

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

RENATO LOPES MOURA RA163050

Estudo sobre Inferência Fuzzy baseada em medidas de
subsethood

CAMPINAS

2016

1 Definições

Definição 1. Seja uma função $S : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow [0, 1]$. $S(A, B)$ é uma medida de subthood se para $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$ temos:

1. $S(A, B) = 1 \Leftrightarrow A \subseteq B$
2. $S(X, \emptyset) = 0$
3. Se $A \subseteq B \subseteq C$, então $S(C, A) \leq S(B, A)$ e $S(C, A) \leq S(C, B)$

Definição 2. A medida de subthood de Kosko é definida da seguinte forma:

$$S_k(A, B) = \frac{\int_{x \in X} \min(\mu_A(x), \mu_B(x))}{\int_{x \in X} \mu_A(x)}$$

Definição 3. A medida de subthood de Willmott é definida da seguinte forma:

$$S_w(A, B) = \frac{\int_{x \in X} \mu_B(x)}{\int_{x \in X} \max(\mu_A(x), \mu_B(x))}$$

Definição 4. As medidas de subthood S_p^\cap (meet) e S_p^\cup (join) são definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_p^\cap(A, B) &= I(v_p(A), v_p(A \cap B)), \\ S_p^\cup(A, B) &= I(v_p(A \cup B), v_p(B)) \end{aligned}$$

Onde I denota a implicação de Goguen

$$I(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \min(1, \frac{y}{x}) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e v_p é uma função $\mathcal{F}(X) \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$v_p(C) = \sum_{i=1}^k \frac{1 - \cos(\frac{\pi[\mu_C(x_i)]^p}{2k})}{2k}, \quad X = \{x_1, \dots, x_k\}$$

2 Experimentos

2.1 Caso 1

Entrada triangular quase discreta (3.4,3.5,3.6)

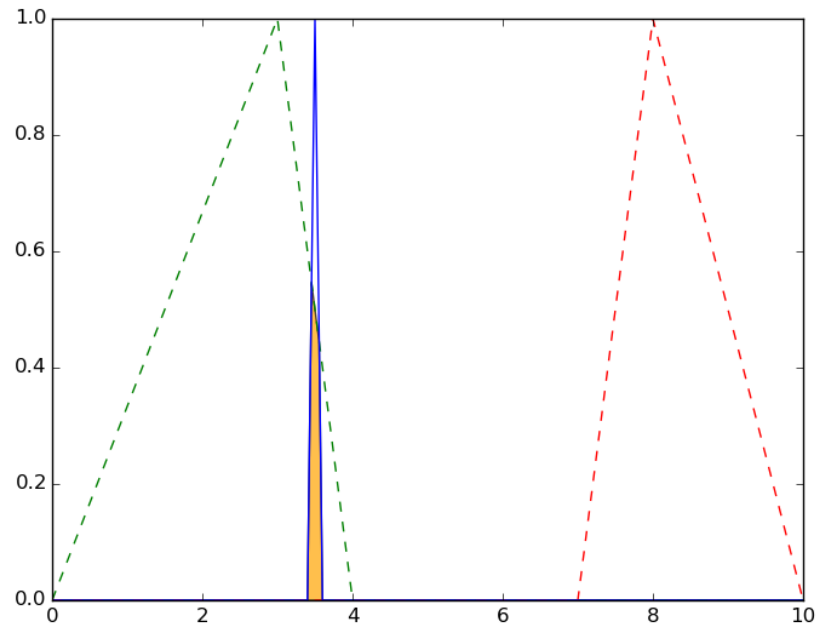


Figure 1: Entrada do caso 1

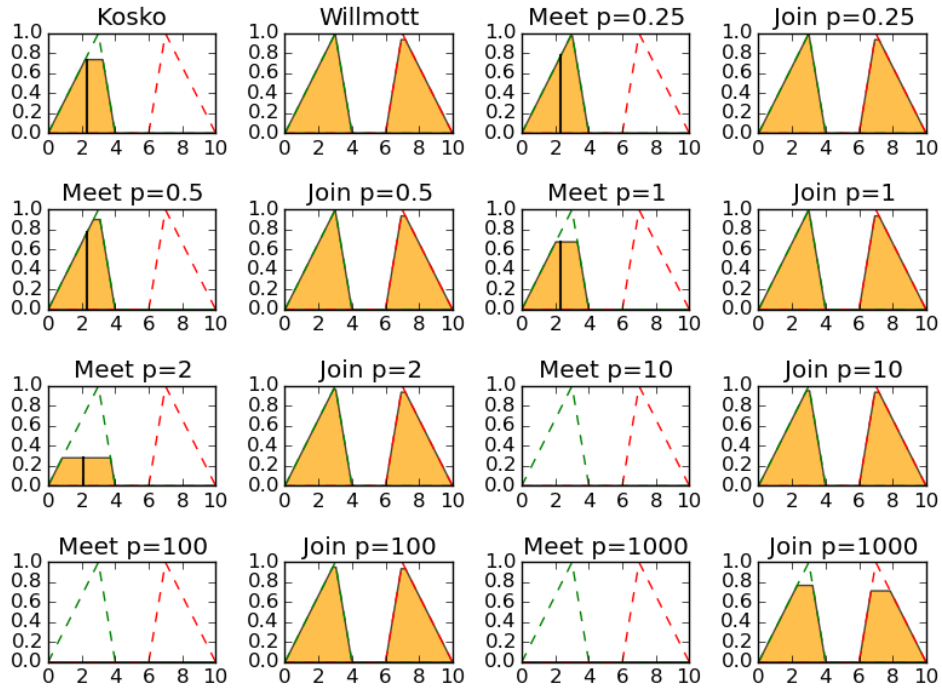


Figure 2: Resultados do caso 1

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
S_k	0	0.738	2.297
S_w	0.938	0.988	4.996
$S_{0.25}^\cap$	0	0.974	2.333
$S_{0.25}^\cup$	0.938	0.999	4.996
$S_{0.5}^\cap$	0	0.901	2.327
$S_{0.5}^\cup$	0.938	0.995	4.996
S_1^\cap	0	0.678	2.281
S_1^\cup	0.938	0.984	4.996
S_2^\cap	0	0.281	2.133
S_2^\cup	0.937	0.965	4.997
S_{10}^\cap	0	0	0
S_{10}^\cup	0.937	0.952	4.998
S_{100}^\cap	0	0	0
S_{100}^\cup	0.936	0.951	4.998
S_{1000}^\cap	0	0	0
S_{1000}^\cup	0.714	0.769	4.966

2.2 Caso 2

Entrada triangular quase igual ao antecedente (0.0,3.3,4.0)

