^\cap + 0.1S_{0.25}^\cup$	0.075	0.080	4.910
$0.9S_{0.5}^\cap + 0.1S_{0.5}^\cup$	0.075	0.080	4.910
$0.9S_1^\cap + 0.1S_1^\cup$	0.075	0.080	4.910
$0.9S_2^\cap + 0.1S_2^\cup$	0.075	0.080	4.910
$0.7S_k + 0.3S_w$	0.225	0.240	4.922
$0.7S_{0.25}^\cap + 0.3S_{0.25}^\cup$	0.225	0.240	4.922
$0.7S_{0.5}^\cap + 0.3S_{0.5}^\cup$	0.225	0.240	4.922
$0.7S_1^\cap + 0.3S_1^\cup$	0.225	0.240	4.922
$0.7S_2^\cap + 0.3S_2^\cup$	0.225	0.240	4.922
$0.5S_k + 0.5S_w$	0.375	0.400	4.936
$0.5S_{0.25}^\cap + 0.5S_{0.25}^\cup$	0.375	0.400	4.936
$0.5S_{0.5}^\cap + 0.5S_{0.5}^\cup$	0.375	0.400	4.936
$0.5S_1^\cap + 0.5S_1^\cup$	0.375	0.400	4.936
$0.5S_2^\cap + 0.5S_2^\cup$	0.375	0.400	4.936

### 3.5 Caso 5

Entrada triangular equidistante dos antecedentes (5.0,5.5,6.0). Obs: notar que os antecedentes não possuem o mesmo tamanho.