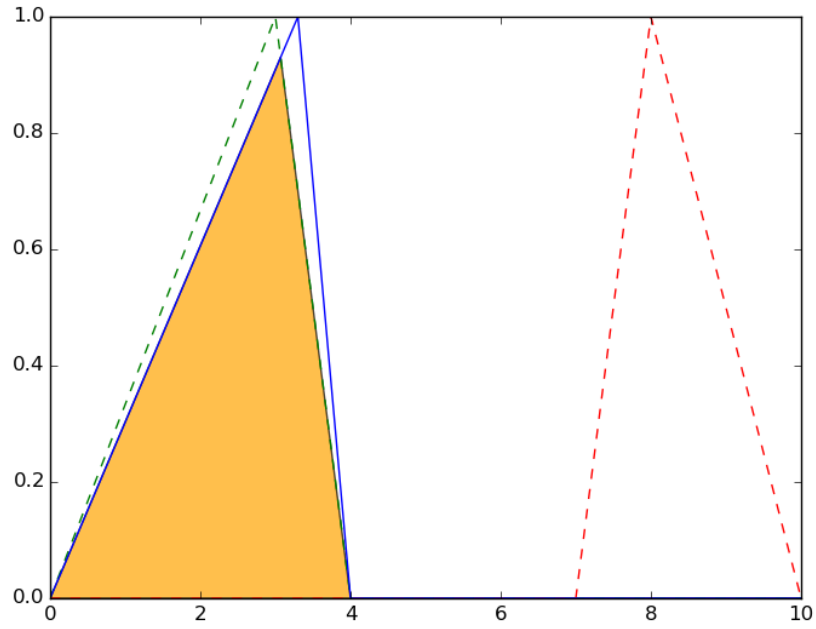


Figure 3: Entrada do caso 2

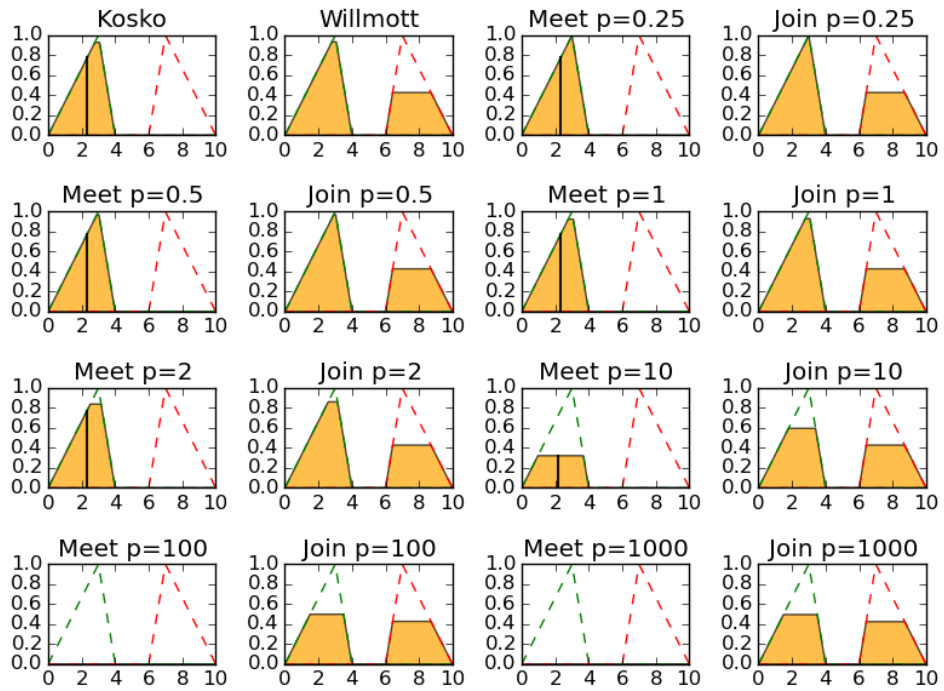


Figure 4: Resultados do caso 2

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
S_k	0	0.929	2.330
S_w	0.429	0.935	4.539
$S_{0.25}^\cap$	0	0.988	2.333
$S_{0.25}^\cup$	0.429	0.988	4.536
$S_{0.5}^\cap$	0	0.968	2.333
$S_{0.5}^\cup$	0.429	0.969	4.536
S_1^\cap	0	0.926	2.330
S_1^\cup	0.429	0.931	4.540
S_2^\cap	0	0.839	2.318
S_2^\cup	0.429	0.861	4.554
S_{10}^\cap	0	0.323	2.151
S_{10}^\cup	0.429	0.596	4.730
S_{100}^\cap	0	0	0
S_{100}^\cup	0.429	0.5	4.864
S_{1000}^\cap	0	0	0
S_{1000}^\cup	0.426	0.497	4.864

2.3 Caso 3

Entrada triangular com pouca intersecção (3.8,4.0,5.0)

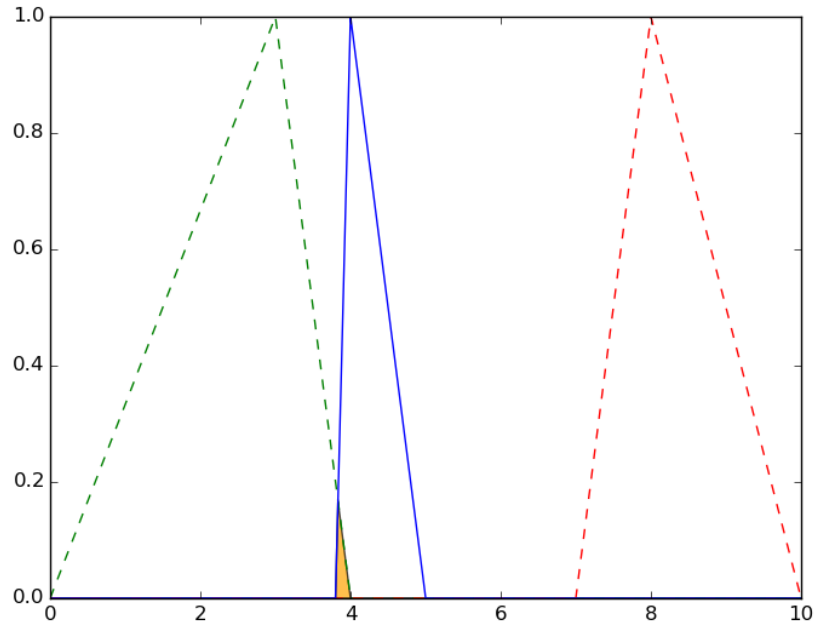


Figure 5: Entrada do caso 3

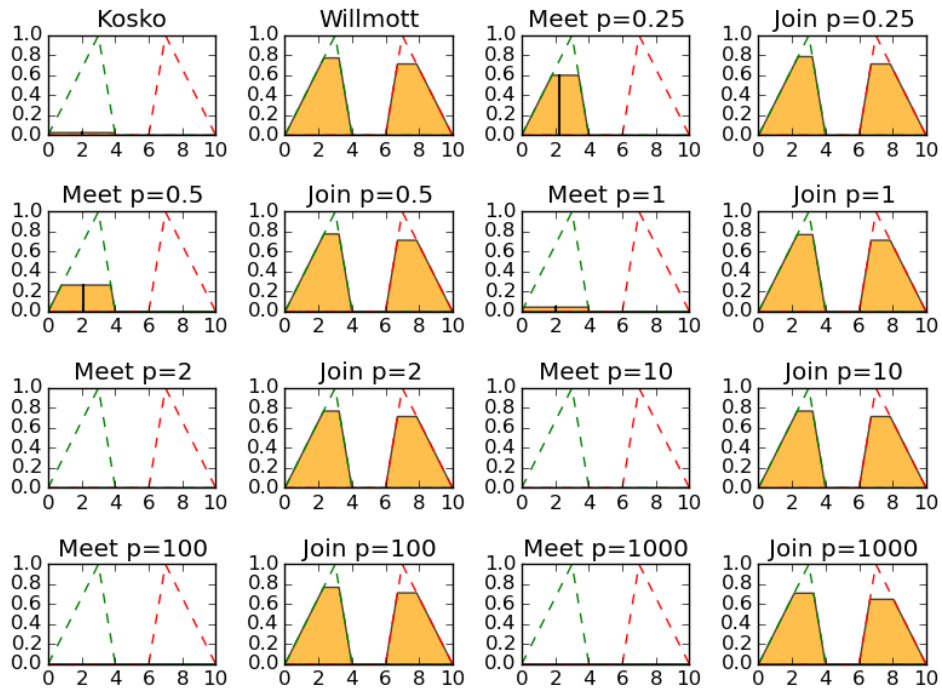


Figure 6: Resultados do caso 3

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
S_k	0	0.028	2.014
S_w	0.714	0.774	4.963
$S_{0.25}^\cap$	0	0.601	2.258
$S_{0.25}^\cup$	0.714	0.787	4.956
$S_{0.5}^\cap$	0	0.266	2.126
$S_{0.5}^\cup$	0.714	0.777	4.961
S_1^\cap	0	0.045	2.022
S_1^\cup	0.714	0.771	4.965
S_2^\cap	0	0.001	2
S_2^\cup	0.714	0.769	4.966
S_{10}^\cap	0	0	0
S_{10}^\cup	0.714	0.769	4.966
S_{100}^\cap	0	0	0
S_{100}^\cup	0.714	0.769	4.966
S_{1000}^\cap	0	0	0
S_{1000}^\cup	0.649	0.711	4.949

2.4 Caso 4

Entrada triangular sem intersecção mas próxima de um dos antecedentes (4.0,4.5,5.0)

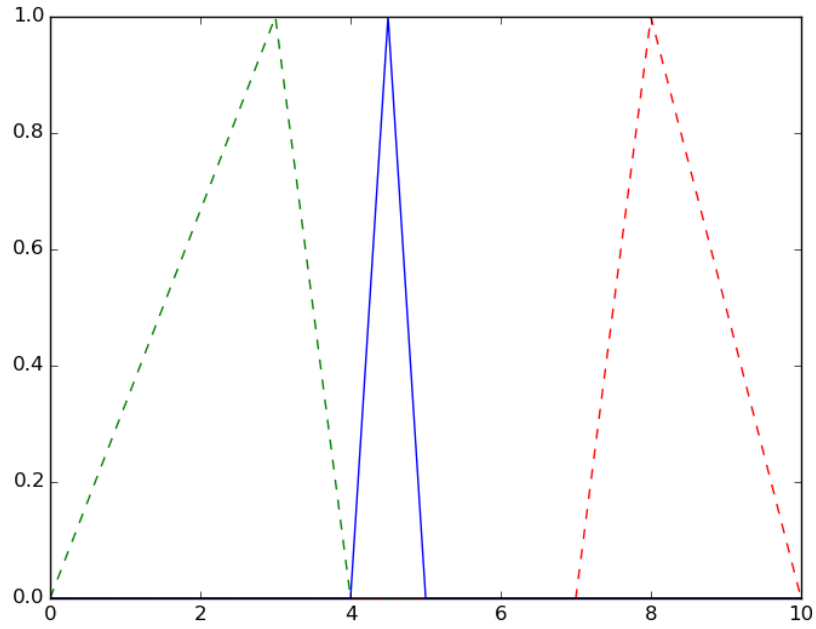


Figure 7: Entrada do caso 4

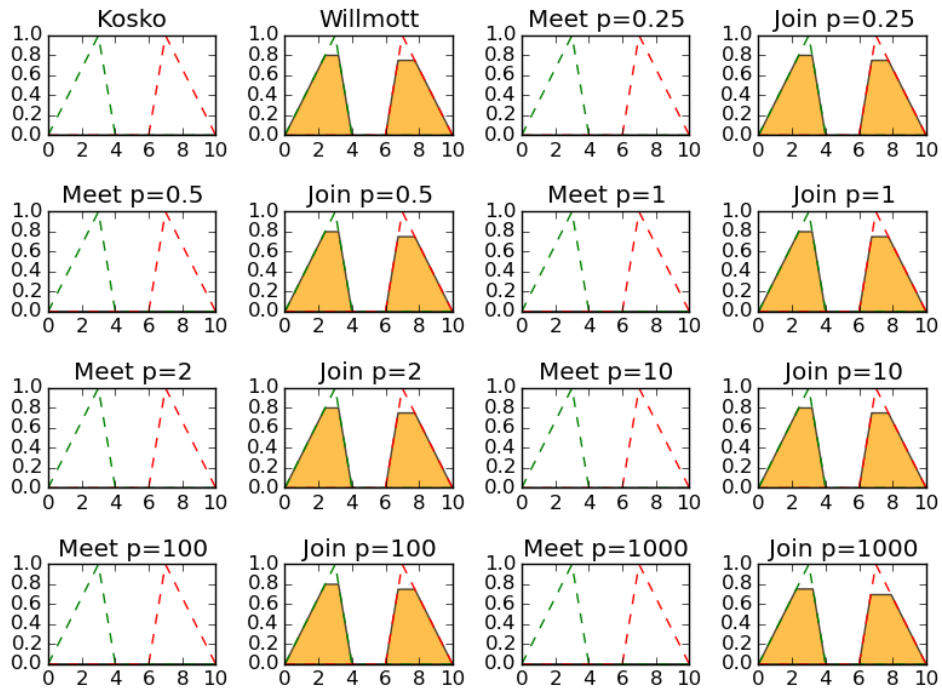


Figure 8: Resultados do caso 4

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
S_k	0	0	0
S_w	0.750	0.800	4.974
$S_{0.25}^\cap$	0	0	0
$S_{0.25}^\cup$	0.750	0.800	4.974
$S_{0.5}^\cap$	0	0	0
$S_{0.5}^\cup$	0.750	0.800	4.974
S_1^\cap	0	0	0
S_1^\cup	0.750	0.800	4.974
S_2^\cap	0	0	0
S_2^\cup	0.750	0.800	4.974
S_{10}^\cap	0	0	0
S_{10}^\cup	0.750	0.800	4.974
S_{100}^\cap	0	0	0
S_{100}^\cup	0.750	0.800	4.974
S_{1000}^\cap	0	0	0
S_{1000}^\cup	0.696	0.753	4.962

2.5 Caso 5

Entrada triangular equidistante dos antecedentes (5.0,5.5,6.0). Obs: notar que os antecedentes não possuem o mesmo tamanho.

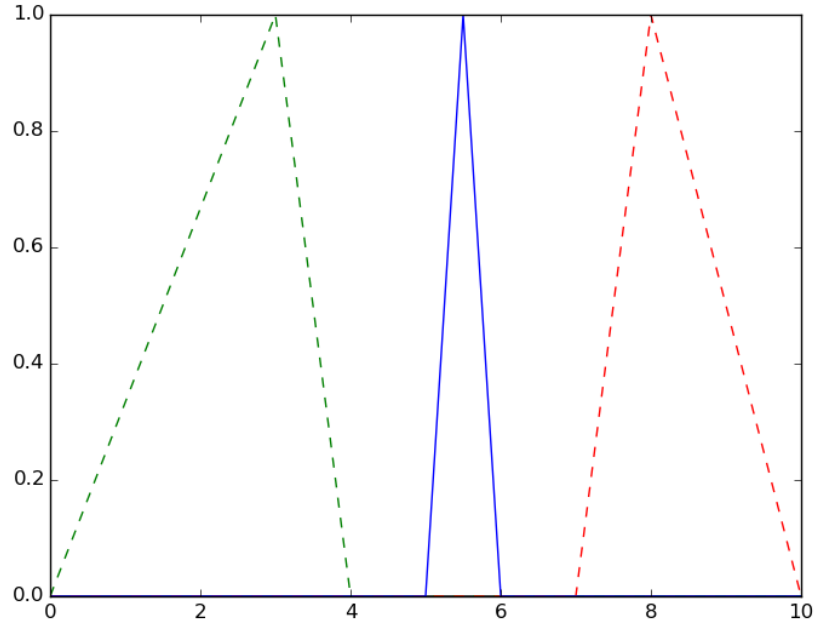


Figure 9: Entrada do caso 5

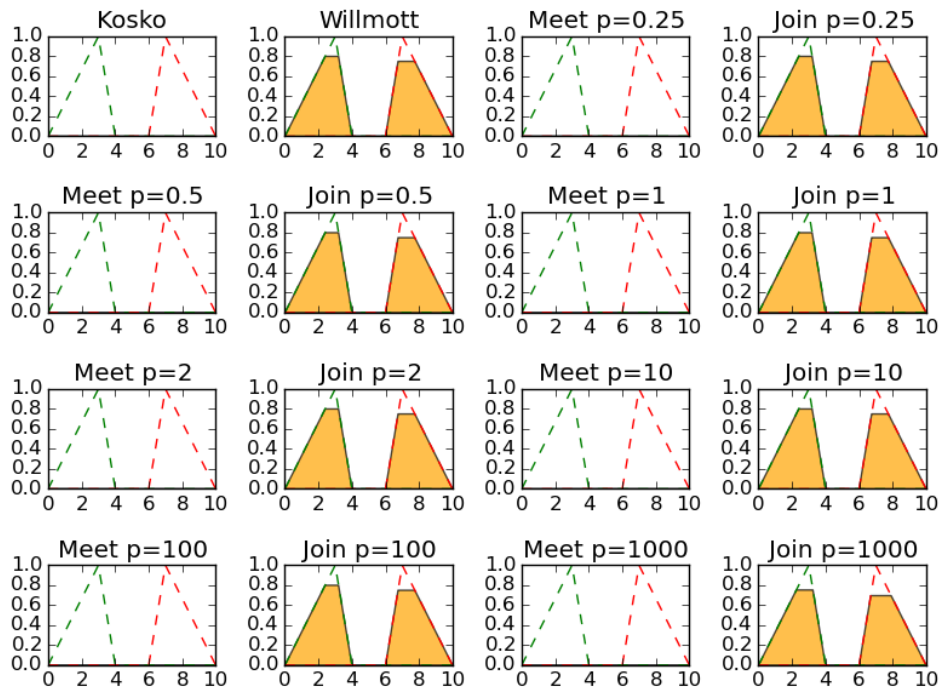


Figure 10: Resultados do caso 5

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
S_k	0	0	0
S_w	0.750	0.800	4.974
$S_{0.25}^\cap$	0	0	0
$S_{0.25}^\cup$	0.750	0.800	4.974
$S_{0.5}^\cap$	0	0	0
$S_{0.5}^\cup$	0.750	0.800	4.974
S_1^\cap	0	0	0
S_1^\cup	0.750	0.800	4.974
S_2^\cap	0	0	0
S_2^\cup	0.750	0.800	4.974
S_{10}^\cap	0	0	0
S_{10}^\cup	0.750	0.800	4.974
S_{100}^\cap	0	0	0
S_{100}^\cup	0.750	0.800	4.974
S_{1000}^\cap	0	0	0
S_{1000}^\cup	0.696	0.753	4.962