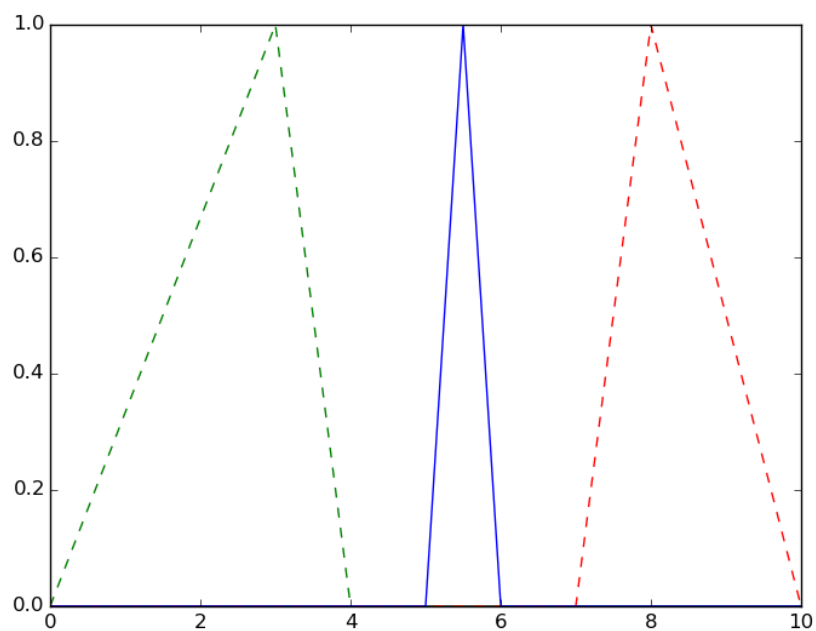


Figure 19: Entrada do caso 5

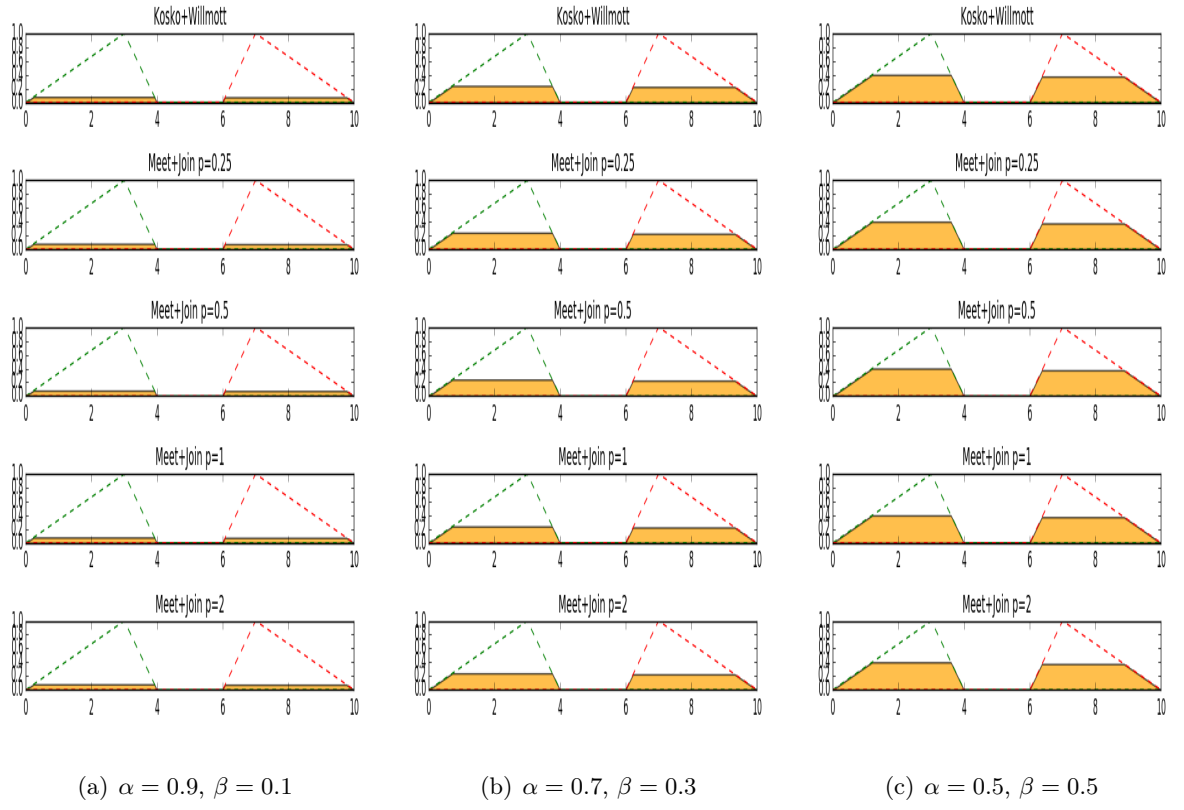


Figure 20: Resultados do caso 5

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
$0.9S_k + 0.1S_w$	0.075	0.080	4.910
$0.9S_{0.25}^\cap + 0.1S_{0.25}^\cup$	0.075	0.080	4.910
$0.9S_{0.5}^\cap + 0.1S_{0.5}^\cup$	0.075	0.080	4.910
$0.9S_1^\cap + 0.1S_1^\cup$	0.075	0.080	4.910
$0.9S_2^\cap + 0.1S_2^\cup$	0.075	0.080	4.910
$0.7S_k + 0.3S_w$	0.225	0.240	4.922
$0.7S_{0.25}^\cap + 0.3S_{0.25}^\cup$	0.225	0.240	4.922
$0.7S_{0.5}^\cap + 0.3S_{0.5}^\cup$	0.225	0.240	4.922
$0.7S_1^\cap + 0.3S_1^\cup$	0.225	0.240	4.922
$0.7S_2^\cap + 0.3S_2^\cup$	0.225	0.240	4.922
$0.5S_k + 0.5S_w$	0.375	0.400	4.936
$0.5S_{0.25}^\cap + 0.5S_{0.25}^\cup$	0.375	0.400	4.936
$0.5S_{0.5}^\cap + 0.5S_{0.5}^\cup$	0.375	0.400	4.936
$0.5S_1^\cap + 0.5S_1^\cup$	0.375	0.400	4.936
$0.5S_2^\cap + 0.5S_2^\cup$	0.375	0.400	4.936



### 3.6 Comentários

## 4 Modificadores de números fuzzy

**Definição 5.** Um *modificador fuzzy*  $m$  sobre  $X$  é uma aplicação do tipo:

$$m : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$$

tal que  $m$  é dito:

1. *Expansivo* se, para todo  $A \in \mathcal{F}(X)$ ,  $A \subseteq m(A)$ , ou seja,  $\mu_A(x) \leq \mu_{m(A)}(x)$ ,  $\forall x \in X$ ;
2. *Restritivo* se, para todo  $A \in \mathcal{F}(X)$ ,  $A \supseteq m(A)$ , ou seja,  $\mu_A(x) \geq \mu_{m(A)}(x)$ ,  $\forall x \in X$ ;

**Proposição 2.** Considere o seguinte procedimento para construção de números fuzzy modificados:

1. Centrar  $A$  em torno de 0;
2. Adicionar  $c$  a ambos os lados de  $\text{supp}(A)$ ;
3. Calcular  $f = \frac{\text{supp}(A)}{\text{supp}(A^c)}$ ;
4. Multiplicar todos os  $\alpha$ -cortes por  $f$ ;
5. Transladar o resultado de volta.