2.6 Comentários

- Em todos os casos, as medidas de subthood do tipo *meet* (S_p^\cap) com $p \geq 10$ não apresentam valores de ativação significativos. No Caso 2, temos $S_{10}^\cap = 0.323$ apesar de a entrada estar quase totalmente contida no antecedente. Portanto, não parece interessante considerar as medidas do tipo *meet* (S_p^\cap) com $p \geq 10$.
- Também é possível notar que conforme o parâmetro p aumenta, o grau de ativação pela medida de subthood do tipo *join* (S_p^\cup) tende a se igualar para todas as regras. Portanto, também não parece interessante considerar as medidas do tipo *join* (S_p^\cup) com $p \geq 10$.
- No Caso 1, apesar de a entrada apresentar um nível considerável de interseção com o antecedente da Regra 2 (tomate verde), as medidas de subthood do tipo *join* (S_p^\cup) ainda apresentam um elevado grau de ativação, em geral ≥ 0.9 . Desta forma, é possível concluir que para entradas com cardinalidade pequena, deve-se dar um peso maior para o grau de ativação das medidas de subthood do tipo *meet* (S_p^\cap).
- Nos Casos 4 e 5, pode-se notar que o grau de ativação das regras independe da localização da entrada no caso em que a interseção da entrada com os antecedentes é vazia. A medida de subthood do tipo *join* (S_p^\cup) considera apenas a cardinalidade dos antecedentes e da entrada, o que pode representar um problema em bases de regras esparsas.

3 Experimentos com combinação de medidas

Proposição 1. A média ponderada entre medidas de subsethood dos tipos *meet* e *join*:

$$S_p(A, B) = \frac{\alpha S_p^\cap(A, B) + \beta S_p^\cup(A, B)}{\alpha + \beta}$$

é uma medida de subsethood

Proof. 1. $S(A, B) = 1 \Leftrightarrow A \subseteq B$

$$\Rightarrow: S_p(A, B) = 1$$

Suponha que $A \not\subseteq B \Rightarrow S_p^\cap(A, B) < 1$ e $S_p^\cup(A, B) < 1$

$$\Rightarrow \alpha S_p^\cap(A, B) < \alpha \text{ e } \beta S_p^\cup(A, B) < \beta$$

$$\Rightarrow \alpha S_p^\cap(A, B) + \beta S_p^\cup(A, B) < \alpha + \beta$$

$\Rightarrow S_p(A, B) < 1$, o que contradiz a hipótese inicial.

Portanto, $A \subseteq B$.

$$\Leftarrow: A \subseteq B$$

$$\Rightarrow S_p^\cap(A, B) = 1 \text{ e } S_p^\cup(A, B) = 1$$

$$\Rightarrow \alpha S_p^\cap(A, B) + \beta S_p^\cup(A, B) = \alpha + \beta$$

$$\Rightarrow S_p(A, B) = 1$$

2. $S(X, \emptyset) = 0$

$$S_p^\cap(X, \emptyset) = 0 \text{ e } S_p^\cup(X, \emptyset) = 0$$

$$\Rightarrow S(X, \emptyset) = \frac{\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0}{\alpha + \beta} = 0$$

3. Se $A \subseteq B \subseteq C$, então $S(C, A) \leq S(B, A)$ e $S(C, A) \leq S(C, B)$

$$A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow S_p^\cap(C, A) \leq S_p^\cap(B, A) \text{ e } S_p^\cup(C, A) \leq S_p^\cup(B, A)$$

$$\Rightarrow \alpha S_p^\cap(C, A) + \beta S_p^\cup(C, A) \leq \alpha S_p^\cap(B, A) + \beta S_p^\cup(B, A)$$

$$\Rightarrow S_p(C, A) \leq S_p(B, A)$$

Similarmente temos que $S_p(C, A) \leq S_p(C, B)$

□

3.1 Caso 1

Entrada triangular quase discreta (3.4,3.5,3.6)

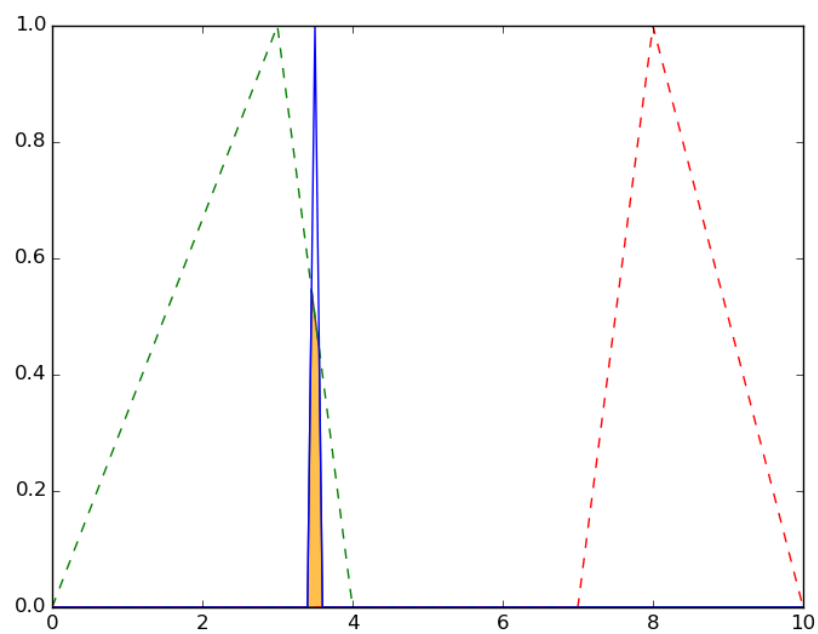


Figure 11: Entrada do caso 1

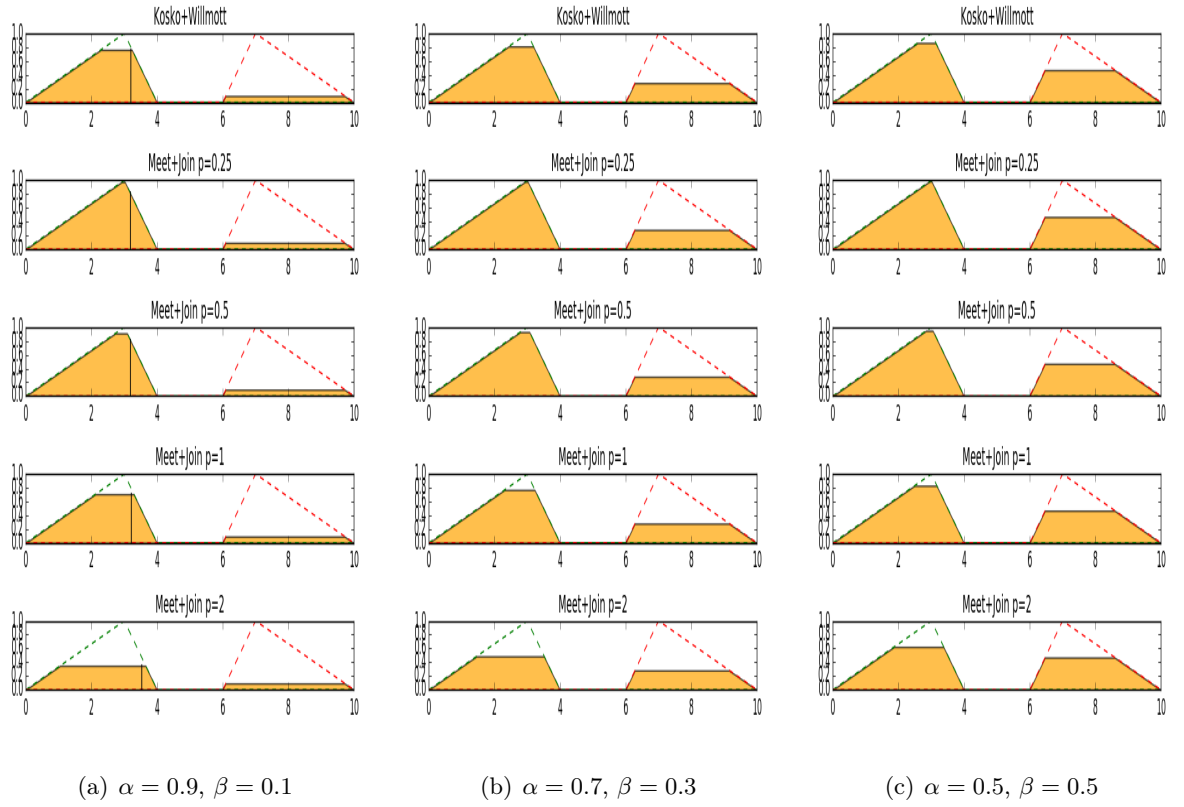


Figure 12: Resultados do caso 1

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
$0.9S_k + 0.1S_w$	0.094	0.763	3.203
$0.9S_{0.25}^\cap + 0.1S_{0.25}^\cup$	0.094	0.977	3.186
$0.9S_{0.5}^\cap + 0.1S_{0.5}^\cup$	0.094	0.911	3.187
$0.9S_1^\cap + 0.1S_1^\cup$	0.094	0.708	3.215
$0.9S_2^\cap + 0.1S_2^\cup$	0.094	0.350	3.532
$0.7S_k + 0.3S_w$	0.281	0.813	4.167
$0.7S_{0.25}^\cap + 0.3S_{0.25}^\cup$	0.281	0.981	4.137
$0.7S_{0.5}^\cap + 0.3S_{0.5}^\cup$	0.281	0.929	4.140
$0.7S_1^\cap + 0.3S_1^\cup$	0.281	0.769	4.184
$0.7S_2^\cap + 0.3S_2^\cup$	0.281	0.486	4.456
$0.5S_k + 0.5S_w$	0.469	0.863	4.632
$0.5S_{0.25}^\cap + 0.5S_{0.25}^\cup$	0.469	0.986	4.613
$0.5S_{0.5}^\cap + 0.5S_{0.5}^\cup$	0.469	0.948	4.616
$0.5S_1^\cap + 0.5S_1^\cup$	0.469	0.831	4.642
$0.5S_2^\cap + 0.5S_2^\cup$	0.469	0.623	4.781

3.2 Caso 2

Entrada triangular quase igual ao antecedente (0.0,3.3,4.0)

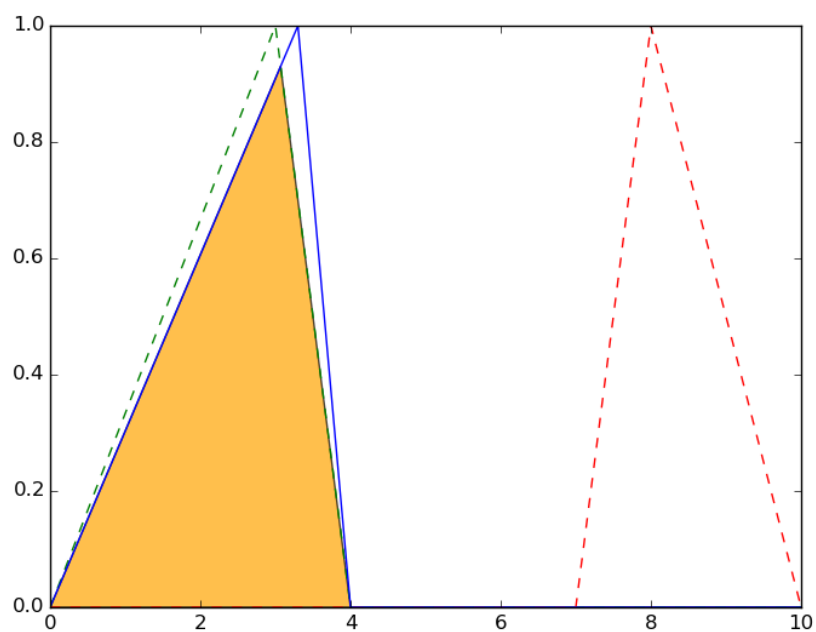


Figure 13: Entrada do caso 2

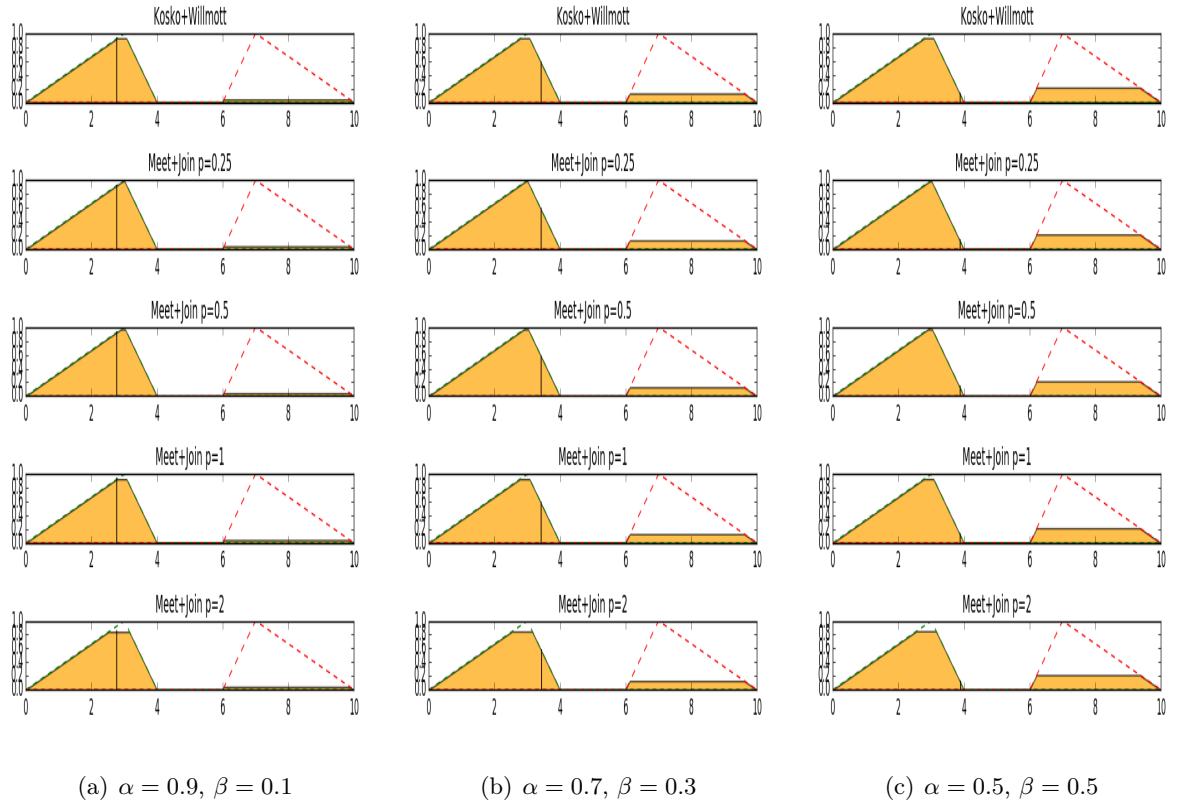


Figure 14: Resultados do caso 2

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
$0.9S_k + 0.1S_w$	0.043	0.930	2.769
$0.9S_{0.25}^\cap + 0.1S_{0.25}^\cup$	0.043	0.988	2.770
$0.9S_{0.5}^\cap + 0.1S_{0.5}^\cup$	0.043	0.968	2.770
$0.9S_1^\cap + 0.1S_1^\cup$	0.043	0.926	2.769
$0.9S_2^\cap + 0.1S_2^\cup$	0.043	0.841	2.767
$0.7S_k + 0.3S_w$	0.129	0.931	3.422
$0.7S_{0.25}^\cap + 0.3S_{0.25}^\cup$	0.129	0.988	3.420
$0.7S_{0.5}^\cap + 0.3S_{0.5}^\cup$	0.129	0.969	3.421
$0.7S_1^\cap + 0.3S_1^\cup$	0.129	0.927	3.422
$0.7S_2^\cap + 0.3S_2^\cup$	0.129	0.846	3.430
$0.5S_k + 0.5S_w$	0.214	0.932	3.876
$0.5S_{0.25}^\cap + 0.5S_{0.25}^\cup$	0.214	0.988	3.873
$0.5S_{0.5}^\cap + 0.5S_{0.5}^\cup$	0.214	0.969	3.874
$0.5S_1^\cap + 0.5S_1^\cup$	0.214	0.928	3.877
$0.5S_2^\cap + 0.5S_2^\cup$	0.214	0.850	3.889

3.3 Caso 3

Entrada triangular com pouca intersecção (3.8,4.0,5.0)