Isto deve funcionar para todos os números fuzzy, menos números fuzzy crisp, que podem ser vistos como números fuzzy triangulares. Para  $r \in \mathbb{R}$ , podemos definir  $r^c = (r - c; r; r + c)$ .

**Exemplo 1.** Seja o seguinte número fuzzy  $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ :

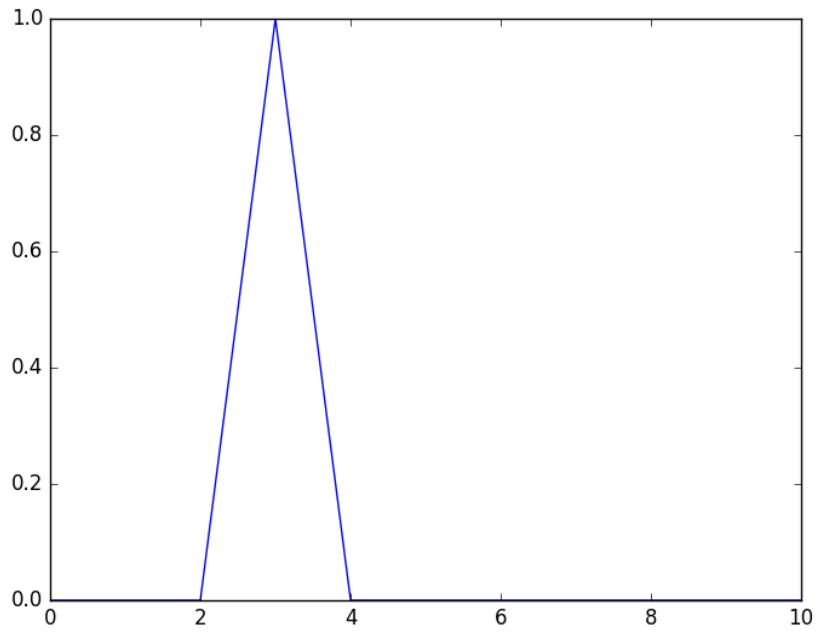


Figure 21: Número fuzzy a ser modificado.

Com função de pertinência dada por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ 4 - x & \text{se } 3 < x \leq 4 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

E  $\alpha$ -cortes dados por:

$$A^\alpha = [\alpha + 2, -\alpha + 4]$$

Aplicando o procedimento descrito na Proposição [?], temos:

- **Passo 1:** Centrar A em torno de 0.

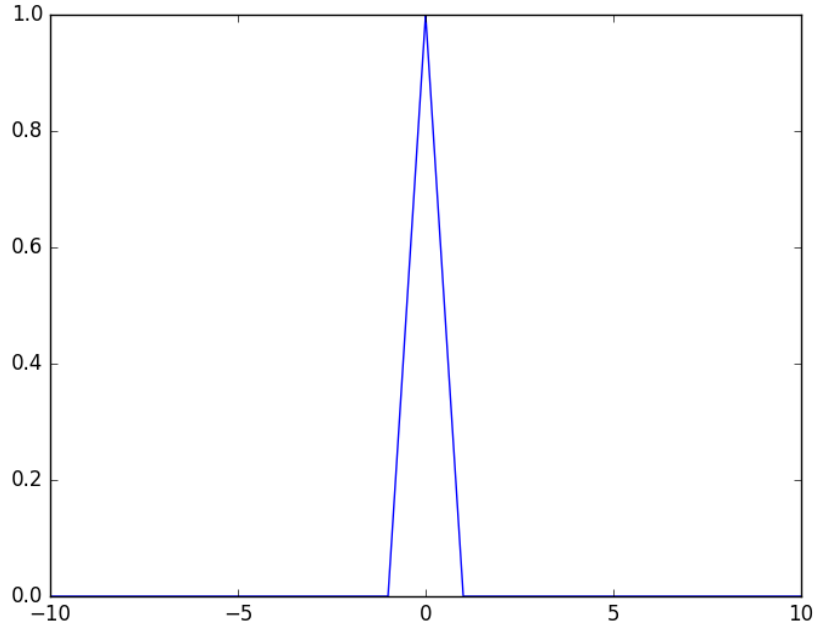


Figure 22: Número fuzzy centrado em 0.

- **Passo 2:** Adicionar  $c$  a ambos os lados de  $\text{supp}(A')$ . Considerando  $c = 1$ , temos:

$$\text{supp}(A') = [-1, 1] \Rightarrow \text{supp}(A'^c) = [-2, 2] \Rightarrow \text{supp}(A^c) = [1, 5]$$

- **Passo 3:** Calcular  $f = \frac{\text{supp}(A)}{\text{supp}(A^c)}$ .

$$\begin{aligned} f &= \frac{\text{supp}(A)}{\text{supp}(A^c)} = \frac{[2, 4]}{[1, 5]} = [2, 4] \cdot \left[\frac{1}{5}, 1\right] \\ &= [\min(2 \cdot \frac{1}{5}, 4 \cdot \frac{1}{5}, 2 \cdot 1, 4 \cdot 1), \max(2 \cdot \frac{1}{5}, 4 \cdot \frac{1}{5}, 2 \cdot 1, 4 \cdot 1)] \\ &= \left[\frac{2}{5}, 4\right] \end{aligned}$$

- **Passo 4:** Multiplicar todos os  $\alpha$ -cortes por  $f$ .

$$\begin{aligned} B^\alpha &= f \cdot A^\alpha = \left[\frac{2}{5}, 4\right] \cdot A^\alpha \\ &= [\min(\frac{2}{5} \cdot (\alpha + 2), \frac{2}{5} \cdot (-\alpha + 4), 4 \cdot (\alpha + 2), 4 \cdot (-\alpha + 4)), \\ &\quad \max(\frac{2}{5} \cdot (\alpha + 2), \frac{2}{5} \cdot (-\alpha + 4), 4 \cdot (\alpha + 2), 4 \cdot (-\alpha + 4))] \\ &= \left[\left(\frac{2}{5} \cdot \alpha + \frac{4}{5}\right), (-4 \cdot \alpha + 16)\right] \end{aligned}$$

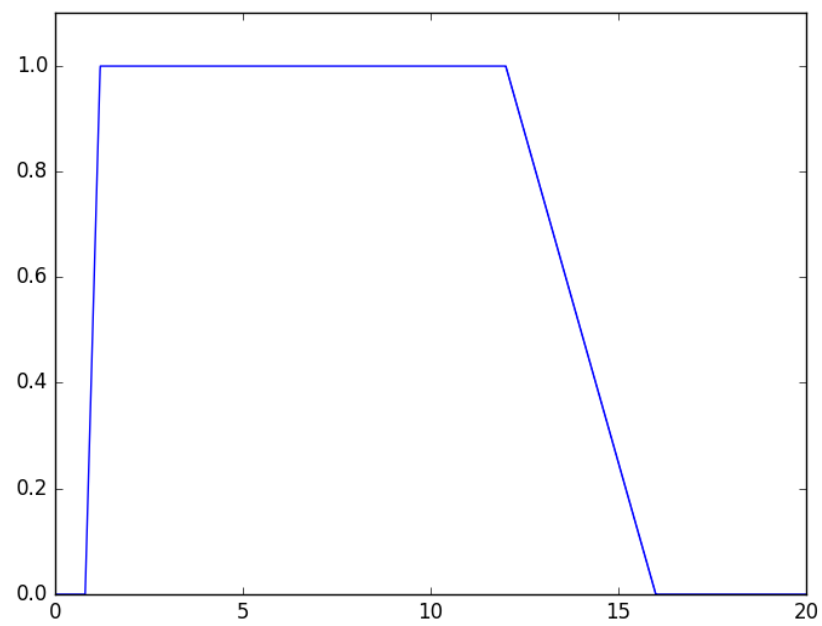


Figure 23: Número fuzzy modificado.

## References

- [1] Barros, L. C. de, Bassanezi, R. C. *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*. Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), (2006).