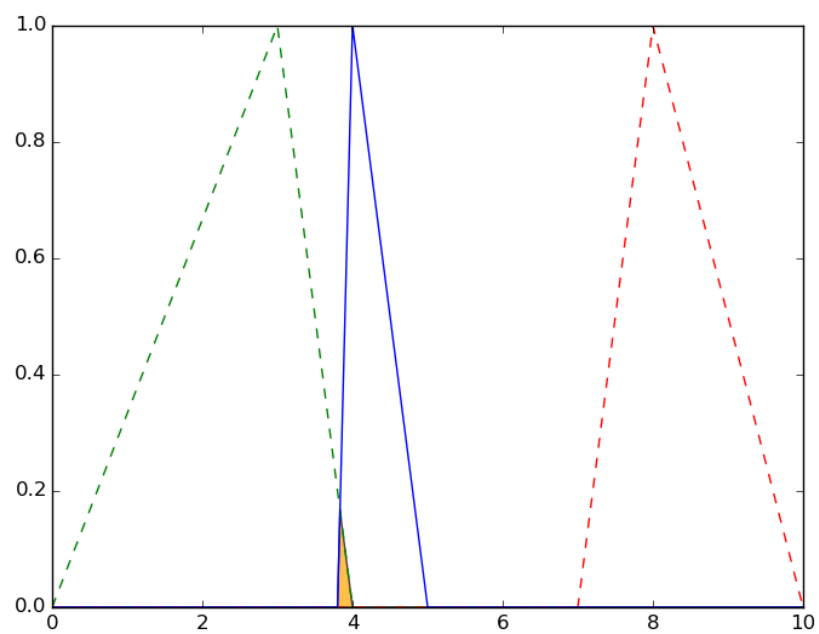


Figure 15: Entrada do caso 3

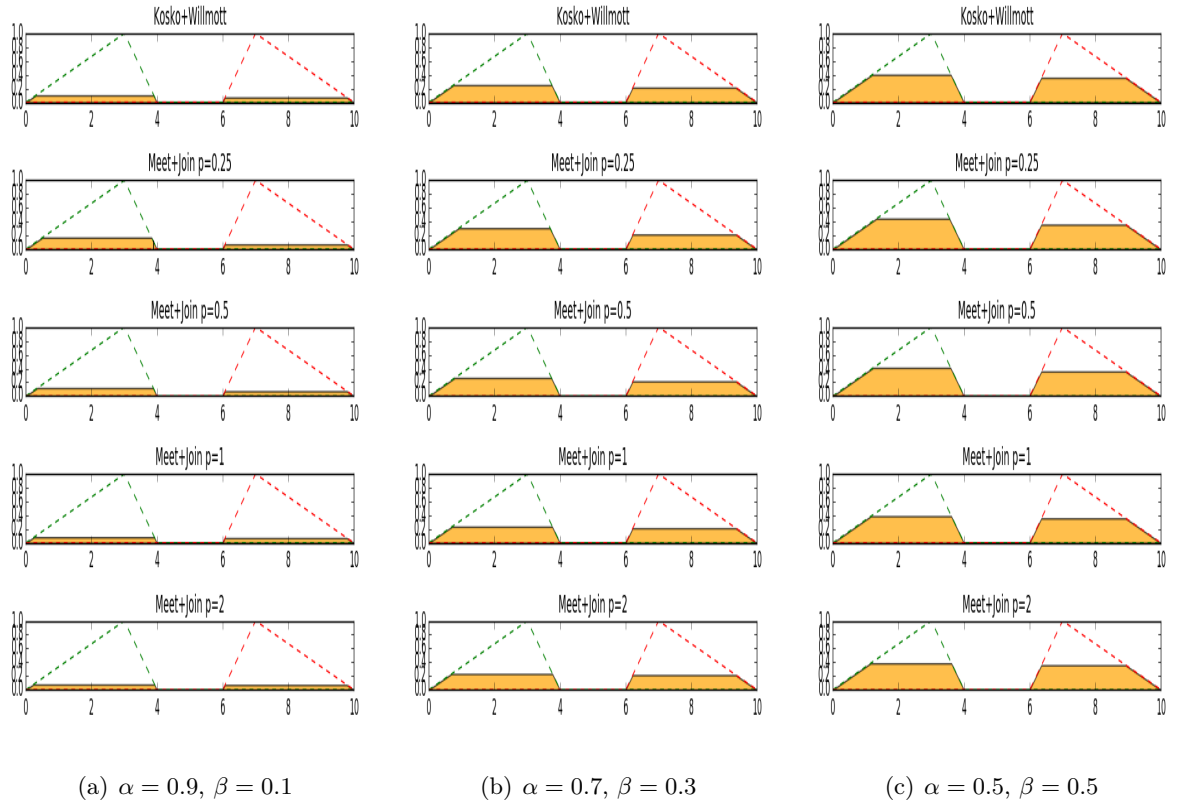


Figure 16: Resultados do caso 3

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
$0.9S_k + 0.1S_w$	0.071	0.102	4.507
$0.9S_{0.25}^\cap + 0.1S_{0.25}^\cup$	0.071	0.169	3.893
$0.9S_{0.5}^\cap + 0.1S_{0.5}^\cup$	0.071	0.118	4.322
$0.9S_1^\cap + 0.1S_1^\cup$	0.071	0.084	4.776
$0.9S_2^\cap + 0.1S_2^\cup$	0.071	0.077	4.892
$0.7S_k + 0.3S_w$	0.214	0.252	4.808
$0.7S_{0.25}^\cap + 0.3S_{0.25}^\cup$	0.214	0.307	4.585
$0.7S_{0.5}^\cap + 0.3S_{0.5}^\cup$	0.214	0.264	4.750
$0.7S_1^\cap + 0.3S_1^\cup$	0.214	0.236	4.881
$0.7S_2^\cap + 0.3S_2^\cup$	0.214	0.231	4.909
$0.5S_k + 0.5S_w$	0.357	0.401	4.884
$0.5S_{0.25}^\cap + 0.5S_{0.25}^\cup$	0.357	0.444	4.788
$0.5S_{0.5}^\cap + 0.5S_{0.5}^\cup$	0.357	0.411	4.860
$0.5S_1^\cap + 0.5S_1^\cup$	0.357	0.389	4.913
$0.5S_2^\cap + 0.5S_2^\cup$	0.357	0.385	4.924

3.4 Caso 4

Entrada triangular sem intersecção mas próxima de um dos antecedentes (4.0,4.5,5.0)

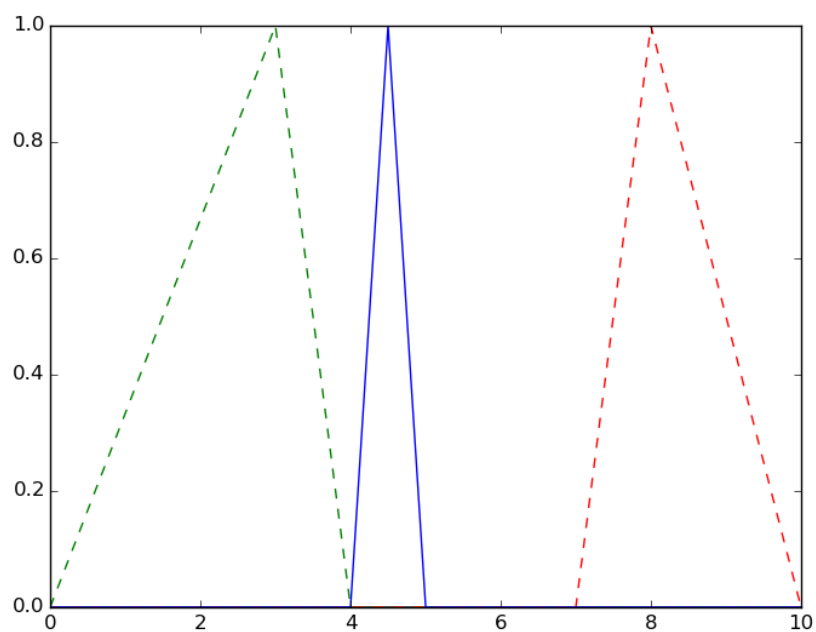


Figure 17: Entrada do caso 4

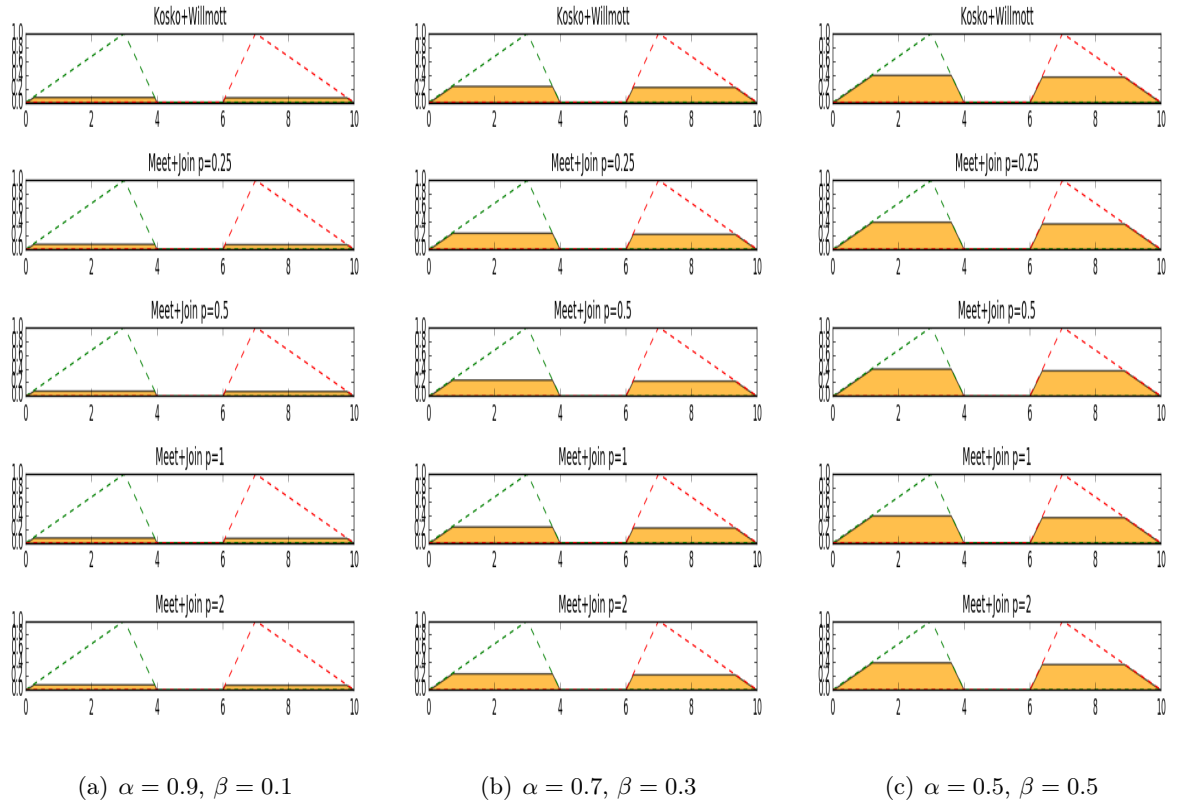


Figure 18: Resultados do caso 4

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
$0.9S_k + 0.1S_w$	0.075	0.080	4.910
$0.9S_{0.25}^\cap + 0.1S_{0.25}^\cup$	0.075	0.080	4.910
$0.9S_{0.5}^\cap + 0.1S_{0.5}^\cup$	0.075	0.080	4.910
$0.9S_1^\cap + 0.1S_1^\cup$	0.075	0.080	4.910
$0.9S_2^\cap + 0.1S_2^\cup$	0.075	0.080	4.910
$0.7S_k + 0.3S_w$	0.225	0.240	4.922
$0.7S_{0.25}^\cap + 0.3S_{0.25}^\cup$	0.225	0.240	4.922
$0.7S_{0.5}^\cap + 0.3S_{0.5}^\cup$	0.225	0.240	4.922
$0.7S_1^\cap + 0.3S_1^\cup$	0.225	0.240	4.922
$0.7S_2^\cap + 0.3S_2^\cup$	0.225	0.240	4.922
$0.5S_k + 0.5S_w$	0.375	0.400	4.936
$0.5S_{0.25}^\cap + 0.5S_{0.25}^\cup$	0.375	0.400	4.936
$0.5S_{0.5}^\cap + 0.5S_{0.5}^\cup$	0.375	0.400	4.936
$0.5S_1^\cap + 0.5S_1^\cup$	0.375	0.400	4.936
$0.5S_2^\cap + 0.5S_2^\cup$	0.375	0.400	4.936

3.5 Caso 5

Entrada triangular equidistante dos antecedentes (5.0,5.5,6.0). Obs: notar que os antecedentes não possuem o mesmo tamanho.

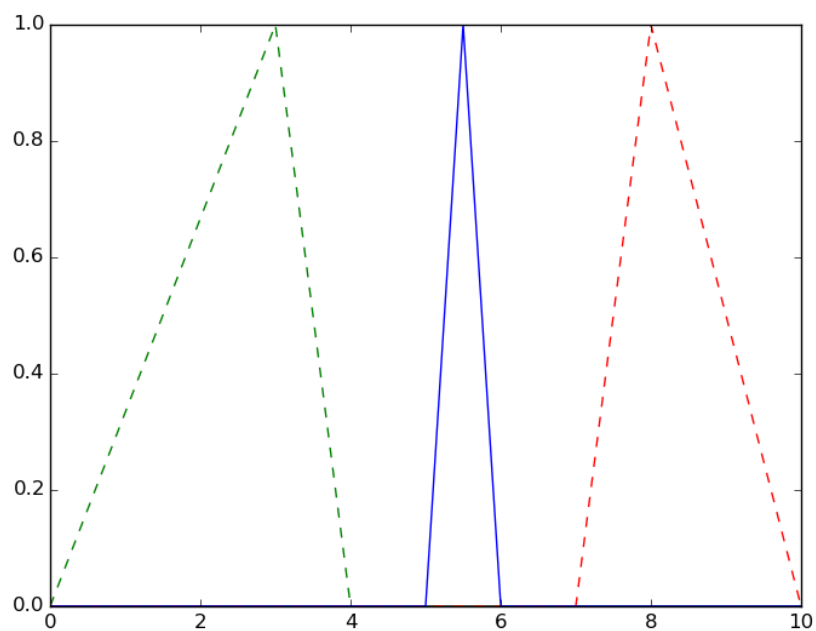


Figure 19: Entrada do caso 5

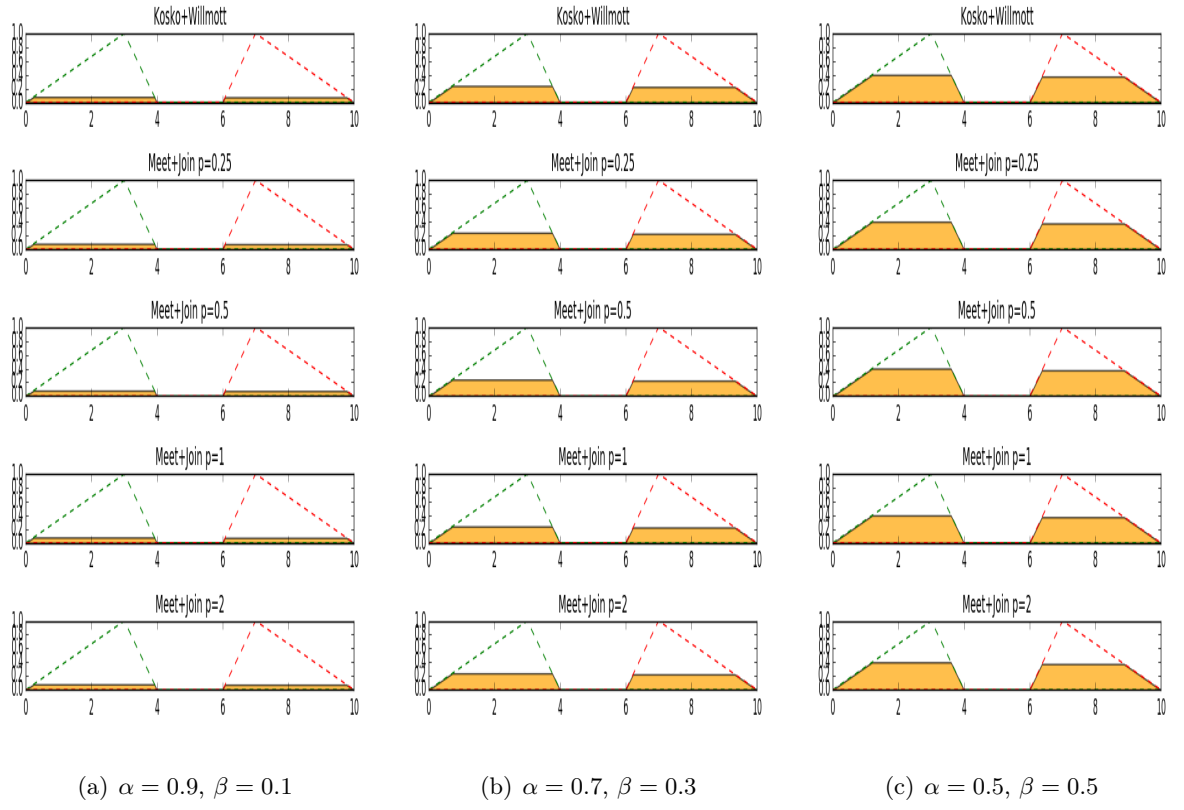


Figure 20: Resultados do caso 5

Medida	Regra 1(vermelho)	Regra 2(verde)	Defuzzificação
$0.9S_k + 0.1S_w$	0.075	0.080	4.910
$0.9S_{0.25}^\cap + 0.1S_{0.25}^\cup$	0.075	0.080	4.910
$0.9S_{0.5}^\cap + 0.1S_{0.5}^\cup$	0.075	0.080	4.910
$0.9S_1^\cap + 0.1S_1^\cup$	0.075	0.080	4.910
$0.9S_2^\cap + 0.1S_2^\cup$	0.075	0.080	4.910
$0.7S_k + 0.3S_w$	0.225	0.240	4.922
$0.7S_{0.25}^\cap + 0.3S_{0.25}^\cup$	0.225	0.240	4.922
$0.7S_{0.5}^\cap + 0.3S_{0.5}^\cup$	0.225	0.240	4.922
$0.7S_1^\cap + 0.3S_1^\cup$	0.225	0.240	4.922
$0.7S_2^\cap + 0.3S_2^\cup$	0.225	0.240	4.922
$0.5S_k + 0.5S_w$	0.375	0.400	4.936
$0.5S_{0.25}^\cap + 0.5S_{0.25}^\cup$	0.375	0.400	4.936
$0.5S_{0.5}^\cap + 0.5S_{0.5}^\cup$	0.375	0.400	4.936
$0.5S_1^\cap + 0.5S_1^\cup$	0.375	0.400	4.936
$0.5S_2^\cap + 0.5S_2^\cup$	0.375	0.400	4.936

3.6 Comentários

4 Modificadores de números fuzzy

Definição 5. Um *modificador fuzzy* m sobre X é uma aplicação do tipo:

$$m : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$$

tal que m é dito:

1. *Expansivo* se, para todo $A \in \mathcal{F}(X)$, $A \subseteq m(A)$, ou seja, $\mu_A(x) \leq \mu_{m(A)}(x)$, $\forall x \in X$;
2. *Restritivo* se, para todo $A \in \mathcal{F}(X)$, $A \supseteq m(A)$, ou seja, $\mu_A(x) \geq \mu_{m(A)}(x)$, $\forall x \in X$;

Proposição 2. Considere o seguinte procedimento para construção de números fuzzy modificados:

1. Centrar A em torno de 0;
2. Adicionar c a ambos os lados de $\text{supp}(A)$;
3. Calcular $f = \frac{\text{supp}(A)}{\text{supp}(A^c)}$;
4. Multiplicar todos os α -cortes por f ;
5. Transladar o resultado de volta.

Isto deve funcionar para todos os números fuzzy, menos números fuzzy crisp, que podem ser vistos como números fuzzy triangulares. Para $r \in \mathbb{R}$, podemos definir $r^c = (r - c; r; r + c)$.

Exemplo 1. Seja o seguinte número fuzzy $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$:

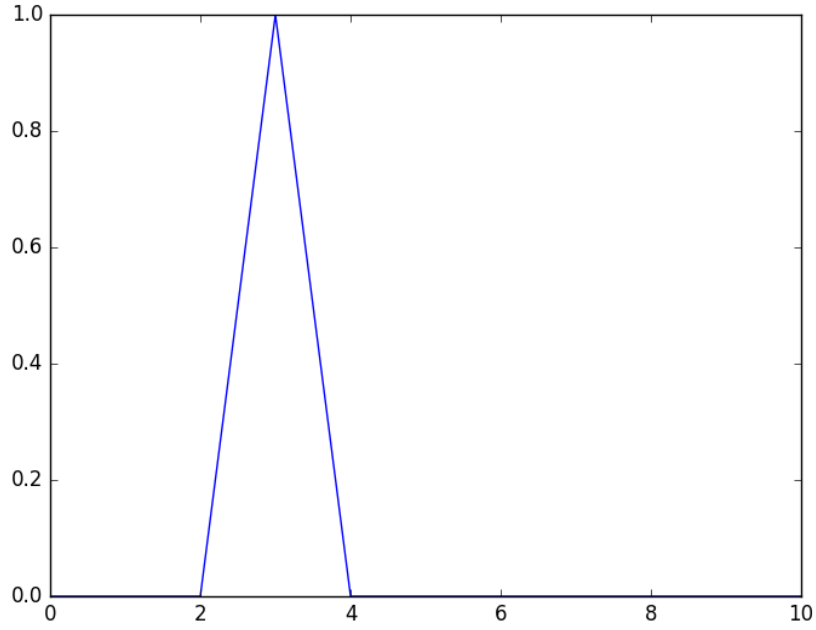


Figure 21: Número fuzzy a ser modificado.

Com função de pertinência dada por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ 4 - x & \text{se } 3 < x \leq 4 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

E α -cortes dados por:

$$A^\alpha = [\alpha + 2, -\alpha + 4]$$

Aplicando o procedimento descrito na Proposição [?] (sem os passos 1 e 5), temos:

- **Passo 2:** Adicionar c a ambos os lados de $\text{supp}(A')$. Considerando $c = 1$, temos:

$$\text{supp}(A') = [-1, 1] \Rightarrow \text{supp}(A'^c) = [-2, 2] \Rightarrow \text{supp}(A^c) = [1, 5]$$

- **Passo 3:** Calcular $f = \frac{\text{supp}(A)}{\text{supp}(A^c)}$.

$$\begin{aligned} f &= \frac{\text{supp}(A)}{\text{supp}(A^c)} = \frac{[2, 4]}{[1, 5]} = [2, 4] \cdot \left[\frac{1}{5}, 1\right] \\ &= [\min(2 \cdot \frac{1}{5}, 4 \cdot \frac{1}{5}, 2 \cdot 1, 4 \cdot 1), \max(2 \cdot \frac{1}{5}, 4 \cdot \frac{1}{5}, 2 \cdot 1, 4 \cdot 1)] \\ &= [\frac{2}{5}, 4] \end{aligned}$$

- **Passo 4:** Multiplicar todos os α -cortes por f .

$$\begin{aligned}
B^\alpha &= f \cdot A^\alpha = \left[\frac{2}{5}, 4\right] \cdot A^\alpha \\
&= [\min(\frac{2}{5} \cdot (\alpha + 2), \frac{2}{5} \cdot (-\alpha + 4), 4 \cdot (\alpha + 2), 4 \cdot (-\alpha + 4)), \\
&\quad \max(\frac{2}{5} \cdot (\alpha + 2), \frac{2}{5} \cdot (-\alpha + 4), 4 \cdot (\alpha + 2), 4 \cdot (-\alpha + 4))] \\
&= [(\frac{2}{5} \cdot \alpha + \frac{4}{5}), (-4 \cdot \alpha + 16)]
\end{aligned}$$

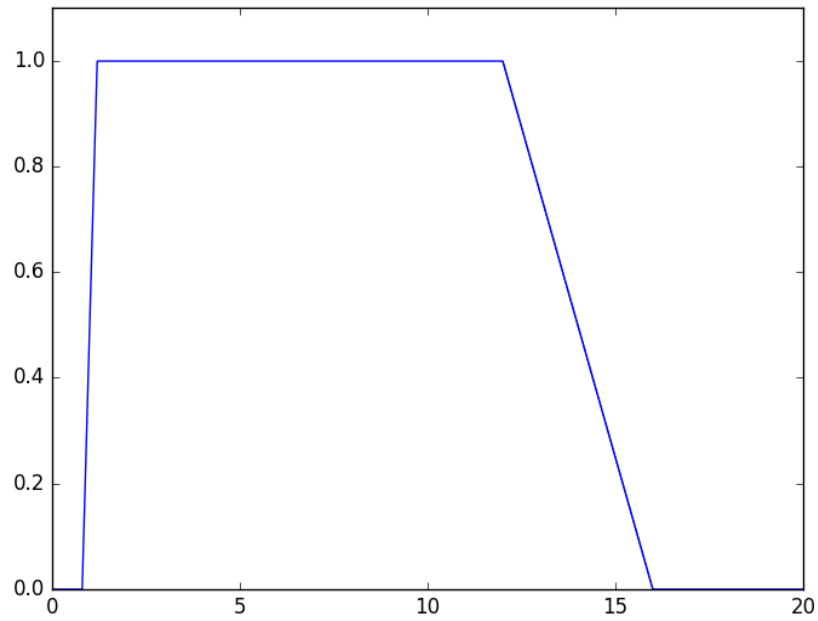


Figure 22: Número fuzzy modificado.

References

- [1] Barros, L. C. de, Bassanezi, R. C. *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*. Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), (2006).